

## REFERENCES

1. Wieghardt, K. (1907). Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. Z. Math. Phys., Vol. 55, pp. 60-103.
2. Williams, M. L. (1952). Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. Journal of Applied Mechanics, Vol. 19(4), pp. 526-528.
3. Paggi, M. & Carpinteri, A. (2008). On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. Appl. Mech. Rev., Vol. 61, No. 2, p. 22.
4. Carpinteri, A. & Paggi, M. (2011). Singular harmonic problems at a wedge vertex: mathematical analogies between elasticity, diffusion, electromagnetism, and fluid dynamics. Journal of Mechanics of Materials and Structures, Vol. 6(1-4), pp. 113-125.
5. Linkov, A. M. & Koshelev, V. F. (2006). Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponents and angular distribution. Int. J. Solids and Structures, Vol. 43, pp. 5909-5930.
6. Makhorkin, M. & Sulym, H. (2010). On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation. Civil and environmental engineering reports, Vol. 5, pp. 235-251.
7. Xiaofei, H. & Weian, Y. (2013). Stress singularity analysis of multi-material wedges under antiplane deformation. Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 26, No. 2, pp. 151-160.
8. Linkov, A. & Rybarska-Rusinek, L. (2008). Numerical methods and models for anti-plane strain of a system with a thin elastic wedge. Archive of Applied Mechanics, Vol. 78, No. 10, pp. 821-831.
9. Makhorkin, M. & Sulym, H. (2007). Asymptotics and stress fields in the wedge system under antiplastic deformation conditions.. Mashynoznavstvo, No. 1, pp. 8-13.
10. Paggi, M. & Carpinteri, A. (2008). On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. Appl. Mech. Rev., Vol. 61, pp. 1-22.
11. Tikhomirov, V. V. (2015). Stress singularity in a top of composite wedge with internal functionally graded material. St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics, Vol. 1, No. 3, pp. 278-286.

УДК 539.3

## КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ТОНКОГО ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ З ТРІЩИНАМИ НА ПРОДОВЖЕННІ ЗА ГАРМОНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Мішарін А. С., Попов В. Г.

*Національний університет «Одеська морська академія»,  
вул. Дідріхсона, 8, Одеса, Україна*

mishandr@ukr.net, dr.vg.popov@gmail.com

Розв'язана плоска динамічна задача теорії пружності про визначення напруженого стану навколо тонкого жорсткого смугового включення з тріщинами на продовженні. Включення вважається повністю зчепленим із зовнішнім середовищем і перебуває під дією сил та моментів, що гармонічно змінюються за часом. Метод розв'язання базується на поданні переміщень і напружень через розривні розв'язки двовимірних рівнянь руху пружного середовища. Після задоволення граничних умов на включенні і тріщинах вихідна задача зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень і напружень. Ця система розв'язується наближено числовим методом, який базується на застосуванні спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів.

*Ключові слова:* коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), система сингулярних інтегральних рівнянь, сила, гармонічні коливання, включення, тріщина.

## КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ТОНКОГО ЖЁСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ТРЕЩИНАМИ НА ПРОДОЛЖЕНИИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Мишарин А. С., Попов В. Г.

*Національний університет «Одесская морская академия»,  
ул. Дидрихсона, 8, Одесса, Украина*

mishandr@ukr.net, dr.vg.popov@gmail.com

Решена плоская динамическая задача теории упругости об определении напряженного состояния возле тонкого жесткого полосового включения с трещинами на продолжении. Включение считается полностью сцепленным с внешней средой и находится под действием сил и моментов, которые гармонически меняются по времени. Метод решения базируется на представлении перемещений и напряжений через разрывные решения двумерных уравнений движения упругой среды. После удовлетворения граничных условий на включении и трещинах исходная задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков перемещений и напряжений. Эта система решается приближенно численным методом, который базируется на применении специальных квадратурных формул для сингулярных интегралов.

*Ключевые слова:* коэффициент интенсивности напряжений (КИН), система сингулярных интегральных уравнений, сила, гармонические колебания, включение, трещина.

## STRESS CONCENTRATION NEAR A THIN RIGID INCLUSION WITH CRACKS ON THE CONTINUATION OF THE INCLUSION UNDER THE HARMONIC LOADING

Misharin A. S., Popov V. G.

