

26. Pogorelova, E.A. (2010) "Mathematical model of shear stress flows in the vein in the presence of obliterating thrombus", *Computer Research and Modeling*, vol. 2, no. 2, pp. 169-182.
27. Sheppard, A.R. and Eisenbud, M. (1977), "Biological effects of electric and magnetic fields of extremely low frequency", New York University Press, New York.
28. Sosa, M., Bernal-Alvarado, J., Jimenez-Moreno, M., Hernandez, J.C., Gutierrez-Juarez, G., Vargas-Luna, M., Huerta, R., Villagomez-Castro, J.C. and Palomares, P. (2005), "Magnetic Field in fluence on Electrical Properties of Human Blood Measured by Impedance Spectroscopy", *Bioelectromagnetics*, vol. 26, pp. 564-570.
29. McKay, J.C., Prato, F.S. and Thomas, A.W. (2007), "The Effects of Magnetic Field Exposure on Blood Flow and Blood Vessels in the Microvasculature", *Bioelectromagnetics*, vol. 28, pp. 81-98.
30. Haik, Y., Pai, V. and Chen, Ch. J.(2001), "Apparent viscosity of human blood in a high static magnetic field", *J. Magnetism Magn. Materials*, vol. 225, pp. 180-186.
31. Wilson, P.W.F. and Grandy, S.M. (2008), "The metabolic syndrome: practical guide to origins and treatment: part I", *Circulation*, vol. 112, pp. 1422-1425.
32. Petrochenko, E.P. (2009), "Mechanism of regulation of microcirculation and blood rheology in health and circulatory disorders", Thesis abstract for Cand. Sc. (Biology), 03.00.13, Yaroslavl, Russia.
33. Shylov, A.M. and Melnik, M.V. (2005), *Arterialnaya gipertoniya i reologicheskie svoistva krovi* [Arterial hypertension and blood rheology], BARS, Moskow, Russia.
34. Purlo, N.V., Popova, O.V., Biryukova, L.S. and Kozinets, G.I. (2005), "Electrophoretic mobility of red blood cells as a measure of evaluation of the functional usefulness of erythrocyte membranes", *Klinicheskaya Laboratornaya Diagnostika*, no. 1, pp. 40-44.

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ПРИБЛИЖЕННО АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И ШЕРОХОВАТОСТИ

Дьяченко Н. Н., к. ф.-м. н., доцент, Синченко Е. С., бакалавр, Качан А. И., бакалавр

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

dyachenko-nata@mail.ru

Рассматривается плоская квазистатическая задача о скольжении с трением штампа с плоским основанием по поверхности упругого шероховатого слоя при линейном законе деформирования шероховатости. Предполагается отсутствие наклона штампа. В работе изучены свойства линейных операторов данной задачи. На их основании в двух случаях ограничения на коэффициенты шероховатости получено аналитическое решение задачи: первоначально в виде ряда Неймана, а затем степенного ряда, коэффициенты которого выражаются через повторные ряды. Для получения приближенно аналитического решения уравнение задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов степенного ряда функции нормального давления. В работе приведено обоснование возможности применения метода редукции с помощью проверки условий Л.В. Кантаровича, Г.П. Акилова. Проведен анализ числовых результатов относительно влияния шероховатости и трения на контактные характеристики: функцию нормального давления, углубление штампа, значение абсциссы точки наименьшего нормального давления.

Ключевые слова: плоская контактная задача, штамп с плоским основанием, шероховатость, линейный закон деформирования шероховатости, трение, ряд Неймана, метод последовательных приближений, метод редукции.

АНАЛІТИЧНИЙ І НАБЛИЖЕНО АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І ШОРСТКОСТІ

Д'яченко Н. М., к. ф.-м. н., доцент, Сінченко О. С., бакалавр, Качан А. І., бакалавр

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

dyachenko-nata@mail.ru

Розглянуто плоску квазистатичну задачу про ковзання з тертям штампа з плоскою основою по поверхні пружного шорсткого шару при лінійному законі деформування шорсткості. Припускається відсутність нахилу штампа. У роботі вивчено властивості лінійних операторів цієї задачі. На їх основі у двох випадках обмежень на коефіцієнти шорсткості отримано аналітичний розв'язок задачі: спочатку у вигляді ряду Неймана, а потім – степеневому ряду, коефіцієнти якого виражаються через повторні ряди. Для отримання наближено аналітичного розв'язку рівняння задачі зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів степеневому ряду функції нормального тиску. У роботі наведено обґрунтування можливості застосування методу редукції за допомогою перевірки умов Л.В. Кантаровича, Г.П. Акілова. Проведено аналіз числових результатів щодо впливу шорсткості і тертя на контактні характеристики: функції нормального тиску, занурення штампа, значення абсциси точки найменшого нормального тиску.

Ключові слова: плоска контактна задача, штамп з плоскою основою, шорсткість, лінійний закон деформування шорсткості, тертя, ряд Неймана, метод послідовних наближень, метод редукції.

