

УДК 519.6: 004.942

## АВТОМАТИЗАЦИЯ АНАЛИЗА ТЕМПЕРАТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина*

s.choporoff@znu.edu.ua

Рассматривается проблема автоматизации численного анализа температурной устойчивости пластин произвольной формы с использованием метода конечных элементов. Решение представляется последовательностью взаимосвязанных шагов. Для описания геометрических областей предлагается использовать функциональный подход, основанный на неявных функциях и R-функциях В. Л. Рвачева. Для генерации дискретных моделей геометрических объектов используется метод фоновой сетки для четырехугольных конечных элементов. Расчетные модели базируются на теории сдвиговых деформаций второго порядка для пластин и оболочек.

*Ключевые слова: автоматизация, устойчивость, температурные напряжения, пластинка, неявная функция, R-функция, четырехугольный конечный элемент.*

## АВТОМАТИЗАЦІЯ АНАЛІЗУ ТЕМПЕРАТУРНОЇ СТІЙКОСТІ ПЛАСТИН З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*

s.choporoff@znu.edu.ua

Розглядається проблема автоматизації чисельного аналізу температурної стійкості пластин довільної форми з використанням методу скінченних елементів. Розв'язок представляється послідовністю взаємопов'язаних кроків. Для опису геометричних областей пропонується використовувати функціональний підхід, заснований на неявних функціях і R-функціях В. Л. Рвачова. Для генерації дискретних моделей геометричних об'єктів використовується метод фонові сітки для чотирикутних скінченних елементів. Розрахункові моделі базуються на теорії зсувних деформацій другого порядку для пластин і оболонок.

*Ключові слова: автоматизація, стійкість, температурні напруження, пластинка, неявна функція, R-функція, чотирикутний скінченний елемент.*

## AUTOMATING THE FINITE ELEMENT METHOD FOR THE THERMAL BUCKLING ANALYSIS OF PLATES

Choporov S. V., PhD in Engineering, Associate Professor

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine, 69600, Ukraine*

s.choporoff@znu.edu.ua

The finite element method is the most successful numerical method for simulation of mechanical problems. It can be viewed as a virtual machine that automates simulation taking as input geometry of a domain, meshing the domain into finite elements of the same shape and producing a system of discrete equations. Implementations of the finite element method are usually specialized. Implementations often use meshes as input and allow simulate a small set of variational problems. But only a little set of implementations allows carry out the thermal buckling analysis.

This article reviews researches that devoted to an automation of the finite element method. In particular, this work discusses an approach for a representation of a domain, an algorithm for a meshing procedure and an approach for the thermal buckling analysis of a plate.

As input, implicit functions are employed to represent a plate as a geometric object. Logical R-functions (conjunction, disjunction and negation) allow construct an implicit function for a complex domain in

constructive manner. In the first step, the meshing routine uses a background mesh to generate a set of quadrilaterals. Obtained meshes are refined by local smoothing. In the next step, the second-order shear deformation theory for plates and shells is used in the discretization of differential equations. Finally, solving the generalized eigenvalue problem we get eigenvalues and eigenvectors. Eigenvalues correspond to critical temperature; eigenvectors correspond to a field of nodal displacements.

In the article, developed approach is used to carry out the thermal buckling analysis of complex domains (for example, automotive clutches).

*Key words: automation, buckling, thermal stresses, plate, implicit function, R-function, quadrilateral finite element.*

## ВВЕДЕНИЕ

Сегодня метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее распространенных в автоматизации моделирования проблем механики. Достоверность и точность конечно-элементного анализа зависит от множества факторов, включающих особенности представления геометрических областей, генерации дискретных моделей и упрощающие гипотезы. В то же время, конечно-элементный анализ может быть рассмотрен как виртуальная машина, автоматизирующая его основные этапы. Программные реализации МКЭ часто являются специализированными. Их исходными данными, как правило, являются сетки конечных элементов и описания краевых задач. Однако, лишь небольшое количество реализаций МКЭ позволяет выполнять анализ устойчивости пластин, находящихся под действием температурных деформаций.

Целью настоящей работы является разработка подхода к автоматизации анализа устойчивости пластин, находящихся под действием температурных напряжений, с использованием МКЭ.

## ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Для виртуализации моделирования проблем механики в практике инженерно-исследовательской деятельности наибольшее распространение получили два подхода: 1) использование систем функционального проектирования (CAE – Computer-aided Engineering); 2) разработка специализированных программ с использованием библиотек конечно-элементного анализа.

На сегодня разработано значительное число как отечественных, так и зарубежных САЕ, которые предоставляют средства для инженерного анализа. Среди этих систем наиболее распространенными являются ANSYS [1-2], NASTRAN [3], PATRAN [4], ABAQUS [5], COSMOS [6], ЛИРА [7] и другие. Такие программные средства позволяют производить конечно-элементный расчет напряженно-деформированного состояния, запасов прочности, собственных частот и форм колебаний, анализ устойчивости, исследование установившихся и неустановившихся динамических процессов, решать задачи теплопередачи, акустических явлений и т. д. при исследовании конструкций из композитов, ламинатов и т. п. Стоит отметить, что такие программные системы доступны под проприетарными лицензиями и являются весьма дорогостоящими.

Среди отечественных САЕ известны программные комплексы (ПК) ЛИРА [7] и МОНОМАХ [8], разработанные под руководством профессора А. С. Городецкого. ПК ЛИРА предназначен для проектирования и расчета (в том числе исследования прочности и устойчивости) строительных и машиностроительных конструкций, а ПК МОНОМАХ – для автоматизированного проектирования железобетонных конструкций и многоэтажных каркасных зданий. Другой отечественный ПК МИРЕЛА+ [9] разработан под руководством профессора В. В. Киричевского. Данный ПК написан на языке FORTRAN и позволяет автоматизировать конечно-элементный анализ конструкций из эластомерных материалов. Система FORTU-FEM [10] основана на использовании объектно-ориентированного языка FROTU-3 для описания конечно-элементных моделей сложных объектов и процессов. При этом пользователь имеет возможность, используя FORTU-3, самостоятельно определить функционал энергии, минимизация которого будет соответствовать состоянию моделируемой системы. Среди данных САЕ выполнять анализ устойчивости конструкций позволяет только ПК ЛИРА (применяется метод итерации подпространств [11]).

