

3. Polyanin, A.D. (2001), *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Manual on simple equations of mathematical physics], Fizmatlit, Moscow, Russia.
4. Feodosev, V.I. (1999), *Soprotivlenie materialov: Ucheb. dlya vuzov* [Strength of materials: Textbook for high schools], Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana, Moscow, Russia.
5. Perelmuter, A.V. and Slivker, V.I. (2002), *Raschetnyie modeli sooruzheniy i vozmozhnost ih analiza* [Computational models of structures and the possibility of their analysis], Stal, Kiev, Ukraine.
6. Gorbunov-Posadov, M.I., Malikova, T.A. and Solomin, V.I. (1984), *Raschet konstruktsey na uprugom osnovanii* [Calculation of structures on elastic foundation], Stroyizdat, Moscow, Russia.
7. Gorshkov, A.G., Starovoytov, E.I. and Talakovskiy, D.V. (2002), *Teoriya uprugosti i plastichnosti* [The theory of elasticity and plasticity], Fizmatlit, Moscow, Russia.
8. Tolok, V.A. and Shapar, V.V. (2006), “V.Z. Vlasov’s functional-symbolical rows in a solution of problems of the theory of elasticity in system Maple”, *Hidroakustychnyy zhurnal*, no. 3, pp. 66-74.
9. Galan, E.E., Ovskiy, A.G. and Tolok, V.A. (2008), “Using the Maple system in the implementation of the method of initial functions Vlasov”, *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky*, no. 1, pp. 16-26.
10. Ovskiy, A.G. and Tolok, V.O. (2008), “Simulation of three-dimensional schemes for solving the problem of elasticity theory in Maple System”, *Hidroakustychnyy zhurnal*, no. 3, pp. 88-97.
11. Ovskiy, A.G. and Tolok, V.O. (2014), “Preprocessor solutions static two-dimensional and three-dimensional problems of elasticity theory” *Informatsionnyie tehnologii modelirovaniya i upravleniya*, no. 1 (85), pp. 47-58.
12. Ovskiy, A.G. (2014), “Simulation of plane problems of the theory of elasticity thick laminated panels in computer mathematics systems”, *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky*, no. 2, pp. 101-116.

УДК 539.312

## НЕСТАЦІОНАРНА ДЕФОРМАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРІ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНИХ ПОВЕРХНЕВИХ НАВАНТАЖЕНЬ

<sup>1</sup>Пожуєв В. І., <sup>2</sup>Пожуєв А. В., <sup>3</sup>Фасоляк А. В.

<sup>1,3</sup>*Запорізький національний технічний університет,  
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, 69063, Україна*

<sup>2</sup>*Запорізька державна інженерна академія,  
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69000, Україна*

<sup>2</sup>scorpio1@mail.ru, <sup>3</sup>antonfasolyak@mail.ru

Розглядається тривимірний пружний півпростір з циліндричною порожниною, яка підкріплена оболонкою, причому вісь оболонки розташована перпендикулярно до площини, що обмежує півпростір. Розглянуто випадки, коли на поверхню оболонки діють вісесиметричні динамічні нормальні навантаження. Рух півпростору описувався динамічними рівняннями теорії пружності, а рух оболонки описувався рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко). Задача розв'язана методом інтегральних синус та косинус перетворень Фур'є (за осью змінною), та Лапласа (за змінною часу), обертання яких проводилось чисельно. Отримані результати проілюстровано графічно.

*Ключові слова:* циліндрична оболонка, пружний півпростір, динамічне навантаження, вісесиметрична задача.

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗОК

<sup>1</sup>Пожуев В. И., <sup>2</sup>Пожуев А. В., <sup>3</sup>Фасоляк А. В.

<sup>1,3</sup>*Запорожский национальный технический университет,  
ул. Жуковского, 64, Запорожье, 69063, Украина*

<sup>2</sup>*Запорожская государственная инженерная академия,  
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69000, Украина*

<sup>2</sup>scorpio1@mail.ru, <sup>3</sup>antonfasolyak@mail.ru

Рассматривается трехмерное упругое полупространство с цилиндрической полостью, которая подкреплена оболочкой, причем ось оболочки расположена перпендикулярно к ограничивающей полупространство плоскости. Рассмотрен случай, когда на поверхность оболочки действуют осесимметрические динамические нагрузки. Движение полупространства описывается динамическими уравнениями теории упругости, а движения оболочки описывается уравнениями, которые учитывают поперечный сдвиг и инерцию вращения (оболочка типа Тимошенко). Задача решена методом интегральных синус и косинус преобразований Фурье (по осевой переменной), и Лапласа (по переменной времени), обращение которых проводилось численно. Полученные результаты проиллюстрированы графически.

*Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, упругое полупространство, динамическая нагрузка, осесимметричная задача.*

## NON-STATIONAR DEFORMATION OF CYLINDRICAL SHELL IN ELASTIC HALF-MEDIUM, SUBJECTED TO NORMAL SURFACE LOADS

<sup>1</sup>Pozhuev V. I., <sup>2</sup>Pozhuev A. V., <sup>3</sup>Fasoliak A. V.

<sup>1,3</sup>*Zaporizhzhya national technical university,  
Zhykovsky str, 64, Zaporizhzhya, 69063, Ukraine*

<sup>2</sup>*Zaporizhzhya state engineering academy,  
Sobornyy av., 226, Zaporizhzhya, 69000, Ukraine*

<sup>2</sup>scorpio1@mail.ru, <sup>3</sup>antonfasolyak@mail.ru

Infinite cylindrical shell, embed in three-dimensional elastic half-space is considered. We assume that half-space and shell are rigidly bonded on the half-space surface with absolutely-rigidly half-space. Case, when impulsive axi-symmetrical normal load, which depends on time as unit Heaviside function is subjected to surface of the shell, is studied. For the results to be compared, corresponding static load is considered. Axi-symmetrical normal load, which depends on time as exponential function is considered too.