ANALYTICAL AND APPROXIMATELY ANALYTICAL SOLUTION OF THE PLANE CONTACT PROBLEM TAKING INTO ACCOUNT THE FRICTION AND THE ROUGHNESS

Dyachenko N. N., Ph. D. In Physics and Math, associate professor, Sinchenko E. S., B.S. in Math, Kachan A. I., B.S. in Math

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

dyachenko-nata@mail.ru

The quasi-static plane problem about sliding with a friction of punch with the flat fundament on a surface of an elastic rough layer is considered at the linear law of deformation of a roughness. It is supposed, that the punch inclination is absent. Plane contact problems taking into account a roughness are studied in works [3, 4, 7], taking into account a friction – in [3, 4], taking into account both factors – in [12]. However, in article [12] it is supposed, that tangential stress do not influence normal pressure. Properties of the integral operator of the given problem are studied. On the basis of these properties the analytical solution of problems in two cases of restriction on roughness factors is received. Function of normal pressure is originally presented in the form of Neumann's series. Then this function is presented by a power series, in which coefficients are expressed through repeated series.

For reception of the approximately analytical solution the integral equation of this problem is reduce to infinite system of the linear algebraic equations concerning unknown coefficients of a power series of function of normal pressure. In work the substantiation of possibility of application of a reduction method by means of conditional test of L.V. Kantarovich and G.P. Akilov is resulted. The numerical estimation of residual is received.

The analysis of numerical results concerning influence of a roughness and a friction on contact characteristics is carried out. With shortcut of the roughness coefficient and with shortcut of the friction coefficient all contact characteristics come nearer to corresponding characteristics without a roughness or a friction. The greatest value of pressure on border of a contact platform, the least value of pressure in an internal point of this platform are reached. With increase of a roughness coefficient or a coefficient of a point friction absciss of the least pressure is displaced from the centre to the action direction of a tangential of force.

Key words: a plane contact problem, a punch with the flat fundament, a roughness, the linear law of deformation of a roughness, a friction, a Neumann's series, a method of successive approximations, a reduction method.

ВВЕДЕНИЕ

Контактом шероховатых тел занимается наука трибология. Среди задач, которые решает эта наука, такие: исследование характеристик шероховатых поверхностей, влияние шероховатости на трение и износ. Эти проблемы поставлены инженерной практикой. Поэтому решение контактных задач с учетом как шероховатости, так и трения, имеет большое практическое значение.

Впервые контактная задача с учетом шероховатости была решена И.Я. Штаерманом [1]. Он предположил, что шероховатость вызывает дополнительные деформации под действием штампа. Моделирование шероховатости поверхности тел наиболее детально изучено в [2]. В работах [3-8] и др. решены задачи в пространственной и плоской постановке с учетом шероховатости (для покрытия винклеровского типа – в [9]) при различных законах ее деформирования. Такие задачи с дополнительным учетом трения изучены в пространственной постановке в [10, 11], в плоской – в [12]. Однако, в работе [12] предполагается, что касательные напряжения не влияют на нормальные. В данной работе изучается плоская контактная задача, в которой такое предположение отсутствует. Кроме того, найдено ее аналитическое решение в отличие от работ [10-12].

В данной статье применялись выведенное ранее интегральное уравнение плоской контактной задачи с трением [3, 4] и интегральное уравнение плоской контактной задачи штампа с шероховатым слоем, приведенным в [4]. Авторы также применили решения, полученные в [3, 4], для анализа достоверности результатов при соответствующих предельных переходах.

Для получения аналитического решения поставленной задачи применяется метод представления решения операторного уравнения рядом Неймана, для приближенно аналитического – метод сведения интегрального уравнения задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения функции нормального давления в степенной ряд, метод редукции и метод последовательных приближений в двух случаях ограничений на коэффициенты шероховатости. Такими методами решалась плоская контактная задача с учетом только шероховатости в [6], где решение представлялось степенным рядом с четными степенями. В данной задаче степенные ряды содержат также и нечетные степени.

Цель работы. Построить аналитическое и приближенно аналитическое решение квазистатической задачи о напряженном состоянии, которое появляется в упругом слое (полосе) при скольжении по нему без наклона штампа с учетом трения и шероховатости поверхности слоя при линейном законе деформирования шероховатости, обосновать возможность применения численных методов, провести анализ числовых результатов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Предположим, что штамп вдавливается в упругий шероховатый слой $\{|x| < +\infty, 0 < y < h\}$ вертикальной силой Q (рис. 1). В направлении оси x действует сила ρQ , сдвигающая штамп, и он скользит по поверхности слоя со скоростью настолько малой, что динамическими составляющими можно пренебречь.

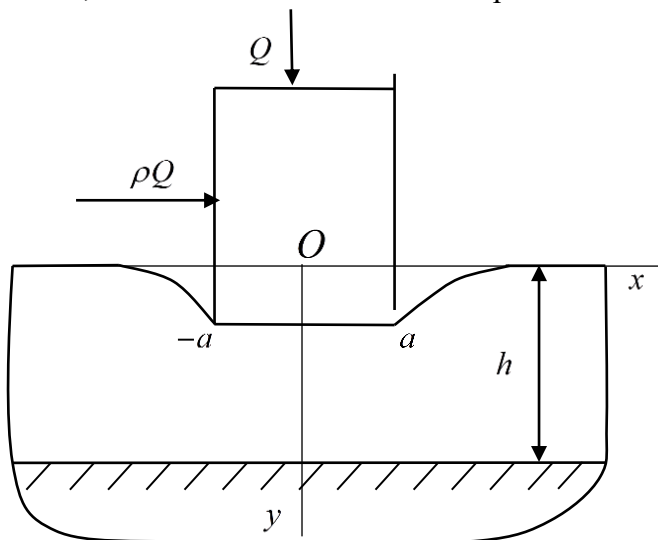


Рис. 1. Схема контакта штампа с упругим слоем

Также предположим, что штамп не может поворачиваться под действием приложенных сил.

