

9. Опанасович В., Слободян М. Двовісний згин безмежної пластини з абсолютно жорсткою шайбою та тріщиною, береги якої контактують. *Вісник Львівського державного аграрного університету*. 2007. № 8. С. 75–87.
10. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.

REFERENCES

1. Vitvitskiy, P. M., Panasuk, V. V. & Yarema, S. Ya. (1973). Plastic deformations in the vicinity of cracks and destruction criteria. *Problemi prochnosti*, No. 2, pp. 3-18.
2. Kostyushko, I. A. & Kuzemko, V. A. (2001). Elastic plate with a crack normal detachment. *Matematichni metodi ta fiziko-mehanichni polia*, 44, No. 2, pp. 123-126.
3. Castro et alii J.T.P. (2011). Characterization of crack tip stress fields. *Forni di Sopra (UD)*, pp. 58-65.
4. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2010). Biaxial tension of a homogeneous isotropic plate with two equal coaxial cracks with regard for plastic zones near their tips. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 168, No. 5, pp. 643-652.
5. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2012). Finding the length of plastic zones near the top straight-through cracks in the materials at the interface roztyazi piecewise homogeneous isotropic plate. *Metodi rozviazuvannia prikladnih zadach mehaniki deformivnogo tverdogo tila*, No. 136, pp. 294-300.
6. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2014). Biaxial tension piecewise homogeneous plate with two cracks at the interface of materials based on plastic zones near their vertices. *Fiziko-himichna mehanika materialiv*, No. 6, pp. 67-72.
7. Kushnir, R. M., Nikolishin, M. M. & Osadchuk, V. A. (2003). Elastic and elastic-plastic shells with boundary condition defects. Lviv: SPOLOM.
8. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.
9. Opanasovich, V. & Slobodyan, M. (2007). Biaxial bending of plate with a rigid circular washer and crack with considering contact of it's edges. *Visnik Lvivskogo dergavnogo agrarnogo universitetu*, No. 8, pp. 75-87.
10. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsishin, A. P. (1976). Distribution of stresses around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka.

УДК 539.3

АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ

Спиця О. Г.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

sputytsa.o.g@gmail.com

Метод функцій податливості поширено на розв'язання основних граничних задач для багатошарових плит з плоскопаралельними, ізотропними, зчепленими, необмеженими в плані шарами. Задача розв'язується методом двовимірного перетворення Фур'є. Напружений стан кожного шару визначається шістькою допоміжних функцій, які пов'язані з трансформантами напружень і переміщень точок верхньої границі шару за допомогою спеціальних рекурентних співвідношень, що містять функції податливості. У статті запропоновано матричний метод визначення функцій податливості плити, досліджено їх властивості й особливості чисельної реалізації побудови рекурентних співвідношень. Запропонований алгоритм розв'язку поставленої задачі реалізовано для тришарової плити, яка знаходиться під дією нормальних навантажень, прикладених до верхньої та нижньої границь плити.

Ключові слова: багатошарова плита, допоміжні функції шару, матриці податливості, рекурентні співвідношення, трансформанти напружень та переміщень, метод скінченних елементів.

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОСНОВНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛИТ

Спица О. Г.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

sptysa.o.g@gmail.com

Метод функций податливости распространен на решение основных граничных задач для многослойных плит с плоскопараллельными, изотропными, сцепленными, неограниченными в плане слоями. Задача решается методом двумерного преобразования Фурье. Напряженное состояние каждого слоя определяется шестеркой вспомогательных функций, связанных с трансформантами напряжений и перемещений точек верхней границы слоя с помощью специальных рекуррентных соотношений, содержащих функции податливости. В статье предложен матричный метод определения функций податливости плиты, исследованы их свойства и особенности численной реализации построения рекуррентных соотношений. Предложенный алгоритм решения поставленной задачи реализован для трехслойной плиты, находящейся под действием нормальных нагрузок, приложенных к верхней и нижней границам плиты.

Ключевые слова: многослойная плита, вспомогательные функции слоя, матрицы податливости, рекуррентные соотношения, трансформанты напряжений и перемещений, метод конечных элементов.

ANALYTIC-NUMERIC APPROACH FOR SOLVING OF BOUNDARY VALUES PROBLEMS' OF MULTILAYERED PLATES

Spytsia O.

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

sptysa.o.g@gmail.com

The investigation of the stress-strain state of multilayered plates is actively employed in industrial and civil engineering. Such plates are an object of modern researches devoted to problems contact mechanics. At the same time, there is growing interest in methods for analytic determining of multilayered plates' stress-strain state.

One of the most efficient method for analytic investigation of the boundary value problems for elastic multilayer plates is the method of compliance functions. A compliance function is a function that depends on a parameter used for an integral transform, but the function doesn't depend on applied loads. In the article, the method of compliance functions is extended to the solution of the main boundary problems for multilayer plates with planar parallel, isotropic, coupled, plates with unlimited layers. The problem is solved by the method of a two-dimensional Fourier transform. The stress state of each layer is determined by the six auxiliary functions that are associated with stress transformants and displacements of the points of the upper layer's boundary using means of special recurrence relations containing compliance functions. A matrix method is suggested for determining a compliance function. The properties of compliance functions and recurrence relations' numerical implementation are investigated.

In addition, in the article based on compliance functions analytic method is compared with the finite elements method. In this comparison, we investigate the stress-strain state of three-layered plate that loaded by normal forces.

Key words: multilayer plate, auxiliary functions of a layer, matrices of compliance, recurrence relations, transformations of stresses and displacements, the finite element method.