*National University "Odessa Maritime Academy",  
Didryhsona str., 8, Odessa, Ukraine*

mishandr@ukr.net, dr.vg.popov@gmail.com

The isotropic elastic medium which is in a state of plane strain is considered. There is a complex defect, in the form of the thin strip inclusion on the continuation of which there are two cracks, in the medium (matrix). This defect in the plane  $Oxy$  occupied the segment  $y=0, |x| \leq a$ .

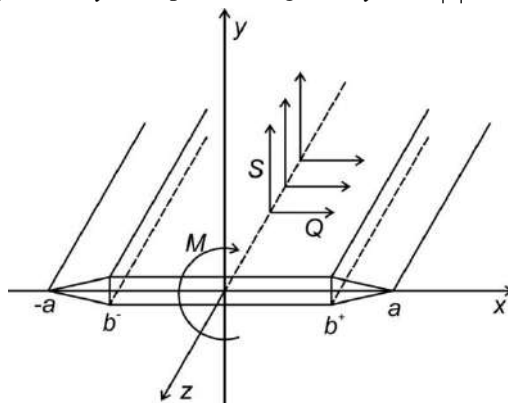


Fig. 1. The inclusion with the cracks on the continuation of it

The inclusion can be under the action of the normal force, shear force or the moment that we denote as follows:

$$S = S_0 e^{-i\omega t}, \quad Q = Q_0 e^{-i\omega t}, \quad M = M_0 e^{-i\omega t}$$

It is required to determine the stresses in the vicinity of the defect at the harmonic loading.

The displacements are determined from the equations of motion of an elastic medium in terms of plane deformation. Boundary conditions are stated in the supposed that the inclusion is fully coupled with the matrix, and surfaces of the cracks are not loaded.

The method of the solution is to present the displacements of the matrix as a superposition of the three discontinuous solutions which are built accordingly to the cracks and the inclusion. Then, because of the satisfaction of the boundary conditions we obtain the system of the singular integral equations concerning the jumps of stresses and displacements on the defect.

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \left[ \frac{\Delta(1+\xi^2)}{2} \ln|\tau-t| + R_l(\tau, t) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) R_{15-l}(\tau, t) d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) R_{25-l}(\tau, t) d\tau = f_l(t), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) R_l^-(\tau, t) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{15-l}^-(\tau, t) \right] d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) R_{25-l}^-(\tau, t) d\tau = 0, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) R_l^+(\tau, t) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) R_{15-l}^+(\tau, t) d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{25-l}^+(\tau, t) \right] d\tau = 0, \end{aligned} \right.$$

$l = 1, 2.$

For the numerical solution of the system the collocation method, which based on the use of the special quadrature formulas for singular integrals and quadrature formulas for the integrals with the regular kernels, is proposed.

The formulas for calculating of the SIF (stress intensity factor) for cracks and the amplitude of the translational motion and the rotation angle of the inclusion are obtained.

In all cases, it is revealed the existence of the frequency at which SIF has the maximum value. Note, that under the action of the shift force, the values of SIF associated with the action of the normal force and torque are equal to 0 or vice versa, by the action of the normal force and moment are equal to 0 values of SIF associated with the effect of the shift force.

The plane problem of dynamic elasticity determination of the stress state around the thin strip absolutely hard inclusion cracked on the continuation is solved. The inclusion is considered fully coupled with the matrix and inclusion is under the action of forces and moments harmoniously change over time. The method of solution is based on the representation of displacements and stresses due to discontinuous solutions of the equations of the motion of 2D elastic medium. After the satisfaction of the boundary conditions on the inclusion and cracks the initial problem is reduced to a system of singular integral equations for the unknown jumps of displacements and stresses. This system is approximately solved by the numerical method, based on the use of special quadrature formulas for singular integrals.

*Key words: stress intensity factor (SIF), a system of singular integral equations, force, harmonic loading, inclusion, crack.*

## ВСТУП

Сучасні елементи будівельних конструкцій і деталі машин досить часто містять конструктивні елементи або технологічні дефекти, які можна розглядати як тонкі включення великої жорсткості. Подібні включення у багатьох випадках також можуть розглядатись як армуючі елементи композитних матеріалів. Але як показують дослідження [1], тонкі жорсткі включення спричиняють до значної концентрації напружень в оточуючому середовищі, яка може привести до утворення тріщин на його продовженні.