Среди специализированных программных библиотек для автоматизации МКЭ можно выделить FreeFem++, Elmer, deal.II, FeniCS и другие. Такие библиотеки в большинстве своем предоставляют проблемно-ориентированные языки для описания краевых задач. Автоматизировать исследования устойчивости позволяют FreeFem++ и Elmer, однако, в этих библиотеках не предусмотрены подсистемы анализа устойчивости пластин или оболочек под действием температурных полей.

Разработка подходов для конечно-элементного анализа устойчивости пластин и оболочек, находящихся под действием температурных напряжений, является предметом исследований многих публикаций, детальный обзор которых можно найти в работе [12]. В работе [13] исследована устойчивость несовершенных пластин, находящихся под действием температурных деформаций. Исследованию устойчивости оболочек из композитных материалов, находящихся под действием равномерного температурного поля, посвящено исследование, основанное на использовании МКЭ и теории сдвиговых деформаций высокого порядка [14]. В работе [15] исследована устойчивость находящихся под действием температурного поля цилиндрических панелей, сделанных из функционально-градиентных материалов. Сравнение аналитического и численного исследования устойчивости композитных пластин, находящихся под действием температурных напряжений, можно найти в работе [16]. Особенности использования рядов Фурье в конечно-элементном анализе рассмотрены в работе [17].

### ПРОЦЕСС АВТОМАТИЧЕСКОГО КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА

Традиционная схема автоматизации конечно-элементного анализа состоит из трех основных фаз: формулировка задачи, формализация задачи, численный эксперимент (рис. 1). На первой фазе происходит выбор физической и геометрической структуры проектируемого объекта, определение режимов функционирования и взаимодействия с окружающей средой. Вторая фаза связана с построением формальной идеализированной модели: геометрические объекты представляются в виде аналитических моделей, формализуются математические модели физических процессов в виде систем дифференциальных и/или интегральных уравнений, начальных и граничных условий и т.п. Третья фаза связана с непосредственным проведением численного эксперимента: строятся дискретные модели геометрических объектов, в соответствии с математическими моделями физических процессов реализуются конечно-элементные модели, визуализируются и обрабатываются результаты. Фаза физической постановки считается наименее алгоритмизируемой и является предметом исследований, посвященных искусственному интеллекту [18-19]. Предметом настоящего исследования является методологическая и алгоритмическая база последних двух фаз.



Рис. 1. Схема конечно-элементного анализа

## ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Технические объекты (детали, конструкции, строения) обладают определенной формой и конечными размерами. Для их моделирования в системах автоматизации проектных работ используются абстрактные понятия сплошных тел (solids) – замкнутые и ограниченные подмножества трехмерного евклидова пространства. При этом для моделирования геометрических объектов с постоянной толщиной (например, пластин) используются двумерные сплошные множества. Способы описания модели сплошного тела принято называть схемами представления. Одна из наиболее универсальных схем представления сплошных тел основана на использовании неявных функций и аппарата теории R-функций В. Л. Рвачева [20] для логического конструирования моделей сложных геометрических объектов. Простейшие формы (примитивы) представляются элементарными функциями. Например, если предположить, что неявная функция должна быть положительна внутри области, равна нулю на ее границе и, соответственно, быть меньше нуля вне ее, то функция

$$\text{circle}(x, y, r) = 1 - \frac{x^2 + y^2}{r}, \quad r > 0, \quad (1)$$

определяет область, ограниченную окружностью радиуса  $r$  с центром в начале координат.

Для логического конструирования неявных функций, соответствующих более сложным областям, используются системы R-функций [20]. Например, одна из наиболее распространенных на практике систем R-функций – система  $\mathfrak{R}_0$ , имеет вид [20]

$$\begin{cases} \neg x \equiv -x, \\ x_1 \wedge x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ x_1 \vee x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – значения неявных функций. Эта система определяет логическое отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, операндами которых выступают неявные функции, соответствующие более простым логическим примитивам.

Например, пластинка прямоугольной формы может быть представлена как пересечение двух полос:

$$\text{rectangle}(x, y, w, h) = \left[ 1 - \left( \frac{2}{w} x \right)^2 \right] \wedge \left[ 1 - \left( \frac{2}{h} y \right)^2 \right], \quad w > 0, \quad h > 0, \quad (3)$$

где  $w$  – ширина,  $h$  – высота.

Аналогичным образом можно представить более сложные геометрические области.

### ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Один из наиболее оптимальных подходов к построению дискретных моделей двумерных областей, представленных неявными функциями, основан на использовании фоновой сетки (например, равномерной), которая покрывает исходную область. Из фоновой сетки удаляются ячейки, которые пересекаются границей или являются внешними. Затем новые элементы строятся непосредственно в области анализа заполнением пространства между границей и оставшимися элементами фоновой сетки. Такой подход реализован для треугольников [22] и четырехугольников [23], он может быть описан следующим алгоритмом.