ВСТУП

Визначення напружено-деформованого стану багатослойних плит, а також уточнення існуючих розрахункових схем реальних плитних конструкцій пов'язане з розширенням області застосування неоднорідних, у тому числі й багатослойних плит, у промисловому і цивільному будівництві та зумовлює досить широкий спектр прикладних задач механіки. У машино-, літако-, і кораблебудуванні, в електротехнічному та хімічному машинобудуванні, нафтовидобувній, металургійній та інших галузях промисловості як раціональний конструктивний елемент широко використовується штучно створений матеріал з шаруватою

структурою. При цьому, розширення сфери застосування шаруватих елементів пояснюється, з одного боку, нагальними проблемами інженерної практики, і, з іншого боку, розвитком і вдосконаленням сучасних методів дослідження. У зв'язку з цим зростає інтерес до побудови точних розв'язків задачі про визначення їх напружено-деформованого стану, з якими можна порівнювати розв'язки, побудовані за допомогою відомих чисельних методів.

Перевага багатошарової моделі реальних середовищ полягає в тому, що вона може відобразити різкі зміни механічних властивостей основи після переходу від одного шару до іншого. Крім того, багатошаровими основами можна апроксимувати системи, пружні властивості яких неперервно змінюються з глибиною за будь-яким законом.

Найбільш ефективним серед точних методів розв'язання основних граничних задач для пружних багатошарових середовищ є метод функцій податливості, запропонований для розв'язання основних задач теорії пружності для багатошарових основ Ю. А. Шевляковим, А. К. Приварниковим [5]. Функції податливості залежать від параметра використаного інтегрального перетворення, але не залежать від навантажень, прикладених до основи. Тому вони можуть бути визначені до розв'язання широкого кола граничних задач.

Необхідно зауважити, що при розв'язанні граничних задач теорії пружності для багатошарових основ методом функцій податливості не доводиться мати справу з будь-якими допоміжними системами лінійних алгебраїчних рівнянь. Трансформанти напружень та переміщень у довільному шарі основи можуть бути представлені безпосередньо через задані на його верхній межі напруження та переміщення за допомогою спеціальних рекурентних співвідношень, що містять функції податливості. Точний розв'язок основних граничних задач теорії пружності для багатошарових основ отримується у вигляді інтегралів Фур'є або Ханкеля. Дотепер цим методом розв'язана достатньо велика кількість граничних задач теорії пружності для багатошарових основ, у яких нижній шар є пружним або абсолютно жорстким півпростором.

Запропонований підхід є поширенням метода функцій податливості на багатошарові плити з плоскопаралельними, ізотропними, необмеженими в плані шарами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Під багатошаровою плитою розуміється пакет із скінченного числа невагомих однорідних ізотропних шарів. Кожен шар – це частина простору, обмежена двома паралельними площинами. Кожен шар характеризується товщиною h та двома пружними константами (E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона). Сусідні шари плити зчеплені. Нумерацію шарів проводимо зверху вниз, починаючи з одиниці. Усі величини, що відносяться до цього шару, будемо позначати нижнім індексом k . У кожному шарі введемо локальну прямокутну декартову систему координат $O_k X_k Y_k Z_k$ із початком на верхній межі шару так, щоб осі Z_k усіх систем координат збігалися і були спрямовані всередину шару (рис. 1). Усі осі X_k (Y_k) мають однаковий напрямок. Задача полягає у визначенні напружень і переміщень у шарах плити, якщо на поверхні плити відомі напруження.

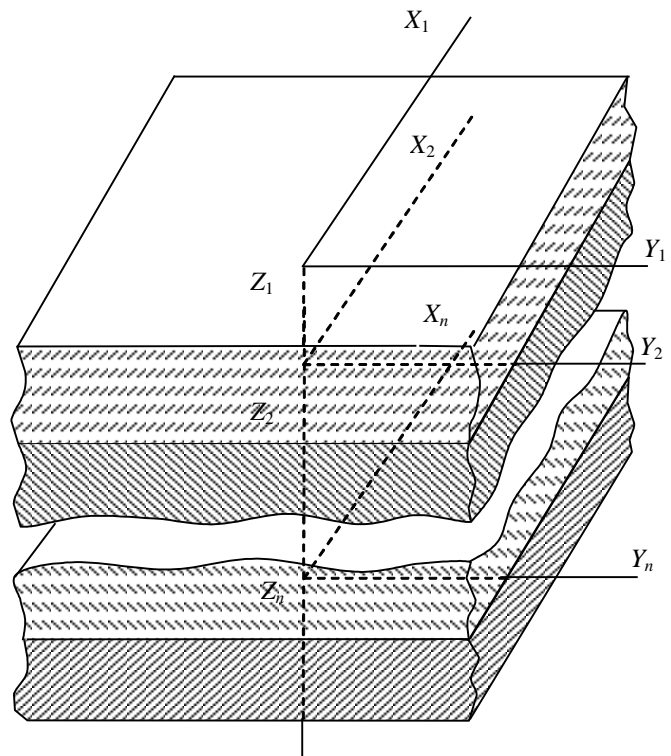


Рис. 1. Багатошарова плита

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розглянемо шар із номером k . Рівняння рівноваги у переміщеннях піддамо двовимірному перетворенню Фур'є по змінних x та y : $F(f(x, y)) = \bar{f}(\xi, \eta)$. Одержимо систему двох звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами щодо трансформант переміщень $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$. Загальний розв'язок цієї системи можна виразити через шість довільних функцій $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k \ \delta_k \ \tilde{\delta}_k)^T$ і $\bar{\beta}_k = (\beta_k \ \gamma_k \ \tilde{\gamma}_k)^T$ (будемо називати їх допоміжними функціями шару), що залежать від ξ і η та пов'язані з трансформантами напружень і переміщень точок верхньої межі шару такими співвідношеннями [2, 3]:

