

УДК 539.3

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ

Фильштинский Л. А., д. ф.-м. н., профессор, Сушко Т. С., к. ф.-м. н.,  
Еременко А. А., аспирант

*Сумский государственный университет,  
ул. Римского-Корсакова, 2, г. Сумы, Украина*

leonid@mphis.sumdu.edu.ua

В рамках комплексной модели двумерной магнитоэластичности рассмотрена краевая задача механики разрушения для МЭУ пластины, ослабленной трещинами. Выписаны комплексные представления механических, магнитных и электрических полевых величин. Краевая задача для  $N$  трещин сведена к системе из  $N$  матричных сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядром Коши и  $N$  дополнительных матричных условий. Для прямолинейной произвольно ориентированной трещины получено точное решение краевой задачи. Выведены асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности механических, электрических и магнитных величин, а также энергосток в вершины дефектов. Рассмотрены примеры расчетов для нескольких конфигураций.

*Ключевые слова:* магнитоэластичная керамика, двумерная модель ЭМУ, макротрещины, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты интенсивности полевых величин, энергостоки в вершинах трещины.

## ПЛОСКА ЗАДАЧА МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНИ З ТРІЩИНАМИ

Фильштинський Л. А., д. ф.-м. н., професор, Сушко Т. С., к. ф.-м. н.,  
Єременко Г. А., аспірант

*Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, Україна*

leonid@mphis.sumdu.edu.ua

У рамках комплексної моделі двовимірної магнитоелектропружності розглянута крайова задача механіки руйнування для МЕУ пластини, послабленої тріщинами. Виписано комплексні подання механічних, магнітних і електричних польових величин. Крайова задача для  $N$  тріщин зведена до системи з  $N$  матричних сингулярних інтегральних рівнянь першого роду з ядром Коші і  $N$  додаткових матричних умов. Для прямолінійної довільно орієнтованої тріщини отримано точний розв'язок крайової задачі. Виведені асимптотичні формули для коефіцієнтів інтенсивності механічних, електричних і магнітних величин, а також енергостоків у вершини дефектів. Розглянуто приклади розрахунків для декількох конфігурацій.

*Ключові слова:* магнитоелектропружна керамика, двовимірна модель ЕМП, макротріщини, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності польових величин, енергостоки у вершини тріщин.

## PLANE PROBLEMS MAGNETOELECTROELASTICITY FOR PLATE WITH CRACKS

Filshinskii L. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Sushko T. S., Ph.D. in Physics and Maths,  
Yeremenko H. A., Graduate Student

*Sumy State University,  
Rimsky-Korsakov str., 2, Sumy, Ukraine,*

leonid@mphis.sumdu.edu.ua

Possessing the ability to transform mechanical, electrical and magnetic fields, magnetoelastic (MEE) materials are of great interest for research in various fields of technology, as a class of important functional materials. However, the main disadvantage of MEE materials is their fragility and low fracture viscosity. Therefore, it is important to study the fracture mechanics problems of the MEE materials.

In this paper, an effective analytical-numerical method has been developed for investigating coupled mechanical, magnetic, and electric fields in medium with defects. The fracture characteristics near the cracks vertices are determined.

A model of a two-dimensional MEE medium is described. The problem is reduced to the problem of the complex variable functions theory with respect to four analytical functions in corresponding affine domains. The fracture mechanics boundary value problem of the MEE plate, weakened by cracks, is considered. It is assumed that the cracks are two-sided mathematical sections whose curvatures are satisfied the Hölder condition. The boundary-value problem for N cracks reduced to a system of N first kind matrix singular integral equations (SIE) with the Cauchy type kernels. The solutions of the SIE system from physical considerations are sought in the class of functions with root singularities at the ends of the cuts. In this class, the solutions of the equations are not completely defined. To fix the solution, it is necessary to fulfill additional conditions: conditions for the uniqueness of mechanical displacements, electric and magnetic potentials on each of the cracks. The recent conditions lead to a system of homogeneous integral equations.