**algorithm** background-grid-mesh

**input:**

$w(x, y)$  – уравнение двумерного геометрического объекта;

$G = \{v_i = (p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}))\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  – фоновая сетка, состоящая из  $n$  – ячеек,

по  $m$  вершин в каждой;

$$V = \{p_k = (x_k, y_k)\}, \quad k = \overline{1, c} - \text{множество характерных точек};$$

**begin**

**for each**  $p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ :

**if**  $w(x_{i,j}, y_{i,j}) \leq 0$  **then**  $G = G \cup \{v_i\}$ ;

**for each**  $p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ :

$$\bar{n}_{i,j} = \frac{1}{k} \sum_{f=1}^k \bar{n}(e_{i,f}), \text{ где } \{e_{i,f}\} - \text{множество ребер инцидентных вершине } p_{i,j};$$

**for each**  $p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ :

**if**  $n_{i,j} > 0$  **then**  $b_{i,j} = \text{binary}(w(x, y), p_{i,j}, p_{i,j} + d\bar{n}_{i,j})$ ;

**for each**  $e_{i,j} = (p_{i,j_1}, p_{i,j_2}) \in G$ :

**if**  $\exists b_{i,j_1}$  **and**  $\exists b_{i,j_2}$  **then**  $G = G \cup \text{element}((p_{i,j_1}, p_{i,j_2}, b_{i,j_2}, b_{i,j_1}))$ ;

$\text{smooth}(G)$ ;

**return**  $G$ .

В приведенном выше алгоритме функция  $\text{binary}(w(x, y), a, b)$  ищет корень функции  $w(x, y)$  на отрезке  $[a; b]$ , функция  $\text{element}(a, b, c, d)$  формирует два треугольника (по диагоналям) или один четырехугольник в зависимости от выбранной формы элемента. Завершающим шагом является процедура сглаживания, которая при простейшей реализации предполагает, что каждый узел перемещается в позицию среднего арифметического координат соседних узлов. Например, для формулы (3) при  $w = h = 10$ , если использовать в качестве фоновой равномерную сетку  $10 \times 10$  элементов, будет получена дискретная модель, приведенная на рис. 2.

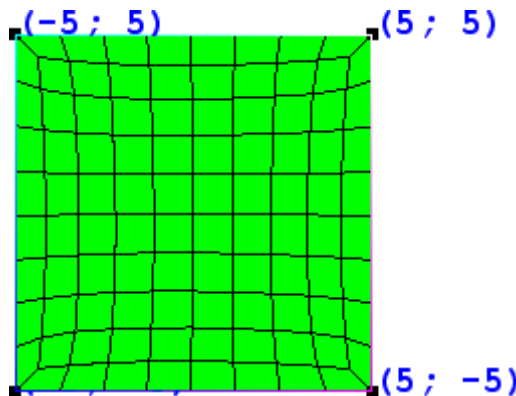


Рис. 2. Дискретная модель квадратной пластинки

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ

Двух- и трехмерные конечные элементы (солиды) считаются весьма эффективными в анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) сплошных объектов. Трехмерные конечные элементы (КЭ) можно непосредственно применять при расчете пластинок, уменьшая их размер в направлении толщины. Тем не менее, при их применении возникают определенные трудности. Во-первых, наличие трех степеней свободы в каждом узле приводит к большим коэффициентам жесткости для перемещений по толщине оболочки [24], что может быть причиной плохой обусловленности системы уравнений, если толщина пластинки мала по сравнению с остальными размерами КЭ. Во-вторых, использование нескольких узлов по толщине оболочки является неэкономичным. Поэтому на практике, как правило, для исследования НДС пластинок используют специальные КЭ – элементы пластинок.

Теория сдвиговых деформаций для пластинок является развитием положений теории Тимошенко-Миндлина. Используя стандартные гипотезы о малости перемещений и деформаций, а также о несжимаемости и сохранении нормалей срединной поверхности, данная теория учитывает поперечные сдвиговые деформации [25]. Поле предполагаемых перемещений определяется соотношением

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z\theta_x(x, y), \\ v(x, y, z) = z\theta_y(x, y), \\ w(x, y, z) = w_0(x, y), \end{cases} \quad (4)$$

где  $w_0(x, y)$  – прогиб точек срединной поверхности пластинки,  $\theta_x(x, y)$  и  $\theta_y(x, y)$  – повороты нормали относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно. Значения  $(w_0, \theta_x, \theta_y)$  называются обобщенными перемещениями.

Вектор деформаций определяется дифференцированием перемещений:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Вектор поперечных сдвиговых деформаций представляется в виде

$$\{\boldsymbol{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Соотношения между напряжениями и деформациями для изотропного материала могут быть представлены как

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad (7)$$

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}]\{\boldsymbol{\gamma}\}, \quad (8)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $G$  – модуль сдвига.

Энергия деформаций, элементарного объема пластинки  $V_e$ , находящейся под действием начальных напряжений, после исключения в градиентах перемещений членов выше второго порядка может быть представлена формулой

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{V_e} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV_e + \frac{1}{2} \iiint_{V_e} \{\boldsymbol{\tau}\}^T \{\boldsymbol{\gamma}\} dV_e + \iiint_{V_e} \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \{\boldsymbol{\varepsilon}_L\} dV_e, \quad (8)$$

где  $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$  – вектор начальных напряжений элементарного объема;  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_L\}$  – вектор градиентов «больших» перемещений, который имеет вид [26]

$$\{\varepsilon_L\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}. \quad (9)$$

Начальные напряжения вычисляются интегрированием в каждой точке после исследования плоско-напряженного состояния пластинки, находящейся в температурном поле. Для этого решается задача вида

$$\iiint_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV_e = \iiint_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\varepsilon_t\} dV_e, \quad (10)$$

где  $\{\varepsilon_t\} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix}$  – вектор температурных деформаций ( $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,  $T$  – температура);  $[\mathbf{B}]$  – матрица связей между напряжениями и деформациями.

