

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА З КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ТРАНСТРОПНИМ ВОЛОКНОМ

Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. М., д. т. н., доцент,
Богуславська А. М., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

gsm1212@ukr.net

У роботі отримано компоненти напружено-деформованого стану порожнистого циліндра з волокнистого композиту, що знаходиться під дією температурного та силового навантаження. При розв'язку задачі проведено гомогенізацію термопружних характеристик композиційного матеріалу. Матеріал матриці вважався ізотропним, а матеріал волокна – трансверсально-ізотропним. Розглядалися три осесиметричні схеми армування волокнами: в осевому, радіальному та тангенціальному напрямках. Проаналізовано вплив об'ємного вмісту волокна на напружено-деформований стан порожнистого циліндра.

Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, температурні коефіцієнти лінійного розширення, порожнистий циліндр.

ТЕРМОУПРУГАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ТРАНСТРОПНЫМ ВОЛОКНОМ

Клименко М. И., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. Н., д. т. н., доцент,
Богуславская А. М., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

gsm1212@ukr.net

В работе получены компоненты напряженно-деформированного состояния полого цилиндра из волокнистого композита, находящегося под воздействием температурной и силовой нагрузки. При решении задачи проведена гомогенизация термоупругих характеристик композиционного материала. Материал матрицы считался изотропным, а материал волокна – трансверсально-изотропным. Рассматривались три осесимметричные схемы армирования волокнами: в осевом, радиальном и тангенциальном направлениях. Проанализировано влияние объемного содержания волокна на напряженно-деформированное состояние полого цилиндра.

Ключевые слова: композиционный материал, матрица, волокно, температурные коэффициенты линейного расширения, полый цилиндр.

THERMAL TASK FOR A HYPER CYLINDER FROM TRANSSTROPIC FIBER COMPOSITE MATERIAL

Klymenko M. I., PhD in Math and Physics, Associate Professor,
Grebenuk S. M., PhD in Engineering, Associate Professor,
Boguslavskaya A.M., postgraduate student

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky st., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

gsm1212@ukr.net

In the technique, structural elements of composite materials are widely used. In this connection, it is necessary to take into account the changes in their physical and mechanical properties under the influence of temperature fields. For the study of such structures on the strength, it is necessary to take into account the effect of thermal stresses. For the study of such structures on the strength, it is necessary to take into account the effect of thermal stresses. Approximate methods are most often used to calculate them. In modern research, homogenization is widely used. It is based on solving special problems of the theory of elasticity on the periodicity cell of a composite. The application of this method in solving the problems of thermoelasticity of composites has its own peculiarities. In particular, the

application of the asymptotic averaging method for composite materials allows us to find effective coefficients of linear thermal expansion and technical constants of thermoelasticity of composites.

In solving problems of mechanics of a deformable solid for composite materials, in most cases the inhomogeneous composite material is modeled by a homogeneous transversally isotropic material with an isotropic plane perpendicular to the direction of the fiber.

In the article the stress-deformed state of a hollow cylinder from a fibrous composite under influence of temperature and force loading is received. In solving the problem, homogenization of the thermoelastic characteristics of the composite material was carried out. In this problem, the material of the matrix was considered isotropic, and the fiber material is transversally isotropic. Three axially symmetric schemes of fiber reinforcement were considered: in axial, radial and tangential directions. The solution of the problem for radial displacements is obtained. The maximum deformation of the cylinder occurs at radial reinforcement, and the minimum – at tangential. The influence of volumetric fiber content on the stress-strain state of the hollow cylinder is analyzed. It should be noted that the increase in the volumetric content of the fiber, more rigid compared to the matrices, for all three reinforcement schemes reduces the amount of deformations in the floor cylinder.

Key words: composite material, matrix, fiber, temperature coefficients of linear expansion, hollow cylinder.