Half-space motion is described by elastic theory dynamic equations. Shell's motions are described by equations, which consider cross shift and rotary inertia (Timoshenko's shell).

Elastic theory dynamic equations are solved by method of two potential functions. Then integral transform technique is used. Fourier sine and cosine transform on axial variable, and Laplace transform on time are used.

Transform solutions for displacements and stresses are inversed numerically. Filon's method (to inverse sine and cosine Fourier transform) and the displaced Legendre's polynoms method (to inverse Laplace transform) are used.

Radial displacements and stresses for normal load, that depend on time as unit Heaviside function, are observed to aspire to static solution in large timescales. For the case, when normal load depends on time as exponential function, it is shown, that shell's radial displacements and stresses aspire to zero in large timescales.

*Key words: cylindrical shell, elastic half-space, dynamic loads, axi-symmetrical problem.*

### ВСТУП

На сьогодні достатньо добре досліджені динамічні задачі для циліндричних оболонок у необмеженому пружному інерційному просторі. У роботах [1-4] розглянуті подібні задачі в нестационарній постановці з використанням різних методів моделювання реакції простору.

Стаття присвячена нестационарним динамічним задачам для пружних оболонок у пружному інерційному півпросторі, який обмежено площиною, причому вісь оболонки перпендикулярна цій площині. Припускається, що цей півпростір жорстко зчеплений з абсолютно твердим півпростором. Досліджується питання впливу глибини розташування навантаження на динамічний напружено-деформований стан системи оболонка-півпростір.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається вісесиметрична нестационарна деформація нескінченно довгої циліндричної оболонки, яка знаходиться у лінійно-пружному, однорідному та ізотропному півпросторі під дією нормальних до її поверхні навантажень. Оболонка розташована таким чином, що її вісь перпендикулярна до площини, що обмежує півпростір (рис. 1). Також припускається, що площина, яка обмежує півпростір, жорстко з'єднана з абсолютно жорстким півпростором. Нехай оболонка та півпростір віднесені до нерухомої циліндричної системи координат  $\{r, \theta, x\}$ , але для даної вісесиметричної задачі всі величини не залежать від змінної  $\theta$ . Внутрішній радіус оболонки  $b$ , а зовнішній –  $a$ . Площина, що обмежує півпростір задається рівнянням  $x=0$ . В момент часу  $t < 0$  оболонка та простір знаходяться в стані спокою та вільні від напружень. Потім в момент часу  $t=0$  в області  $|x-l| \leq d$ ,  $r=b$  прикладається імпульсивне нормальне навантаження  $F_0$ , яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда, або за показниковим законом. Для порівняння результатів при заданому навантаженні розглянута аналогічна статична задача. У всіх випадках вважаємо, що оболонка і півпростір жорстко зчеплені.

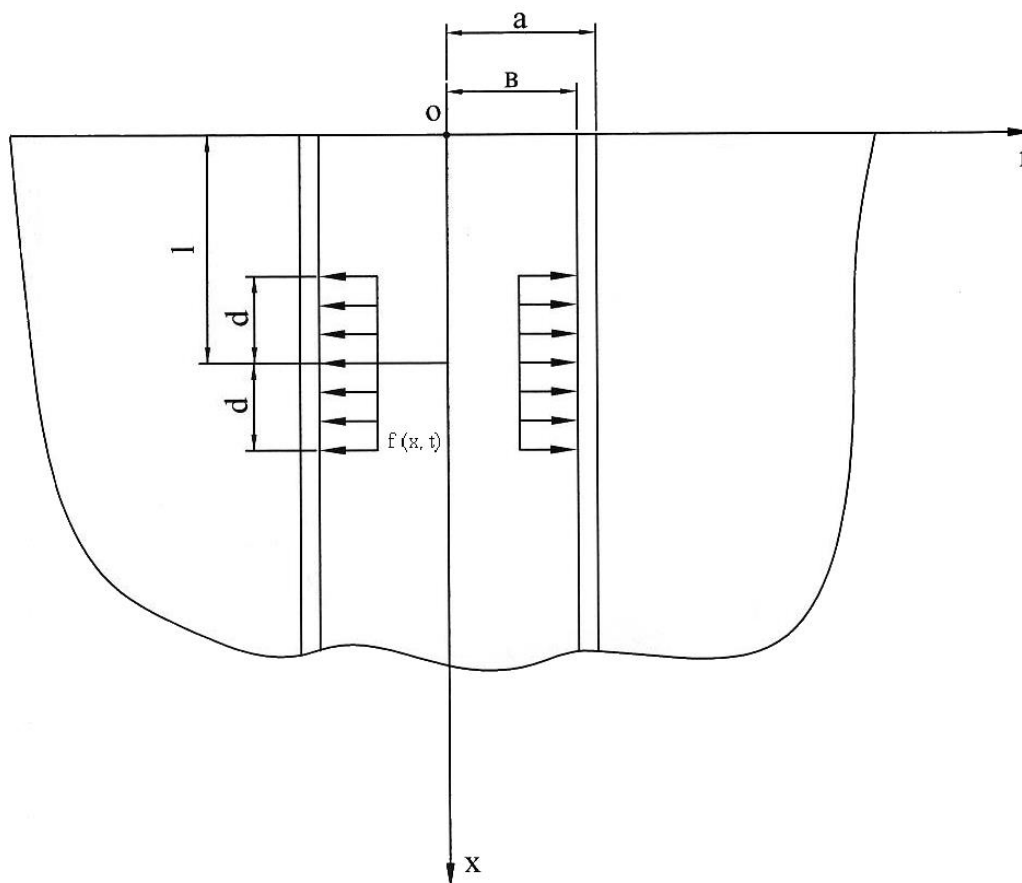


Рис. 1. Пружний півпростір з циліндричною порожниною, підкріпленою оболонкою у циліндричній системі координат

У цій роботі рух оболонки будемо описувати за допомогою рівнянь, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), а півпростір, що оточує оболонку, описується динамічними рівняннями теорії пружності.