Рассмотрим достаточно толстый слой, для которого $\lambda = \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2}$. Возможны два случая закрепления полосы ($y = h$) [4]:

1. Полоса лежит на жестком основании без трения:

$$\tau_{xy}(x, h) = 0, v(x, h) = 0, |x| < +\infty.$$

2. Полоса жестко закреплена на основании:

$$u(x, h) = v(x, h) = 0.$$

Граничные условия на поверхности $y = 0$ в обоих случаях имеют вид [3, 4]:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) &= 0, \quad \sigma_y(x, 0) = 0, \quad a < |x| < +\infty, \\ \sigma_y(x, 0) &= -p(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = \rho p(x), \quad |x| \leq a, \end{aligned}$$

где δ – углубление штампа в упругий слой под действием нормального давления $p(x)$, ρ – коэффициент трения.

В поставленной задаче интегральное уравнение и условие равновесия для определения нормального давления и углубления имеют вид [3, 4]:

$$Bp(x) + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\int_{-a}^a \left[-\ln \left| \frac{x'-x}{h} \right| + a_0 \right] p(x') dx' + \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \int_{-a}^x \rho p(x') dx' \right] = \delta, \quad (1)$$

$$\int_{-a}^a p(x') dx' = Q, \quad (2)$$

где B – коэффициент шероховатости линейного закона, E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона, значение величины a_0 может быть $a_0 = -0,352$ для задачи 1 и $a_0 = -0,527$ – для задачи 2 при $\nu = 0,3$.

Перепишем уравнения (1) и (2) в безразмерных величинах:

$$B_1 p_1(t) + \int_{-1}^1 \left[-\ln |t'-t| - C_0 \right] \cdot p_1(t') dt' + C_1 \int_{-1}^t p_1(t') dt' = \delta_1, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 p_1(t') dt' = Q_1, \quad (4)$$

где $C = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$, $C_1 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \rho$, $Q_1 = \frac{QC}{a}$, $B_1 = \frac{B}{Ca}$, $\delta_1 = \frac{\delta}{a}$, $t = \frac{x}{a}$, $t' = \frac{x'}{a}$, $p_1(t) = Cp(ta)$,
 $c_0 = \ln \frac{a}{h} - a_0$.

Введем оператор

$$[Lp_1](t) = \int_{-1}^1 \left[\ln |t'-t| + C_0 \right] p_1(t') dt' - C_1 \int_{-1}^t p_1(t') dt' \quad (5)$$

и перепишем уравнение (3) в операторном виде:

$$B_1 p_1(t) - [Lp_1](t) = \delta_1. \quad (6)$$

2. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

1. Рассмотрим вначале линейный оператор L . Перепишем его в виде

$$L = A - C_1 B,$$

где

$$[Ap_1](t) = \int_{-1}^1 \left[\ln |t'-t| + C_0 \right] p_1(t') dt', \quad [Bp_1](t) = \int_{-1}^t p_1(t') dt'.$$

В работе [6] показано, что оператор A переводит пространство $C[-1;1]$ непрерывных на отрезке $[-1;1]$ функций в себя, то есть $A:C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$, а норма этого оператора удовлетворяет неравенству $\|A\| \leq 8$.

Если функция $p_1(t)$ непрерывна на отрезке $[-1;1]$, то функция $g(t)=[Bp_1](t)$, представляющаяся интегралом с переменным верхним пределом от непрерывной функции, является непрерывной функцией [13]. Поэтому $B:C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$. Очевидно, что $\|B\| \leq 2$.

Таким образом, $L:C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$, а для нормы этого оператора имеет место оценка:

$$\|L\| \leq 8 + 2C_1 = C^* \tag{7}$$

Обозначим через C^{**} – любое число, большее C^* .

2. В случае, когда $0 < \alpha < 1$, рассмотрим оператор $\left(\alpha I + \frac{1}{C^*} L\right)$, где $[Ip_1](t) = p_1(t)$. В силу сказанного выше, получим: $\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L\right): C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$. Докажем сжимаемость этого отображения на классе неотрицательных функций пространства $C[-1;1]$. Оценим норму

$$\left\| \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right] (t) \right\| = \max_{t \in [-1,1]} \left| \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right] (t) \right|.$$

По второй теореме Вейерштрасса [13] максимум непрерывной на отрезке функции достигается в некоторой точке $t_0 \in [-1;1]$, откуда

$$\left\| \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right] \right\| = \left| \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right] (t_0) \right|.$$

Рассмотрим случай, когда выражение под модулем неотрицательно, то есть $\alpha p_1(t_0) - \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0) \geq 0$. Если функция $p_1(t)$ неотрицательная, то значение $[-Lp_1](t_0)$ оператора в точке $t_0 \in [-1;1]$ характеризует смещение упругой полосы с учетом трения в этой точке под действием давления $p_1(t)$, распределенной на отрезке $[-1;1]$. Поэтому $[-Lp_1](t_0) \geq 0$, откуда

$$\alpha p_1(t_0) - \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0) \leq \alpha p_1(t_0) \leq \alpha \|p_1\|.$$

В случае, когда выражение под модулем отрицательное, имеем: $\alpha p_1(t_0) < \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0)$.

