4. Ovchinnikov, I. G. & Petrov, V. V. (1983). Mathematical modeling of the interaction of structural elements with aggressive environments. Deformirovaniye materialov i elementov konstruktsiy v agressivnykh sredakh, Saratov, pp. 3-11.
5. Dolinsky, V. M. (1975). Bending of thin plates subject to corrosive wear. Dinamika i prochnost' mashin, No. 21, pp. 16-19.
6. Dolinsky, V. M. (1976). Calculation of elements of structures subject to uniform corrosion. Issledovaniya po teorii obolochek, No. 7, pp. 37-42.
7. Golberg, D. E. (1989). Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA, USA.

УДК: 539.3:539.37:535.55

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРОДОВЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КРУГЛИХ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Кудін О. В., к. ф.-м. н., Борисовська Ю. О., аспірант

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

avk256@gmail.com

Запропоновано рівняння рівноваги тришарових круглих пластин симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами і нелінійно-пружним ізотропним заповнювачем. Описано методику розв'язання задачі визначення деформованого стану, яка включає послідовне застосування методу Рітца та методу продовження розв'язку за параметром. Як чисельний приклад, розглянуто задачу визначення деформованого стану тришарової круглої пластини в нелінійно-пружній за Каудерером постановці, виконано порівняння отриманого розв'язку з іншими відомими дослідженнями.

Ключові слова: тришарова симетрична пластина, кругла пластина, нелінійно-пружний заповнювач, метод продовження розв'язку за параметром.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРУГЛЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Кудин А. В., к. ф.-м. н., Борисовская Ю. А., аспирант

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

avk256@gmail.com

Предложены уравнения равновесия трехслойных круглых пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и нелинейно-упругим изотропным заполнителем. Описана методика решения задачи определения деформированного состояния, которая включает последовательное применение метода Ритца и метода продолжения решения по параметру. В качестве численного примера, рассмотрена задача определения деформированного состояния трехслойной круглой пластины в нелинейно-упругой по Каудереру постановке, выполнено сравнение полученного решения с другими известными работами.

Ключевые слова: трёхслойная симметричная пластина, круглая пластина, нелинейно-упругий заполнитель, осесимметричный изгиб, метод продолжения решения по параметру.

STRAIN DEFINITION OF SANDWICH CIRCULAR PLATES WITH NONLINEAR ELASTIC CORE USING PARAMETER CONTINUATION METHOD

Kudin O. V., Borysovska Ju. O.

Zaporizhzhya National University,
Zhykovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

avk256@gmail.com

Composite materials (composites) and layered materials are one of the great technological advances of modern engineering. By the term layered materials we usually refer to materials that are combinations of two or more organic or inorganic layers. Layered materials allow to optimize some physical and mechanical properties of constructions. Sandwich structures are widely used in the aircraft and shipbuilding industries, the aerospace industry, civil engineering, electronics and other industries. Thus the stress-strain state analysis of sandwich structural elements is urgent. Herein study of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material has been investigated by parameter continuation methods. Currently, there are many experimental and theoretical works devoted to sandwich structures. Well known articles reviews devoted to sandwich structures. However, bending of circular sandwich plates with nonlinear elastic core still less investigated. In this paper it is derived the total potential energy equation of symmetric sandwich plates bending with isotropic face sheets and nonlinear elastic core material by H. Kauderer. The problem of developing effective methods for determining the stress-strain state of sandwich structural elements is urgent. There is a need in summarizing the classical theories using the improved models, reflecting the behavior of modern materials.

The paper describes bending equations of circular sandwich plates with isotropic face sheets and nonlinear elastic core. Parameter continuation method is described. Linear equations are solved by Ritz method. There are compared results of the analytical model with results of other works, using two problems. The effect of accounting nonlinear elastic core material on the bending is described.

The introduction section of the article contains an overview of previous researches.

The first section contains equation of total potential energy of circular sandwich plate.

Parameter continuation method of sandwich circular plates with nonlinear elastic core is described in the second section.

Results of the developed model are compared with results of other scientific researches.

Conclusions and prospects for the future research are represented in the last section. Small amount of computation is an advantage of the developed model.

Prospects for further research related to the consideration of the problems of nonlinear dynamics and stability of sandwich structural elements.