ВСТУП

Широке використання конструкційних елементів з композитних матеріалів у техніці потребує необхідності врахування зміни їх фізико-механічних властивостей під дією температурних полів. Для дослідження таких конструкцій на міцність необхідно враховувати дію термонапружень. Для розрахунку термонапружень необхідною є інформація про коефіцієнти лінійного теплового розширення композиційних матеріалів. Для їх розрахунку найчастіше застосовують наближені методи [1-3]. У сучасних дослідженнях, спрямованих на визначення ефективних характеристик композитів, широко застосовується метод гомогенізації. Він ґрунтується на розв'язанні спеціальних задач теорії пружності на комірці періодичності композиту. Особливості застосування цього методу при розв'язанні задач термопружності композитів розглянуті у [4-6], зокрема, у [4] запропоновано варіант методу асимптотичного усереднення для композиційних матеріалів, що дозволяє знаходити ефективні коефіцієнти лінійного теплового розширення та технічні константи термопружності композитів. У монографії [7] здійснюється дослідження локальних полів напружень у задачах градієнтної термопружності для багат шарових композитів. Робота [8] спрямована на розробку математичних моделей прогнозування коефіцієнтів лінійного теплового розширення та теплопровідності для металовуглецевих композитів. Монографія [9] висвітлює основні математичні методи розв'язання задач термопружності композитів регулярної структури. У [10] досліджено ефективні термопружні характеристики композитів стохастичної структури. Методи визначення граничних навантажень для оболонкових конструкцій з композиційних матеріалів, що знаходяться в умовах температурних полів різних типів, розглянуто в [11]. Основні методи розв'язання квазістатичних, динамічних та зв'язаних задач термопружності розглянуті у [12, 13].

ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА З КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо температурну осесиметричну задачу при плоскій деформації. Об'єктом дослідження є порожнистий циліндр з волокнистого композиту. Вважатимемо, що циліндр знаходиться під внутрішнім тиском та защемленою зовнішньою циліндричною поверхнею. Загальний аналітичний розв'язок плоскої задачі для однорідного ортотропного матеріалу наведено в роботі [14].

Отримаємо розв'язок аналогічної температурної задачі для однорідного ортотропного матеріалу. За умови, що об'ємні сили відсутні, рівняння рівноваги в полярній системі координат для цієї задачі матиме вигляд:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (1)$$

Закон Гука для осесиметричної задачі з ортотропного матеріалу з урахуванням впливу температури T запишеться у вигляді:

$$\sigma_r = \frac{E_r \varepsilon_r + E_\theta \nu_{r\theta} \varepsilon_\theta}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}} - \frac{T(E_r \alpha_r + E_\theta \nu_{r\theta} \alpha_\theta)}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}, \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_r \nu_{\theta r} \varepsilon_r + E_\theta \varepsilon_\theta}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}} - \frac{T(E_r \nu_{\theta r} \alpha_r + E_\theta \alpha_\theta)}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}, \quad (3)$$

де E_r, E_θ – модулі пружності, α_r, α_θ – температурні коефіцієнти лінійного розширення та $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ – лінійні деформації ортотропного матеріалу в радіальному і тангенціальному напрямках відповідно; $\nu_{r\theta}, \nu_{\theta r}$ – коефіцієнти Пуассона.

Підставимо співвідношення Коші між деформаціями і радіальним переміщенням:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$

а також формули (2), (3) у рівняння рівноваги (1), отримуємо диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} E_r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{E_r}{r} \frac{du}{dr} - \frac{E_\theta}{r^2} u = \\ = \frac{dT}{dr} (E_r \alpha_r + E_\theta \nu_{r\theta} \alpha_\theta) + \frac{T(E_r \alpha_r (1 - \nu_{\theta r}) - E_\theta \alpha_\theta (1 - \nu_{r\theta}))}{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Оскільки температура T стала, то розв'язок рівняння запишеться у вигляді:

$$u_r = Ar \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + B / r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + \psi Tr, \quad (5)$$

де

$$\psi = \frac{E_r \alpha_r (1 - \nu_{\theta r}) - E_\theta \alpha_\theta (1 - \nu_{r\theta})}{E_r - E_\theta}.$$

Сталі A та B визначимо з граничних умов:

$$\sigma_r(r_1) = -q, \quad u_r(r_2) = 0, \quad (6)$$

де r_1, r_2 – внутрішній та зовнішній радіус циліндра, q – внутрішній тиск.