В останні роки для відновлення несучої здатності пошкоджених тріщинами будівельних конструкцій є поширеними ін'єкційні технології [2-5]. Ці технології полягають у заповненні тріщин рідкими матеріалами, що утворюють з матрицями міцні зв'язки після кристалізації або полімеризації і таким чином зміцнюють пошкоджену конструкцію. Але у випадку неповного заповнення тріщини ін'єкційним матеріалом у тілі утворюється дефект у вигляді тонкого включення з тріщинами на продовженні.

Отже, визначення напруженого стану в пружних тілах, що містять складні дефекти у вигляді такого включення з тріщинами на продовженні, є актуальною проблемою механіки деформівного тіла і механіки руйнування. На сьогодні вважати, що проблему вирішено, можливо тільки у випадку статичного навантаження тіл з подібними дефектами. Так необмежені і напівобмежені тіла з включеннями, що мають тріщини на продовженні в межах двовимірної теорії пружності, розглянуто у працях [6, 7]. Міцність тіл з тріщинами, залікованими і частково залікованими за ін'єкційними технологіями, досліджені у [3, 8]. Але питання динамічного навантаження, зокрема гармонічного, на складні дефекти у вигляді

тонкого включення з тріщинами на продовженні, не розглядалися. У нашому дослідженні розв'язується задача визначення напруженого стану в тілі з подібним дефектом, що виникає внаслідок дії нормальної та зсувної сили або моменту, що гармонічно змінюються за часом.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається пружне ізотропне середовище (матриця), яке знаходиться у стані плоскої деформації. У цьому середовищі міститься дефект у вигляді тонкого смугового включення зі смуговими тріщинами на продовженні. У площині  $Oxy$  включення займає область  $x \in [b^-, b^+]$ ,  $-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$ . Тріщини, що відходять від включення, у цій площині займають відрізки  $x \in [-a, b^-]$ ,  $x \in [b^+, a]$ .

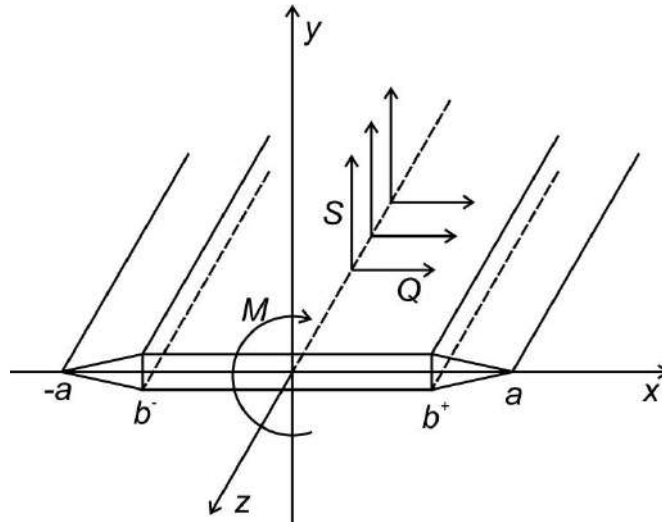


Рис. 1. Включення з тріщинами на продовженні

На включення може діяти нормальна сила, сила зсуву або момент, які ми позначимо відповідно:

$$S = S_0 e^{-i\omega t}, \quad Q = Q_0 e^{-i\omega t}, \quad M = M_0 e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Залежність від часу визначається множником  $e^{-i\omega t}$ , який надалі буде усюди опущений. Відмінні, за плоскої деформації, від нуля переміщення  $u$  і  $v$  задовольняють двовимірним рівнянням руху пружного середовища за гармонічних коливань:

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) \text{grad div} U = -\rho \omega^2 U, \quad U = (u(x, y), v(x, y))^T. \quad (2)$$

Граничні умови з боку матриці на дефекті, внаслідок його малої товщини, сформульовано відносно до його серединної площини. Тоді на включенні, за умови ідеального зчеплення, повинні виконуватися рівності:

$$u(x, 0) = d_1, \quad v(x, 0) = d_2 + \gamma x, \quad (3)$$

де  $d_1$ ,  $d_2$  – амплітуди переміщень включення відносно осей  $Ox$  і  $Oy$ ,  $\gamma$  – кут повороту включення відносно осі  $Oz$ .