$$\alpha_k = \bar{\sigma}_{zk} \Big|_{z=0}; \quad \delta_k = -\frac{1}{p} (i\xi \bar{\tau}_{xzk} + i\eta \bar{\tau}_{yzk}) \Big|_{z=0}; \quad \tilde{\delta}_k = \frac{1}{p} (i\eta \bar{\tau}_{xzk} - i\xi \bar{\tau}_{yzk}) \Big|_{z=0};$$

$$\beta_k = \frac{E_k}{2(1-\nu_k^2)} p \bar{u}_z \Big|_{z=0}; \quad \gamma_k = \frac{E_k}{2(1-\nu_k^2)} (i\xi \bar{u}_x + i\eta \bar{u}_y) \Big|_{z=0};$$

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{E_k}{2(1-\nu_k^2)} (i\eta \bar{u}_x - i\xi \bar{u}_y) \Big|_{z=0}, \tag{1}$$

де $p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Використовуючи умови контакту сусідніх шарів

$$u_{xk}(x, y, h_k) = u_{xk+1}(x, y, 0); \quad u_{yk}(x, y, h_k) = u_{yk+1}(x, y, 0); \quad u_{zk}(x, y, h_k) = u_{zk+1}(x, y, 0),$$

$$\sigma_{zk}(x, y, h_k) = \sigma_{zk+1}(x, y, 0); \quad \tau_{xzk}(x, y, h_k) = \tau_{xzk+1}(x, y, 0); \quad \tau_{yzk}(x, y, h_k) = \tau_{yzk+1}(x, y, 0), \tag{2}$$

допоміжні функції $k+1$ -го шару виражаються через допоміжні функції k -го шару у матричному вигляді [1, 4]:

$$\bar{\alpha}_{k+1} = T_{11k} \bar{\alpha}_k + T_{12k} \bar{\beta}_k, \tag{3}$$

$$\bar{\beta}_{k+1} = T_{21k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} \bar{\beta}_k, \tag{4}$$

де

$$T_{11k} = \frac{1}{\nu_{1k}} \begin{pmatrix} \nu_{1k} c_k - p_k s_k & -\nu_{2k} s_k - p_k c_k & 0 \\ p_k c_k - \nu_{2k} s_k & \nu_{1k} c_k + p_k s_k & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{1k} c_k \end{pmatrix},$$

$$T_{12k} = \begin{pmatrix} s_k - p_k c_k & -p_k s_k & 0 \\ p_k s_k & s_k + p_k c_k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu_{1k} s_k}{2} \end{pmatrix},$$

$$T_{21k} = \frac{1}{\nu_{1k}^2 \Delta_k} \begin{pmatrix} \nu_{3k} s_k - p_k c_k & -p_k s_k & 0 \\ p_k s_k & \nu_{3k} s_k + p_k c_k & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu_{1k} s_k \end{pmatrix},$$

$$T_{22k} = \frac{1}{\nu_{1k} \Delta_k} \begin{pmatrix} \nu_{1k} c_k - p_k s_k & \nu_{2k} s_k - p_k c_k & 0 \\ \nu_{2k} s_k + p_k c_k & \nu_{1k} c_k + p_k s_k & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{1k} s_k \end{pmatrix};$$

$$p_k = ph_k, \quad s_k = sh p_k, \quad c_k = ch p_k, \quad v_{1k} = 2(1 - v_k),$$

$$v_{2k} = 1 - 2v_k, \quad v_{3k} = 3 - 4v_k, \quad \Delta_k = \frac{E_k(1 - v_{k+1}^2)}{E_{k+1}(1 - v_k^2)}. \quad (5)$$

1. Допоміжні функції $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k \quad \delta_k \quad \tilde{\delta}_k)^T$ і $\bar{\beta}_k = (\beta_k \quad \gamma_k \quad \tilde{\gamma}_k)^T$ шару не є незалежними. Вони пов'язані з відомими з умов задачі функціями $\bar{\alpha}_{n+1} = \left(\bar{\sigma}_{zn}; \quad -\frac{1}{p}(i\xi\bar{\tau}_{xzn} + i\eta\bar{\tau}_{yzn}); \quad \frac{1}{p}(i\eta\bar{\tau}_{xzn} - i\xi\bar{\tau}_{yzn}) \right)^T \Big|_{z=h_n}$ лінійними співвідношеннями:

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}. \quad (6)$$

Елементи матриць A_k і C_k називаються функціями податливості багатошарової плити. Ці функції не залежать від прикладених до плити навантажень і можуть бути визначені до розв'язку будь-якої конкретної задачі. Рекурентні співвідношення між функціями податливості мають вигляд [1]:

$$A_k = (A_{k+1} T_{12k} - T_{22k})^{-1} (T_{21k} - A_{k+1} T_{11k}), \quad (7)$$

$$C_k = (T_{22k} - A_{k+1} T_{12k})^{-1} C_{k+1}. \quad (8)$$

Для початку побудови функцій податливості за цими формулами треба знати функції податливості одношарової плити [1]:

$$A_n = -T_{12n}^{-1} T_{11n}, \quad (9)$$

$$C_n = T_{12n}^{-1}, \quad (10)$$

або використовуючи позначення (5),

$$A_n = \frac{1}{v_{1n}(s_n^2 - p_n^2)} \begin{pmatrix} v_{1n}(p_n + c_n s_n) & -p_n^2 - v_{2n} s_n^2 & 0 \\ -p_n^2 - v_{2n} s_n^2 & v_{1n}(-p_n + c_n s_n) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2c_n}{s_n}(s^2 - p^2) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$C_n = \frac{1}{s_n^2 - p_n^2} \begin{pmatrix} s_n + p_n c_n & p_n s_n & 0 \\ -p_n s_n & s_n - p_n c_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{v_{1n} s_n}(s^2 - p^2) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ ПОДАТЛИВОСТІ