У векторній формі динамічні рівняння теорії пружності мають вигляд [5, с.551]:

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \text{grad div} \left( \bar{u}^{(2)} \right) - \mu_2 \text{rot rot} \left( \bar{u}^{(2)} \right) = \rho_2 \frac{\partial^2 \bar{u}^{(2)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де  $\bar{u}^{(2)} = (u_x, u_r)$  – вектор переміщень,  $\lambda_2, \mu_2, \rho_2$  – параметри Ламе та щільність півпростору.

При відсутності масових сил вводимо потенціальні функції  $\Phi, \Psi$  за формулами [5, с.565]

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r}, \quad u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2)$$

Підставляючи залежності (2) в рівняння (1).

Маємо:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\Psi}{r^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \quad (3)$$

$$c_p^2 = \frac{2G_2(1-\nu_2)}{\rho_2(1-2\nu_2)}, \quad c_s^2 = \frac{G_2}{\rho_2}. \quad (4)$$

Рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), у вісесиметричному випадку мають вигляд [6, с.43]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_x, \\ \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right) + \frac{w}{a^2} = -\rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (-f + q_r), \\ \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_x \right) = \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial t^2} - \frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_x, \end{cases} \quad (5)$$

де  $u, w$  – осьове та радіальне переміщення серединної поверхні оболонки;  $\alpha_x$  – кут повороту нормалі до серединної поверхні оболонки в осьовому напрямку;  $q_r = q_r(x, t), q_x = q_x(x, t)$  – нормальна та дотична реакції з боку півпростору на межі контакту з оболонкою;  $f(x, t)$  – нормальне навантаження, яке діє на внутрішню поверхню оболонки;  $\rho_1, h$  – густина та товщина оболонки.

Для жорсткого контакту між оболонкою і півпростором граничні умови запишуться так:

$$\sigma_{rx}(a, x, t) = -q_x(x, t), \quad \sigma_{rr}(a, x, t) = -q_r(x, t), \quad u_r(a, x, t) = w(x, t), \quad u_x(a, x, t) = u(x, t). \quad (6)$$

Напруження, що необхідні для задоволення граничних умов (6), виражаються через переміщення за формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2G_2\nu_2}{1-2\nu_2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{rx} &= G_2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Враховуючи, що на поверхні пружний півпростір жорстко зчеплений з абсолютно жорстким півпростором, тоді на поверхні (тобто при  $x=0$ ) переміщення обертаються в нуль.

Початкові умови у всіх випадках приймаються нульовими, тобто при  $t = 0$  шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

Зауважимо, що для статичної задачі треба взяти рівними нулю похідні за часом, а всі величини не залежать від змінної  $t$ .

### РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ У ПРОСТОРІ ЗОБРАЖЕНЬ

Для розв'язання задачі будемо використовувати перетворення Лапласа за часовою змінною:

$$f_L(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \tag{8}$$

синус перетворення Фур'є за осью координатою:

$$f_S(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(sx) dx \tag{9}$$

та косинус перетворення Фур'є за осью координатою:

$$f_C(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(sx) dx \tag{10}$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \{\bar{\Phi}, \bar{\Psi}\} &= \frac{1}{a^2} \{\Phi, \Psi\}; \quad \{U_x, U_r, W, U\} = \frac{1}{a} \{u_x, u_r, w, u\}; \\ \{\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rx}, \bar{q}_r, \bar{q}_x, \bar{f}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{rr}, \sigma_{rx}, q_r, q_x, f\}; \\ \{x_*, r_*\} &= \frac{1}{a} \{x, r\}; \quad \tau = \frac{c_S}{a} t; \quad \kappa = \frac{h}{a}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad d_1 = 1 - \kappa. \end{aligned} \tag{11}$$

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною  $\tau$ , та синус-перетворення Фур'є за змінною  $x_*$  до рівнянь (3). Будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{LS}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Phi}_{LS}}{\partial r_*} - (s^2 + \eta_P p^2) \bar{\Phi}_{LS} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{LS}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Psi}_{LS}}{\partial r_*} - \left( s^2 + \eta_S p^2 + \frac{1}{r_*^2} \right) \bar{\Psi}_{LS} &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

де  $\eta_P = \frac{c_S^2}{c_P^2} = \frac{1 - 2\nu_2}{2(1 - \nu_2)}$ ;  $\eta_S = \frac{c_S^2}{c_S^2} = 1$ .

Тепер застосовуємо перетворення Лапласа за змінною  $\tau$ , та косинус-перетворення Фур'є за змінною  $x_*$  до рівнянь (3). Будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{LC}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Phi}_{LC}}{\partial r_*} - (s^2 + \eta_P p^2) \bar{\Phi}_{LC} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{LC}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Psi}_{LC}}{\partial r_*} - \left( s^2 + \eta_S p^2 + \frac{1}{r_*^2} \right) \bar{\Psi}_{LC} &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Загальний розв'язок рівнянь (12) та (13) з урахуванням умов затухання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{LS}(r_*, s, p) &= C_{1S}(s, p)K_0(m_1 r_*); & \bar{\Psi}_{LS}(r_*, s, p) &= C_{2S}(s, p)K_1(m_2 r_*); \\ \bar{\Phi}_{LC}(r_*, s, p) &= C_{1C}(s, p)K_0(m_1 r_*); & \bar{\Psi}_{LC}(r_*, s, p) &= C_{2C}(s, p)K_1(m_2 r_*),\end{aligned}\quad (14)$$

де  $m_1 = \sqrt{s^2 + \eta_P p^2}$ ,  $m_2 = \sqrt{s^2 + p^2}$ , а  $K_0, K_1$  – модифіковані функції Бесселя.