Key words: sandwich symmetrical plate, circular plate, nonlinear-elastic core, buckling load, parameter continuation method.

ВСТУП

Розробка підходів до розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих елементів конструкцій є досить актуальною задачею. Це зумовлено широким застосуванням, зокрема, тришарових пластин та оболонок в авіа- та суднобудуванні, космічній промисловості, цивільному будівництві, радіоелектроніці та інших галузях народного господарства. Актуальною є проблема розробки ефективних підходів до розв’язання задач механіки деформівного твердого тіла з урахуванням фізичної нелінійності матеріалів шарів.

На даний момент опубліковано значну кількість досліджень з теорії тришарових пластин та оболонок. Одними з перших публікацій в області моделювання тришарових конструкцій є роботи [21, 22, 24], які присвячено визначенню деформування та критичних навантажень тришарових пластин.

Посилання на роботи з моделювання тришарових елементів конструкцій можна знайти в оглядах [6, 13, 23]. Детальний аналіз класичних та уточнених моделей розрахунку тришарових і багатошарових конструкцій проводиться в статтях [14, 15, 17, 18, 20].

У більшості робіт з розрахунку тришарових елементів конструкцій розглядається той чи інший варіант лінійної теорії. Однак, існує широка область деформацій, у якій геометрична лінеаризація ще зберігає значення, оскільки вона забезпечує точність, що задовольняє технічним вимогам, тоді як лінійний закон пружності вже не може бути застосований. Для багатьох конструкційних матеріалів (високоміцних сталей, сплавів кольорових металів, полімерних матеріалів і ін.) зі збільшенням інтенсивності зовнішнього навантаження діаграма залежності між напруженнями і деформаціями відхиляється від лінійної. У такому випадку формулюється нелінійний закон пружності, наприклад, в формі Г. Каудерера [5].

Постановці і розв'язанню нелінійно-пружних задач присвячені монографії [5, 11]. Задачі згину й стійкості тришарових пластин, виконаних з нелінійно-пружних матеріалів, досліджуються в роботах [2, 3, 7, 9, 10, 19].

Отже, виходячи з аналізу проблемної області, можна зробити висновок, що порівняно невелика кількість робіт присвячена моделюванню шаруватих елементів конструкцій з урахуванням фізично нелінійних матеріалів. Це пов'язано з необхідністю розв'язання достатньо складних систем нелінійних диференціальних рівнянь. Одним з методів розв'язання таких систем може бути метод продовження розв'язку за параметром та його варіації, більш докладно про застосування цього методу в нелінійних задачах пластин та оболонок йдеться в роботах [1, 8, 12, 16].

У статті запропоновано підхід на базі методу Рітца та методу послідовних навантажень В.В. Петрова для визначення деформованого стану круглої тришарової пластини з нелінійно-пружним заповнювачем під дією розподіленого поперечного навантаження.

ФУНКЦІОНАЛ ПОВНОЇ ЕНЕРГІЇ КРУГЛОЇ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ

Розглядається задача визначення деформованого стану круглої тришарової пластини під дією розподіленого поперечного навантаження q. Вважається, що зовнішні шари однакової товщини δ виготовлені з ізотропного матеріалу з модулем Юнга E, коефіцієнтом Пуассона μ та підкоряються закону Гука, приймаються гіпотези Кірхгофа. Середній шар товщини $2h$ виготовлено з нелінійно-пружного у формі Г. Каудерера ізотропного матеріалу та приймається гіпотеза про лінійний закон розподілення тангенціальних напружень по товщині заповнювача.

Напруження в середньому шарі визначається виразами [5, 19]:

$$\tilde{\sigma}_r = 3\tilde{K}\left(1+\chi_2\varepsilon_0^2\right)\varepsilon_0 + 2\tilde{G}\left(1+\gamma_2\psi_0^2\right)\left(\tilde{\varepsilon}_r - \varepsilon_0\right),$$

$$\tilde{\sigma}_\varphi = 3\tilde{K}\left(1+\chi_2\varepsilon_0^2\right)\varepsilon_0 + 2\tilde{G}\left(1+\gamma_2\psi_0^2\right)\left(\tilde{\varepsilon}_\varphi - \varepsilon_0\right), \tag{1}$$

$$\tilde{\tau}_{r\varphi} = \tilde{G}\left(1+\gamma_2\psi_0^2\right)\tilde{\varepsilon}_{r\varphi}, \quad \tilde{\tau}_{rz} = \tilde{G}\left(1+\gamma_2\psi_0^2\right)\tilde{\varepsilon}_{rz}, \quad \tilde{\tau}_{\varphi z} = \tilde{G}\left(1+\gamma_2\psi_0^2\right)\tilde{\varepsilon}_{\varphi z},$$

де $\tilde{G}$, $\tilde{K}$ – модулі зсуву та об'ємної пружності матеріалу; ε_0, ψ_0 – середнє відносне подовження і інтенсивність деформацій зсуву.