Тогда существует число $q \in (0,1)$ такое, что $\alpha p_1(t_0) = q \cdot \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0)$. Используя неравенство (7), получим

$$\left\| \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right] \right\| = -\alpha p_1(t_0) + \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0) =$$

$$= (1-q) \cdot \frac{1}{C^{**}} [-Lp_1](t_0) \leq (1-q) \cdot \frac{1}{C^{**}} \|Lp_1\| \leq \frac{1}{C^{**}} \|L\| \cdot \|p_1\| \leq \frac{C^*}{C^{**}} \|p_1\|.$$

Таким образом,

$$\left\| \left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right\| \leq u \cdot \|p_1\|, \quad u = \max \left\{ \alpha, \frac{C^*}{C^{**}} \right\}. \quad (8)$$

Так как по предположению $C^* < C^{**}$ и $0 < \alpha < 1$, то $u < 1$. Значит, в силу (8), отображение $\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right)$ является сжимающим на классе неотрицательных функций.

3. Разложения образа степенной функции $f(x) = x^N$ ($N = 0, 1, 2, 3, \dots$) при действии оператора L имеет вид:

$$[Lf](y) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{N,i} y^i, \quad (9)$$

где при $N = 2j$, $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\beta_{2j,2k} = -\frac{2}{k(2j-2k+1)} \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad \beta_{2j,2k+1} = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad k \neq j,$$

$$\beta_{2j,0} = -\frac{2}{(2j+1)^2} + \frac{2C_0}{2j+1} - \frac{C_1}{2j+1}, \quad \beta_{2j,2j+1} = -\frac{C_1}{2j+1},$$

при $N = 0$

$$\beta_{0,2k+1} = 0, \quad \beta_{0,2k} = -\frac{1}{k(-2k+1)} \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad \beta_{0,1} = -C_1,$$

а при $N = 2j-1$, $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\beta_{2j-1,2k-1} = -\frac{2}{(2k-1)(2j-2k+1)} \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad \beta_{2j-1,2k} = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots, \quad k \neq j),$$

$$\beta_{2j-1,2j} = -\frac{C_1}{2j}; \quad \beta_{2j-1,0} = -\frac{C_1}{2j}.$$

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В случае, когда $B_1 > C^*$, уравнение (6) перепишем в виде операторного уравнения Фредгольма второго рода

$$p_1(t) = \frac{1}{B_1} [Lp_1](t) + \frac{\delta_1}{B_1}. \quad (10)$$

Вследствие (7), согласно принципу сжимающих отображений [14], при $B_1 > C^*$ уравнение (10) имеет единственное решение, которое можно представить рядом Неймана [14]

$$p_1(t) = \frac{\delta_1}{B_1} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B_1} \right)^s [L^s e](t).$$

Используя разложение (9), получим

$$p_1(t) = \frac{\delta_1}{B_1} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B_1}\right)^s \sum_{n_1=0}^{\infty} \beta_{0,n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \beta_{n_1,n_2} \dots \sum_{n_s=0}^{\infty} \beta_{n_{s-1},n_s} t^{n_s}. \quad (11)$$

Безразмерное углубление можно найти из условия равновесия (4), откуда

$$\delta_1 = \frac{Q_1 B_1}{\gamma},$$

где $\gamma = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B_1}\right)^s \sum_{n_1=0}^{\infty} \beta_{0,n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \beta_{n_1,n_2} \dots \sum_{n_{s-1}=0}^{\infty} \beta_{n_{s-2},n_{s-1}} \sum_{j_s=0}^{\infty} \beta_{n_{s-1},2j_s} \frac{2}{2j_s+1}.$

В случае, когда $B_1 < C^*$, введем малый параметр $\alpha = 1 - \frac{B_1}{C^{**}}$, а уравнение (6) представим операторным уравнением Фредгольма второго рода:

$$p_1(t) = \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right) p_1 \right](t) + \frac{\delta_1}{C^{**}}. \quad (12)$$

Если $B_1 < C^*$, то $0 < \alpha < 1$, тогда отображение $\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right)$ удовлетворяет неравенству (8), и является сжимающим. Поэтому уравнение (12) имеет единственное решение, которое можно записать рядом Неймана [14], а затем через повторные ряды:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{\delta_1}{C^{**}} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\left(\alpha I + \frac{1}{C^{**}} L \right)^r e \right](t) = \frac{\delta_1}{C^{**}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r C_r^k \alpha^{r-k} \frac{1}{(C^{**})^k} [L^k e](t) = \\ &= \frac{\delta_1}{C^{**}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r C_r^k \alpha^{r-k} \frac{1}{(C^{**})^k} \sum_{n_1=0}^{\infty} \beta_{0,n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \beta_{n_1,n_2} \dots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \beta_{n_{k-2},n_{k-1}} \sum_{n_k=0}^{\infty} \beta_{n_{k-1},n_k} t^{n_k}, \end{aligned} \quad (13)$$

тут $C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}$ ($r = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots, r$). Углубление можно найти по формулам:

$$\delta_1 = \frac{Q_1 C^{**}}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{\delta_1}{C^{**}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r \frac{C_r^k \alpha^{r-k}}{(C^{**})^k} \sum_{n_1=0}^{\infty} \beta_{0,n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \beta_{n_1,n_2} \dots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \beta_{n_{k-2},n_{k-1}} \sum_{j_k=0}^{\infty} \beta_{n_{k-1},2j_k} \frac{2}{2j_k+1}.$$

4. ПРИБЛИЖЕННО АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Выше было показано, что решение уравнения (6) – функцию безразмерного нормального давления – можно представить одной из формул (11) или (13) при различных ограничениях на коэффициент шероховатости. Из этого следует, что решение уравнения (6) представляется степенным рядом

$$p_1(t) = \delta_1 \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n t^n. \quad (14)$$