З'ясуємо, як поведуть себе функції податливості (11) і (12) при $p_n = ph_n \rightarrow \infty$ та $p_n = ph_n \rightarrow 0$. Розглянемо кожний елемент матриць A_n і C_n при $p_n = ph_n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} A_n^\beta(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{-c_n s_n - p_n}{s_n^2 - p_n^2} = -1, \quad \lim_{p_n \rightarrow \infty} A_n^\gamma(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} B_n^\beta(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{v_{2n} s_n^2 - p_n^2}{v_{1n}(s_n^2 - p_n^2)} = \frac{v_{2n}}{v_{1n}},$$

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} B_n^\gamma(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{p_n - c_n s_n}{s_n^2 - p_n^2} = -1, \quad \lim_{p_n \rightarrow \infty} B_n^{\tilde{\gamma}}(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{-2c_n}{v_{1n} s_n} = -\frac{2}{v_{1n}},$$

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} C_n^\beta(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{s_n + p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2} = 0, \quad \lim_{p_n \rightarrow \infty} C_n^\gamma(p) = -\lim_{p_n \rightarrow \infty} D_n^\beta(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{p_n s_n}{s_n^2 - p_n^2} = 0,$$

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} D_n^\gamma(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{s_n - p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2} = 0, \quad \lim_{p_n \rightarrow \infty} C_{\tau n}^{\tilde{\gamma}}(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{2}{v_{1n} s_n} = 0$$

або в матричній формі

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} A_n = \begin{pmatrix} -1 & v_{2n} & 0 \\ & v_{1n} & \\ \frac{v_{2n}}{v_{1n}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{v_{1n}} \end{pmatrix}, \quad \lim_{p_n \rightarrow \infty} C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta; \quad (13)$$

при $p_n = p h_n \rightarrow 0$

$$\lim_{p_n \rightarrow 0} A_n^\beta(p) = \frac{-c_n s_n - p_n}{s_n^2 - p_n^2} = O\left(\frac{1}{p^3}\right), \quad \lim_{p_n \rightarrow 0} A_n^\gamma(p) = \lim_{p_n \rightarrow 0} B_n^\beta(p) = \frac{v_{2n} s_n^2 - p_n^2}{v_{1n} (s_n^2 - p_n^2)} = O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

$$\lim_{p_n \rightarrow 0} B_n^\gamma(p) = \frac{p_n - c_n s_n}{s_n^2 - p_n^2} = O\left(\frac{1}{p}\right), \quad \lim_{p_n \rightarrow 0} B_{\tau n}^{\tilde{\gamma}}(p) = \frac{-2c_n}{v_{1n} s_n} = O\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$\lim_{p_n \rightarrow 0} C_n^\beta(p) = \frac{s_n + p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2} = O\left(\frac{1}{p^3}\right), \quad \lim_{p_n \rightarrow 0} C_n^\gamma(p) = -\lim_{p_n \rightarrow 0} D_n^\beta(p) = \frac{p_n s_n}{s_n^2 - p_n^2} = O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

$$\lim_{p_n \rightarrow 0} D_n^\gamma(p) = \frac{s_n - p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2} = O\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad \lim_{p_n \rightarrow 0} C_{\tau n}^{\tilde{\gamma}}(p) = \frac{2}{v_{1n} s_n} = O\left(\frac{1}{p}\right)$$

або в матричній формі

$$\lim_{p_n \rightarrow 0} A_n = \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{p^3}\right) & O\left(\frac{1}{p^2}\right) & 0 \\ O\left(\frac{1}{p^2}\right) & O\left(\frac{1}{p}\right) & 0 \\ 0 & 0 & O\left(\frac{1}{p}\right) \end{pmatrix}, \quad \lim_{p_n \rightarrow 0} C_n = \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{p^3}\right) & O\left(\frac{1}{p^2}\right) & 0 \\ O\left(\frac{1}{p^2}\right) & O\left(\frac{1}{p^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & O\left(\frac{1}{p}\right) \end{pmatrix}.$$

Ураховуючи встановлені властивості функцій податливості n -го шару, методом математичної індукції можна встановити аналогічні властивості функцій податливості багат шарової плити.

ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ

При великих значеннях p у формулах (5) і відповідно (7), (8) будуть відніматися близькі за значенням величини. Тому ці формули непридатні для обчислення їх значень. Для уникнення цього недоліку вводяться позначення

$$p_k = p h_k, \quad e_k = e^{-2p_k}, \quad u = p_k e_k, \quad c_k = \frac{1 + e_k}{2},$$

$$s_k = \frac{1 - e_k}{2}, \quad \text{ch } p h_k = c_k e^{p h_k}, \quad \text{sh } p h_k = s_k e^{p h_k}.$$