Окрім того, на поверхні включення зазнають розриву напруження, стрибки яких позначимо так:

$$\langle \sigma_y \rangle = \chi_1(x), \quad \langle \tau_{yx} \rangle = \chi_2(x), \quad x \in [b^-, b^+]. \quad (4)$$

Невідомі амплітуди переміщень та кута повороту включення визначаються з рівняння руху включення як твердого тіла:

$$\begin{aligned}
 -m\omega^2 d_1 &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(x) dx + Q_0, & -m\omega^2 d_2 &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(x) dx + S_0, \\
 -\omega^2 \gamma I_{in} &= \int_{b^-}^{b^+} x \chi_1(x) dx + M_0.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Поверхні тріщин вважаються незавантаженими, унаслідок чого виконуються рівності:

$$\sigma_y(x, 0) = 0, \quad \tau_{yx}(x, 0) = 0, \quad x \in [-a, b^-], \quad x \in [b^+, a].
 \tag{6}$$

Також на тріщинах зазнають розриву переміщення, стрибки яких позначимо:

$$\langle u \rangle = \chi_4^\pm(x), \quad \langle v \rangle = \chi_3^\pm(x), \quad x \in [-a, b^-], \quad x \in [b^+, a].
 \tag{7}$$

Причому, з умови змикання у зовнішніх вершинах тріщин, мають виконуватися умови

$$\chi_{3,4}^\pm(\pm a) = 0.$$

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Розв'язання сформульованої крайової задачі суттєво базується на використанні розривних розв'язків рівнянь (3). Спочатку будується розривний розв'язок цих рівнянь зі стрибками (4) на поверхні включення. Ці розривні розв'язки і пов'язані з ними напруження визначаються формулами [9, 10]:

$$\begin{aligned}
 u^d(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{41}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{42}(\eta - x, y) d\eta, \\
 v^d(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{31}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{32}(\eta - x, y) d\eta, \\
 \sigma_y^d(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{11}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{12}(\eta - x, y) d\eta, \\
 \tau_{yx}^d(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{21}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{22}(\eta - x, y) d\eta.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Також будуються розривні розв'язки рівнянь (3) зі стрибками (7), для яких мають місце аналогічні формули:

$$\begin{aligned}
 u^\pm(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^-(\eta) G_{43}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^-(\eta) G_{44}(\eta - x, y) d\eta, \\
 v^\pm(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^-(\eta) G_{33}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^-(\eta) G_{34}(\eta - x, y) d\eta, \\
 \sigma_y^\pm(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^-(\eta) G_{13}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^-(\eta) G_{14}(\eta - x, y) d\eta, \\
 \tau_{yx}^\pm(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^-(\eta) G_{23}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^-(\eta) G_{24}(\eta - x, y) d\eta,
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

де

$$G_{11} = G_{33} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - 2 \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
G_{12} = G_{43} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - 2 \left( \kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right], \\
G_{13} &= \frac{\mu}{\kappa_2^2} \left[ - \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 r_1 + \left( \kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right], \\
G_{14} = G_{23} &= \frac{2\mu}{\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (r_1 - r_2), \\
G_{21} = G_{34} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2 \left( \kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right], \\
G_{22} = G_{44} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ -2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right], \\
G_{24} &= \frac{\mu}{\kappa_2^2} \left[ 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 r_2 \right], \\
G_{31} = \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \left[ \left( \kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right], \quad G_{32} = G_{41} &= -\frac{1}{\mu \kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (r_1 - r_2), \\
G_{42} &= \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \left[ -\frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + \left( \kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right], \\
r_k = r_k(\eta - x, y) &= -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left[ \kappa_k \sqrt{(\eta - x)^2 + y^2} \right], \quad \kappa_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad k = 1; 2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Після цього переміщення і напруження в матриці подамо у вигляді суми розривних розв'язків (8), (9)

$$\begin{aligned}
u &= u^d + u^- + u^+; \quad v = v^d + v^- + v^+; \\
\tau_{yx} &= \tau_{yx}^d + \tau_{yx}^- + \tau_{yx}^+; \quad \sigma_y = \sigma_y^d + \sigma_y^- + \sigma_y^+.
\end{aligned} \tag{11}$$