З першої рівності (6) маємо:

$$B = \frac{q(1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}) r_1 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + A r_1^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \left(\sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + \nu_{\theta r} \right) + T r_1 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} (\psi (1 + \nu_{\theta r}) - \alpha_r - \nu_{\theta r} \alpha_\theta)}{\left(\sqrt{E_r E_\theta} - E_\theta \nu_{r\theta} \right) \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - \nu_{\theta r}}.$$

Отриманий вираз підставимо в друге рівняння (6), отримаємо:

$$A = \frac{-q r_1 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} (1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r})}{\left(r_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} (\sqrt{E_r E_\theta} - E_\theta \nu_{r\theta}) + r_1^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} (\sqrt{E_r E_\theta} + E_\theta \nu_{r\theta}) \right)} +$$

$$r_1 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r} + 1} (\alpha_r + \nu_{\theta r} \alpha_\theta - \psi (1 + \nu_{\theta r})) - r_2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r} + 1} \psi \left(\sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - \nu_{\theta r} \right) + \frac{r_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \left(\sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - \nu_{\theta r} \right) + r_1^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \left(\sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + \nu_{\theta r} \right)}{T}. \quad (7)$$

Оскільки з (6) також випливає, що

$$B = -Ar_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - \psi Tr_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r} + 1},$$

то в результаті маємо:

$$u_r = A \left(r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - r_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} / r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \right) + \psi T \left(r - r_2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r} + 1} / r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \right). \quad (8)$$

Оскільки при розв'язанні задач механіки деформівного твердого тіла для композиційних матеріалів у більшості випадків неоднорідний композиційний матеріал моделюється однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом з площиною ізотропії, перпендикулярною напрямку волокна, визначимо термопружні сталі такого матеріалу.

Подовжній модуль E_1 , поперечний модуль E_2 та коефіцієнти Пуассона ν_{12} , ν_{23} обчислимо за формулами [16]:

$$\nu_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ)\nu_{12}^* + 2E_2^\circ f(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ + 2f\nu_{21}^*E_2^\circ(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}, \quad (9)$$

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2\nu_{12}^\circ\beta)E_1^*(1-f) + (\alpha - 2\nu_{12}^*\beta)E_1^\circ f}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ + 2f\nu_{21}^*E_2^\circ(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}, \quad (10)$$

$$E_2 = \frac{2\alpha E_2^*}{\left(\alpha \left((1 + \nu_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2) \right) + \delta + \eta_1\eta_2 \right)}, \quad (11)$$

$$\nu_{23} = \frac{\left(\alpha \left((1 + \nu_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2) \right) - (\delta + \eta_1\eta_2) \right)}{\left(\alpha \left((1 + \nu_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2) \right) + (\delta + \eta_1\eta_2) \right)}, \quad (12)$$

де

$$\alpha = E_2^*(1-f)(1-\nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(f(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)),$$

$$\beta = \nu_{21}^\circ E_2^*(1-f) + \nu_{21}^* f E_2^\circ, \quad \gamma = E_2^*(1-\nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(1+\nu_{23}^*), \quad \delta = f(1+\nu_{23}^*)(\gamma - 2E_2^\circ) + \gamma(1-\nu_{23}^*),$$

$$\eta_1 = 2E_1^\circ E_1^*(f-1) \cdot f \left(\nu_{21}^* \gamma - 2\nu_{21}^\circ E_2^* \right)^2, \quad \eta_2 = 1 / \left(E_2^* \left(\alpha \left(E_1^\circ f + E_1^*(1-f) \right) - 2\beta \left(\nu_{12}^* E_1^\circ f + \nu_{12}^\circ E_1^*(1-f) \right) \right) \right),$$

$$\chi_1 = \frac{(d_{11} - d_{21})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \quad \chi_2 = \frac{(d_{22} - d_{12})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \quad d_{11} = E_2^\circ \left((4f - 3 - 1/f^2)(1 + \nu_{23}^*) - \right.$$