В результате задача исследования устойчивости пластинки требует решения обобщенной проблемы собственных значений вида

$$([\mathbf{K}] - \lambda_i [\mathbf{G}]) \{\mathbf{V}_i\} = 0, \quad (11)$$

где  $[\mathbf{K}]$  – матрица жесткости;  $[\mathbf{G}]$  – геометрическая матрица;  $\lambda_i$  – собственное число (множитель для вектора сил);  $\{\mathbf{V}_i\}$  – собственный вектор перемещения точек на пластинке, соответствующих  $i$ -му режиму потери устойчивости.

### ЭКСПЕРИМЕНТЫ

1. Прямоугольная пластинка, находящаяся под действием равномерной температуры.

Прямоугольная пластинка представляется формулой (3). Если использовать в качестве фоновой сетку с шагом 0,05, при  $w = 10$  м,  $E = 1$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $t = 0,1$  м (толщина пластинки),  $\alpha = 1 \times 10^{-6}$  °С (коэффициент температурного расширения), то при помощи описанного выше подхода будут получены результаты для различных соотношений толщины и высоты, приведенные в табл. 1.

Таблица 1 – Сравнение критических температур (°С) для свободно опертой пластинки

$w/h$	Критическая температура из [27]	Критическая температура	Погрешность
0,25	0,6727	0,7148	0,0626
0,5	0,7913	0,8266	0,0446
0,75	0,989	1,0204	0,0317
1,0	1,2657	1,3002	0,0272
1,25	1,6234	1,6678	0,0273
1,5	2,0561	2,1216	0,0318
1,75	2,5696	2,6638	0,0367
2,0	3,1617	3,2902	0,0406
2,25	3,8324	4,0018	0,0442

Продолжение табл. 1

$w/h$	Критическая температура из [27]	Критическая температура	Погрешность
2,5	4,5817	4,7992	0,0475
2,75	5,4096	5,6781	0,0496
3,0	6,3144	6,6419	0,0519

2. Квадратная пластинка с треугольным вырезом.

Квадратная пластинка со стороной  $a$  и треугольным вырезом по центру может быть представлена формулой

$$\text{quadtri}(x, y) = \text{rectangle}(x, y, a, a) \wedge \neg \text{regular}(x, y, r, 3), \tag{12}$$

где функция  $\text{regular}(x, y, r, n)$  представляет правильный  $n$ -угольник, вписанный в окружность радиуса  $r$  с центром в начале координат. Функция  $\text{regular}(x, y, r, n)$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{regular}(x, y, r, n) = & [(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)] \wedge \\ & \wedge [(y - y_2)(x_3 - x_2) - (x - x_2)(y_3 - y_2)] \wedge \dots \wedge \\ & \wedge [(y - y_n)(x_n - x_{n-1}) - (x - x_n)(y_n - y_{n-1})], \end{aligned} \tag{13}$$

$$x_i = r \cos(\alpha_i), \quad y_i = r \sin(\alpha_i), \quad \alpha_i = \frac{2\pi}{n}(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r > 0, \quad n > 0.$$

В результате применения алгоритма background-grid-mesh с равномерной сеткой  $100 \times 100$  элементов будет построена дискретная модель, представленная на рис. 3.

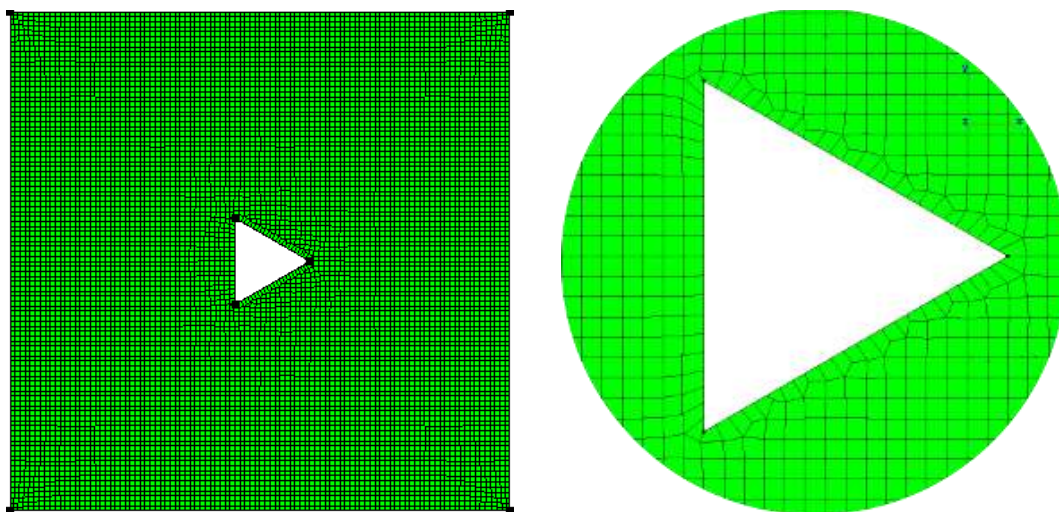


Рис. 3. Дискретная модель пластинки с треугольным отверстием

Изменяя радиус описанной окружности в формуле (12) в интервале от  $[a/10; a/3]$ , приняв  $a = 10$  м,  $E = 1$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $t = 0,1$  м (толщина пластинки),  $\alpha = 1 \times 10^{-6}$  °С, при условии, что пластинка оперта по внешнему контуру и контур отверстия является свободным, можно получить зависимость критической температуры от размера отверстия в виде графика, представленного на табл. 2.

Таблица 2 – Зависимость критической температуры от радиуса отверстия

$r, \text{ м}$	$a/10$	$a/9$	$a/8$	$a/7$	$a/6$	$a/5$	$a/4$	$a/3$
$T_{cr}, \text{ °С}$	1,2702	1,2359	1,1937	1,1367	1,0647	0,9722	0,8590	0,7352

На рис. 4 сопоставляются формы потери устойчивости при  $r = a/10$  и  $r = a/3$ .