Asymptotic expressions for the field values near the cracks vertices are obtained using the asymptotics of Cauchy type integrals at the ends of the integration line. Expressions for the intensity coefficients of mechanical, electric and magnetic fields near the tips of the crack are determined.

The constructed analytical algorithm is applicable to the study of the effects of field interaction as a function of the geometric and physical parameters of the model. The algorithm is implemented numerically. The results of calculations are presented.

*Key words: magneto-electroelastic ceramics, two-dimensional model of MEE, macrocracks, singular integral equations, intensity factors of field quantities, the energy flows passing to the tip of the cracks.*

Обладея способностью преобразовывать механическую, электрическую и магнитную энергии, МЭУ материалы вызывают большой интерес для исследования в нескольких областях техники, как класс важных функциональных материалов. Тем не менее, большим недостатком магнитоэлектростатических материалов является их хрупкость и низкая вязкость разрушения. Как правило, эти материалы могут преждевременно выходить из строя из-за наличия некоторых дефектов (таких, как трещины и отверстия), возникающих в ходе производственного процесса и последующей обработки. Поэтому, большое значение имеет изучение проблемы разрушения МЭУ материалов. Ван и Мей в [1], основываясь на формализме Стро, рассмотрели задачу о разрушении пьезомагнитоэлектрического материала. В работе [2] авторы с использованием концепции интеграла взаимодействия и процедуры метода конечных элементов рассмотрели ряд задач механики разрушения. Плоская задача магнитоупругости для пластины с трещинами рассмотрена в [3].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве модели двумерной (МЭУ) среды примем:

Материальные уравнения

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & v_{11} & v_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & v_{12} & v_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & v_{11} & v_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & v_{12} & v_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Дифференциальные уравнения равновесия, электро и магнитоэластики [4]

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2), \quad (2)$$

$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0, \quad \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \quad \partial_1 H_2 - \partial_2 H_1 = 0. \quad (3)$$

Соотношения Коши

$$e_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \partial_2 u_2, \quad 2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1. \quad (4)$$

Условие совместности деформаций

$$\partial_1^2 e_{22} + \partial_2^2 e_{11} = 2\partial_1 \partial_2 e_{12}. \quad (5)$$

К этим соотношениям необходимо присоединить соответствующие механические, электрические и магнитные краевые условия на границе тела.

В (1)-(5):  $s_{ij} = s_{ij}^{DB}$  – коэффициенты деформации, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей,  $g_{kj} = g_{kj}^{\sigma D}$  и  $p_{kj} = p_{kj}^{\sigma D}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженности, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях;  $\beta_{kl} = \beta_{kl}^{\sigma}$ ,  $\chi_{kl} = \chi_{kl}^{\sigma}$  и  $\nu_{kl} = \nu_{kl}^{\sigma}$  – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях;  $u = (u_1, u_2)$  – вектор перемещения;  $\sigma_{ij}$  и  $e_{ij}$  – тензоры напряжения и деформации;  $D_i$  и  $B_i$  – компоненты векторов электрической и магнитной индукции;  $E_i$  и  $H_i$  – электрическая и магнитная напряженности полей.

Полевые величины представим в виде:

$$\begin{aligned} \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} &= \{\partial_2^2, -\partial_1 \partial_2, \partial_1^2\} A_{11}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} A_{11}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \\ \{D_1, D_2\} &= \{\partial_2, -\partial_1\} A_{12}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{12}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \\ \{B_1, B_2\} &= \{\partial_2, -\partial_1\} A_{13}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{13}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \{E_1, E_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^E \Phi_k(z_k), \quad \{H_1, H_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^H \Phi_k(z_k) \\ \alpha_k^E &= [g_{16} A_{11}(1, \mu_k) + \beta_{11} A_{12}(1, \mu_k) + \nu_{11} A_{13}(1, \mu_k)] \mu_k, \\ \alpha_k^H &= [p_{16} A_{11}(1, \mu_k) + \nu_{11} A_{12}(1, \mu_k) + \chi_{11} A_{13}(1, \mu_k)] \mu_k. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varphi^E = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_k^E \varphi_k(z_k), \quad \varphi^H = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_k^H \varphi_k(z_k), \quad \varphi_k(z_k) = \int \Phi_k(z_k) dz_k. \quad (8)$$

$$\Phi_k(z_k) = \frac{d^6}{dz_k^6} f_k(z_k) = f_k^{(6)}(z_k).$$

Функции  $f_k(z_k)$  аналитические в своих аффинных областях  $z_k$ .