З урахуванням цих позначень та властивостей функцій податливості (13) отримаємо матрицю податливості (12) шару з номером n :

$$C_n = e^{-p_n} \begin{pmatrix} \frac{s_n + p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & \frac{p_n s_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & 0 \\ -\frac{p_n s_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & \frac{s_n - p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{v_{1n} s_n} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Матриця (7) записується у вигляді

$$A_k = A_{1k} + A_{2k}, \quad (15)$$

де

$$A_{1k} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{v_{2k}}{v_{1k}} & 0 \\ \frac{v_{2k}}{v_{1k}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{v_{1k}} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} A_k &= A_{1k} + A_{2k} = \left[\left(A_{1(k+1)} + A_{2(k+1)} \right) T_{12k} - T_{22k} \right]^{-1} \cdot \left[T_{21k} - \left(A_{1(k+1)} + A_{2(k+1)} \right) T_{11k} \right] = \\ &= \left[A_{1(k+1)} T_{12k} + A_{2(k+1)} T_{12k} - T_{22k} \right]^{-1} \cdot \left[T_{21k} - A_{1(k+1)} T_{11k} - A_{2(k+1)} T_{11k} \right] = \\ &= \left[\left(A_{1(k+1)} T_{12k} - T_{22k} \right) + A_{2(k+1)} T_{12k} \right]^{-1} \cdot \left[\left(T_{21k} - A_{1(k+1)} T_{11k} \right) - A_{2(k+1)} T_{11k} \right]. \end{aligned}$$

Звідки

$$A_{2k} = \left[\left(A_{1(k+1)} T_{12k} - T_{22k} \right) + A_{2(k+1)} T_{12k} \right]^{-1} \cdot \left[\left(T_{21k} - A_{1(k+1)} T_{11k} \right) - A_{2(k+1)} T_{11k} \right] - A_{1k}. \quad (16)$$

Для матриці податливості шару з номером n вирази (15) для матриць A_{1n} та A_{2n} будуть мати вигляд:

$$A_{1n} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{v_{2n}}{v_{1n}} & 0 \\ \frac{v_{2n}}{v_{1n}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{v_{1n}} \end{pmatrix}, \quad A_{2n} = e^{-p_n} \begin{pmatrix} -\frac{s_n + p_n^2 + p_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & \frac{p_n^2}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & 0 \\ \frac{p_n^2}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & -\frac{s_n + p_n^2 - p_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{v_{1n} s_n} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Для обчислення трансформант напружень та переміщень у k -м шарі плити необхідно знати один з двох допоміжних векторів $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k \quad \delta_k \quad \tilde{\delta}_k)^T$ або $\bar{\beta}_k = (\beta_k \quad \gamma_k \quad \tilde{\gamma}_k)^T$, пошук якого можна звести до відшукування допоміжних векторів $\bar{\alpha}_1 = (\alpha_1 \quad \delta_1 \quad \tilde{\delta}_1)^T$ або $\bar{\beta}_1 = (\beta_1 \quad \gamma_1 \quad \tilde{\gamma}_1)^T$

верхнього (першого) та $\bar{\alpha}_{n+1} = (\alpha_{n+1} \quad \delta_{n+1} \quad \tilde{\delta}_{n+1})^T$ або $\bar{\beta}_{n+1} = (\beta_{n+1} \quad \gamma_{n+1} \quad \tilde{\gamma}_{n+1})^T$ для нижнього $(n+1)$ -го шарів плити, якщо побудувати рекурентні співвідношення між векторами двох сусідніх шарів.

Для цього в першому випадку в рівність (3) підставляється замість $\bar{\beta}_k$ вираз (6), а замість A_k – (7). У результаті отримуються співвідношення:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{k+1} &= T_{11k} \bar{\alpha}_k + T_{12k} \left((A_{1k} + A_{2k}) \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1} \right) = (T_{11k} + T_{12k} A_{1k}) \bar{\alpha}_k + T_{12k} A_{2k} \bar{\alpha}_k + T_{12k} C_k \bar{\alpha}_{n+1} = \\ &= \left((TA)_{1k} + T_{12k} A_{2k} \right) \bar{\alpha}_k + T_{12k} C_k \bar{\alpha}_{n+1}, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$(TA)_{1k} = T_{11k} + T_{12k} A_{1k} = e^{-p_k} \begin{pmatrix} p_k + 1 & -p_k & 0 \\ p_k & 1 - p_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

Аналогічно, у другому випадку

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} &= T_{21k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = T_{21k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} \left[(A_{1k} + A_{2k}) \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1} \right] = \\ &= (T_{21k} + T_{22k} A_{1k}) \bar{\alpha}_k + T_{22k} A_{2k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} C_k \bar{\alpha}_{n+1} = (TA)_{2k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} A_{2k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} C_k \bar{\alpha}_{n+1}, \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$(TA)_{2k} = T_{21k} + T_{22k} A_{1k} = \frac{e^{-p_k}}{v_{1k} \Delta_k} \begin{pmatrix} -v_{1k} - p_k & p_k + v_{2k} & 0 \\ v_{2k} - p_k & p_k - v_{1k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

Сформулюємо алгоритм розв'язання основних граничних задач для багат шарових плит:

1. Обчислюються матриці податливості шару з номером n за формулами (14), (17), а для інших шарів за рекурентними співвідношеннями (8), (16).
2. З крайових умов задачі, що розглядається, обчислюються трансформанти Фур'є напружень та переміщень граничних точок плити, а потім знаходяться $\bar{\alpha}_1$ та $\bar{\alpha}_{n+1}$ за формулами (1).
3. Вектори допоміжних функцій $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k \quad \delta_k \quad \tilde{\delta}_k)^T$ або $\bar{\beta}_k = (\beta_k \quad \gamma_k \quad \tilde{\gamma}_k)^T$ знаходяться за формулами (18), (19) або (20), (21).
4. Трансформанти шуканих напружень та переміщень даються за формулами [2]:

$$\bar{u}_{xk}(\xi, \eta, z) = -\frac{1}{p^2} (i\xi) S_k - \frac{1}{p^2} (i\eta) T_k,$$

$$\bar{u}_{yk}(\xi, \eta, z) = -\frac{1}{p^2} (i\eta) S_k + \frac{1}{p^2} (i\xi) T_k,$$