$$\left. - 4f(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right) - E_2^* \left((4f - 1/f^2 - 3)(1 + \nu_{23}^\circ) + 4(1/f^2 - f)(1 - \nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{12} = E_2^\circ \left((1/f - f)(1 + \nu_{23}^*) - 4(1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) - E_2^* \left((1/f - f)(1 + \nu_{23}^\circ) + 4(1 - 1/f)(1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{21} = E_2^\circ \left(4f(1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + (2f + 1/f^2 - 3)(1 + \nu_{23}^*) \right) - E_2^* \left((2f + 1/f^2 - 3)(1 + \nu_{23}^\circ) + \right.$$

$$\left. + 4(f - 1/f^2)(1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right), \quad d_{22} = E_2^\circ \left((2 - f - 1/f)(1 + \nu_{23}^*) - 4(1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) -$$

$$- E_2^* \left((2 - f - 1/f)(1 + \nu_{23}^\circ) + 4(1/f - 1)(1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right).$$

Для розрахунку температурних коефіцієнтів лінійного розширення композиту з трансверсально-ізотропним волокном та ізотропною матрицею використовуємо формули [17]:

$$\alpha_{11} = \frac{\gamma f d^*}{(d^\circ + f(d^* - d^\circ))(d_1 - d_2)} + \frac{2fE_2^\circ \nu^* (\alpha_{22}^\circ - \alpha^*)}{d_1 - d_2} + \alpha^*,$$

$$\alpha_{22} = -\frac{\gamma f}{(d_1 - d_2)(d^\circ + f(d^* - d^\circ))} \left(2\nu_{21}^\circ (1 - f) + \frac{\nu^* (2fE_2^\circ + d_1 - d_2)}{E^*} \right) + \frac{2fE_2^\circ (\alpha^* - \alpha_{22}^\circ)}{d_1 - d_2} + \alpha^*, \quad (13)$$

де

$$\gamma = \frac{2\nu_{21}^\circ d_1 (\alpha_{22}^\circ - \alpha^*)}{(1 - \nu_{23}^\circ)} + (d_1 - d_2) \alpha_{11} + 2\nu^* f E_2^\circ (\alpha^* - \alpha_{22}^\circ) - \alpha^* (d_1 - d_2),$$

$$d_1 = E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^\circ), \quad d_2 = E_2^\circ (f(1 - \nu^*) + (1 + \nu^*)),$$

$$d^\circ = \frac{E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) - E_2^\circ (f(1 - \nu^* - 2\nu_{12}^\circ \nu^*) + (1 + \nu^*))}{E_1^\circ},$$

$$d^* = \frac{E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^* \nu_{12}^\circ) - E_2^\circ (f(1 - \nu^* - 2(\nu^*)^2) + (1 + \nu^*))}{E^*}.$$

Розв'яжемо задачу деформування порожнистого циліндра при різних схемах армування. Для осесиметричної задачі можливі три випадки армування:

– у тангенціальному напрямі, тоді у формулах (7), (8) необхідно прийняти $E_r = E_2$, $E_\theta = E_1$, $\nu_{r\theta} = \nu_{21}$, $\nu_{\theta r} = \nu_{12}$, $\alpha_r = \alpha_2$, $\alpha_\theta = \alpha_1$;

– в осьовому напрямі, тоді у формулах (7), (8) необхідно прийняти $E_r = E_2$, $E_\theta = E_3$, $\nu_{r\theta} = \nu_{23}$, $\nu_{\theta r} = \nu_{32}$, $\alpha_r = \alpha_2$, $\alpha_\theta = \alpha_3$;

– у радіальному напрямі, тоді у формулах (7), (8) необхідно прийняти $E_r = E_1$, $E_\theta = E_2$, $\nu_{r\theta} = \nu_{12}$, $\nu_{\theta r} = \nu_{21}$.