$$\begin{aligned} \{u_1, u_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{p_k, q_k\} \varphi_k(z_k), \\ p_k &= (s_{11} \mu_k^2 + s_{12}) A_{11}(1, \mu_k) - g_{21} A_{12}(1, \mu_k) - p_{21} A_{13}(1, \mu_k), \\ q_k &= \left( s_{12} \mu_k + \frac{s_{22}}{\mu_k} \right) A_{11}(1, \mu_k) - \frac{g_{22}}{\mu_k} A_{12}(1, \mu_k) - \frac{p_{22}}{\mu_k} A_{13}(1, \mu_k). \end{aligned} \quad (9)$$

### КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МЭУ ДЛЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНАМИ

В декартовых осях  $0x_1x_2$  рассмотрим неограниченную плоскую магнитоэлектроупругую среду, ослабленную в некоторой конечной области трещинами  $\Gamma_m$  ( $m = \overline{1, M}$ ). Будем считать, что  $\Gamma_m$  – двусторонняя ляпуновская дуга [5], на её берегах задано распирающее давление

$p_m$ , а на бесконечности действуют равномерные поля механических напряжений растяжения и сдвига  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , а также электрической и магнитной индукции  $\langle D_1 \rangle$ ,  $\langle D_2 \rangle$  и  $\langle B_1 \rangle$ ,  $\langle B_2 \rangle$  соответственно (рис. 1).

Целью данной работы является построение эффективного аналитико-числового метода, позволяющего исследовать связанные механические, магнитные и электрические поля в теле, а также характеристики разрушения в вершинах трещин: коэффициенты интенсивности полевых величин и потоки энергии в вершинах.

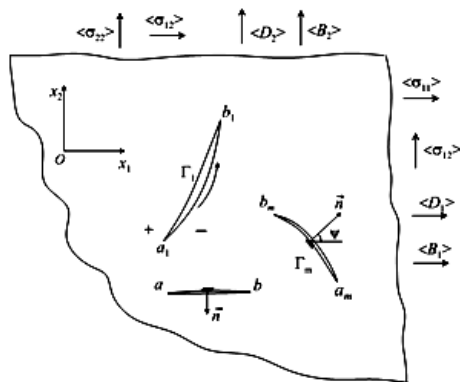


Рис. 1. Пластина с трещинами под действием равномерных полей на бесконечности

При решении краевых задач используем следующие предположения: в недеформируемом состоянии трещина представляет собой двусторонний математический разрез  $\Gamma_m$ ; берега трещины в процессе деформации не контактируют;  $\bigcap_{m=1}^M \Gamma_m = \emptyset$ .

В соответствии со сказанным, механические, электрические и магнитные краевые условия на берегах разреза  $\Gamma_m$  представим в виде

$$X_{1n}^\pm = -p \cos \psi, \quad X_{2n}^\pm = -p \sin \psi, \quad p = \{p_m \in \Gamma_m\}. \quad (10)$$

Здесь верхний знак соответствует левому берегу разреза  $\Gamma_m$  (при движении от его начала  $a_m$  к концу  $b_m$ ),  $\psi$  – угол между положительной нормалью к левому берегу и лучом  $Ox_1$ .

В комплексных переменных краевые условия можно представить следующим образом:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{jk} a_k(\psi) [\Phi_k] = [F_j^0], \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{jk} a_k(\psi) (\Phi_k^+ + \Phi_k^-) = (F_j^+ + F_j^-) \quad (j = \overline{1,4}), \quad (11)$$

$$R_{1k} = \mu_k A_{11}(1, \mu_k), \quad R_{2k} = -A_{11}(1, \mu_k), \quad R_{3k} = A_{12}(1, \mu_k), \quad R_{4k} = A_{13}(1, \mu_k),$$

$$F_1^\pm = -p \cos \psi, \quad F_2^\pm = -p \sin \psi, \quad F_3^\pm = 0, \quad F_4^\pm = 0, \quad [\Phi_k] = \Phi_k^+(z_k) - \Phi_k^-(z_k),$$

где знак «+» относится к левому берегу, а знак «-» – к правому берегу трещины.