Параметр γ_2 характеризує зміну форми елемента конструкції в нелінійно-пружній стадії деформації і визначається експериментально [5, 11]; параметр χ_2 характеризує зміну об'єму елемента, далі вважаємо $\chi_2 = 0$.

Основні рівняння теорії пружності для даної задачі наведено в статті [19]. Наведемо далі функціонал повної енергії в загальному вигляді відносно невідомих функцій: переміщення в площині пластини $u(r)$ та прогину $w(r)$

$$\mathrm{E} = \int_0^{2\pi}\int_0^R \left(\int_h^{h+\delta} \frac{EI1\left(\dfrac{1}{r}+\mu I2\right)}{2r\left(1-\mu^2\right)} + \frac{EI2\left(\dfrac{\mu I1}{r}+I2\right)}{2\left(1-\mu^2\right)} dz + \int_{-h-\delta}^{-h} \frac{EI3\left(\dfrac{1}{r}+\mu I4\right)}{2r\left(1-\mu^2\right)} + \frac{EI4\left(\dfrac{\mu I3}{r}+I2\right)}{2\left(1-\mu^2\right)} dz + \right.$$

$$+\int_{-h}^{h}\frac{I5}{8rh}\Big(2\tilde{G}I12\big(I13\gamma_2+1\big)+3\tilde{K}I14\Big)+\frac{I10}{2}\Big(2\tilde{G}I15\big(I16\gamma_2+1\big)+3\tilde{K}I14\Big)+ \tag{2}$$

$$\left.+\frac{\tilde{G}}{32h^2}I8^2\left(I13\gamma_2+1\right)dz-qw(r)\right)rdrd\varphi\,.$$

В (2) використовуються наступні позначення

$$A1=\frac{2}{3}\frac{9\tilde{K}^2-4\tilde{G}^2}{\left(3\tilde{K}+\tilde{G}\right)\left(\tilde{K}+2\tilde{G}\right)},\quad I1=u(r)+\frac{dw(r)}{dr}\left(z-h-\frac{\delta}{2}\right),\quad I2=\frac{d^2w(r)}{dr^2}\left(z-h-\frac{\delta}{2}\right)+\frac{du(r)}{dr},$$

$$I3=-u(r)+\frac{dw(r)}{dr}\left(z+h+\frac{\delta}{2}\right),\quad I4=\frac{d^2w(r)}{dr^2}\left(z+h+\frac{\delta}{2}\right)-\frac{du(r)}{dr},\quad I5=-2z\delta\frac{dw(r)}{dr}+4zu(r),$$

$$I6=\frac{z\delta}{2h}\frac{d^2w(r)}{dr^2},\quad I7=\frac{du(r)}{dr}\left(1-\frac{h-z}{h}\right),\quad I8=\frac{dw(r)}{dr}\left(4h-2\delta\right)+4u(r),$$

$$I9=\frac{I5}{4rh}-I6+I7,\quad I10=-I6+I7,\quad I11=I6+I7,\quad I12=I5+\frac{A1}{6}I9+\frac{I11}{3}, \tag{3}$$

$$I13=\frac{I5^2}{18r^2h^2}-\frac{2I11I5}{9rh}+\frac{A1}{9rh}I5I9+\frac{4A1}{9}I9I10+\frac{I8^2}{24h^2}+\frac{8}{9}I10^2+\frac{2}{9}A1^2I9^2,$$

$$I14=\frac{I5}{12rh}-\frac{A1}{6}I9+\frac{1}{3}I10,\quad I15=-\frac{I5}{12rh}+\frac{A1}{6}I9+\frac{2}{3}I10,\quad I16=I13+\frac{2}{9rh}I5\big(I11-I10\big).$$

В якості апроксимацій переміщень відповідно методу Рітца обрано наступні координатні функції.

