3. Никитин Л. В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. Москва: Московский Лицей, 1998. 272 с.

4. Величкович А. С., Попадюк И. И., Шопа В. М. Экспериментальные исследования оболочечного упругого элемента для буровых средств виброзащиты. *Химическое и нефтегазовое машиностроение*. 2010. № 9. С. 16–20. **English translation:** *Chemical and Petroleum Engineering*. New York: Springer 2011. Vol. 46, No. 9-10. P. 518–524.

5. Шопа В. М., Попадюк І. Й., Бедзір О. О. Змішані задачі фрикційного контакту коаксіальних циліндричних оболонок і деформівного заповнювача. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1998. 41, № 3. С. 103–108.

6. Попадюк І. Й., Шацький І. П., Шопа В. М., Величкович А. С. Фрикційна взаємодія циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем при немонотонному навантаженні. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2014. 57, № 2. С. 187–194. **English translation:** *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 215, No. 2, May, 2016.

REFERENCES

1. Shopa, V. M., Velychkovych, A. S., Velychkovych, S. V., Shats'kyi, I. P. & Popadyuk, I. I. (2002). Shell Springs. Ivano-Frankivs'k: Fakel.

2. Awrejcewicz, J. & Olejnik, P. (2005). Analysis of dynamic systems with various friction laws. *Appl. Mech. Rev. Trans. ASME*, Vol. 58, pp. 389–411.

3. Nikitin, L. V. (1998). Statics and Dynamics of Solid Bodies with External Dry Friction. Moscow: Moskovskii Litsei.

4. Velichkovich, A. S., Popadyuk, I. I. & Shopa, V. M. (2010). Experimental study of the shell flexible component for drilling vibration damping devices. Khim. Neftegaz. Mashinostr., No. 9, pp. 16–20. **English translation:** (2011). Chem. Petrol. Eng., 46, No. 9–10, pp. 518–524.

5. Shopa, V. M., Popadyuk, I. Yo. & Bedzir, O. O. (1998). Mixed problems of frictional interaction of a coaxial cylindrical shells and deformative filler. Math meth. ta phyz.-mech. polya, **41**, No. 3, pp. 103–108.

6. Popadyuk, I. Yo., Shats'kyi, I. P., Shopa, V. M. & Velichkovich, A. S. (2014). Frictional interaction of a cylindrical shell with deformative filler under non-monotonic loading. Math meth. ta phyz.-mech. polya, **57**, No. 2, pp. 187–194. **English translation:** (2016). J. of Math. Sci., Vol. 215, No. 2.

УДК 536.2

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДВУХСЛОЙНЫХ СРЕДАХ

[1]Пышнограев Ю. Н., к. ф.-м. н., [2]Штанько А. И.,[3]Пышнограев Е. Ю.

[1,2]*Запорожская государственная инженерная академия, просп. Соборный, 226, Запорожье, 69006, Украина*

[3]*ООО «Яндекс», ул. Льва Толстого, 16, Москва, 119021, Россия*

pyshnograevyuri@gmail.com, anna.shtanko177@gmail.com, efim@fastmail.com

Рассмотрена математическая модель, описывающая конвективную теплопроводность двухслойной среды. Методом конечных интегральных преобразований проведено поэтапное решение задачи. Получен набор собственных значений и соответствующих им ортогональных собственных функций. Исходная задача приведена к обыкновенному дифференциальному уравнению. Решение задачи получено в виде функционального ряда.

Ключевые слова: теплопроводность, конвекция, двухслойная среда, интегральное преобразование, собственная функция.

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ У ДВОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

[1]Пишнограєв Ю. М., к. ф.-м. н., [2]Штанько Г. І., [3]Пишнограєв Ю. Ю.

[1,2]*Запорізька державна інженерна академія, просп. Соборний, Запоріжжя, 69006, Україна*

[3]*ТОВ «Яндекс», вул. Льва Толстого, 16, Москва, 119021, Росія*

pyshnograevyuri@gmail.com, anna.shtanko177@gmail.com, efim@fastmail.com

Розглянуто математичну модель, що описує конвективну теплопровідність двошарового середовища. Методом скінчених інтегральних перетворень проведено поетапне рішення задачі. Отримано набір власних значень і відповідних їм ортогональних власних функцій. Вихідна задача приведена до звичайного диференціального рівняння. Рішення задачі отримано у вигляді функціонального ряду.