Для решения краевой задачи теории функций (11) обобщим формализм, разработанный одним из авторов в [6] при рассмотрении трещин в анизотропных средах.

Комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  представим в виде обобщенных интегралов типа Коши

$$\Phi_k(z_k) = B_k + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - z_k} ds, \quad \Gamma = \bigcup_{m=1}^M \Gamma_m, \quad (12)$$

$$z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z, \quad \zeta_k = \operatorname{Re} \zeta + \mu_k \operatorname{Im} \zeta, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \omega_k(\zeta) = \{\omega_k^{(m)}(\zeta), \zeta \in \Gamma_m\}.$$

Здесь  $ds$  – элемент дуги в физической плоскости,  $B_k$  – постоянные, которые должны обеспечить условия на бесконечности,  $\omega_k$  определяются из краевых условий на  $\Gamma$  и некоторых дополнительных условий.

Следы функций (12) на берегах  $\Gamma_m$  можно определить при помощи формул Сохоцкого-Племеля. Имеем

$$\left\{ \Phi_k(z_k) \right\}_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma_m \\ (z_k \rightarrow \zeta_{0k})}}^{\pm} = B_k \pm \frac{i\omega_k^{(m)}(\zeta_0)}{2a_k(\psi_0)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds, \quad (13)$$

$$\psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta_{0k} = \operatorname{Re} \zeta_0 + \mu_k \operatorname{Im} \zeta_0, \quad \zeta_0 \in \Gamma_m.$$

Интеграл в (13) понимается в смысле главного значения по Коши.

Подставляя предельные значения (13) в краевые условия (11), приходим к следующей смешанной системе алгебраических и интегральных уравнений:

$$-2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \omega_k^{(m)}(\zeta) = [F_n] \quad (n = \overline{1, 4}; m = \overline{1, M}). \quad (14)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \frac{a_k(\psi_0)}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds = \frac{F_n^+ + F_n^-}{2} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} a_k(\psi_0) B_k \quad (n = \overline{1, 4}).$$

Правые части системы (14) имеют вид:

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{1k} a_k(\psi_0) B_k = -(\langle \sigma_{11} \rangle \cos \psi_0 + \langle \sigma_{12} \rangle \sin \psi_0) = -N_1(\zeta_0),$$

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{2k} a_k(\psi_0) B_k = -(\langle \sigma_{12} \rangle \cos \psi_0 + \langle \sigma_{22} \rangle \sin \psi_0) = -N_2(\zeta_0),$$

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{3k} a_k(\psi_0) B_k = -(\langle D_1 \rangle \cos \psi_0 + \langle D_2 \rangle \sin \psi_0) = -N_3(\zeta_0),$$

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{4k} a_k(\psi_0) B_k = -(\langle B_1 \rangle \cos \psi_0 + \langle B_2 \rangle \sin \psi_0) = -N_4(\zeta_0).$$

В дальнейшем анализе целесообразно избавиться от алгебраической системы в (14). Из нее следуют равенства, которые в матричной форме можно представить следующим образом:

$$R\omega = q, \quad \omega = R^{-1}q, \quad \operatorname{Im} q = 0 \quad (15)$$

$$q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}^T, \quad \omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}^T, \quad R_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}, \quad \det R \neq 0$$

константы  $R_{jk}$  определены в (11).