$$p\bar{u}_{zk}(\xi, \eta, z) = U_{zk}^1 \bar{\alpha}_k + U_{zk}^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (U_{zk}^1 + A_k U_{zk}^2) \bar{\alpha}_k + U_{zk}^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$\bar{\sigma}_{xk}(\xi, \eta, z) = \frac{2G_k}{p^2} (i\xi)^2 S_k + \frac{2G_k}{p^2} (i\xi)(i\eta) T_k - \frac{2G_k v_k}{1 - 2\nu_k} \left(\frac{d\bar{u}_{zk}}{dz} - S_k \right),$$

$$\bar{\sigma}_{yk}(\xi, \eta, z) = \frac{2G_k}{p^2} (i\eta)^2 S_k - \frac{2G_k}{p^2} (i\xi)(i\eta) T_k - \frac{2G_k v_k}{1 - 2\nu_k} \left(\frac{d\bar{u}_{zk}}{dz} - S_k \right),$$

$$\bar{\sigma}_{zk}(\xi, \eta, z) = S_{zk}^1 \bar{\alpha}_k + S_{zk}^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (S_{zk}^1 + S_{zk}^2 A_k) \bar{\alpha}_k + S_{zk}^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$\bar{\tau}_{yzk}(\xi, \eta, z) = -G_k(i\eta) \bar{u}_z - \frac{G_k}{p^2}(i\eta) \frac{dS_k}{dz} + \frac{G_k}{p^2}(i\xi) \frac{dT_k}{dz},$$

$$\bar{\tau}_{xzk}(\xi, \eta, z) = -G_k(i\xi) \bar{u}_z - \frac{G_k}{p^2}(i\xi) \frac{dS_k}{dz} - \frac{G_k}{p^2}(i\eta) \frac{dT_k}{dz},$$

$$\bar{\tau}_{xyk}(\xi, \eta, z) = -\left((i\xi)^2 - (i\eta)^2\right) \frac{G_k}{p^2} T_k + \frac{2G_k}{p^2}(i\xi)(i\eta) S_k,$$

де

$$S_k(\xi, \eta, z) = S_k^1 \bar{\alpha}_k + S_k^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (S_k^1 + S_k^2 A_k) \bar{\alpha}_k + S_k^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$T_k(\xi, \eta, z) = T_k^1 \bar{\alpha}_k + T_k^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (T_k^1 + T_k^2 A_k) \bar{\alpha}_k + T_k^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$\frac{d\bar{u}}{dz}_{zk}(\xi, \eta, z) = dU_{zk}^1 \bar{\alpha}_k + dU_{zk}^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (dU_{zk}^1 + dU_{zk}^2 A_k) \bar{\alpha}_k + dU_{zk}^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$\frac{dS_k}{dz}(\xi, \eta, z) = dS_k^1 \bar{\alpha}_k + dS_k^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (dS_k^1 + dS_k^2 A_k) \bar{\alpha}_k + dS_k^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$\frac{dT_k}{dz}(\xi, \eta, z) = dT_k^1 \bar{\alpha}_k + dT_k^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (dT_k^1 + dT_k^2 A_k) \bar{\alpha}_k + dT_k^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1}.$$

Тут $p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $G_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}$,

$$dU_{zk}^1 = \frac{1}{2G_k(1-\nu_k)} (2(1-2\nu_k) \operatorname{ch} p z_k - p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad -\operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad 0),$$

$$dU_{zk}^2 = \frac{1}{G_k} ((1-2\nu_k) \operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad -2\nu_k \operatorname{ch} p z_k - p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad 0),$$

$$dS_k^1 = \frac{p}{2G_k(1-\nu_k)} (-\operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad -2(1-2\nu_k) \operatorname{ch} p z_k - p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad 0),$$

$$dS_k^2 = \frac{p}{2G_k} (-(1-2\nu_k) \operatorname{ch} p z_k - p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad -(3-2\nu_k) \operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad 0),$$

$$dT_k^1 = \frac{p}{G_k} (0; \quad 0; \quad \operatorname{ch} p z_k),$$

$$dT_k^2 = \frac{p}{2G_k} (0; \quad 0; \quad (1-2\nu_k) \operatorname{sh} p z_k),$$

$$U_{zk}^1 = \frac{1}{2G_k(1-\nu_k)} [(3-4\nu_k) \operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad -p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad 0],$$

$$U_{zk}^2 = \frac{1}{G_k} [2(1-\nu_k) \operatorname{ch} p z_k - p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad (1-2\nu_k) \operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad 0],$$

$$S_k^1 = -\frac{1}{2G_k(1-2\nu_k)} [pz_k \operatorname{sh}pz_k; (3-4\nu_k)\operatorname{sh}pz_k + pz_k \operatorname{ch}pz_k; 0],$$

$$S_k^2 = -\frac{(1-\nu_k)}{G_k(1-2\nu_k)} [(1-2\nu_k)\operatorname{sh}pz_k + pz_k \operatorname{ch}pz_k; 2(1-\nu_k)\operatorname{ch}pz_k + pz_k \operatorname{sh}pz_k; 0],$$

$$T_k^1 = \frac{1}{G_k} [0; 0; \operatorname{sh}pz_k],$$

$$T_k^2 = \frac{1}{G_k} [0; 0; (1-\nu_k)\operatorname{ch}pz_k],$$

$$S_{zk}^1 = -\frac{1}{2(1-\nu_k)} [-2(1-\nu_k)\operatorname{ch}pz_k + pz_k \operatorname{sh}pz_k; (1-2\nu_k)\operatorname{sh}pz_k + pz_k \operatorname{ch}pz_k; 0],$$