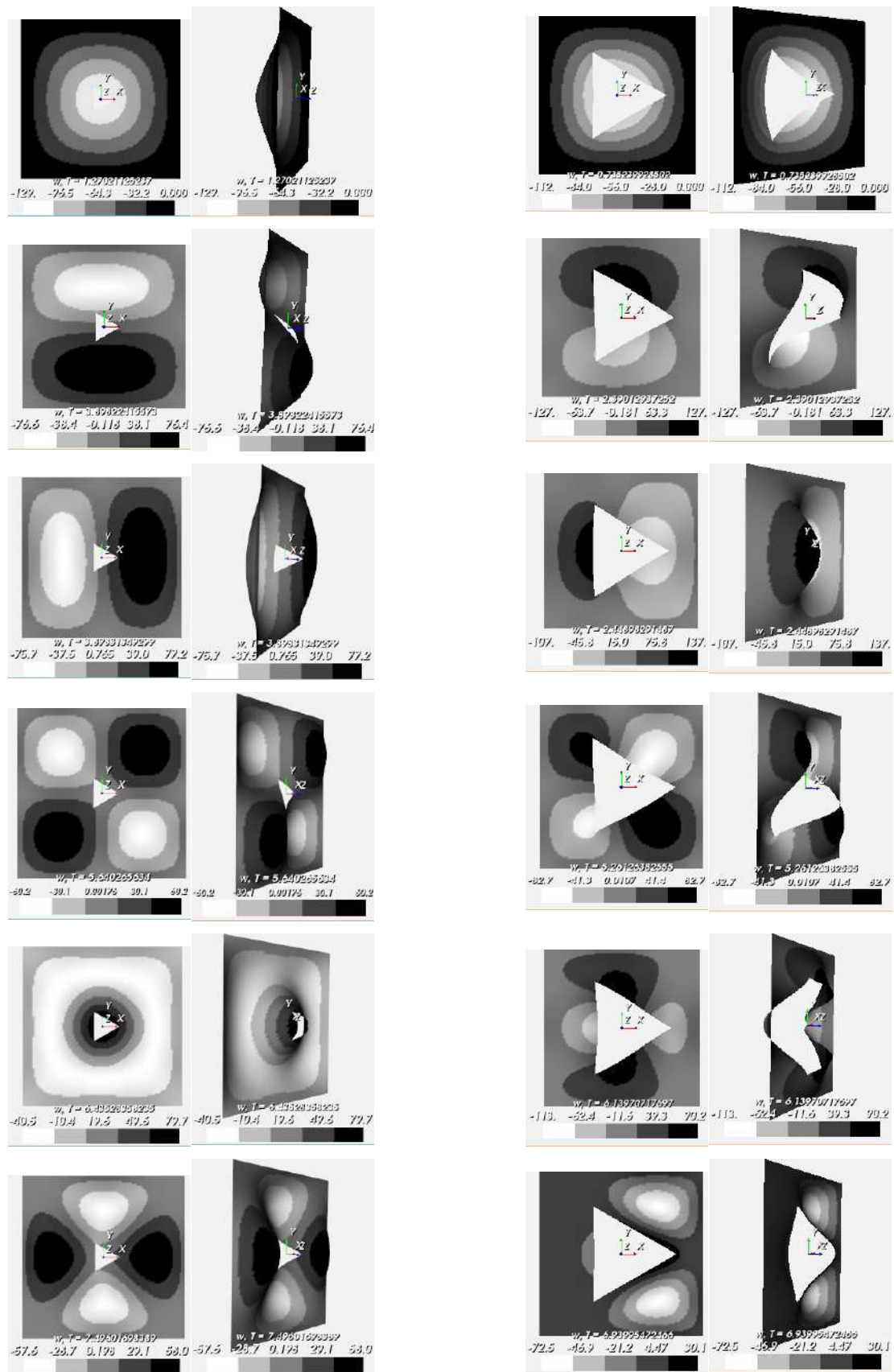


Рис. 4. Формы потери устойчивости пластинки с треугольным отверстием

### 3. Фрикционный диск сцепления.

Фрикционный диск сцепления (рис. 5) может быть представлен следующей неявной функцией

$$\text{clutch}(x, y) = [\text{strip}(x \cos(\alpha_0) + y \sin(\alpha_0), w) \vee \text{strip}(x \cos(\alpha_1) + y \sin(\alpha_1), w) \vee \dots \vee \text{strip}(x \cos(\alpha_4) + y \sin(\alpha_4), w) \vee \text{circle}(x, y, R)] \wedge \text{circle}(x, y, S) \wedge \neg \text{circle}(x, y, r), \quad (14)$$

где  $S$  – радиус окружности вершин зубьев (рис. 5);  $R$  – радиус окружности впадин зубьев;  $r$  – радиус центрального отверстия;  $w$  – ширина зубца муфты;  $\text{strip}(x, w) = 1 - \frac{4x^2}{w^2}$  – функция, представляющая вертикальную полосу;  $\text{circle}(x, y, r)$  – функция (1).