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною  $\tau$ , та синус-перетворення, а потім косинус-перетворення Фур'є за змінною  $x_*$  до рівнянь (2) та (7). Отримуємо вирази для переміщень та напружень у просторі зображень:

$$U_{xLS} = -s\bar{\Phi}_{LC} + \frac{d\bar{\Psi}_{LS}}{dr_*} + \frac{\bar{\Psi}_{LS}}{r_*}, \quad U_{rLS} = \frac{d\bar{\Phi}_{LS}}{dr_*} + s\bar{\Psi}_{LC}, \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}_{rrLS} = \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \left( -sU_{xLC} + \frac{U_{rLS}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{dU_{rLS}}{dr_*}, \quad (16)$$

$$\bar{\sigma}_{rxLS} = \frac{dU_{xLS}}{dr_*} - sU_{rLC},$$

$$U_{xLC} = s\bar{\Phi}_{LS} + \frac{d\bar{\Psi}_{LC}}{dr_*} + \frac{\bar{\Psi}_{LC}}{r_*}, \quad U_{rLC} = \frac{d\bar{\Phi}_{LC}}{dr_*} - s\bar{\Psi}_{LS}, \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}_{rrLC} = \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \left( sU_{xLS} + \frac{U_{rLC}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{dU_{rLC}}{dr_*}, \quad (18)$$

$$\bar{\sigma}_{rxLC} = \frac{dU_{xLC}}{dr_*} + sU_{rLS}.$$

Для рівнянь, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), у просторі зображень за Фур'є-Лапласом із (5) приходимо до такої системи:

$$\left\{ \begin{aligned} -s^2 U_{LS} - \nu_1 s W_{LC} &= \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 U_{LS} - \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} \bar{q}_{xLS}; \\ -\nu_1 s U_{LC} + k^2 \frac{1-\nu_1}{2} (s^2 W_{LS} + s \bar{\alpha}_{xLC}) + W_{LS} &= -\frac{1-\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 W_{LS} - \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} (-\bar{f}_{LS} + \bar{q}_{rLS}); \\ -s^2 \bar{\alpha}_{xLS} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} (-s W_{LC} + \bar{\alpha}_{xLS}) &= \frac{1+\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 \bar{\alpha}_{xLS} - \frac{3(1-\nu_1)}{\gamma\kappa^2} \bar{q}_{xLS}; \\ -s^2 U_{LC} + \nu_1 s W_{LS} &= \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 U_{LC} - \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} \bar{q}_{xLC}; \\ \nu_1 s U_{LS} + k^2 \frac{1-\nu_1}{2} (s^2 W_{LC} - s \bar{\alpha}_{xLS}) + W_{LC} &= -\frac{1-\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 W_{LC} - \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} (-\bar{f}_{LC} + \bar{q}_{rLC}); \\ -s^2 \bar{\alpha}_{xLC} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} (s W_{LS} + \bar{\alpha}_{xLC}) &= \frac{1+\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 \bar{\alpha}_{xLC} - \frac{3(1-\nu_1)}{\gamma\kappa^2} \bar{q}_{xLC}. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

У просторі зображень за Фур'є-Лапласом граничні умови (6) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rxLS}(1, s, p) &= -\bar{q}_{xLS}(s, p), \bar{\sigma}_{rrLS}(1, s, p) = -\bar{q}_{rLS}(s, p), \\ U_{rLS}(1, s, p) &= W_{LS}(s, p), U_{xLS}(1, s, p) = U_{LS}(s, p), \\ \bar{\sigma}_{rxLC}(1, s, p) &= -\bar{q}_{xLC}(s, p), \bar{\sigma}_{rrLC}(1, s, p) = -\bar{q}_{rLC}(s, p), \\ U_{rLC}(1, s, p) &= W_{LC}(s, p), U_{xLC}(1, s, p) = U_{LC}(s, p). \end{aligned} \tag{20}$$

Враховуючи граничні умови (20) з третього та шостого рівняння системи (19) знаходимо функції  $\bar{\alpha}_{xLS}(s, p)$ ,  $\bar{\alpha}_{xLC}(s, p)$  відповідно:

$$\bar{\alpha}_{xLS}(s, p) = \frac{6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa} s W_{LC}(s, p) + \frac{3(1-\nu_1)-}{\gamma \kappa^2} q_{xLS}}{s^2 + 6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} + \frac{1+\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2}, \tag{21}$$

$$\bar{\alpha}_{xLC}(s, p) = \frac{-6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa} s W_{LS}(s, p) + \frac{3(1-\nu_1)-}{\gamma \kappa^2} q_{xLC}}{s^2 + 6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} + \frac{1+\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2}. \tag{22}$$

Підставляючи (21) в друге рівняння системи (19), а вираз (22) в п'яте рівняння системи (19) і враховуючи перше та четверте рівняння системи (19), отримуємо систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $C_{1S}(s, p)$ ,  $C_{2S}(s, p)$ ,  $C_{1C}(s, p)$ ,  $C_{2C}(s, p)$ , яку розв'язуємо методом Гауса. Отримані розв'язки підставляємо у вирази (14), а їх, в свою чергу, у вирази (15)-(18) і отримуємо розв'язок динамічної задачі у просторі зображень за Фур'є-Лапласом.

Для відповідної статичної задачі розв'язок для півпростору будемо шукати у формі Папковича-Нейбера [5, с.185] через дві гармонічні функції  $\varphi_1(r, x)$  і  $\varphi_2(r, x)$ :

$$\begin{aligned} u_r(r, x) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} x; \\ u_x(r, x) &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (3-4\nu_2)\varphi_2 + x \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}. \end{aligned} \tag{23}$$

Відповідні напруження виражаються через переміщення за формулами (7).