Ключові слова: теплопровідність, конвекція, двошарове середовище, інтегральне перетворення, власна функція.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF CONVECTIVE HEAT EXCHANGE IN TWO-LAYER MEDIUM

[1]Pyshnograev Y. N., Ph.D. in Physico-mathematical, [2]Shtanko A. I., [3]Pyshnograev, E. Y.

[1,2]*Zaporizhzhya State Engineering Academy, Sobornyy ave., 226, Zaporizhzhia, 69006, Ukraine*

[3]*Software Developer of Yandex LLC, Ulitsa Lva Tolstogo, 16, Moscow, 119021, Russia*

pyshnograevyuri@gmail.com, anna.shtanko177@gmail.com, efim@fastmail.com

When building blocks are designed, there is an important problem to determine the temperature distribution in contacting materials. It is well known that obtaining a general analytical solution in such cases is difficult. For this reason, numerical methods are used to calculate the parameters of temperature fields. However there is a problem of errors accumulation when numerical methods are used. In some cases this can lead to unreliable results. For this reason, there is a need for analytical research.

In this research a medium with two layers is is considered. Heat is distributed according to the laws of heat conduction and convection. The boundary conditions of the first kind are given on the outer boundaries. Layers contact each other with the conditions for an ideal thermal contact. Temperature distribution in the layers at the initial instant is constant. Current research determines the temperature function, which depends on the spatial variable and time.

The mathematical model consists of a one-dimensional nonstationary heat conduction equation with a convective component, boundary and initial conditions.

The solution of the problem is carried out by the method of finite integral transformations. In order to achieve this, the method of the separation of variables is used. This helps to reduce the original problem to the spectral problem with respect to the spatial variable. Then, using the proper replacement, the problem is transformed to the Sturm-Liouville problem. To solve this problem, the three intervals of the arrangement of eigenvalues are considered. At each of the intervals the set of eigenvalues is determined from the respective transcendental equations. This values correspond to eigenfunctions, which are a linear combination of trigonometric or hyperbolic functions. It is shown that the found eigenfunctions satisfies the orthogonality property and can be used as kernels of integral transformations. Conducting an integral transformation makes possible reducing the original partial differential equation to an ordinary differential equation with respect to time. Using the inversion formula, the final solution of the problem is written in the form of a functional series.

Given solution can be extended to solve more complex two-dimensional and three-dimensional problems. It is also possible to solve the problem when the number of contacting materials is increased.

Key words: heat conductivity, convection, two-layer medium, integral transformation, eigenfunction.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании радиоаппаратуры, гидросооружений [1], высокотехнологического металлургического оборудования актуальной является проблема учета температурного режима. В связи с этим, оптимизация характеристик проектируемых элементов должна проводиться с учетом поведения температурных полей в соприкасающихся средах. К таким средам относятся твердые тела, а также газовые и жидкие наполнители. Проведение температурных расчетов является достаточно сложной математической задачей, и для ее решения, как правило, используются численные методы [2]. Однако, при всей их привлекательности, применение численных подходов связано с проблемой накопления погрешностей, ошибок округления и схемных ошибок. К тому же численные методы не позволяют получить достоверные результаты вблизи особых точек, границ раздела слоев, а также при больших разбросах теплофизических и геометрических параметров. В связи с этим возникает необходимость проведения аналитических исследований. Аналитические решения имеют большую ценность, так как позволяют изучать поведение функций, входящих в решение. Кроме того, аналитические решения могут быть использованы как инструмент тестирования численных методов. В данной работе приводится алгоритм получения аналитического решения нестационарной задачи конвективной теплопроводности двухслойной среды.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается среда, состоящая из двух слоев. Первый слой занимает область $(-l_1;0)$, второй – $(0;l_2)$. Коэффициент температуропроводности a, теплопроводности λ и скорость движения среды w принимают значения a_1, λ_1, w_1 на первом слое и a_2, λ_2, w_2 на втором слое соответственно (рис. 1). На внешних границах заданы однородные граничные условия первого рода, на общей границе условия идеального теплового контакта. Предполагается, что в начальный момент времени температура слоев постоянная. Требуется определить температурную функцию $T(x,t)$, зависящую от пространственной переменной и времени.