Для вільного опирання:

$$w(r)=\sum_{i=1}^{n}H_{i-1}\cos\left(\frac{(2i-1)r\pi}{2R}\right),\quad u(r)=\sum_{i=1}^{n}L_{i-1}\sin\left(\frac{(2i-1)r\pi}{2R}\right). \tag{4}$$

Для защемлення на контурі:

$$w(r)=H_0+\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2\sum_{i=1}^{n}H_i\left(\frac{r}{R}\right)^{2i},\quad u(r)=L_0+\left(1-\frac{r}{R}\right)\sum_{i=1}^{n}L_i\left(\frac{r}{R}\right)^{2i+1}. \tag{5}$$

Тут H_i, L_i, $i=\overline{0,n}$ – параметри, які визначаються за методом Рітца.

Після підстановки (4) або (5) в функціонал (2) та диференціювання за параметрами координатних функцій, отримаємо в загальному випадку систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно параметрів

$$f_i\left(H_i,L_i,q\right)=\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial H_i}=0,\quad g_i\left(H_i,L_i,q\right)=\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial L_i}=0\quad (i=\overline{1,n}). \tag{6}$$

Для розв'язання системи (6) застосовується метод продовження розв'язку за параметром, а саме його варіант – метод послідовних навантажень, який був запропонований В. В. Петровим [8] для розв'язку нелінійних рівнянь теорії пластин та оболонок.

Згідно методу послідовних навантажень, система (6) неявно задає залежність виду $H_i = H_i(q)$, $L_i = L_i(q)$. Після диференціювання системи (6) за параметром q отримаємо систему диференціальних рівнянь, лінійних відносно $\frac{dH_i}{dq}$ і $\frac{dL_i}{dq}$

$$\begin{gathered} \frac{df_i}{dH_i}\frac{dH_i}{dq} + \frac{df_i}{dL_i}\frac{dL_i}{dq} + \frac{df_i}{dq} = 0, \\ \frac{dg_i}{dH_i}\frac{dH_i}{dq} + \frac{dg_i}{dL_i}\frac{dL_i}{dq} + \frac{dg_i}{dq} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

У початковому ненавантаженому стані параметри координатних функцій (4), (5) дорівнюють нулю $H_i(0) = L_i(0) = 0$.

Згідно з методом послідовних навантажень, розв'язок системи (6) визначається наступною розрахунковою схемою

$$H_{i,j+1} = H_{i,j} + \Delta H_{i,j}, \quad L_{i,j+1} = L_{i,j} + \Delta L_{i,j}, \quad q_{j+1} = q_j + \Delta q_j, \tag{8}$$

де Δq_j – крок навантаження, який задається, а $\Delta H_{i,j}$ і $\Delta L_{i,j}$ визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{gathered} \frac{df_i}{dH_i}\left(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j\right)\Delta H_{i,j} + \frac{df_i}{dL_i}\left(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j\right)\Delta L_{i,j} + \frac{df_i}{dq_j}\left(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j\right)\Delta q_j = 0, \\ \frac{dg_i}{dH_i}\left(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j\right)\Delta H_{i,j} + \frac{dg_i}{dL_i}\left(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j\right)\Delta L_{i,j} + \frac{dg_i}{dq_j}\left(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j\right)\Delta q_j = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Розрахункова схема (8), (9) має порядок точності $O\left(\Delta q_j^2\right)$. В розрахунковій схемі порядку точності $O\left(\Delta q_j^3\right)$ параметри $\Delta H_{i,j}$ і $\Delta L_{i,j}$ визначаються з системи (9) і використовуються для обчислення коефіцієнтів рівнянь (10) відносно параметрів $\Delta\overline{H}_{i,j}$ і $\Delta\overline{L}_{i,j}$ [4]

$$\begin{gathered} \frac{df_i}{dH_i}\left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j\right)\Delta\overline{H}_{i,j} + \frac{df_i}{dL_i}\left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j\right)\Delta\overline{L}_{i,j} + \\ + \frac{df_i}{dq_j}\left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j\right)\Delta q_j = 0, \\ \frac{dg_i}{dH_i}\left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j\right)\Delta\overline{H}_{i,j} + \frac{dg_i}{dL_i}\left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j\right)\Delta\overline{L}_{i,j} + \\ + \frac{dg_i}{dq_j}\left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j\right)\Delta q_j = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Невідомі параметри на подальших ітераціях визначаються за формулами

$$H_{i,j+1} = H_{i,j} + \Delta\overline{H}_{i,j}, \quad L_{i,j+1} = L_{i,j} + \Delta\overline{L}_{i,j}, \quad q_{j+1} = q_j + \Delta q_j. \tag{11}$$

У літературі також представлені розрахункові схеми більш високого порядку точності [4].