Функції  $\varphi_1(r, x)$  і  $\varphi_2(r, x)$  задовольняють рівнянням:

$$\nabla^2 \varphi_j = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} = 0, \quad j=1,2. \tag{24}$$

Перейшовши до безрозмірних величин за співвідношеннями (11) та аналогічно до раніше викладеного застосувавши спочатку синус-перетворення, а потім косинус-перетворення Фур'є по змінній  $x_*$  до рівнянь (24), маємо:

$$r_*^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}_{jS}}{d r_*^2} + r_* \frac{d \bar{\Phi}_{jS}}{d r_*} - r_*^2 s^2 \bar{\Phi}_{jS} = 0, \quad r_*^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}_{jC}}{d r_*^2} + r_* \frac{d \bar{\Phi}_{jC}}{d r_*} - r_*^2 s^2 \bar{\Phi}_{jC} = 0, \quad j=1,2. \tag{25}$$

Загальний розв'язок рівнянь (25) з урахуванням умов згасання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{1S}(r_*, s) &= C_{1S}(s)K_0(sr_*); & \bar{\Phi}_{2S}(r_*, s) &= C_{2S}(s)K_0(sr_*); \\ \bar{\Phi}_{1C}(r_*, s) &= C_{1C}(s)K_0(sr_*); & \bar{\Phi}_{2C}(r_*, s) &= C_{2C}(s)K_0(sr_*);\end{aligned}\quad (26)$$

Застосувавши спочатку синус-перетворення Фур'є, а потім косинус-перетворення Фур'є за змінною  $x_*$  до співвідношень (23), враховуючи (11), маємо:

$$\begin{aligned}U_{rS}(r_*, s) &= \frac{\partial \bar{\Phi}_{1S}}{\partial r_*} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{2C}}{\partial s \partial r_*}; & U_{xS}(r_*, s) &= s \bar{\Phi}_{1C} - 4(1-\nu_2) \bar{\Phi}_{2S} - s \frac{\partial \bar{\Phi}_{2S}}{\partial s}; \\ U_{rC}(r_*, s) &= \frac{\partial \bar{\Phi}_{1C}}{\partial r_*} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{2S}}{\partial s \partial r_*}; & U_{xC}(r_*, s) &= -s \bar{\Phi}_{1S} - 4(1-\nu_2) \bar{\Phi}_{2C} - s \frac{\partial \bar{\Phi}_{2C}}{\partial s};\end{aligned}\quad (27)$$

Синус-трансформанти відповідних напружень задаються формулами (16), а косинус-трансформанти – формулами (18).

Підставляючи співвідношення (26) в (27), а потім співвідношення (27) в граничні умови (20) та враховуючи систему (19) при  $p=0$  отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $C_{1S}(s)$ ,  $C_{2S}(s)$ ,  $C_{1C}(s)$ ,  $C_{2C}(s)$ . Після знаходження розв'язку системи методом Гауса підставляємо цей розв'язок у вирази (26), а їх у вирази (27) та (16), (18) в результаті чого знаходимо розв'язок статичної задачі у просторі зображень за Фур'є.

### РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Розглянемо випадок, коли в початковий момент часу  $t=0$  в області  $|x-H| \leq d$ ,  $r=b$  прикладається імпульсивне нормальне навантаження  $F_0$ , яке постійно діє на даній ділянці.

Функція навантаження має вигляд:

$$f(x, t) = F_0 H(|x-l|-d) H(t), \quad (28)$$

де  $H(x)$  – одинична функція Хевісайда,  $l$  – відстань від поверхні до центру навантаженої ділянки,  $d$  – половина довжини ділянки навантаження.

Синус та косинус трансформанти навантаження (28) мають вигляд:

$$f_{LS}(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \sin(l^*s)}{\sqrt{\pi sp}}, \quad f_{LC}(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \cos(l^*s)}{\sqrt{\pi sp}}, \quad (29)$$

де  $d^* = \frac{d}{a}$ ,  $l^* = \frac{l}{a}$ .

Обернення синус-перетворення Фур'є має вигляд [7, с.28]:

$$f_1^S(x_*) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f_{1S}(s) \sin(sx_*) ds,$$

а обернення косинус-перетворення Фур'є має вигляд [7, с.28]:

$$f_1^C(x_*) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f_{1C}(s) \cos(sx_*) ds.$$

Тоді оригінал функції  $f_1(x_*)$  матиме вигляд:



$$f_1(x_*) = f_1^C(x_*) + f_1^S(x_*) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f_{1C}(s) \cos(sx_*) ds + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f_{1S}(s) \sin(sx_*) ds =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty [f_{1C}(s) \cos(sx_*) + f_{1S}(s) \sin(sx_*)] ds. \quad (30)$$

Тоді з урахуванням (30), після обернення синус та косинус перетворень Фур'є, та оберненого перетворення Лапласа отримуємо вирази для нормальних переміщень та напружень у просторі оригіналів:

$$\frac{U_r(r_*, x_*, \tau) G_1}{F_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3} i} \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \int_0^\infty [U_{rLC}(r_*, s, p) \cos(sx_*) + U_{rLS}(r_*, s, p) \sin(sx_*)] e^{p\tau} ds dp, \quad (31)$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r_*, x_*, \tau)}{F_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3} i} \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \int_0^\infty [\bar{\sigma}_{rrLC}(r_*, s, p) \cos(sx_*) + \bar{\sigma}_{rrLS}(r_*, s, p) \sin(sx_*)] e^{p\tau} ds dp. \quad (32)$$

Відповідне навантаження для статичної задачі має вигляд:

$$f(x, t) = F_0 H(d - |x - l|), \quad (33)$$

синус та косинус трансформанта Фур'є якого дорівнює:

$$f_S(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \sin(H^*s)}{\sqrt{\pi}s}, \quad f_C(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \cos(H^*s)}{\sqrt{\pi}s}. \quad (34)$$

Після обернення синус та косинус перетворень Фур'є за формулою (30) отримуємо вирази для нормальних переміщень та напружень у просторі оригіналів для статичної задачі:

$$\frac{U_r(r_*, x_*) G_1}{F_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [U_{rC}(r_*, s) \cos(sx_*) + U_{rS}(r_*, s) \sin(sx_*)] ds, \quad (35)$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r_*, x_*)}{F_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\bar{\sigma}_{rrC}(r_*, s) \cos(sx_*) + \bar{\sigma}_{rrS}(r_*, s) \sin(sx_*)] ds. \quad (36)$$

Розглянемо випадок, коли в початковий момент часу  $t=0$  в області  $|x-l| \leq d, r=b$  прикладається імпульсивне нормальне навантаження  $F_0$ , яке залежить від часу за показниковим законом.