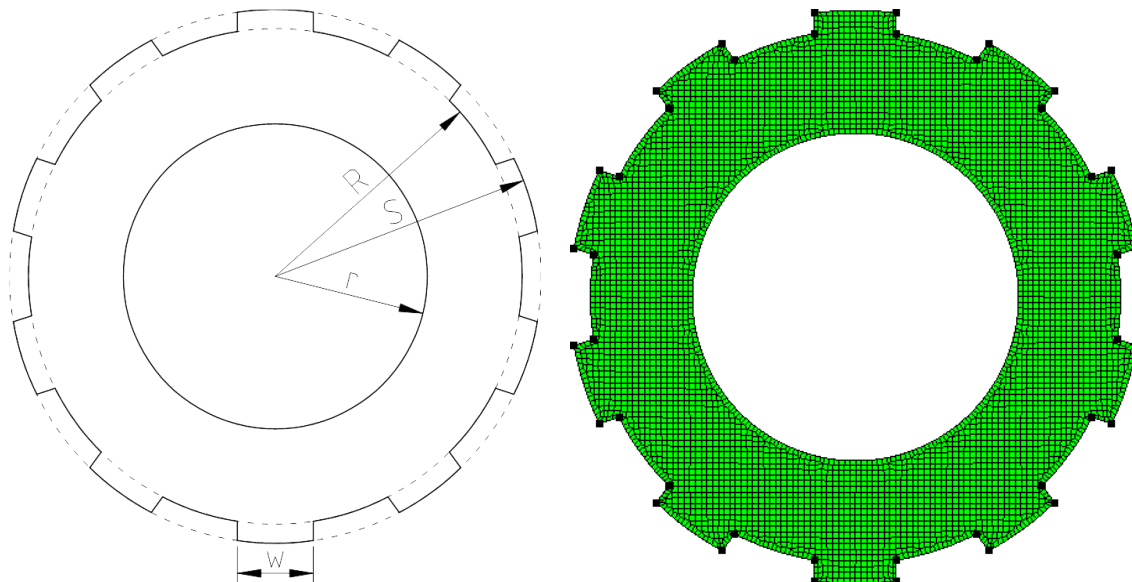
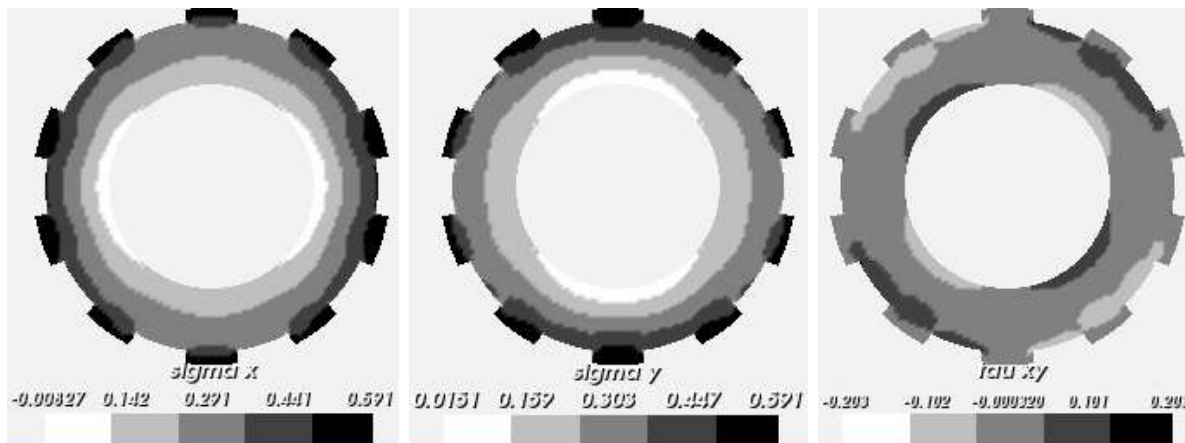


Рис. 5. Геометрическая и дискретная модели фрикционного диска

Например, если предположить, что муфта находится в температурном поле, заданном

зависимостью  $T(x, y) = \begin{cases} 250 \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - r}{R - r}, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, \\ 250, & \sqrt{x^2 + y^2} > R \end{cases}$ , а также принять  $S = 0,14$  м,

$R = 0,13$  м,  $r = 0,08$  м,  $w = 0,04$  м, толщину пластинки принять равной 0,006 м, модуль Юнга – равным 110 ГПа, коэффициент Пуассона – равным 0,3, коэффициент температурного расширения –  $\alpha = 1,25 \times 10^{-5}$  в результате решения задачи (10) получим распределение напряжений, вызванных температурными деформациями (рис. 6). Критические значения и соответствующие им формы потери устойчивости для такого начального НДС, если считать, что муфта закреплена по контуру окружности вершин зубьев, будут иметь вид, представленный на рис. 7.