В силу представления (9), образ оператора для функции (14) примет вид:

$$[Lp_1](t) = \delta_1 \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{k,n} t^n, \quad (15)$$

а операторное уравнение (6), вследствие (14) и (15), выразится через ряды

$$B_1 \delta_1 \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n t^n - \delta_1 \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{k,n} t^n = \delta_1. \quad (16)$$

Естественным образом приходим к системе относительно неизвестных коэффициентов степенного ряда (14):

$$\begin{cases} B_1 \xi_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \beta_{k,0} = 1, \\ B_1 \xi_n - \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \beta_{k,n} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \end{cases} \quad (17)$$

Углубление штампа находим с помощью условия равновесия (4), подставляя в него (14). Получим:

$$\delta_1 = \frac{Q_1}{T}, \quad T = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\xi_{2l}}{2l+1}. \quad (18)$$

2. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (17) может быть решена **методом редукции**, то есть сведением ее к конечной системе из $N+1$ уравнения. Поскольку система (17) эквивалентна уравнению (6), а неизвестные системы (17) являются коэффициентами степенного ряда (14), то возможность применения метода редукции к системе (17) равносильна возможности применения этого метода к операторному уравнению (6). А именно: все ряды в (14) и (16) заменяются частичными суммами до номера N , что эквивалентно замене степенного ряда (14) многочленом $\bar{p}_1(t) = \delta_1 \sum_{k=0}^N \xi_k t^k$ степени N , а операторного уравнения (6) – приближенным

$$B_1 \bar{p}_1(t) - [\bar{L} \bar{p}_1](t) = \delta_1, \quad (19)$$

где

$$[\bar{L} \bar{p}_1](t) = \delta_1 \sum_{k=0}^N \xi_k \sum_{n=0}^N \beta_{k,n} t^n = [P_N L \bar{p}_1](t), \quad (20)$$

тут проектор $P_N : C[-1;1] \rightarrow R_N[-1;1]$ отображает пространство непрерывных функций $C[-1;1]$ в пространство $R_N[-1;1]$ многочленов степени N , при этом $[P_N p_1](t) = \bar{p}_1(t)$.

В каждом из случаев ограничений на коэффициенты шероховатости ($B_1 > C^*$ и $B_1 < C^*$) выполняются условия возможности применения метода редукции [15] для операторных уравнений (10) и (12) соответственно. Пусть $B_1 > C^*$ (второй случай, когда $B_1 < C^*$, исследуется аналогично), тогда приближенное уравнение (19) переписывается в виде

$$\bar{p}_1(t) - \frac{1}{B_1} [\bar{L} \bar{p}_1](t) = \frac{\delta_1}{B_1}, \quad (21)$$

и выполнены условия Л.В. Канторовича, Г.П. Акилова [15]:

1) по построению, в силу (15), неравенство $\left\| \frac{1}{B_1} [P_N L \bar{f}] - \frac{1}{B_1} [\bar{L} \bar{f}] \right\| \leq \eta \| \bar{f} \|$ для $f \in C[-1;1]$

имеет место при $\eta = \eta(N) = 0$;

2) элемент $\frac{1}{B_1} [L f](t)$ (тут $f \in C[-1;1]$) аппроксимируем элементом $\bar{y}(t) = \frac{1}{B_1} [P_N L f](t)$ из $R_N[-1;1]$, тогда

$$\left\| \frac{1}{B_1} [Lf] - \bar{y} \right\| \leq \frac{1}{B_1} \|I - P_N\| \cdot \|L\| \cdot \|f\| \leq \frac{1}{B_1} \varepsilon(N) C^* \|f\| = \eta_1(N) \|f\|,$$

где $\varepsilon_1(N) = \|I - P_N\|$, $\eta_1(N) = \varepsilon_1(N)$;

3) для свободного члена $y(t) = \frac{\delta_1}{B_1} \in C[-1;1]$ точного уравнения (10) в качестве аппроксимирующего элемента из $R_N[-1;1]$ выберем $\bar{y} = y$, поэтому в неравенстве $\|y - \bar{y}\| \leq \eta_2 \|y\|$ можно выбрать $\eta_2 = 0$;

4) по теореме С. Банаха [14] $K = I - \frac{1}{B_1} L$ имеет непрерывно обратный оператор, а поскольку

$$\|K\| = \left\| I - \frac{1}{B_1} L \right\| \geq 1 - \frac{C^*}{B_1} = \frac{1}{\eta_3}, \text{ то } \|K^{-1}\| \leq \eta_3;$$

5) для достаточно больших N выполняется неравенство

$$u = \frac{1}{B_1} [\eta + \|I - P_N\| \eta_1] \|K^{-1}\| \leq \frac{C^* \varepsilon^2(N)}{B_1 (B_1 - C^*)} < 1;$$

6) из определения $\varepsilon_1(N)$ и $\eta_1(N)$ следует, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \eta_1(N) \|P_N\| = 0$.

Вследствие выполнимости выписанных условий, приходим к выводу [15], что в случае $B_1 > C^*$ при достаточно больших N приближенное уравнение (21) имеет решение $\bar{p}_{1,N}^*(t)$ и имеет место сходимость последовательности приближенных решений $\{\bar{p}_{1,N}^*(t)\}$ к точному $p_1^*(t)$, то есть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|p_1^* - \bar{p}_{1,N}^*\| = 0.$$

При этом, решения приближенного уравнения (21) можно найти **методом последовательных приближений** [15].

5. АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для приближенных вычислений выберем $Q_1 = 0,008625$, $c_0 = -3$, $a = 1$ см. С помощью программного пакета MAPLE вычислено абсолютное значение невязки

$$\varepsilon = \max_{t \in [-1;1]} |B_1 \bar{p}_1(t) - [L\bar{p}_1](t) - \delta_1|,$$

в которой значение интегрального оператора найдено численно в каждой точке площадки контакта и для разных входных параметров. Если в методе редукции выбрать $N = 100$, то при всех указанных данных получено $\varepsilon < 5 \cdot 10^{-2} \cdot Q_2$.

На рис. 2 (а) і 2 (б) приведены графики функций давления при разных значениях коэффициента шероховатости B_1 (рис. 2 (а)) и коэффициента трения ρ (рис. 2 (б)) для фиксированного значения другого параметра ($\rho = 0,5$ для рис. 2 (а) и $B_1 = 0,5$ для рис. 2 (б)). Штриховой линией на рис. 2 (а) построен график этой функции для гладкой полосы ($B_1 = 0$), полученный Л.А.Галиным [3]. На рис. 2 (б) штриховой линии соответствует график функции давления для задачи без трения ($\rho = 0$).

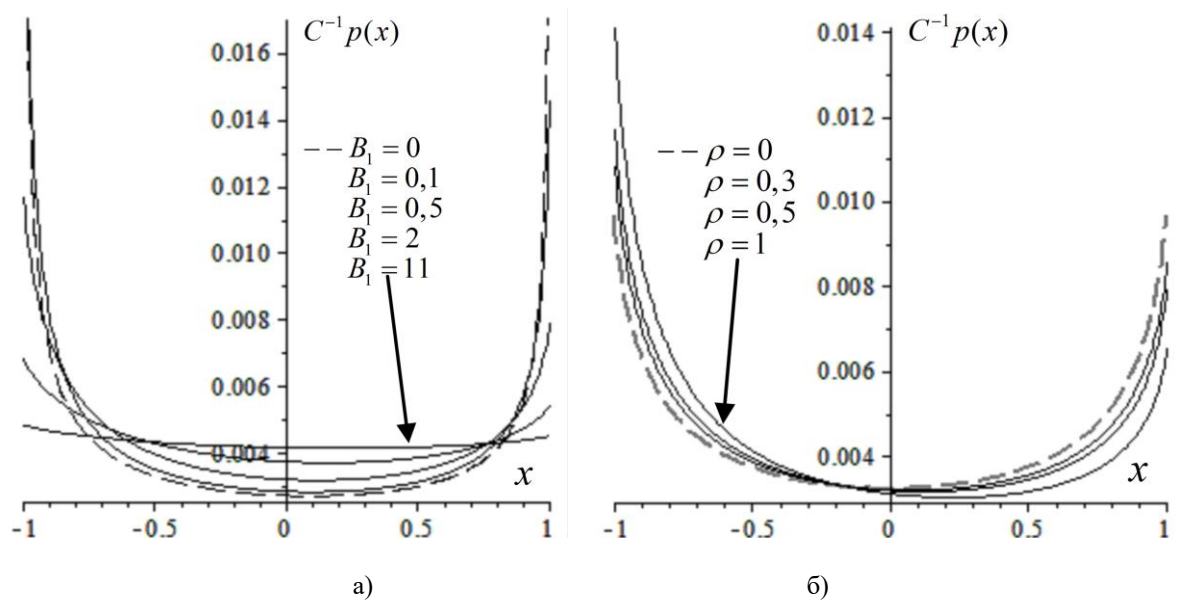


Рис. 2. Графики функций давления при разных входных параметрах

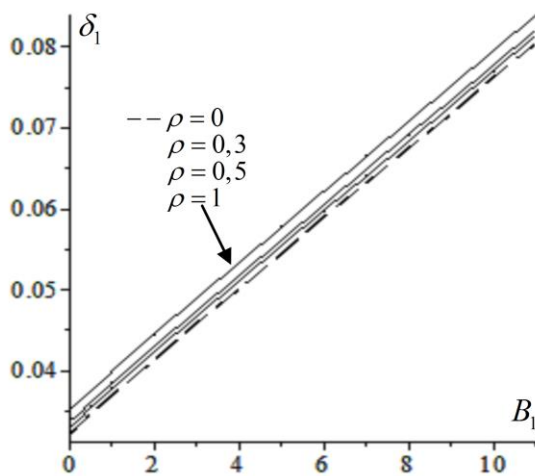
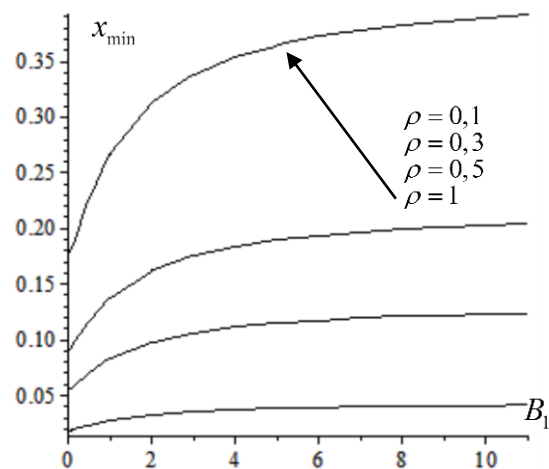
На рис. 3 изображены графики зависимостей углубления штампа в упругую полосу от коэффициента шероховатости B_1 для разных значений коэффициента трения ρ . Значения углубления для $B_1 = 0$ рассчитаны в соответствии с результатами Л.А. Галина [3].