Функція навантаження має вигляд:

$$f(x, t) = F_0 H(|x-l| - d) e^{-t}. \quad (37)$$

Синус та косинус трансформанти навантаження (36) мають вигляд:

$$f_{LS}(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \sin(l^*s)}{\sqrt{\pi}s(p+1)}, \quad f_{LC}(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \cos(l^*s)}{\sqrt{\pi}s(p+1)}. \quad (38)$$

Після обернення синус та косинус перетворень Фур'є за формулою (30), та обернення перетворення Лапласа отримуємо вирази для нормальних переміщень та напружень у просторі оригіналів:

$$\frac{U_r(r_*, x_*, \tau) G_1}{F_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3} i} \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \int_0^\infty [U_{rLC}(r_*, s, p) \cos(sx_*) + U_{rLS}(r_*, s, p) \sin(sx_*)] e^{p\tau} ds dp, \quad (39)$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r_*, x_*, \tau)}{F_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3} i} \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \int_0^\infty [\bar{\sigma}_{rrLC}(r_*, s, p) \cos(sx_*) + \bar{\sigma}_{rrLS}(r_*, s, p) \sin(sx_*)] e^{p\tau} ds dp. \quad (40)$$

Обчислення невластних інтегралів у виразах (31), (32), (35), (36), (39), (40) здійснювалось наближено з використанням метода Файлона [8, с.76], обернення перетворення Лапласа здійснювалось чисельно за допомогою зміщених поліномів Лежандра [9, с.42].

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів:  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $\gamma = 30$ ,  $\rho^* = 4$ ,  $\kappa = 0,02$ ,  $d^* = \frac{1}{2}$ . Величини  $r_*$ ,  $x_*$ ,  $\tau$ ,  $l^*$  – змінювались.

Рис. 2 та рис. 3 ілюструють зміну відповідно нормальних переміщень та напружень за осьовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження (28) при  $l^* = 5$ .

На рис. 4 та рис. 5 зображено зміну відповідно нормальних переміщень та напружень за осьовою координатою для навантаження (28) при  $\tau = 1$ ,  $l^* = 5$  при різних значеннях радіальної координати, тобто у пружному півпросторі при віддаленні від границі контакту з оболонкою.

Рис. 6 та рис. 7 ілюструють зміну відповідно нормальних переміщень та напружень за осьовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження (28) при  $l^* = 3$ .

Рис. 8 та рис. 9 ілюструють зміну відповідно нормальних переміщень та напружень за осьовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження (37) при  $l^* = 5$ .

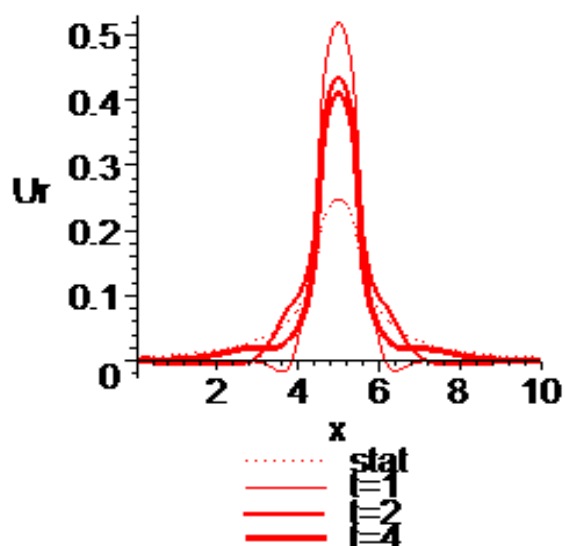


Рис. 2. Зміна нормальних переміщень за осьовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

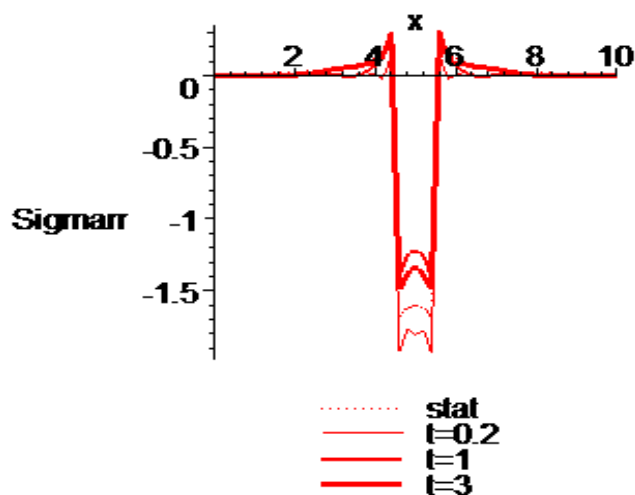


Рис. 3. Зміна нормальних напружень за осьовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

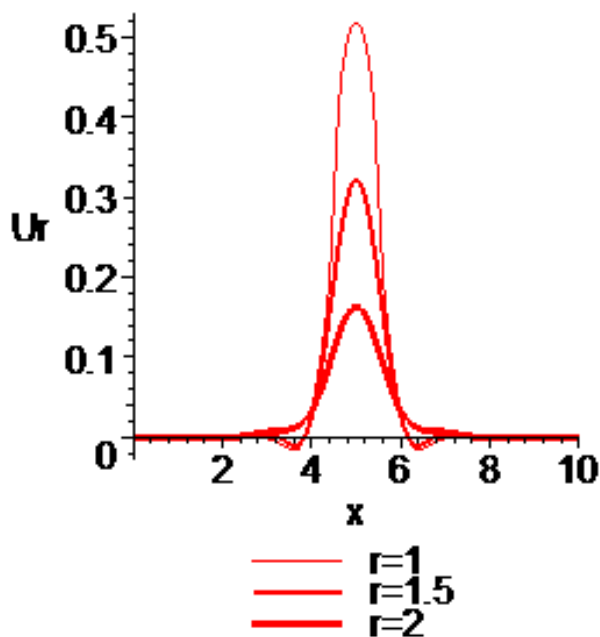


Рис. 4. Зміна нормальних переміщень за осьюою координатою при різних значень радіальної координати, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