Рим. 6. Распределение температурных напряжений в муфте

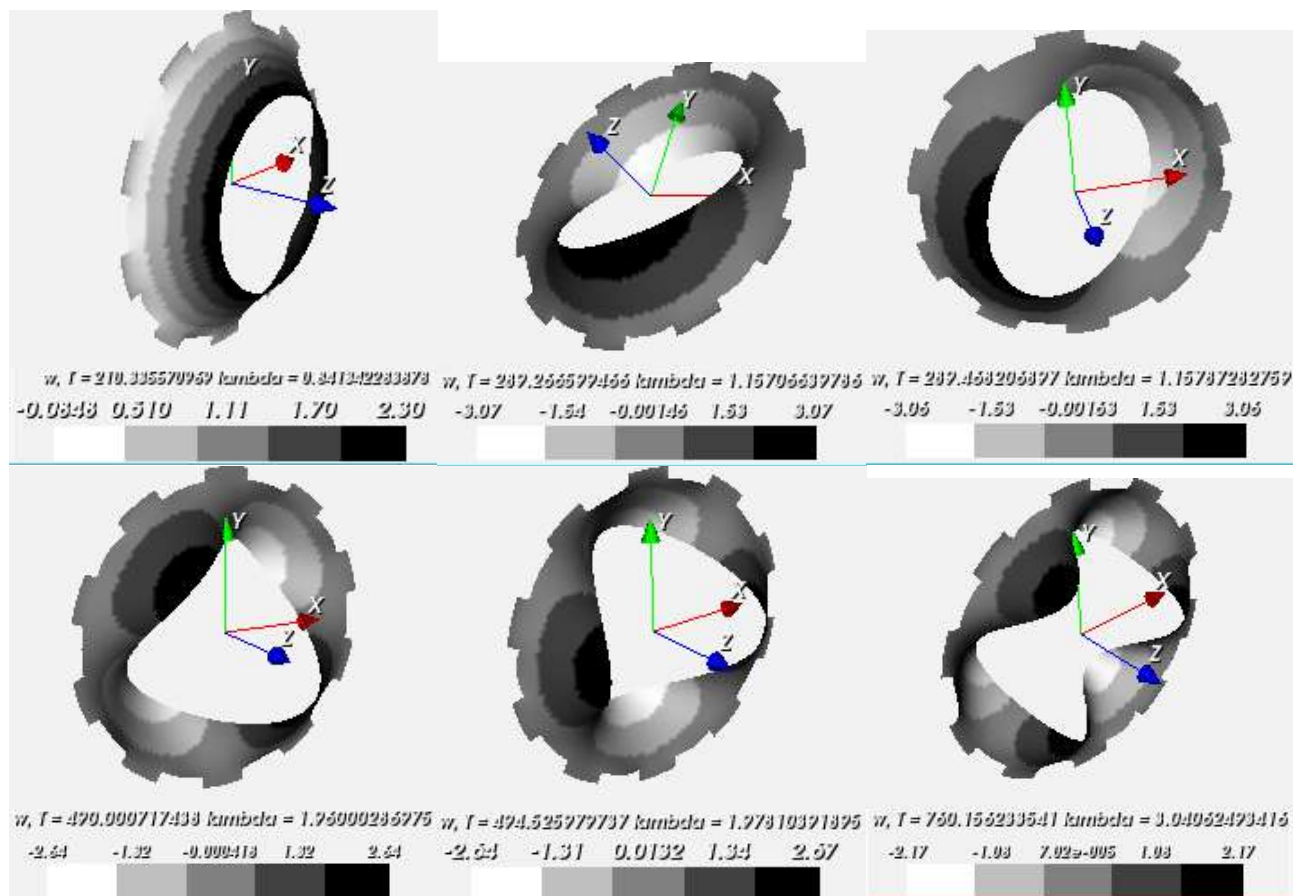


Рис. 7. Критические значения температуры и формы потери устойчивости муфты

## ВЫВОДЫ

Таким образом, в настоящей работе предложен подход к автоматизации исследования устойчивости пластин, находящихся под действием температурных напряжений. Использование функционального подхода позволяет описывать пластинки произвольной конфигурации. Построенные с помощью фоновой сетки дискретные модели при задействовании конечного элемента пластинки позволяют уменьшить размерность задачи относительно стандартных трехмерных элементов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Madenci E., Guven I. The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS. New York: Springer, 2015. 656 p.
2. ANSYS LS-DYNA. URL: <http://www.ansys.com/Products/Structures/ANSYS-LS-DYNA>. (Дата звернення 15.08.2016).
3. MSC Nastran – Multidisciplinary Structural Analysis. URL: <http://www.mscsoftware.com/product/msc-nastran>. (Дата звернення 15.08.2016).
4. Patran – Интегрирующая среда для систем анализа, моделирования и проектирования на основе универсального графического пользовательского интерфейса. URL: <http://www.mscsoftware.ru/products/patran>. (Дата звернення 15.08.2016).
5. Puri G. Python Scripts for Abaqus. Learn by Example. USA, 2011. 725 p.
6. Kettenis D. L. COSMOS: A simulation language for continuous, discrete and combined models. *SIMULATION*. 1992. Vol. 58. P. 32–41.
7. ЛИРА 9.4. Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие / Е. Б. Стрелец-Стрелецкий и др. Киев: Факт, 2008. 164 с.
8. МОНОМАХ 4.2 Примеры расчета и проектирования. Учебное пособие / С. В. Юсипенко и др. Киев: Факт, 2007. 292 с.

9. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Киев: Наук. Думка, 2002. 653 с.
10. Гоменюк С. И. Объектно-ориентированные модели и методы анализа механических процессов. Запорожье: Запорож. гос. ун-т, 2004. 311 с.
11. Евзеров И. Д. Задачи устойчивости для стержней и пластин. *Инженерно-строительный журнал*. 2014. № 1. С. 6–11.
12. Thornton E. A. Thermal Buckling of Plates and Shells. *Applied Mechanics Review*. 1993. Vol. 46, Iss. 10. P. 485–506.
13. Murphy K. D., Ferreira D. Thermal Buckling of Rectangular Plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38, Iss. 22/23. P. 3979–3994.
14. Chang J. S., Chui W. C. Thermal Buckling Analysis of Antisymmetric Laminated Cylindrical Shell Panels. *International Journal of Solids and Structures*. 1991. Vol. 27, Iss. 1. P. 1295–1309.
15. Ahmadi S. A., Pourshahsavari H. Three-Dimensional Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Cylindrical Panels Using Differential Quadrature Method (DQM). *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2016. Vol. 54, Iss. 1. P. 135–147.
16. Al-Waily M. Analytical and Numerical Thermal Buckling Analysis Investigation of Unidirectional and Woven Reinforcement Composite Plate Structural. *International Journal of Energy and Environment*. 2015. Vol. 6, Iss. 2. P. 125–142.
17. Chen Z., Yi Y.-B., Zhao J. Fourier Finite Element Model for Prediction of Thermal Buckling in Disc Clutches and Brakes. *Journal of Thermal Stresses*. 2016. Vol. 39, Iss. 10. P. 1241–1251.
18. Wriggers P., Siplivaya M., Joukova I., Slivin R. Intelligent Support of Engineering Analysis using Ontology and Case-based Reasoning. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2008. Vol. 20. P. 709–720.
19. Sun W., Ma Q., Chen S. A Framework for Automated Finite Element Analysis with an Ontology-based Approach. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2009. Vol. 23. P. 3209–3220.
20. Рвачев В.Л., Шейко Т. И. Введение в теорию R-функций. *Проблемы машиностроения*. 2001. Т. 4, № 1-2. С. 46–58.
21. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН України, 2009. 305 с.
22. Чопоров С. В. Метод фоновой сетки для триангуляции двумерных областей при функциональном подходе. *Радиоэлектроника, информатика, управление*. 2015. № 4(35). С. 31–38.
23. Чопоров С. В., Лисняк А. А., Гоменюк С. И. Дискретизация геометрических областей, заданных R-функциями, на четырехугольные конечные элементы. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2009. № 1. С. 199–207.
24. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method. Vol. 2. Solid Mechanics. London: Butterworth-Heinemann, 2000. 460 p.
25. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2003. 854 p.
26. Ferreira A. J. M. MATLAB Codes for Finite Element Analysis. Netherlands: Springer Netherlands, 2009. 235 p.
27. Chandrashekhara K. Thermal buckling of laminated plates using a shear flexible finite element. *Finite Elements in Analysis and Design*. 1992. Vol. 12, Iss. 1. P. 51–61.