$$S_{zk}^2 = [\operatorname{sh}pz_k - pz_k \operatorname{ch}pz_k; -pz_k \operatorname{sh}pz_k; 0],$$

$$TU_k^1 = \frac{1}{2(1-\nu_k)} [pz_k \operatorname{ch}pz_k - 2(1-\nu_k)\operatorname{sh}pz_k; 2(1-\nu_k)\operatorname{ch}pz_k + pz_k \operatorname{sh}pz_k; 0],$$

$$TU_k^2 = [pz_k \operatorname{sh}pz_k; \operatorname{sh}pz_k + pz_k \operatorname{ch}pz_k; 0],$$

$$TS_k^1 = [0; 0; \operatorname{ch}pz_k],$$

$$TS_k^2 = [0; 0; (1-\nu_k)\operatorname{sh}pz_k].$$

5. Для того, щоб одержати напруження та переміщення в k -му шарі, піддамо оберненому перетворенню Фур'є знайдені на попередньому кроці їх трансформанти.

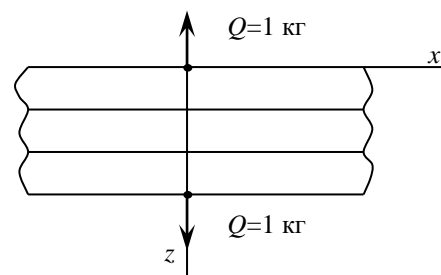
Для верифікації отриманого розв'язку була розроблена програмна система розв'язку основних граничних та контактних задач за допомогою метода скінченних елементів. Програма реалізована на мові Python 3 та дозволяє розв'язувати широкі класи задач механіки з використанням метода скінченних елементів.

ПРИКЛАД ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

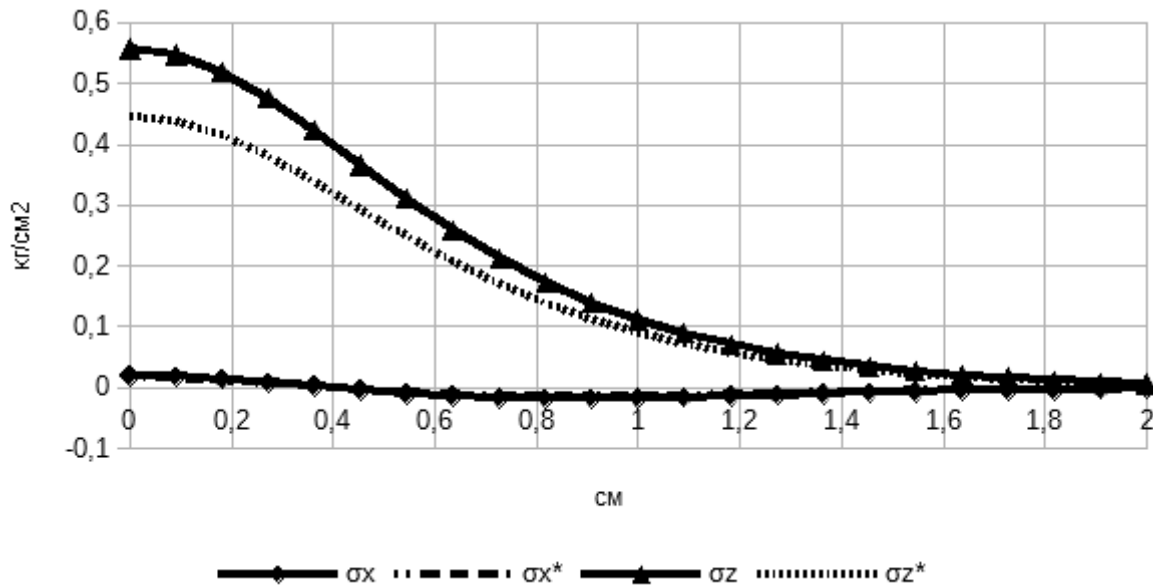
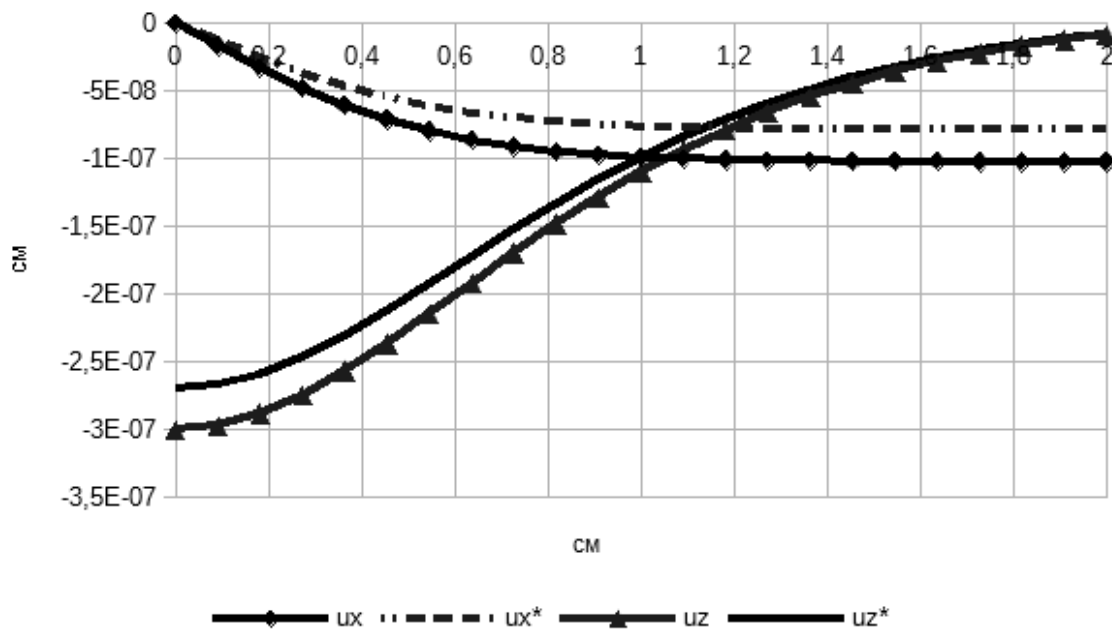
Розглядається випадок дії нормальних зосереджених сил на багатошаровий пакет. Пружна тришарова плита деформується навантаженнями $Q = 1$ кг, прикладеними до верхньої та нижньої границь.