Щоб остаточно визначити поля переміщень і напружень за формулами (11), необхідно знайти невідомі стрибки напружень і переміщень на дефекті. Для цього слід використати незадовільнені умови (3), (6). Після підстановки (11) у ці рівності приходимо до системи інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків. Ця система після переходу до проміжку  $[-1, 1]$ , відокремлення сингулярних складових ядер і введення нових невідомих функцій

$$\begin{aligned}
\mu \varphi_i(\tau) = \chi_i \left( \frac{b^+ - b^-}{2} \tau + \frac{b^+ + b^-}{2} \right), \quad \varphi_j^\pm(\tau) = \left( \chi_j^\pm \left( \frac{a \mp b^\pm}{2} \tau \pm \frac{a \pm b^\pm}{2} \right) \right)', \\
i = 1, 2, \quad j = 3, 4
\end{aligned} \tag{12}$$

має вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \left[ \frac{\Delta(1+\xi^2)}{2} \ln|\tau-t| + R_l(\tau, t) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) R_{15-l}(\tau, t) d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) R_{25-l}(\tau, t) d\tau = f_l(t), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) R_l^-(\tau, t) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{15-l}^-(\tau, t) \right] d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) R_{25-l}^-(\tau, t) d\tau = 0, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) R_l^+(\tau, t) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) R_{15-l}^+(\tau, t) d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{25-l}^+(\tau, t) \right] d\tau = 0. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

$l = 1, 2.$

$$f_1(t) = -\frac{\bar{\rho}}{4\kappa_0^2 \varepsilon \Delta} Q_1 - \frac{3\bar{\rho}}{4\kappa_0^2 \varepsilon q} M_1, \quad f_2(t) = -\frac{\bar{\rho}}{4\kappa_0^2 \varepsilon \Delta} S_1,$$

де  $Q_1 = \frac{Q_0}{a}$ ,  $M_1 = \frac{M_0}{a}$ ,  $S_1 = \frac{S_0}{a}$ ,  $q = \Delta^2 \varepsilon^2 + (\varepsilon^+)^2 + \varepsilon^+ \varepsilon^- + (\varepsilon^-)^2$ ,  $\Delta = 0.5(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)$ .

Ураховуючи поведінку напружень біля кінців включення і вершин тріщин, розв'язок системи (13) слід шукати у вигляді:

$$\varphi_l(\tau) = \frac{\psi_l(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad \varphi_l^\pm(\tau) = (1 \mp \tau)^{-1/2} \psi_l^\pm(\tau), \quad l = 1, 2. \quad (14)$$

Функції  $\psi_l(\tau)$ ,  $\psi_l^\pm(\tau)$  вважаються такими, що задовольняють умовам Гельдера і наближуються наступними інтерполяційними поліномами:

$$\begin{aligned} \psi_l(\tau) &= \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{T_n(\tau)}{T_n'(\tau_m)(\tau - \tau_m)}, \quad \tau_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}, \\ \psi_l^\pm(\tau) &= \sum_{m=1}^n \psi_{lm}^\pm \frac{q_n^\pm(\tau)}{[q_n^\pm(\tau_m^\pm)]'(\tau - \tau_m^\pm)}, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

У формулах (15)  $T_n(\tau)$  – багаточлен Чебишева першого роду,  $q_n^+(\tau) = P_n^{-1/2,0}(\tau)$ ,  $q_n^-(\tau) = P_n^{0,-1/2}(\tau)$  – багаточлени Якобі,  $\tau_m$ ,  $\tau_m^\pm$  – корені вказаних багаточленів. Наближення невідомих функцій, згідно з формулами (14), (15) дає можливість використовувати для сингулярних інтегралів квадратурні формули [11, 12]:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \ln|\tau - \tau_k| d\tau &= \sum_{m=1}^n a_m B_{km} \psi_{lm}, \\ \int_{-1}^1 \frac{\varphi_l^\pm(\tau)}{\tau - \zeta_k^\pm} d\tau &= \sum_{m=1}^n \psi_{lm}^\pm \frac{A_m^\pm}{\tau_{lm}^\pm - \zeta_k^\pm}, \quad l = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (16)$$