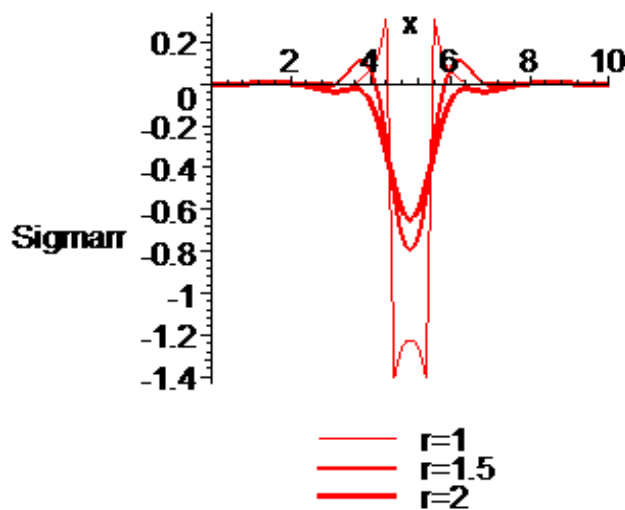


Рис. 5. Зміна нормальних напружень за осьюою координатою при різних значень радіальної координати, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

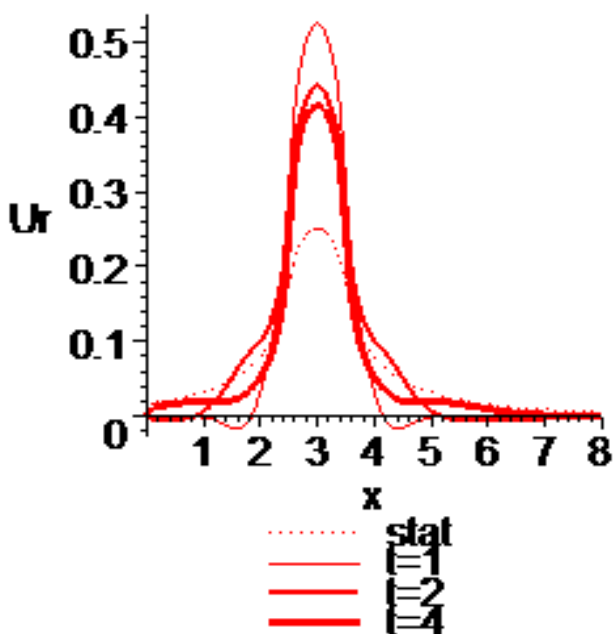


Рис. 6. Зміна нормальних переміщень за осьюою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

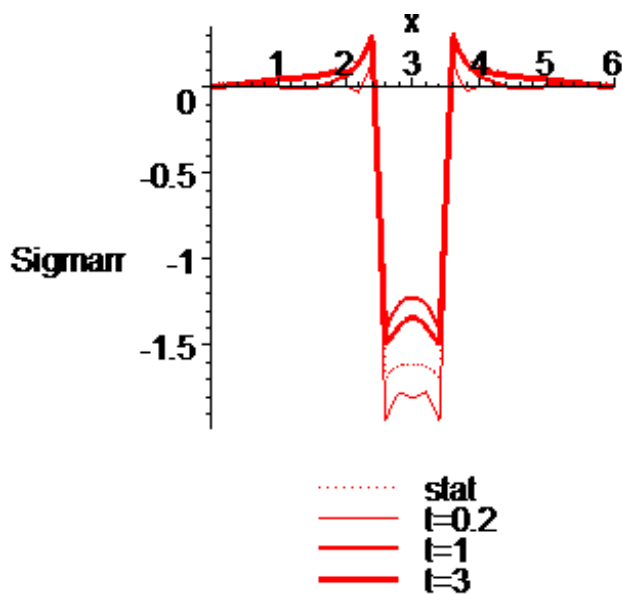


Рис. 7. Зміна нормальних напружень за осьюою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

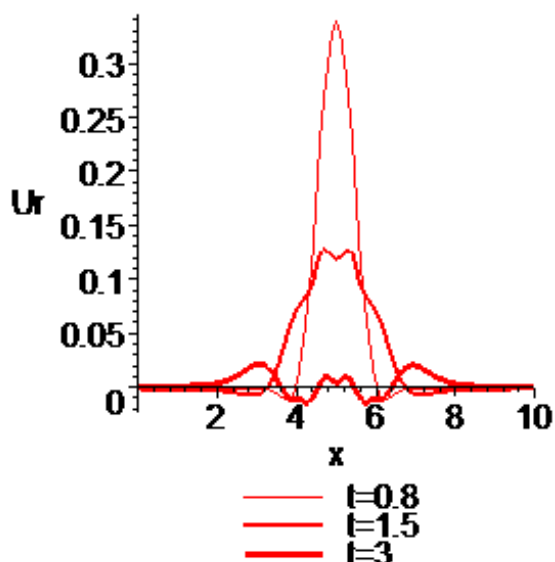


Рис. 8. Зміна нормальних переміщень за осью координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу за показниковим законом