## REFERENCES

1. Madenci, E. & Guven, I. (2015). The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS. New York: Springer.
2. ANSYS LS-DYNA. Retrieved from <http://www.ansys.com/Products/Structures/ANSYS-LS-DYNA>.
3. MSC Nastran – Multidisciplinary Structural Analysis. Retrieved from <http://www.mscsoftware.com/product/msc-nastran>.
4. Patran – Complete FEA Modeling Solution. Retrieved from <http://www.mscsoftware.com/products/patran>.

5. Puri, G. (2011). Python Scripts for Abaqus. Learn by Example. USA.
6. Kettenis, D. L. (1992). COSMOS: A simulation language for continuous, discrete and combined models. SIMULATION, Vol. 58, pp. 32-41.
7. Strelec-Streleckij, E. B., Bogovis, V. E., Genzerskij, Ju. V., Gerajmovich, Ju. D., Marchenko, D. V. & Titok, V. P. (2008). LIRA 9.4. User Guide. Basics. Tutorial. Kiev: Fakt.
8. Jusipenko, S. V., Batrak, L. G., Gorodeckij, D. A., Lazarev, A. A., Laznjuk, M. V. & Rasskazov, A. A. (2007). MONOMAKH 4.2 Computing and Design. Tutorial. Kiev: Fakt.
9. Kirichevskiy, V. V. (2002). The Finite Element Method in the Mechanics of Elastomers Метод конечных элементов в механике эластомеров. Kiev: Nauk. Dumka.
10. Gomenyuk, S. I. (2004). Object-oriented Models and Methods in the Analysis of Mechanical Processes. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya State University..
11. Ievzerov, I. D. (2014). The Stability Problems for Bars and Plates. Magazine of Civil Engineering, No. 1, pp. 6-11.
12. Thornton, E. A. (1993). Thermal Buckling of Plates and Shells. Applied Mechanics Review, Vol. 46, Iss. 10, pp. 485-506.
13. Murphy, K. D. & Ferreira, D. (2001). Thermal Buckling of Rectangular Plates. International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, Iss. 22/23, pp. 3979-3994.
14. Chang, J. S. & Chui, W. C. (1991). Thermal Buckling Analysis of Antisymmetric Laminated Cylindrical Shell Panels. International Journal of Solids and Structures, Vol. 27, Iss. 1, pp. 1295-1309.
15. Ahmadi, S. A. & Pourshahsavari, H. (2016). Three-Dimensional Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Cylindrical Panels Using Differential Quadrature Method (DQM). Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 54, Iss. 1, pp. 135-147.
16. Al-Waily, M. (2015). Analytical and Numerical Thermal Buckling Analysis Investigation of Unidirectional and Woven Reinforcement Composite Plate Structural. International Journal of Energy and Environment, Vol. 6, Iss. 2, pp. 125-142.
17. Chen, Z., Yi, Y.-B. & Zhao, J. (2016). Fourier Finite Element Model for Prediction of Thermal Buckling in Disc Clutches and Brakes. Journal of Thermal Stresses, Vol. 39, Iss. 10, pp. 1241-1251.
18. Wriggers, P., Siplivaya, M., Joukova, I. & Slivin, R. (2008). Intelligent Support of Engineering Analysis using Ontology and Case-based Reasoning. Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 20, pp. 709-720.
19. Sun, W., Ma, Q. & Chen, S. (2009). A Framework for Automated Finite Element Analysis with an Ontology-based Approach. Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 23, pp. 3209-3220.
20. Rvachev, V. L. & Sheiko, T. I. (2001). Introduction in the Theory of R-functions. Problemy mashinostroeniia, Vol. 4, No. 1-2, pp. 46-58.
21. Maksimenko-Sheiko, K. V. (2009). R-functions in Mathematical Modeling of Geometric Objects and Physical Fields. Kharkiv: IPMach NAS of Ukraine.
22. Choporov, S. V. (2015). Background Grid Method for Plane Shapes Triangulation in Functional Approach. Radio Electronics, Computer Science, Control, No. 4(35), pp. 31-38.
23. Choporov, S. V., Lisnyak, A. A. & Gomenyuk, S. I. (2009). Generation of Quadrilateral Element Meshes of Geometrical Regions Defined by R-functions. Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences, No. 1, pp. 199-207.
24. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (2000). The Finite Element Method. (vol. 2) Solid Mechanics. London: Butterworth-Heinemann.
25. Reddy, J. N. (2003). Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press.
26. Ferreira, A. J. M. (2009). MATLAB Codes for Finite Element Analysis. Netherlands: Springer Netherlands.
27. Chandrashekhara, K. (1992). Thermal buckling of laminated plates using a shear flexible finite element. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 12, Iss. 1, pp. 51-61.