де  $\zeta_k^\pm$  – корні функцій Якобі  $J_n^{-1/2,0}(\zeta)$ ,  $J_n^{0,-1/2}(\zeta)$ ,

$$B_{km} = -\ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos \frac{j\pi(2m-1)}{2n} \cos \frac{j\pi(2k-1)}{2n}}{j}, \quad a_m = \frac{\pi}{n},$$

$$A_m^\pm = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 - (\tau_m^\pm)^2\right) \left([q_n^\pm(\tau_m^\pm)]'\right)^2}. \quad (17)$$

Квадратурні формули (16), а також формули Гаусса-Чебишева і Гаусса-Якобі для регулярних інтегралів, дають можливість знайти наближений розв'язок системи (13) методом колокації. При цьому, за точки колокації в рівняннях, отриманих з умов на включенні, використовуються корені багаточленів Чебишева  $\tau_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , а в рівняннях, знайдених з умов на тріщинах, корені функції Якобі другого роду  $\zeta_k^\pm$ ,  $k=1,2,\dots,n$ .

У результаті приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функцій  $\varphi_l(\tau)$ ,  $\varphi_l^\pm(\tau)$  в узлах інтерполяції:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{lm} \left[ \frac{\Delta(1+\xi^2)}{2} B_{km} + R_l(\tau_m, \tau_k) \right] + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^- \psi_{5-l,m}^- R_{15-l}^-(\tau_m^-, \tau_k) + \\ \quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^+ \psi_{5-l,m}^+ R_{25-l}^+(\tau_m^+, \tau_k) = f_l(\tau_k), \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{lm} R_l^-(\tau_m, \zeta_k^-) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^- \psi_{lm}^- \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau_m^- - \zeta_k^-} + R_{15-l}^-(\tau_m^-, \zeta_k^-) \right] + \\ \quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^+ \psi_{lm}^+ R_{25-l}^+(\tau_m^+, \zeta_k^-) = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{lm} R_l^+(\tau_m, \zeta_k^+) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^- \psi_{lm}^- R_{15-l}^-(\tau_m^-, \zeta_k^+) + \\ \quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^+ \psi_{lm}^+ \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau_m^+ - \zeta_k^+} + R_{25-l}^+(\tau_m^+, \zeta_k^+) \right] = 0, \end{array} \right. \quad (18)$$

$$l = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Після розв'язку системи (18) наближене значення цих функцій знаходяться за формулами (15).

Величинами, що визначають можливість розвитку тріщини, є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які в умовах плоскої деформації визначаються формулами:

$$k_1^\pm = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm a \pm 0} \sqrt{\pm x - a} \sigma_y^{\pm 1}(x, 0),$$

$$k_2^\pm = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm a \pm 0} \sqrt{\pm x - a} \tau_{yx}^{\pm 1}(x, 0). \quad (19)$$

Після розв'язання системи (18) безрозмірні значення цих коефіцієнтів можуть бути знайдені за наближеними формулами:

$$k_{0l}^\pm = \frac{k_l^\pm}{\mu\sqrt{a}} = -(1-\xi^2) \sqrt{2\pi\Delta^\pm} \sum_{m=1}^n \psi_{lm}^\pm \frac{q_n^\pm(\pm 1)}{[q_n^\pm(\tau_m^\pm)]' (1 \mp \tau_m^\pm)}, \quad l = 1, 2. \quad (20)$$

### РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

За допомогою формул (15) проведено числове дослідження залежності КІН від безрозмірного хвильового числа в припущенні, що тріщини мають однакову довжину. У цьому випадку  $b^+ = -b^- = b$ ,  $k_{01}^+ = k_{01}^- = k_{01}$ ,  $k_{02}^+ = k_{02}^- = k_{02}$  у силу симетрії. Результати розрахунку КІН



наведені у вигляді графіків на рис. 2-4 відповідно при дії силою зсуву, нормальною силою та моментом. Кожна крива побудована для вказаного значення щодо відносної довжини включення  $\varepsilon = \frac{b}{a}$ .