ЧИСЕЛЬНІ ПРИКЛАДИ

Як чисельний приклад, розглянемо задачу визначення деформованого стану круглої тришарової пластини з такими параметрами: товщина середнього шару $2h = 16 \cdot 10^{-3}$ м, товщина зовнішніх шарів $\delta = 1 \cdot 10^{-3}$ м, радіус пластини $R = 0,4$ м; модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона зовнішніх шарів – $G = 8 \cdot 10^4$ МПа та $\mu = 0,27$ відповідно, модуль зсуву та модуль об’ємної деформації заповнювача – $\tilde{G} = 2,77 \cdot 10^4$ МПа, $\tilde{K} = 6 \cdot 10^4$ МПа (сплав алюмінію Д16Т).

При врахуванні нелінійної пружності матеріалу Д16Т приймаємо наступні значення коефіцієнтів: $\gamma_2 = -3,878 \cdot 10^5$, $\chi_2 = 0$ [5].

У таблиці 1 наведено значення прогину в центрі пластини, які отримані в роботі [19] за допомогою методу малого параметра та наступного аналітичного розв’язку систем лінійних диференціальних рівнянь. Наводяться дані для лінійного та нелінійно-пружного випадку.

Таблиця 1 – Прогин в центрі пластини. Метод малого параметра

Випадок	$w_{max} = w(0)$, 10^{-3} м							
	Вільне опирання				Защемлення			
	q, МПа				q, МПа			
	0,05	0,07	0,09	0,11	0,05	0,07	0,09	0,11
Лінійний	1,609	2,253	2,897	3,541	0,391	0,547	0,704	0,860
Нелінійний	1,622	2,289	2,976	3,691	0,396	0,560	0,731	0,910

Значення прогинів таблиці 1 далі використовуються для верифікації результатів, отриманих за допомогою методу Рітца та методу послідовних навантажень.

Значення таблиці 2 ілюструють збіжність методу Рітца при різній кількості членів рядів (4), (5).

Таблиця 2 – Прогин в центрі пластини. Метод Рітца, лінійний випадок

Кількість членів рядів (4), (5)	$w_{max} = w(0)$, 10^{-3} м							
	Вільне опирання				Защемлення			
	q, МПа				q, МПа			
	0,05	0,07	0,09	0,11	0,05	0,07	0,09	0,11
3	1,588	2,224	2,859	3,495	0,387	0,541	0,697	0,851
4	1,593	2,228	2,867	3,501	0,388	0,544	0,699	0,855
5	1,593	2,230	2,865	3,505	0,391	0,547	0,704	0,860
6	1,593	2,230	2,868	3,506	0,391	0,547	0,704	0,860
7	1,593	2,230	2,868	3,506	0,391	0,548	0,705	0,861
8	1,593	2,230	2,868	3,506	0,391	0,548	0,705	0,861

Таблиця 3 – Прогин в центрі пластини. Метод послідовних навантажень, нелінійний випадок