В соответствии с (15), система интегральных уравнений (14) может быть представлена в следующей матричной форме:

$$\int_{\Gamma} K(\zeta, \zeta_0) q(\zeta) ds = \pi N(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma = \bigcup \Gamma_m \quad (m = \overline{1, M}), \quad (16)$$

$$K(\zeta, \zeta_0) = \operatorname{Re} \{ R_1 G(\zeta, \zeta_0) R_1^{-1} \}, \quad q(\zeta) = \{q_1(\zeta), q_2(\zeta), q_3(\zeta), q_4(\zeta)\}^T,$$

$$G(\zeta, \zeta_0) = \text{diag} \left\{ \frac{a_1(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{01}}, \frac{a_2(\psi_0)}{\zeta_2 - \zeta_{02}}, \frac{a_3(\psi_0)}{\zeta_3 - \zeta_{03}}, \frac{a_4(\psi_0)}{\zeta_4 - \zeta_{04}} \right\},$$

$$N(\zeta_0) = \{-p \cos \psi_0 - N_1(\zeta_0), -p \sin \psi_0 - N_2(\zeta_0), -N_3(\zeta_0), -N_4(\zeta_0)\}^T, \quad p = (p_m, \zeta \in \Gamma_m).$$

Таким образом, краевая задача теории функций (11) свелась к матричному сингулярному интегральному уравнению первого рода (16) относительно действительного вектор-столбца  $q(\zeta)$ . Решение этого уравнения из физических соображений разыскиваем в классе функции с корневыми особенностями на концах разрезов. В этом классе решение уравнения (16) определяется не вполне. Для фиксации решения необходимо выполнить некоторые дополнительные условия, которые вытекают из физических соображений.

Из условий однозначности механических перемещений, электрического и магнитного потенциалов получаем дополнительные условия (по четыре условия на каждой трещине)

$$\int_{\Gamma_m} q^{(m)}(\zeta) ds = 0. \tag{17}$$

Таким образом, построенный аналитический алгоритм сводится к решению  $M$  матричных интегральных уравнений (16), совместно с дополнительными условиями (17). Последние фиксируют решения в классе функций неограниченных на концах дуг  $\Gamma_m$ .

Для вывода асимптотических выражений полевых величин в вершинах трещин введем параметризацию контура  $\Gamma_m$  (ниже индекс  $m$  опускаем)

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad a = \zeta(-1), \quad b = \zeta(1), \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma = \bigcup \Gamma_m, \quad -1 \leq \beta, \quad \beta_0 \leq 1. \tag{18}$$

Плотности  $\omega_k(\zeta)$ , фигурирующие в представлениях (12), имеют корневые особенности. Положим

$$\omega_k(\zeta) = \frac{\omega_k^*(\zeta)}{\sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)}} = \frac{\Omega_k(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad s'(\beta) = \frac{ds}{d\beta}. \tag{19}$$

Используя асимптотику интегралов типа Коши на концах линии интегрирования [11], запишем главную асимптотику функции (12) в вершине  $c$ .

$$\Phi_k^c(z_k) = \frac{\Omega_k(\pm 1)}{2\sqrt{2\zeta'_k(\pm 1)}} \frac{(\cos \theta_c + \mu_k \sin \theta_c)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{r}} = \frac{1}{2\sqrt{2r}} \Psi^c, \tag{20}$$

$$\Psi^c = \frac{\Omega_k(\pm 1)}{\sqrt{\zeta'_k(\pm 1)}} (\cos \theta_c + \mu_k \sin \theta_c)^{\frac{1}{2}},$$

Здесь верхний знак соответствует концу трещины  $c = b$ , нижний – началу  $c = a$ ;  $\Omega_k(\beta)$  определяется по соотношениям (19).

Коэффициенты интенсивности полевых величин определяем по формулам

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_n^{(I)}), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \tau_{ns}^{(II)}), \quad K_D = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} D_n^{(D)}), \quad K_B = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} B_n^{(B)}). \tag{21}$$

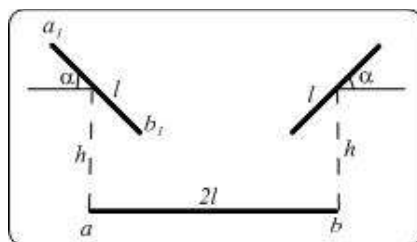


Рис. 2. Конфигурация трещин

В качестве расчетного варианта рассматривалась конфигурация, показанная на рис. 2. Интегральное уравнение (16), в совокупности с дополнительными условиями (17), методом механических квадратур сводилась к системе линейных алгебраических уравнений.