Розв'яжемо задачу для композитних полімерних матеріалів на основі високомодульних вуглецевих волокон [15]. Символом $^\circ$ позначимо термопружні сталі, які відносяться до матеріалу волокна, а символом $*$ – до матеріалу матриці. Матеріал волокна: модуль пружності $E_1^\circ = 225,63$ ГПа, $E_2^\circ = 7,55$ ГПа, коефіцієнти Пуассона $\nu_{12}^\circ = 0,3$, $\nu_{21}^\circ = \frac{\nu_{12}^\circ \cdot E_2^\circ}{E_1^\circ}$,

$\nu_{23}^\circ = 0,2$, температурні коефіцієнти лінійного розширення $\alpha_{11}^\circ = 0,5 \cdot 10^{-6} (^\circ\text{C})^{-1}$,

$\alpha_{22}^{\circ} = \alpha_{33}^{\circ} = 19 \cdot 10^{-6} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$. Матеріал матриці: модуль пружності $E_1^* = E_2^* = 3$ ГПа, коефіцієнти Пуассона $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = \nu_{23}^* = 0,35$, температурні коефіцієнти лінійного розширення $\alpha_{11}^* = \alpha_{22}^* = \alpha_{33}^* = 45 \cdot 10^{-6} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$.

Внутрішній радіус прийемо рівним $r_1 = 0,1$ м, зовнішній радіус $r_2 = 0,15$ м, внутрішній тиск $q = 0,2$ МПа, температуру $T = 100$ °С. Підставивши константи складових композита у формули (9)-(13) та скориставшись формулою (8), отримаємо залежності для різних типів армування, зображені відповідно на рис. 1, 2 та 3.

Отже, отримано аналітичний розв’язок задачі про напружено-деформований стан порожнистого циліндру з волокнистого композиту при дії температурного та силового навантаження. З аналізу розв’язків трьох осесиметричних задач для різних схем армування волокнами – в осевому, радіальному та тангенціальному напрямку – можна зазначити, що максимальне деформування циліндра відбувається при радіальному армуванні, а мінімальне – при тангенціальному. Збільшення об’ємного вмісту волокна, більш жорсткого порівнянно з матрицею, при всіх трьох схемах армування зменшує величину деформацій у порожнистому циліндрі.

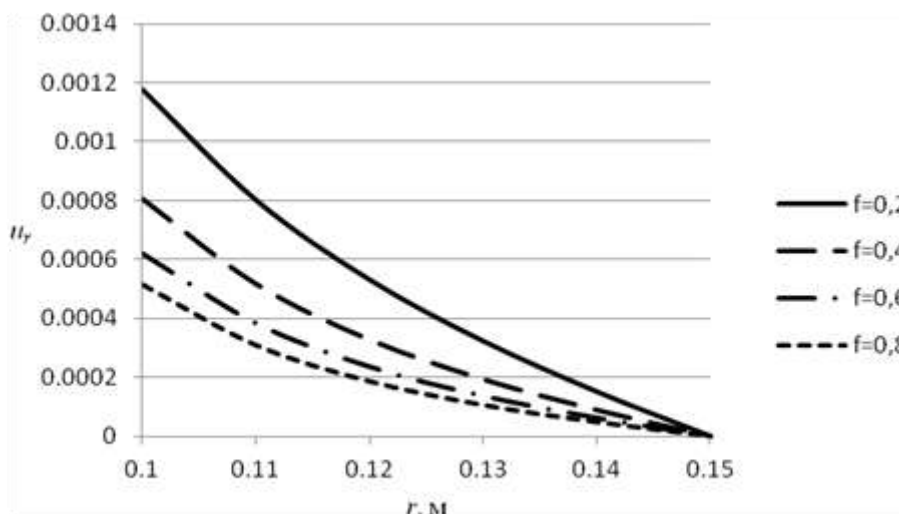


Рис. 1. Зміна функції u_r від об’ємного вмісту волокна f при тангенціальному армуванні