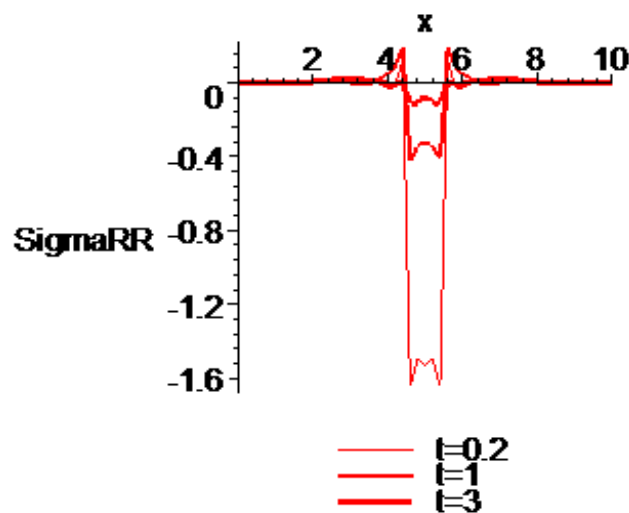


Рис. 9. Зміна нормальних напружень за осью координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу за показниковим законом

## ВИСНОВКИ

Отримано розв'язок вісесиметричної задачі для циліндричної оболонки, розташованої у пружному півпросторі, на яку діють навантаження, яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда та за експоненціальним законом.

Для навантаження, що залежить від часу за експоненціальним законом, досліджено залежність нормальних переміщень та напружень від глибини прикладення навантаження, та їх розподілення за осової координатою в різні моменти часу.

Для навантаження, що залежить від часу як одинична функція Хевісайда було досліджено розподілення нормальних переміщень та напружень за осовою та радіальною координатою в різні моменти часу та встановлено їх збіжність до статичного розв'язку.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Пожуев В. И. Нестационарная реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на действие неосесимметрической подвижной загрузки / В. И. Пожуев, Жибитай Мохаммед // Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 6. – С. 33-37.
2. Пожуев В. И. Нестационарные колебания трубопровода конечной длины, односторонне взаимодействующего с инерционной средой / В. И. Пожуев, Жибитай Мохаммед // Изв. ВУЗов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 48-50.
3. Пожуев А. В. Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2015. – № 2. – С. 108-114.
4. Пожуев А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 200-213.
5. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
6. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1972. – 432 с.
7. Снеддон И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. – М. : Иностранная литература, 1955. – 668 с.
8. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. – М. : Наука, 1966. – 370 с.
9. Крылов В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. – М. : Наука, 1974. – 223 с.

## REFERENCES

1. Pozhuev, V.I. and Zhybitay Mokhammed (1991), "Non-stationary response of cylindrical shells in elastic medium on action of non axi-symmetrical moving load", *Izvestiya VUZov, Stroitelstvo i arkhitektura*, no. 6, pp. 33-37.
2. Pozhuev, V.I. and Zhybitay Mokhammed (1992), "Non-stationary fluctuations of finite length pipeline, unilaterally interacts with inertional medium", *Izvestiya VUZov, Stroitelstvo*, no. 4, pp. 48-50.
3. Pozhuev, A.V. and Fasoliak, A.V. (2015), "Non-stationary non axi-symmetrical deformation cylindrical shell in elastic space subjected to moving surface loads", *Novi materialy i tehnologiyi v metalurgiyi ta mashynobuduvanni*, no. 2, pp. 108-115.
4. Pozhuev, A.V. and Fasoliak, A.V. (2016), "Non-stationar deformation of cylindrical shell in elastic medium, subjected to extended surface loads", *Visnyk of Zaporizkogo natsionalnogo universitetu: Zbirnyk naukovykh statey, Fizyko-matematychni nauky*, no. 1, pp. 200-213.
5. Novatskiy, V. (1975), *Teoriya uprugosti* [Elastic theory], Mir, Moscow, Russia.
6. Volmir, A.S. (1972), *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek* [Non-linear dynamic of planes and shells], Nauka, Moscow, Russia.
7. Sneddon, I. (1955), *Preobrazovanie Furye* [Fourier transform], Inostrannaya literature, Moscow, Russia.
8. Krylov, V.I. and Shulina, L.T. (1966), *Spravochnaya kniga po chislennomu integrirovaniyu* [Handbook of numerical integrations], Nauka, Moscow, Russia.
9. Krylov, V.I. and Skoblya, N.S. (1974), *Metody priblizhonnogo preobrazovaniya Furye i obrascheniya preobrazovaniya Laplasa* [Methods of approximately Fourier transform and inverse of Laplace transform], Nauka, Moscow, Russia.

UDK 539.3

## JUSTIFICATION OF THE GENERALIZED FOURIER METHOD FOR THE MIXED PROBLEM OF ELASTICITY THEORY IN THE HALF-SPACE WITH THE CYLINDRICAL CAVITY

Protsenko V. S., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Ukraynets N. A.

*National Aerospace University named after N.Ye. Zhukovskiy «Kharkiv Aviation Institute»,  
Chkalova str., 17, Kharkiv, 61070, Ukraine*

nattalja2004@mail.ru

The mixed problem of the elasticity theory for the homogeneous isotropic half-space with the infinite circular cylindrical cavity, parallel to the boundary of the half-space, is considered. These investigations are of practical interest in connection with problems of geomechanics and geotechnical engineering. The aim of the work is to substantiate and to apply the research method of the stress-strain state of elastic half-space with a circular cylindrical cavity in the case when the stresses are set on a half-space boundary and the displacements are set on a cavity surface.

A boundary value problem for the Lamé equation with the appropriate boundary conditions in the given domain is solved by the generalized Fourier method. The general solution of the boundary value problem is presented as a superposition of the external basis solutions of the Lamé equation for the cylinder and the internal basis solutions for the half-space. The addition theorems of the basis solutions of the Lamé equations for the cylinder and the half-space allow to satisfy the boundary conditions and to reduce the problem to the infinite system of linear algebraic equations which is solved by the reduction method. It is proved that the operator of the system is quite continuous in space  $l_2$ . The results of numerical calculations have been presented.

*Key words: generalized Fourier method; elastic half-space; cylindrical cavity; basis solutions of the Lamé equation; addition theorems; reduction method.*