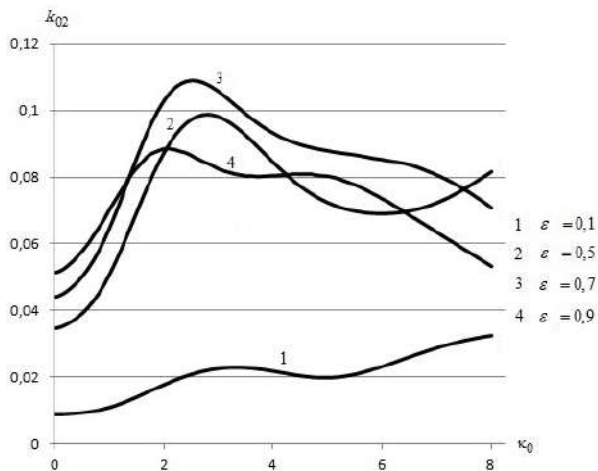


Рис. 2. Залежність КІН від хвильового числа при навантаженні зсувною силою

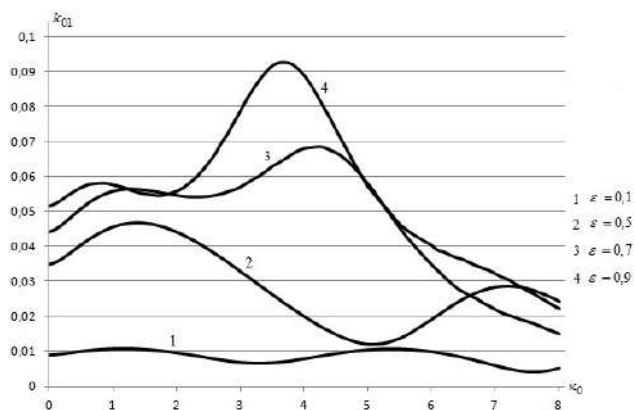


Рис. 3. Залежність КІН від хвильового числа при навантаженні нормальною силою

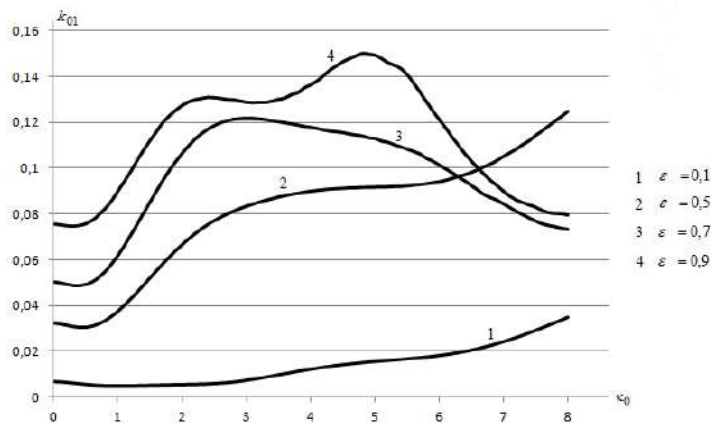


Рис. 4. Залежність КІН від хвильового числа при навантаженні моментом

В усіх випадках виявлене існування частоти, за якої спостерігається максимум КІН. Зауважимо, що при дії силою зсуву, КІН для нормальних напружень дорівнює 0 та навпаки, при дії нормальною силою та моментом, дорівнює 0 КІН дотичних напружень. Також слід зазначити, що у випадку навантаження нормальною силою або моментом, при зменшенні відносних довжин тріщин, збільшуються значення КІН нормальних напружень. У випадку навантаження зсувною силою ця тенденція порушується.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослід.-видав. центр НТШ, 2007. 716 с.
2. Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П. Механіка руйнування та міцність матеріалів: довідниковий посібник. Т. 12. Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. Львів: Сполом, 2009. 260 с.
3. Силованюк В. П., Маруха В. І., Юхим Р. Я., Онищак Н. В. Зміцнення бетону в результаті заповнення пор та порожнин. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2010. Т. 46, № 1. С. 62–66.
4. Силованюк В. П., Маруха В. І., Онищак Н. В. Ресурс міцності відновлених за ін'єкційними технологіями пошкоджених елементів споруд тривалої експлуатації. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій*. Праці VI Міжнар. наук. конфер. (Львів, 2009). Львів, ФМІ НАНУ, 2009. С. 115–124.