Кількість членів рядів (4), (5)	$w_{\max} = w(0)$, 10^{-3} м							
	Вільне опирання				Защемлення			
	q , МПа				q , МПа			
	0,05	0,07	0,09	0,11	0,05	0,07	0,09	0,11
3	1,599/ 1,599	2,254/ 2,255	2,926/ 2,927	3,622/ 3,624	0,388/ 0,388	0,544/ 0,544	0,701/ 0,702	0,861/ 0,861
4	1,604/ 1,605	2,261/ 2,262	2,936/ 2,937	3,635/ 3,637	0,389/ 0,389	0,546/ 0,546	0,704/ 0,704	0,864/ 0,861
5	1,611/ 1,612	2,272/ 2,273	2,950/ 2,951	3,652/ 3,655	0,392/ 0,392	0,550/ 0,549	0,709/ 0,709	0,867/ 0,867
6	1,610/ 1,610	2,270/ 2,271	2,947/ 2,948	3,649/ 3,652	0,392/ 0,392	0,550/ 0,550	0,708/ 0,708	0,867/ 0,867
7	1,645/ 1,645	2,319/ 2,320	3,013/ 3,014	3,733/ 3,735	0,392/ 0,392	0,550/ 0,550	0,710/ 0,709	0,870/ 0,871
8	1,649/ 1,649	2,325/ 2,326	3,021/ 3,023	3,745/ 3,747	0,392/ 0,392	0,550/ 0,550	0,709/ 0,709	0,870/ 0,871

Так, в чисельнику табл. 3 наведено значення, розраховані за рівняннями (8), (9), в знаменнику – (10), (11).

ВИСНОВКИ

Отже, у нашій роботі розв’язано задачу визначення деформованого стану тришарової круглої пластини симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами та нелінійно-пружним ізотропним матеріалом заповнювача за допомогою підходу, який базується на використанні методу Рітца та методу продовження розв’язку за параметром. Результати розрахунків, отриманих з використанням цього підходу, порівнюються з аналітичними розв’язками за методом малого параметра, які опубліковано в попередніх роботах.

Результати порівняння свідчать про задовільну збіжність методів як у лінійній, так і в нелінійній постановці. Так, при вільному опиранні контура пластини спостерігається відхилення значень прогину в центрі пластини до 2% від аналітичних розв’язків, при защемленні – до 4%. Показано, що необхідна порівняно невелика кількість членів координатних функцій метода Рітца для досягнення достатньої точності метода послідовних навантажень (від п’яти до восьми). Використано дві розрахункові схеми методу послідовних навантажень з порядками точності відповідно $O\left(\Delta q_j^2\right)$ та $O\left(\Delta q_j^3\right)$, однак, показано, що для задачі згину пластини різниця між отриманими за цими схемами результатами несуттєва.

Перспективи подальшого дослідження пов’язані з використанням методу продовження розв’язку за параметром та його варіацій для дослідження нелінійних коливань і стійкості тришарових пластин та оболонок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Быков В. И., Цыбенова С. Б. Реализация метода продолжения по параметру для системы двух уравнений. *Вычислительные технологии*. 2002. Т. 7, № 5. С. 21–28.
2. Зеленський А. Г. Підхід до побудови уточненої теорії фізично нелінійних шаруватих пластин несиметричної структури. *Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. 2004. Вип. 6. С. 58–67. Донецьк: НОРД-ПРЕСС.

3. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія механіка*. 2012. Т. 20, № 5. С. 60–66.

4. Ильин В. П., Карпов В. В., Масленников А. М. Численные методы решения задач строительной механики: Справ. пособие. Минск: Выш. шк., 1990. 349 с.

5. Каудерер Г. Нелинейная механика. Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.

6. Куршин Л. М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек. *Расчет пространственных конструкций*. 1962. № 2. С. 163–192.

7. Неміш Ю. М., Левчук О. І. Аналітичний метод розв'язування тривимірних фізично нелінійних задач статики шаруватих циліндрів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1998. 41, № 3. С. 52–59.

8. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 119 с.

9. Тамуров Ю. Н. Вариант обобщённой теории трёхслойных пологих оболочек с учётом обжатия физически нелинейного заполнителя. *Прикл. механика*. 1990. Т. 26, № 12. С. 39–45.

10. Тамуров Ю. Н. Уравнения изгиба и устойчивости трехслойных оболочек с ортотропными и нелинейно-упругими свойствами материалов. *Исслед. по теор. пластин и оболочек*. 1990. № 20. С. 102–112.

11. Цурпал И. А. Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов. Киев: Техника, 1976. 176 с.

12. Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G. Application of parameter continuation method for investigation of vibroimpact systems dynamic behaviour. Problem state. Short survey of world scientific literature. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 93. С. 110–117.

13. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 2003. Vol. 56, No. 3.

14. Carrera E., Brischetto S. A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates. *Applied Mechanics Reviews*. 2009. Vol. 62.

15. Iurlaro L., Gherlone M., Di Sciuva M., Tessler A. Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories. *Composite Structures*. 2013. Vol. 106. P. 777–792.