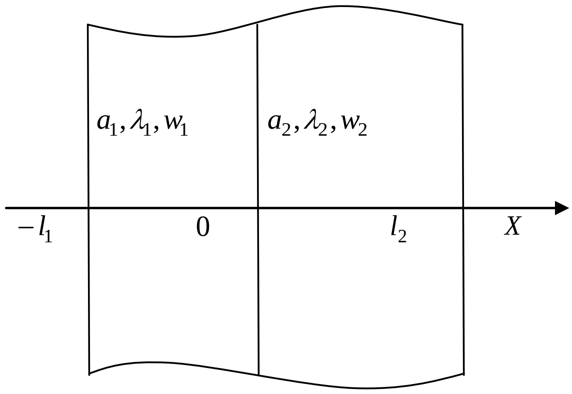

Рис. 1. Двухслойная область

Математическая формулировка задачи состоит из уравнения в частных производных

$$T_t(x,t) = a \cdot T_{xx}(x,t) + wT_x(x,t), \tag{1}$$

граничных условий

$$\begin{cases} T(-l_1,t)=0, \\ T(l_2,t)=0, \\ T(-0,t)=T(+0,t), \\ \lambda_1 T_x(-0,t)=\lambda_2 T_x(+0,t), \end{cases} \tag{2}$$

а также начального условия

$$T(x,0)=T_0. \tag{3}$$

2. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Решение задачи проводится методом конечных интегральных преобразований. Этот метод предполагает нахождение ядер интегральных преобразований, которые являются решениями задачи Штурма-Лиувилля [3]. Чтобы получить условия этой задачи, представим неизвестную температурную функцию в виде произведения

$$T(x,t)=\bar{T}(t)\varphi(x). \tag{4}$$

Определяя из (4) выражения для T_t, T'_x, T''_{xx} и подставляя их, а также (4) в (1) и (2), приходим к соотношениям, которые позволяют разделить переменные и получить спектральную задачу, состоящую из уравнения

$$a\varphi''(x)+w\varphi'(x)+\beta^2\varphi(x)=0 \tag{5}$$

и граничных условий

$$\varphi(-l_1)=0,\quad \varphi(l_2)=0,\quad \varphi(-0)=\varphi(+0),\quad \lambda_1\varphi'(-0)=\lambda_2\varphi'(+0). \tag{6}$$

Отметим, что в уравнение (5) входит пока неизвестная постоянная разделения β^2. Для решения уравнения (5) с условиями (6) сделаем замену

$$\varphi(x)=\psi(x)e^{-\mu x}, \tag{7}$$

где

$$\mu=\begin{cases}\mu_1=\dfrac{w_1}{2a_1},\ x\in[-l_1;0),\\[2mm] \mu_2=\dfrac{w_2}{2a_2},\ x\in[0;l_2].\end{cases} \tag{8}$$

В результате приходим к задаче Штурма-Лиувилля. Она состоит из уравнения

$$a\psi''(x)+\left(\beta^2-\mu^2a\right)\psi(x)=0 \tag{9}$$

и граничных условий

$$\begin{cases}\psi(-l_1)=0,\\ \psi(l_2)=0,\\ \psi(-0)=\psi(+0),\\ \lambda_1\left(\psi'(-0)-\mu_1\psi(-0)\right)=\lambda_2\left(\psi'(+0)-\mu_2\psi(+0)\right).\end{cases} \tag{10}$$

Задача (9)-(10) позволяет определить бесконечный набор собственных значений β и соответствующих им собственных функции $\psi(x)$.

Пусть для определенности $\mu_1\le\mu_2$. Тогда для нахождения собственных значений и собственных функций нужно рассмотреть три интервала, на каждом их которых собственные функции имеют различный вид [4].