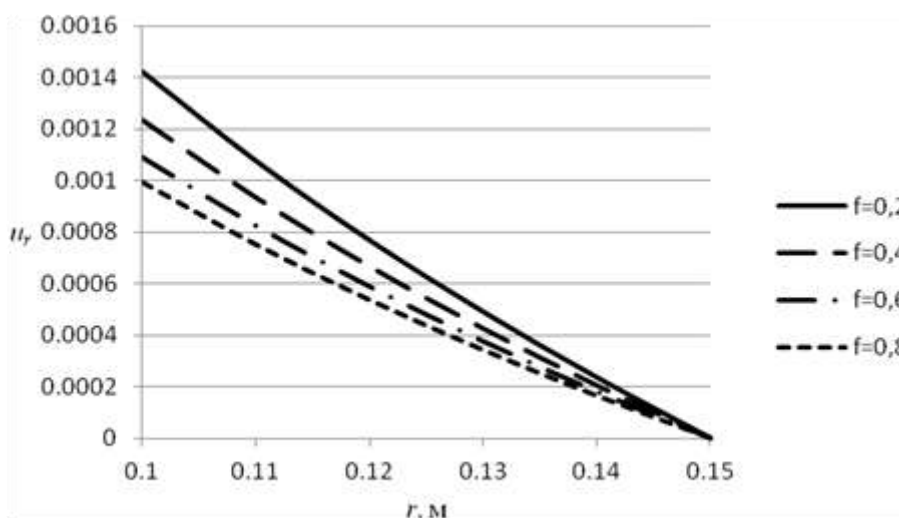


Рис. 2. Зміна функції u_r від об’ємного вмісту волокна f при армуванні вздовж осі

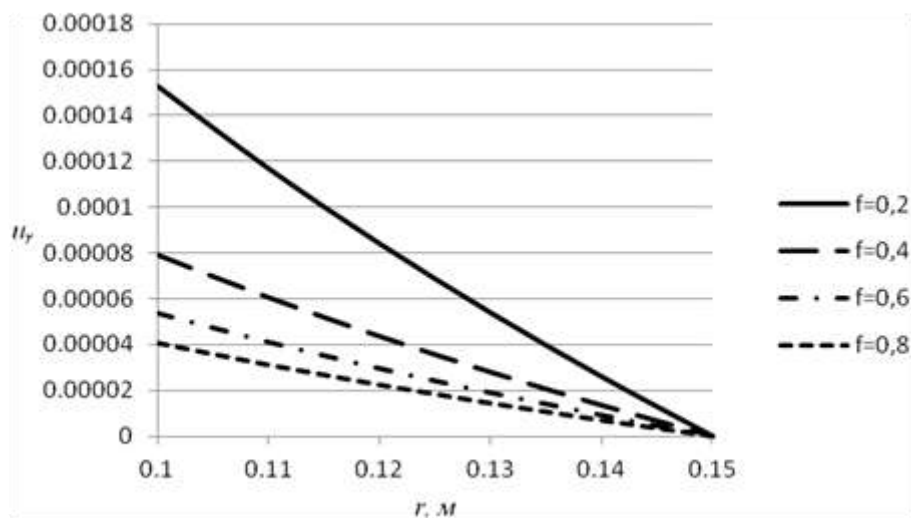


Рис. 3. Зміна функції u_r від об'ємного вмісту волокна f при радіальному армуванні

ЛІТЕРАТУРА

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. Москва: Мир, 1982. 336 с.
2. Зарубин В. С., Кувыркин Г. И., Савельева И. Ю. Оценка методом самосогласования температурного коэффициента линейного расширения с дисперсными включениями. *Наука и образование*, 2015. № 2. С. 197 – 215.
3. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. Пространственно-армированные композиционные материалы. Москва: Машиностроение, 1987. 223 с.
4. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Численное моделирование теплового расширения композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2015. Вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1452.html>. (Дата звернення: 15.11.2017).
5. Димитриенко Ю. И., Кашкаров А. И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки*. 2002. № 2. С. 95 – 108.
6. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
7. Лурье С. А., Дудченко А. А., Нгуен Д. К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры. *Электронный журнал «Труды МАИ»*. Вып. 75. URL: www.mai.ru/science/trudy. (Дата звернення: 14.11.2017).
8. Скачков В. А., Баглюк Г. А., Веденникова О. С., Иванов В. И. О прогнозировании коэффициентов теплопроводности и линейного теплового расширения многокомпонентных композитов. *Проблемы трибологии*. 2012. № 2. С. 108 – 111.
9. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. Москва: Едиториал УРСС, 2003. 376 с.
10. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикун Е. И., Назаренко Л. В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. Т 3. Механика композитов. Киев: Наукова думка, 1993. 390 с.
11. Белозеров Л. Г., Киреев В. А. Композитные оболочки при силовых и температурных воздействиях. Москва: Физматлит, 2003. 388 с.
12. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термоупругости. Киев: Наукова думка, 1982. 260 с.
13. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 215 с.
14. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Киев: Наук. думка, 2002. 655 с.