На рис. 3 представлены результаты расчетов коэффициентов интенсивности  $K_I$  в вершинах наклонной трещины в зависимости от угла при  $l=1$ ,  $h=1$ .

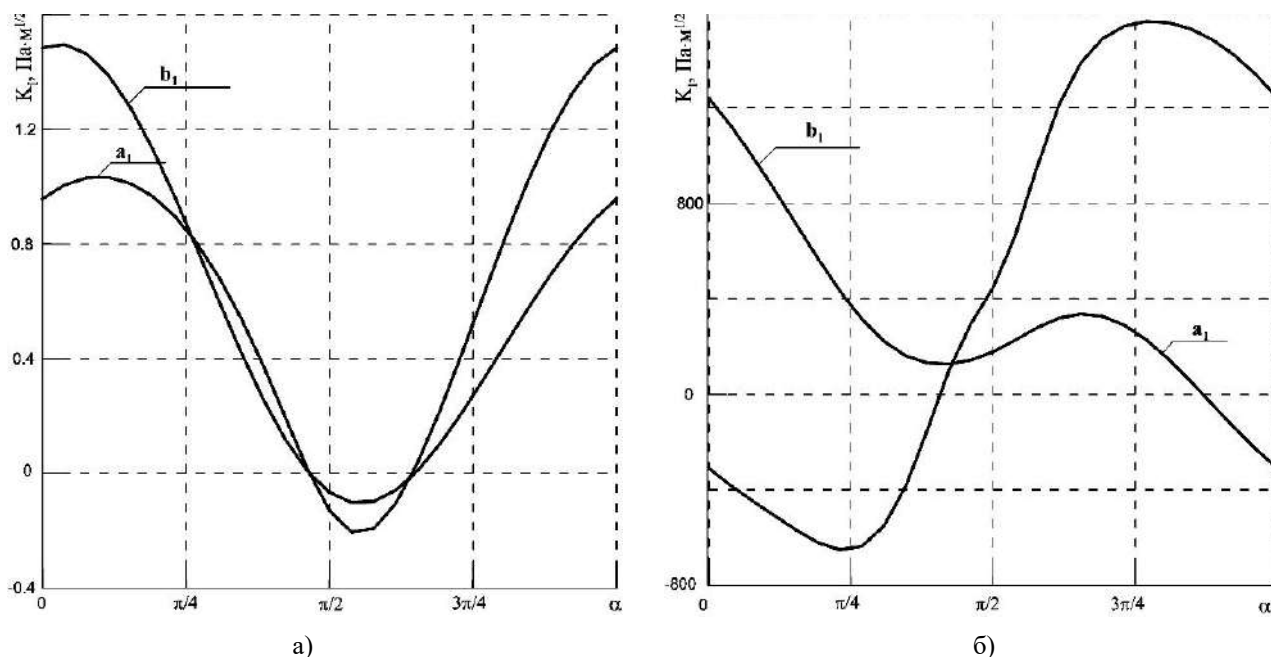


Рис. 3. Графики коэффициентов интенсивности  $K_I$  в вершинах трещин в зависимости от угла  $\alpha$  и действии  $\sigma_{22}^{\infty} = 1$  Па (а); и при действии электрической индукции  $D_2^{\infty} = 1$  Кл/м<sup>2</sup> (б)

## ВЫВОДЫ

Методом сингулярных интегральных уравнений рассмотрена граничная задача электромагнитоупругости для плоскости с трещинами. Получены формулы для КИН, электрических и магнитных величин. Установлена необходимость учета взаимного влияния электрического, магнитного и механического полей на характеристики разрушения пластины в окрестности вершин трещин.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wang B. L., Mai Y. W. Fracture of piezoelectromagnetic materials. *Mech. Res. Commun.* 2004. 31. P. 65–73.
2. Zhou Z. G., Chen Z. T. Basic solution of a Mode-I limited-permeable crack in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials. *Int. J. Solids Struct.* 2008. 45. P. 2265–2296.
3. Фильштинский Л. А., Носов Д. Н., Еременко А. А. Плоская задача магнитоупругости для пьезомагнитной среды с трещинами. *Физико-химическая механика материалов.* 2015. Т. 51, № 2. С. 109–115.
4. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. Москва: Наука, 1986. 160 с.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1973. 512 с.
6. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. *Изв. АН СССР. Мех. тв. тела.* 1976. № 5. С. 91–97.