1) Если $0<\beta<\mu_1\sqrt{a_1}$, собственные значения β определяются из трансцендентного уравнения

$$(\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2)sh(q_1l_1)sh(q_2l_2)-\lambda_1q_1ch(q_1l_1)sh(q_2l_2)-\lambda_2q_2sh(q_1l_1)ch(q_2l_2)=0,$$

где

$$q_1 = \sqrt{\mu_1^2 - \frac{\beta^2}{a_1}}, \quad q_2 = \sqrt{\mu_2^2 - \frac{\beta^2}{a_2}}. \tag{11}$$

Собственным значениям соответствуют собственные функции

$$\psi_1(x) = A_1 ch(q_1 x) + B_1 sh(q_1 x), \quad \psi_2(x) = A_2 ch(q_2 x) + B_2 sh(q_2 x), \tag{12}$$

где

$$A_1 = A_2 = sh(q_1 l_1), \quad B_1 = ch(q_1 l_1),$$
$$B_2 = \frac{sh(q_1 l_1)(\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1) + \lambda_1 q_1 ch(q_1 l_1)}{\lambda_2 q_2}. \tag{13}$$

2) Если $\mu_1\sqrt{a_1} \le \beta \le \mu_2\sqrt{a_2}$, собственные значения β определяются из трансцендентного уравнения

$$(\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2)\sin(q_1 l_1) sh(q_2 l_2) - \lambda_1 q_1 \cos(q_1 l_1) sh(q_2 l_2) - \lambda_2 q_2 \sin(q_1 l_1) ch(q_2 l_2) = 0,$$

где

$$q_1 = \sqrt{\frac{\beta^2}{a_1} - \mu_1^2}, \quad q_2 = \sqrt{\mu_2^2 - \frac{\beta^2}{a_2}}. \tag{14}$$

Собственные функции имеют вид

$$\psi_1(x) = A_1 \cos(q_1 x) + B_1 \sin(q_1 x), \quad \psi_2(x) = A_2 ch(q_2 x) + B_2 sh(q_2 x), \tag{15}$$

где

$$A_1 = A_2 = \sin(q_1 l_1), \quad B_1 = \cos(q_1 l_1),$$
$$B_2 = \frac{\sin(q_1 l_1)(\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1) + \lambda_1 q_1 \cos(q_1 l_1)}{\lambda_2 q_2}. \tag{16}$$

3) Если $\mu_2\sqrt{a_2} < \beta < +\infty$, собственные значения β определяются из трансцендентного уравнения

$$(\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2)\sin(q_1 l_1)\sin(q_2 l_2) - \lambda_1 q_1 \cos(q_1 l_1)\sin(q_2 l_2) - \lambda_2 q_2 \sin(q_1 l_1)\cos(q_2 l_2) = 0,$$

где

$$q_1 = \sqrt{\frac{\beta^2}{a_1} - \mu_1^2}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{\beta^2}{a_2} - \mu_2^2}. \tag{17}$$

Собственные функции имеют вид

$$\psi_1(x) = A_1 \cos(q_1 x) + B_1 \sin(q_1 x), \quad \psi_2(x) = A_2 \cos(q_2 x) + B_2 \sin(q_2 x), \tag{18}$$

где

$$A_1 = A_2 = \sin(q_1 l_1), \quad B_1 = \cos(q_1 l_1),$$
$$B_2 = \frac{-\lambda_1\mu_1 \sin(q_1 l_1) + \lambda_2\mu_2 \sin(q_1 l_1) + \lambda_1 q_1 \cos(q_1 l_1)}{\lambda_2 q_2}. \tag{19}$$

Окончательный вид собственных функций $\varphi(x)$ можно получить с помощью выражения (7).

Отметим, что фунции $\varphi(x)$ ортогональны с весом $\rho(x) = \frac{\lambda}{a} e^{2\mu x}$, то есть

$$\int_{-l_1}^{l_2} \frac{\lambda}{a} e^{2\mu x} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \|\varphi_n\|^2, & n = m, \end{cases} \tag{20}$$

где $\|\varphi_n\|^2$ – квадрат нормы собственных функций [5].

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ

Используя функции $\varphi_n(x)$ в качестве ядер интегральных преобразований, проведем конечное интегральное преобразование по формуле

$$\bar{T}_n(t) = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\lambda}{a} e^{2\mu x} \varphi_n(x) T(x,t) dx. \tag{21}$$

Для этого умножаем обе части уравнения (1) на $\frac{\lambda}{a} e^{2\mu x} \varphi_n(x)$ и интегрируем в пределах от $-l_1$ до l_2, при этом правую часть интегрируем дважды по частям. С учетом условий (2), (10), а также уравнения (9), имеем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\bar{T}_n(t)$:

$$\bar{T}_n'(t) + \beta_n^2 \bar{T}_n(t) = 0 \tag{22}$$

с начальным условием

$$\bar{T}_n(0) = T_0 \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\lambda}{a} e^{2\mu x} \varphi_n(x) dx. \tag{23}$$

Значения β_n^2, входящие в (22), заранее определены из алгебраических уравнений (11), (14), (17).