15. Крегерс А. Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов. *Механика композит. материалов*. 1988. № 3. С. 433 – 441.
16. Гребенюк С. М. Напряжено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів: автореф. дис. д-ра техн. наук. Запоріжжя, 2016. 35 с.
17. Клименко М. И., Гребенюк С. Н., Богуславская А. М. Термомеханические характеристики волокнистого композиционного материала с изотропной матрицей и трансверсально-изотропным волокном. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 179 – 189.

REFERENCES

1. Kristensen, R. (1982). Introduction to the mechanics of composites. Moscow: Mir.
2. Zarubin, V. S., Kuvyrkin, G. I. & Saveleva, I. Yu. (2015). Estimation by the method of self-agreement of the temperature coefficient of linear expansion with dispersed inclusions. *Nauka i obrazovanie*, No. 2, pp. 197-215 (in Russian).
3. Tarnopolskiy, Yu. M., Zhigun, I. G. & Polyakov, V. A. (1987). Space-reinforced composite materials. Moscow: Mashinostroenie.
4. Dimitrienko, Yu. I., Gubareva, E. A. & Sborschikov, S. V. (2015). Numerical modeling of thermal expansion of composite materials on the basis of the asymptotic averaging method. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, Iss. 12. Retrieved from: <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1452.html>.
5. Dimitrienko, Yu. I. & Kashkarov, A. I. (2002). Finite Element Method for Calculating Effective Characteristics of Space-Armored Composites. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Estestvennyie nauki*, No. 2, pp. 95-108 (in Russian).
6. Pobedrya, B. E. (1984). Mechanics of composite materials. Moscow: Izd-vo MGU.
7. Lure, S. A., Dudchenko, A. A. & Nguen, D. K. Gradient model of thermoelasticity for a layered composite structure. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, Iss. 75. Retrieved from: <https://www.mai.ru/science/trudy>.
8. Skachkov, V. A., Baglyuk, G. A., Vedennikova, O. S. & Ivanov, V. I. (2012). On prediction of coefficients of thermal conductivity and linear thermal expansion of multicomponent composites. *Problemi tribologiyi*, No. 2, pp. 108 – 111 (in Russian).
9. Bardzokas, D. I. & Zobnin, A. I. (2003). Mathematical modeling of physical processes in composite materials of periodic structure. Moscow: Editorial URSS.
10. Horoshun, L. P., Maslov, B. P., Shikula, E. I. & Nazarenko, L. V. (1993). Statistical mechanics and effective properties of materials. (vol. 3) *Mechanics of composites*. Kiev: Naukova dumka.
11. Belozеров, L. G. & Kireev, V. A. (2003). Composite shells under power and temperature influences. Moscow: Fizmatlit.
12. Karnauhov, V. G. (1982). Related problems of thermoelasticity. Kiev: Naukova dumka.
13. Kovalenko, A. D. Thermoelasticity. Kiev: Vischa shkola.
14. Kirichevskiy, V. V. Finite Element Method in the Mechanics of Elastomers. Kiev: Nauk. dumka.
15. Kregers, A. F. (1988). Mathematical modeling of thermal expansion of spatially reinforced composites. *Mehanika kompozit. materialov*, No. 3, pp. 433-441 (in Russian).
16. Grebenyuk, S. M. (2016). Stress-deformed state of spatial structures on the basis of homogenization of fibrous composites: author's abstract. (Extended abstract of Doctor thesis). Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine (in Ukrainian).
17. Klimenko, M. I., Grebenyuk, S. N. & Boguslavskaya, A. M. (2017). Thermomechanical characteristics of a fibrous composite material with isotropic matrix and transversally isotropic fiber. *Vіsник Zaporізького національного університету. Фізико-математичні науки*, No. 1, pp. 179-189 (in Ukrainian).