16. Karpov V., Semenov A. Strength and Stability of Orthotropic Shells. *World Applied Sciences Journal*. 2014. 30(5). P. 617–623.

17. Kien T Nguyen, Tai H. Thai, Thuc PVo. A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *Steel and Composite Structures*. 2015. Vol. 18(1). P. 91–120.

18. Khalili S. M. R., Kheirikhah M. M., Malekzadeh Fard K. Buckling analysis of composite sandwich plates with flexible core using improved high-order theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2015. Vol. 22(4).

19. Kudin A., Choporov S., Tamurov Yu., Al Omari M. A. V. Analytical and numerical modelling of the axisymmetric bending of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *Journal of Solid Mechanics*. 2016. Vol. 8, No 3. P. 590–601.

20. Magnucki K. A., Jasion P. A., Magnucka-Blandzi E. B., Wasilewicz P. A. Theoretical and experimental study of a sandwich circular plate under pure bending. *Thin-Walled Structures*. 2014. Vol. 79. P. 1-7.

21. Marguerre K. The optimum buckling load of a flexible supported plate composed of two sheets joined by a light weight filler when under longitudinal compression. *Deutsche Vierteljahrsschrist für Literalurwissenschaft und Giests Geschichte, D.V.L.* 1945. ZWB UM 1360/2.

22. Hoff N. J., Mautner S. E. Buckling of sandwich-type panels. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1945. Vol. 12(3). P. 285–297.

23. Noor A. K. Computational Models for Sandwich Panels and Shells. *Applied Mechanics Reviews*. 1996. Vol. 49, No. 3. P. 155–199.

24. Reissner E. Finite deflection of sandwich plates. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1948. Vol. 15(7). P. 435–440.

REFERENCE

1. Byikov, V. I. & Tsyibenova, S. B. (2002). Implementation of the continuation on parameter method for two nonlinear equations. Vyichislitelnyie tehnologii, Vol. 7, No. 5, pp. 21-28.
2. Zelens'kyy, A. H. (2004). An approach to the construction of a refined theory of physically nonlinear layered plates of a non-symmetric structure. Metody rozv"yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdoho tila, Vol.6, pp. 58-67.
3. Zelens'kyy, A. H. (2012). The method of reducing the order of inhomogeneous differential equations with partial derivatives in the theory of medium thickness plates. Visnyk Dnipropetr. un-tu. Seriya mekhanika, Vol. 20, No. 5, pp. 60-66.
4. Yl'yn, V. P., Karpov, V. V. & Maslennykov, A. M. (1990). Numerical methods for solving the problems of building mechanics: Reference book. Minsk: Vyish. shk.
5. Kauderer, G. (1961). Nonlinear mechanics. Moskow: Izd-vo inostr. lit.
6. Kurshin, L. M. (1962). Review of work on the calculation of sandwich plates and shells. Raschet prostranstvennyih konstruktsiy, Vol. 2, pp. 163-192.
7. Nemish, Yu. M. (1998). Analytical method of solving three-dimensional non-linear nonlinear static problems of layered cylinders. Mat. metody ta fiz.-mekh. polya, Vol. 41, No. 3, pp. 52-59.
8. Petrov, V. V. (1975). The method of successive loads in the nonlinear theory of plates and shells. Saratov: Izd-vo Saratov. un-ta.
9. Tamurov, Yu. N. (1990). An option of the generalized theory of three-layer shallow shells, taking into account the compression of a physically non-linear aggregate. Prikl. Mexanika, Vol. 26, No. 12, pp. 39-45.
10. Tamurov, Yu. N. (1990). Equations of bending and stability of three-layer shells with orthotropic and nonlinear-elastic properties of materials. Issled. po teor. plastin i obolochek, No. 20, pp. 102-112.
11. Curpal, I. A. (1976). Elasticity, Plasticity and Creep Theory. Kiev: Tekhnika.
12. Bazhenov, V. A. (2014). Application of parameter continuation method for investigation of vibroimpact systems dynamic behaviour. Problem state. Short survey of world scientific literature. Opir materialiv i teoriya sporud, No. 93, pp. 110-117.
13. Carrera, E. (2003). Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. Applied Mechanics Reviews, Vol. 56, No. 3, pp. 287-308.
14. Carrera, E. & Brischetto, S. (2009). A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates. Applied Mechanics Reviews, Vol. 62, pp. 1-17
15. Iurlaro, L., Gherlone, M., Sciuva, M. Di. & Tessler, A. (2013). Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories. Composite Structures, Vol. 106, pp. 777-792.
16. Karpov, V. & Semenov, A. (2014). Strength and Stability of Orthotropic Shells, World Applied Sciences Journal, Vol. 30, No. 5, pp. 617-623.
17. Kien, T. Nguyen, Tai, H. Thai & Thuc, P. Vo. (2015). A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates. Steel and Composite Structures, Vol. 18, No. 1, pp. 91-120.
18. Khalili, S. M. R., Kheirikhah, M. M. & Malekzadeh, Fard K. (2015). Buckling analysis of composite sandwich plates with flexible core using improved high-order theory. Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 22, No. 4.
19. Kudin, A., Choporov, S., Tamurov, Yu. & Al Omari, M. A. V. (2016). Analytical and numerical modelling of the axisymmetric bending of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. Journal of Solid Mechanics, Vol. 8, No. 3, pp. 590-601.
20. Magnucki, K. A., Jasion, P. A., Magnucka-Blandzi, E. B. & Wasilewicz, P. A. (2014). Theoretical and experimental study of a sandwich circular plate under pure bending. Thin-Walled Structures, Vol. 79, pp. 1-7.
21. Marguerre, K. (1945). The optimum buckling load of a flexible supported plate composed of two sheets joined by a light weight filler when under longitudinal compression. Deutsche Vierteljahrsschrist für Literalurwissenschaft und Giests Geschichte, D.V.L., ZWB UM 1360/2.