Решение задачи Коши (22), (23) хорошо известно:

$$\bar{T}_n(t) = \bar{T}_n(0) e^{-\beta_n^2 t}. \tag{24}$$

Используя формулу обращения, получаем окончательное решение задачи

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \bar{T}_n(t)}{\|\varphi_n\|^2}, \tag{25}$$

где выражения, входящие в правую часть (25), определяются формулами (7), (11)-(20), (24).

Таким образом, решение задачи (1)-(3) получено. Отметим, что при постановке задачи для простоты изложения схемы решения рассматривались однородные граничные условия первого рода. При задании граничных условий как произвольных функций вид ядер интегральных преобразований не изменится. В этом случае достаточно разделить исходную задачу на стационарную и квазистационарную части.

ВЫВОДЫ

Для описания тепловых процессов в технологических конструкциях может быть использована модель конвективной теплопроводности двухслойной среды. Общая схема решения применима для решения более сложных задач при изменении геометрии сред, а также при увеличении числа слоев. Особый интерес представляет распространение метода для решения двумерных и трехмерных задач. Кроме того полученное аналитическое решение представляет ценность для тестирования качества приближенных численных методов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Плятт Ш. Н. Расчеты температурных полей бетонных гидросооружений. Москва: Энергия, 1974. 407 с.
2. Цаплин А. И. Теплофизика в металлургии: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. гос. тех. ун-та, 2008. 230 с.
3. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. Москва: Мир, 1985. 384 с.
4. Пышнограев Ю. Н., Пышнограев Е. Ю. Построение системы собственных функций для уравнения конвективной диффузии с кусочно-постоянными коэффициентами. *Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2012. Т. 9, № 1. С. 7–12.
5. Карташев Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности. Москва: Высш. шк., 1985. 480 с.

REFERENCES

1. Plyatt, Sh. N. (1974). Calculations of temperature fields of concrete hydro structures. Moskow: Energy, Russia.
2. Tsaplin, A. I. (2008). Thermophysics in metallurgy: tutorial. Perm’: Permskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, Russia.
3. Farlow, S. (1985). Partial differential equations for scientists and engineers. Moskow: Mir, Russia.
4. Pyshnograev, Yu. N. & Pyshnograev, E. Yu. (2012). Construction of a system of eigenfunctions for the convective diffusion equation with piecewise constant coefficients. Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy, Vol. 9, No. 1, pp. 7-12.
5. Kartashov, E. M. (1985). Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. Moskow: Vysshaia shkola, Russia.

УДК 539.374

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ТЕРМОСИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНУЮ НАГРУЗКУ ТРУБЫ ПРИ ЕЕ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

[1]Свитлинец А. М., [2]Онищенко И. С., [1]Черняков Ю. А.

[1]*Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара, просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина*

[2]*ООО «Завод Мастер-Профи», г. Днепр, 49010, Украина*

anna.svitlinets@gmail.com

Элементы конструкций из гнутых стальных труб широко применяются в химической, аэрокосмической отраслях, в гражданском строительстве, при строительстве трубопроводов и в коммунальных сетях. Для изгиба труб обычно используются промышленные гибочные установки. Однако, при больших диаметрах труб использовать такие установки не представляется возможным. Кроме того, эти установки являются дорогостоящими и их использование для изгиба труб в небольшом объеме не рационально. В силу этого применяются более простые способы изгиба труб, такой, как, например, совместное действие изгибающего момента и локального нагрева. В результате такого технологического процесса на вогнутой поверхности трубы возникают складки и остаточные напряжения. При повторном нагружении эти складки и остаточные напряжения в трубе приводят к неоднородному напряженному состоянию и, как следствие, к снижению несущей способности трубы. В работе с помощью программного комплекса ABAQUS построена конечно-элементная модель деформации локально нагретой трубы при нагружении ее изгибающим моментом с повторным нагружением до момента исчерпания несущей способности трубы. Приведены результаты конкретных расчетов предельной нагрузки для трех длин трубы.

Ключевые слова: конечные элементы, оболочка, повторное нагружение, предельная нагрузка, идеальная пластичность.