5. Силованюк В. П., Ревенко А. В., Онищак Н. В. Вплив повзучости ін'єкційних матеріалів на ефективність заліковування тріщин в бетоні. *Міжвузівський збірник «НАУКОВІ НОТАТКИ»*. Луцьк, 2013. Вип. 41, част. 2. С. 164–169.
6. Акопян В. Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитуцюн», 2014. 323 с.
7. Акопян В. Н., Амирджанян А. А. Напряженное состояние полуплоскости с выходящим на границу абсолютно жестким включением и трещиной. *Известия национальной академии наук Армении. Механика*. 2015. Т. 68, № 1. С. 25–36.
8. Шацький І. П. Задачі згину пластин з частково залікованою тріщиною. *Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки*. 2014. № 1. С. 91–93.
9. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. Москва: Наука, 1982. 344 с.
10. Попов В. Г., Улановский А. Э. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1995. № 4. С. 99–109.
11. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наук. думка, 1989. 535 с.
12. Андреев А. В. Развитие методов прямого численного решения одномерных интегродифференциальных уравнений механики. *Изв. РАН. МТТ*. 2007. № 2. С. 50–65.

#### REFERENCES

1. Sulym, G. T. (2003). Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable bodies with thin inclusions. L'viv: Doslid.-vydav. centr NTSh (in Ukrainian).
2. Maruha, V. I., Panasjuk, V. V. & Sylovanjuk, V. P. (2009). Fracture mechanics and strength of materials. (vol. 12) Injectable technologies for the restoration of the robustness of damaged structures for long-term exploitation. L'viv: Spolom (in Ukrainian).
3. Sylovanjuk, V. P., Maruha, V. I., Juhym, R. Ja. & Onyshhak, N. V. (2010). Strengthening of concrete as a result of filling the pores and cavities. *Fizyko-himichna mehanika materialiv*, Vol. 46, No. 1, pp. 62-66.
4. Sylovanjuk, V. P., Maruha, V. I. & Onyshhak, N. V. (2009). Resource strength restored by the injection technology of damaged buildings long operation. Proceedings of the VI International Scientific Conference Mechanics of material destruction and structural strength, (pp. 115-124), Lviv.
5. Sylovanjuk, V. P., Revenko, A. V. & Onyshhak, N. V. (2013). Effect of creep injecting material efficiency healing of cracks in concrete. *Mizhvuzivskyj zbirnyk "NAUKOVI NOTATKY"*, Iss. 41, Pt. 2, pp. 164-169.
6. Akopjan, V. N. (2014). Mixed boundary value problems of the interaction of solid deformable bodies with different types of stress concentrators. Erevan: Izd. «Gitucjun».
7. Akopjan, V. N. & Amirdzhanjan, A. A. (2015). Stress state of a half-plane with border overlooking the absolutely rigid inclusion and crack. *Izvestija nacional'noj akademii nauk Armenii. Mehanika*, Vol. 68, No 1, pp. 25-36.
8. Shac'kyj, I. P. (2014). The problems of bending plates partially healed crack. *Visnyk Donec'kogo nacional'nogo universytetu. Ser. A: Pryrodnychi nauky*, No. 1, pp. 91-93.
9. Popov G. Ja. (1982), Koncentracija uprugih naprjazhenij vozle shtampov, razrezov, tonkih vkljuchenij i podkreplenij. [The elastic stress concentration near the punches, of sections, thin inclusions and reinforcements], Nauka, Moskva, Russia.
10. Popov, V. G. & Ulanovskij, A. Je. (1995). Comparative analysis of the diffraction fields when passing through the elastic waves of different nature defects. *Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela*, No. 4, pp. 99-109.
11. Nazarchuk, Z. T. (1989). Numerical investigation of the diffraction of waves on cylindrical structures. Kiev: Nauk. dumka.
12. Andreev, A. V. (2007). The development of methods of direct numerical solution of one-dimensional integrodifferential equations of mechanics. *Izv. RAN. MTT*, No. 2, pp. 50-65.