## REFERENCES

1. Wang, B. L. & Mai, Y. W. (2004). Fracture of piezoelectromagnetic materials. *Mech. Res. Commun.*, 31, pp. 65-73.
2. Zhou, Z. G. & Chen, Z. T. (2008). Basic solution of a Mode-I limited-permeable crack in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials. *Int. J. Solids Struct.*, 45, pp. 2265-2296.

3. Fil'shtinskiy, L. A., Nosov, D. N. & Yeremenko, A. A. (2015). Plane magnetoelasticity problem for a piezomagnetic medium with cracks. *Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov*, Vol. 51, No. 2, pp. 109-115.
4. Novatskiy, V. (1986). *Electromagnetic effects in solids*. Moscow: Nauka.
5. Vladimirov, V. S. (1973). *Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka.
6. Fil'shtinskiy, L. A. (1976). Elastic equilibrium of a plane anisotropic medium, weakened by arbitrary curvilinear cracks. Limit transition to an isotropic medium. *Izv. AN SSSR. Mekh. tv. tela*, No. 5, pp. 91-97.

УДК 539.3

## МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПСЕВДОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

<sup>1</sup>Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор, <sup>2</sup>Стеблянюк П. А., д. ф.-м. н., профессор,  
<sup>1</sup>Петров А. Д., аспирант

<sup>1</sup>*Днепро́вский национальный университет им. Олесь Гончара,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49000, Украина*

<sup>2</sup>*Днепро́вский государственный технический университет,  
ул. Днепро́вская, 2, г. Каменское, Днепропетровская обл., 51900, Украина*

yu.chernyakov@gmail.com, caf-vmi@ukr.net, alex93203@rambler.ru

Рассматривается нестационарная термо-упруго-пластическая задача для тел из псевдоупругого материала. Особенность теории состоит в том, что диаграмма напряжения деформаций представляется в виде трехзвенной ломаной и может иметь ниспадающий участок. При этом характерные точки диаграммы зависят от температуры и фазового состояния материала. Такой характер диаграммы приводит к разрывным решениям и, как следствие, к подвижным границам фазовых переходов. Рассмотрен пример тонкой полосы при одноосном растяжении. Показано, что деформация неоднородна по образцу и её развитие зависит от свойств материала.

*Ключевые слова: термо-упруго-пластичность, псевдоупругость, фазовые переходы.*

## МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ ПСЕВДОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

<sup>1</sup>Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Стеблянюк П. О., д. ф.-м. н., професор,  
<sup>1</sup>Петров О. Д., аспірант

<sup>1</sup>*Дніпро́вський національний університет ім. Олесь Гончара,  
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна*

<sup>2</sup>*Дніпро́вський державний технічний університет,  
вул. Дніпро́вська, 2, м. Кам'янське, Дніпропетровська обл., 51900, Україна*

yu.chernyakov@gmail.com, caf-vmi@ukr.net, alex93203@rambler.ru

Розглядається нестационарна термо-пружно-пластична задача для тіл з псевдопружного матеріалу. Особливість теорії полягає в тому, що діаграма напруги деформацій представляється у вигляді триланкової ламаної і може мати спадаючу ділянку. При цьому характерні точки діаграми залежать від температури і фазового стану матеріалу. Такий характер діаграми призводить до розривних рішень і, як наслідок, до рухливих меж фазових переходів. Розглянутий приклад тонкої смуги при одноосному розтягуванні. Показано, що деформація неоднорідна вздовж зразка і її розвиток залежить від властивостей матеріалу.

*Ключові слова: термо-пружно-пластичність, псевдопружність, фазові переходи.*