Из анализа рис. 2 (а) и рис. 2 (б) следует, что наибольшее значение нормального давления достигается на границе площадки контакта при $x = -a$, а наименьшее – в некоторой внутренней точке x_{\min} площадки контакта.

Для поиска точки x_{\min} с помощью MAPLE найдено численное решение t^* уравнения

$$\frac{d\bar{p}_1(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \delta_1 \sum_{k=1}^N k \xi_k t^k = 0.$$

Тогда at^* будет точкой локального минимума функции давления, то есть $x_{\min} = at^*$. На рис. 4 приведены графики зависимостей x_{\min} от коэффициента шероховатости B_1 для разных значений коэффициента трения ρ .

Рис. 3. Графики зависимостей углубления штампа от коэффициента шероховатости B_1 Рис. 4. Графики зависимостей x_{\min} от коэффициента шероховатости B_1

Проанализируем влияние шероховатости на контактные характеристики. С уменьшением коэффициента шероховатости B_1 (при фиксированном значении коэффициента трения) наблюдается приближение всех контактных характеристик к соответствующим характеристикам задачи для гладкой полосы (рис. 2 (а) и рис. 3). При этом углубление уменьшается (рис. 3), давление на границе площадки контакта увеличивается, а наименьшее давление уменьшается (рис. 2 (а)). Абсцисса x_{\min} точки наименьшего давления перемещается в направлении к $x=0$ справа. Например, при $\rho=0,5$ (см. рис. 4) абсцисса этой точки уменьшается от значения, большего 0,21 см для $B_1 > 10$, до значения 0,0090334471 см, соответствующего $B_1 = 0$ (гладкий слой).

Контактные давления в данной задаче являются функциями, ограниченными на отрезке $[-a; a]$, в то время, как в задаче с гладкой поверхностью слоя [4] давления на границе площадки контакта стремятся к бесконечности (рис. 2 (а)).

Проанализируем влияние трения на контактные характеристики. С уменьшением коэффициента трения ρ (при фиксированном значении коэффициента шероховатости) наблюдается приближение всех контактных характеристик к соответствующим характеристикам задачи при отсутствии трения (рис. 2 (б) и рис. 3). При этом углубление уменьшается, давление в граничной точке площадки контакта $x = -a$ уменьшается, а в точке $-$ увеличивается, при этом наименьшее давление увеличивается. Рост коэффициента трения приводит к смещению абсциссы точки наименьшего давления от $x=0$ в направлении к $x=a$, что следует из анализа рис. 4. Так, например, при $B_1 = 0,5$ значение x_{\min} увеличивается от 0 см для $\rho=0$ до приблизительно 0.2264 см при $\rho=1$.

Достоверность результатов подтверждается справедливостью предельных переходов при $B_1 \rightarrow 0$ или $\rho \rightarrow 0$, оценкой невязки, а также сравнением полученных результатов с известными. В частности, при $\rho=0$ расчеты, проведенные в данной работе, согласовываются с результатами работ [4, 6].

ВЫВОДЫ

В работе изучена плоская квазистатическая контактная задача о скольжении плоского штампа с трением без поворота по границе упругого шероховатого слоя при линейном законе деформирования шероховатости. В работе доказана единственность решения поставленной задачи. Найдено аналитическое решение данной задачи в двух случаях ограничения на коэффициент шероховатости. Также найдено приближенно аналитическое решение задачи. В результате анализа числовых результатов получены следующие выводы. При уменьшении как коэффициента шероховатости, так коэффициента трения, все контактные характеристики приближаются к соответствующим характеристикам без учета шероховатости или трения соответственно. Наибольшее значение давления достигается на границе площадки контакта, а наименьшее – во внутренней точке этой площадки. При увеличении коэффициента шероховатости или коэффициента трения абсцисса точки наименьшего давления смещается от центра в направлении действия касательной силы.

Изложенный подход к решению данной задачи позволяет найти аналитическое решение такой задачи с учетом наклона штампа при линейном законе деформирования шероховатости, а при нелинейном (степенном или экспоненциальном) – приближенно аналитическое решение, в том числе задач с неизвестной заранее площадкой контакта. Это является предметом дальнейшего исследования

ЛІТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М.-Л. : Гостехтеоретиздат, 1949. – 270 с.

2. Крагельский И. В. Основы расчётов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. - М. : Машиностроение, 1977. – 576 с.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 302 с.
4. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 478 с.
5. Гоман О. Г. Задачі про штампи при різних законах деформування шорсткості / О. Г. Гоман, С. Ф. Шишканова, Н. М. Д'яченко // Вісник Херсонського держ. технічного університету. – 2003. – № 3 (19). – С. 98-101.
6. Д'яченко Н. М. Аналітичний і наближено аналітичний розв'язок плоскої контактної задачі про взаємодію штампа з шорсткою смугою / Н. М. Д'яченко, Т. О. Жмур, А. М. Нікітенко // Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 1. – С. 58-66.
7. Тітова О. О. Плоска контактна задача про вдавнення штампа з плоскою основою в пружну шорстку смугу при різних законах деформування шорсткості / О. О. Тітова, О. М. Гриценко, Т. А. Д'яченко, О. В. Стасюк // Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки. – 2012. – № 2. – С. 105-113.
8. Александров А. И. Алгоритм численного решения пространственной контактной задачи о взаимодействии упругих тел, имеющих шероховатые поверхности / А. И. Александров, Е. В. Грабко // Проблемы обчислювальної математики і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 17. – С. 23-34.
9. Александров В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, 1983. – 488 с.
10. Шишканова А. А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане / Анна Анатольевна Шишканова // Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки. – 2004. – Вип. 1. – С. 95-102.
11. Дьяченко Н. Н. Решение задачи о скольжении штампа с трением по границе шероховатого полупространства с линейным законом деформирования шероховатости / Н. Н. Дьяченко, Е. В. Шашкова // Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 1. – С. 25-33.
12. Pauk V. Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space / V. Pauk, B. Zastrau. // J. Theor. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 42, no. 1. – P. 107-124.
13. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Т. 1. – М. : Физматлит, 2003. – 680 с.
14. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.
15. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 752 с.