22. Hoff, N. J. & Mautner, S. E. (1945). Buckling of sandwich-type panels. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 12, No. 3, pp. 285-297.

23. Noor, A. K. (1996). Computational Models for Sandwich Panels and Shells. Applied Mechanics Reviews, Vol. 49, No. 3, pp. 155-199.

24. Reissner, E. (1948). Finite deflection of sandwich plates. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 15, No. 7, pp. 435-440.

УДК 519.172

ЕДИНИЧНЫЕ И ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ В ГРАФЕ

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовский М. В.

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

lilili5050@rambler.ru, m.davidovsky@gmail.com

В данной работе рассматриваются свойства изометрических циклов в графе. Представлен алгоритм выделения множества изометрических циклов в графе. Для графов с циклическими фрагментами вводится понятие единичного цикла. Представлен алгоритм выделения множества единичных циклов в графе с циклическими фрагментами. Рассмотрены основные свойства единичных циклов. Вычислительная сложность представленных алгоритмов определяется как O(m).

Ключевые слова: неориентированный граф, граф с циклическими фрагментами, изометрические циклы, единичные циклы.

ОДИНИЧНІ ТА ІЗОМЕТРИЧНІ ЦИКЛИ У ГРАФІ

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовський М. В.

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

lilili5050@rambler.ru, m.davidovsky@gmail.com

У роботі розглядаються властивості ізометричних циклів у графі. У статті представлений алгоритм виділення множини ізометричних циклів у графі. Для графів з циклічними фрагментами вводиться поняття одиничного циклу. Представлений алгоритм виділення множини одиничних циклів у графі з циклічними фрагментами. Розглянуто основні властивості одиничних циклів. Обчислювальна складність представлених алгоритмів визначається як O(m).

Ключові слова: неорієнтований граф, граф з циклічними фрагментами, ізометричні цикли, одиничні цикли.

UNIT AND ISOMETRIC CYCLES IN GRAPHS

Kurapov S. V., PhD, Associate professor, Davidovsky M. V.

Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69096, Ukraine

lilili5050@rambler.ru, m.davidovsky@gmail.com

This article presents a mathematical framework that allows solving a number of important combinatorial problems arising during the design of complex products and systems, the design of flat structures, the analysis of social networks and many other topical applied problems. This framework is based on the concepts of isometric and unit cycles of a graph and their properties. The aim of the presented research is a mathematical description of the properties of graph isometric cycles, as well as the introduction of the concept of unit cycles for graphs with cyclic fragments and the description of their properties. The presented mathematical framework basically follows the topological approach, which consists in the