Товщини шарів: $h_1 = 1$ см, $h_2 = 2$ см, $h_3 = 1$ см. Пружні характеристики шарів: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$;

$$E_1 = E_3 = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, E_2 = 1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$



Розглянемо шар з номером 2 на глибині $z_2 = 0$ в точках $M(R)$, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Результати чисельного розв'язання задачі методом скінченних елементів порівняно з чисельним розрахунком аналітичного підходу зображені на рис. 2, 3 (* позначено аналітичний розв'язок). Аналіз результатів показав, що максимальне відхилення чисельного розрахунку аналітичного підходу від чисельного розв'язку методом скінченних елементів складає 10%.

Рис. 2. Розподіл нормальних та дотичних напружень у другому шарі на глибині $z_2 = 0$ Рис. 3. Розподіл переміщень у другому шарі на глибині $z_2 = 0$

ВИСНОВКИ

Метод функцій податливості поширено на розв'язання основних граничних задач для багатошарових плит з плоскопаралельними, ізотропними, зчепленими, необмеженими в плані шарами. У просторі трансформант отримано рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості сусідніх шарів. Досліджено властивості функцій податливості та особливості чисельної реалізації побудови їх рекурентних співвідношень. Сформульований алгоритм розв'язку поставленої задачі доповнений прикладом чисельної реалізації для тришарової плити, яка знаходиться під дією нормальних навантажень, прикладених до верхньої та нижньої границь плити. Ефективність запропонованого підходу досліджена на порівнянні аналітичного та чисельного розв'язків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Величко И. Г., Приварников А. К., Спица О. Г. Матричный алгоритм аналитического определения напряженно-деформированного состояния упругой многослойной плиты. *Теор. и прикл. мех.* 2001. Вып. 34. С. 38–43.
2. Приварников А. К. Граничные задачи теории упругости для многослойных оснований простой и сложной структуры: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва, 1982. Рукопись. 350 с.
3. Приварников А. К., Ламзюк В. Д. Упругие многослойные основания. Днепропетровск, 1985. 162 с. Деп. в ВИНТИ 23.12.85, № 8789 –В.
4. Приварников А. К., Годес Ю. Я. О решении первой граничной задачи для упругого многослойного основания. *Устойчивость и прочность элементов конструкций*, 1986. С. 6–28.
5. Шевляков Ю. А., Приварников А. К. К расчету слоистых оснований. *Прикладная механика*. 1962. Т.8, Вып. 2. С. 113–119.

REFERENCES

1. Velychko, Y. H., Pryvarnykov, A. K. & Spytza, O. H. (2001). Matrix algorithm for the analytical determination of the stress-strain state of an elastic multilayer plate. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, Iss. 34, pp. 38-43.
2. Privarnikov, A. K. (1982). Boundary-value problems of the theory of elasticity for multilayered bases of a simple and complex structure (Unpublished doctor thesis). Moscow, SSSR.
3. Privarnikov, A. K. & Lamzyuk, V. D. (1985). Elastics multilayer bases. Dnepropetrovsk.
4. Privarnikov, A. K. & Godes, YU. YA. (1986). On the solution of the first boundary value problem for an elastic multilayered base. *Ustoychivost' i prochnost' elementov konstruktsey*, pp.6–28.
5. Shevlyakov, YU. A. & Privarnikov, A. K. (1962). To the calculation of layered bases. *Prikladnaya mekhanika*, Vol.8, Iss. 2, pp. 113–119.

УДК 539.312

ДИНАМІКА НЕСКІНЧЕННО ДОВГОЇ, ПІДКРІПЛЕНОЇ ПОВЗДОВЖНІМИ РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ, ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ТРИВИМІРНОМУ ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Фасоляк А. В.

*Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, 69063, Україна*

antonfasolyak@mail.ru

У роботі розглянуто динаміку нескінченно довгої циліндричної оболонки у лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному тривимірному середовищі. Досліджується вплив поздовжніх ребер жорсткості та їх взаємного розташування на динамічний напружено-деформований стан цієї механічної системи. До сьогодні подібні задачі розглядалися лише у стаціонарній постановці, тому новизною нашої роботи є те, що задача розглядається у нестационарній постановці. Рух середовища описувався динамічними рівняннями теорії пружності, рух оболонки – рівняннями, що враховують поперечний зсув та інерцію обертання, а рух поздовжніх ребер жорсткості – рівняннями теорії балок. Розв'язок задачі отримано шляхом розкладання невідомих функцій у тригонометричний ряд Фур'є, а також методом інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа. Обернення інтегральних перетворень здійснювалося чисельно. Отримані результати проаналізовано та проілюстровано графічно.

Ключові слова: циліндрична оболонка, поздовжні ребра жорсткості, пружне середовище, динамічне навантаження.