REFERENSES

1. Shtaerman, I.Ya. (1949), *Kontakt'naya zadacha teorii uprugosti* [Contact problems of the theory of elasticity], Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, Russia.
2. Kragelsky, I.V., Dobychin, M.N. and Kombalov, V.S. (1977), *Osnovy raschetov na trenie i iznos* [Fundamentals calculations on a friction and wear], Mashinostroenie, Moscow, Russia.
3. Galin, L.A. (1980), *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti* [Contact problems in the theory of elasticity and viscoelasticity], Nauka, Moscow, Russia.
4. Goryacheva, I.G. (2001), *Mekhanika friksionnogo vzaimodeystviya* [Mechanics of friction interaction], Nauka, Moscow, Russia.
5. Goman, O.G., Shishkanova, S.F. and Dyachenko N.M. (2003), “Problems of punch in various laws of roughness deformation”, *Visnyk Khersonskogo derzavnogo universiteta*, no. 3(19), pp. 98-101.
6. Dyachenko, N.M., Zhmur, T.A. and Nikitenko, A.N. (2008), “Analytical and approximately analytical solution of a flat contact problem on interaction of a punch with a rough strip”, *Visnyk Zaporizkogo nacional'nogo universytetu*, Fiz.-mat. Nauky, no. 1, pp. 58-66.
7. Titova, O.O., Gritsenko, O.M., Dyachenko, T.A. and Stasyuk, O.V. (2012), “The plane contact problem on pressing of punch with the flat fundament in the elastic strip at the different laws of

deformation of the roughness”, *Visnyk Zaporizkogo nationalnogo universytetu*, Fiz.-mat. Nauky, no. 2, pp. 105-113.

8. Alexandrov, A.I. and Grabko, E.V. (2011), “Algorithm of the numerical solution of three-dimensional contact problem, connected with the interaction between the elastic bodies with rough surfaces”, *Problemy obchyslyval'noyi matematyky i mitsnosti konstruktivnykh*, issue 17, pp. 23-34.
9. Alexandrov, V.M. and Mhitaryan, S.M. (1983), *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiami i prosloykami* [Contact problems for bodies with thin coatings and layers], Nauka, Moscow, Russia.
10. Shishkanova, A.A. (2004), *O reshenii kontaktnoy zadachi s uchetom treniya i sherohovatosti dlya shtampa v forme dvusvyaznogo kvadrata v plane* [About the solution of a contact problem taking into account a friction and a roughness for a punch in the form of a doubly-connected square in the plan], *Visnik Denezkogo universitetu*, Pripodnichi nauki, issue 1, pp. 95-102.
11. Dyachenko, N.M. and Shashkova, Ye.V. (2006), “The decision of the problem about sliding of a punch with friction on border rough half-space by the linear law of deformation of a roughness”, *Visnyk Zaporizkogo nationalnogo universytetu*, Fiz.-mat. Nauky, no. 1, pp. 25-33.
12. Pauk, V and Zastrau, B. (2004), “Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space”, *J. Theor. Appl. Mech*, vol. 42, no. 1, pp. 107-124.
13. Fihthengolts, G.M. (2003), *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [Kurs differential and integral calculus], vol. 1, Fismatlit, Moscow, Russia,
14. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V. (1989), *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the theory of functions and the functional analysis], Nauka, Moscow, Russia.
15. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. (1984), *Funktsionalnyi analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, Russia.

УДК 512.552

ЖОРСТКІ ТА МАЙЖЕ ЖОРСТКІ САГАЙДАКИ

¹Зеленський О. В., ²Дармосюк В. М.

¹*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, Україна*

²*Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського,
вул. Никольська, 24, м. Миколаїв, Україна*

¹zelik82@mail.ru, ²darmosiuk@gmail.com

У роботі досліджуються жорсткі та майже жорсткі сагайдаки матриць показників. Знайдено умови того, що сагайдак одержується зі скінченної кількості матриць показників та знайдені всі жорсткі сагайдаки на 4 вершинах.

Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак матриці показників, жорсткий сагайдак.

ЖЕСТКИЕ И ПОЧТИ ЖЕСТКИЕ КОЛЧАНЫ

¹Зеленский А. В., ²Дармосюк В. Н.

¹*Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенко,
ул. Огиенко, 61, г. Каменец-Подольский, Украина*

²*Николаевский национальный университет имени А.В. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, г. Николаев, Украина*

¹zelik82@mail.ru, ²darmosiuk@gmail.com

В работе исследуются жесткие и почти жесткие колчаны матриц показателей. Найдены условия того, что колчан получается из конечного числа матриц показателей и найдены все жесткие колчаны на 4 вершинах.

Ключевые слова: матрица показателей, допустимый колчан матрицы показателей, жесткий колчан.