УДК 531:383-62:50

ФОРМУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ДИСКРЕТНОЇ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕКТОРА КЕРУВАННЯ

Святовець І. Ф.

Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69006, Україна

sv.irina0702@gmail.com

Вивчаються умови побудови дискретної майже консервативної системи за допомогою зворотного зв’язку. Наведено приклад формування такої системи та побудови для неї оптимального регулятора.

Ключові слова: дискретна майже консервативна система, зворотній зв’язок, вектор керувань, оптимальний регулятор.

ФОРМИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРА УПРАВЛЕНИЯ

Святовец И. Ф.

Запорожская государственная инженерная академия,
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69006, Украина

sv.irina0702@gmail.com

Изучаются условия построения дискретной почти консервативной системы с помощью обратной связи. Приведен пример конструирования такой системы и построения для нее оптимального регулятора.

Ключевые слова: дискретная почти консервативная система, обратная связь, вектор управления, оптимальный регулятор.

THE CONDITIONS OF CONSTRUCTING OF THE ALMOST CONSERVATIVE SYSTEM USING CONTROLLING VECTOR

Svyatovets I. F.

Zaporizhzhya State Engineering Academy,
Sobornyy ave., 226, Zaporizhzhya, 69006, Ukraine

sv.irina0702@gmail.com

This article describes a fully controlled linear discrete system with a small parameter. The coefficient matrix of the variable is of the form $\tilde{F}_0 + \varepsilon \tilde{F}_1$ where ε -is the small parameter. The system is not almost conservative, i.e., matrix $\tilde{F}_0$ is not an orthogonal matrix. To obtain an almost conservative system is constructed linear static state feedback, which is the sum of two terms. After substituting the control vector in the original system, a closed system is obtained.
It uses the approach that, first we construct the necessary matrix coefficients, and then calculate the feedback vector.
The theorem formulated shows that the coefficient matrix of open and closed systems are linked by the least squares method.
It was obtained the conditions on the elements of the matrix $\tilde{F}_0$, to produce the desired orthogonal matrix, if the matrix at control is known.
An example of the transition to almost conservative system by using of feedback is shown with constructing the optimal controller of the obtained system. It uses the approach, which proposes an asymptotic expansion on the small parameter of the solution of matrix Riccati equation. To find an approximate solution we use an infinite system of matrix equations that are solved using mathematical computer algebra system Maple V. It is shown that a given system by constructing optimal controller up to the first order is stabilized.

Key words: discrete almost conservative system, feedback vector controls, optimum regulator.

ВСТУП

У [1-3] вивчався деякий клас лінійних диференціальних систем парного порядку з малим параметром, який можна звести до неперервних майже консервативних систем [4] за допомогою зворотного зв'язку. Аналогічні результати можна отримати і для деякого класу лінійних дискретних динамічних систем з малим параметром. Такий підхід дозволяє застосувати до дискретних майже консервативних систем розроблені раніше спрощені методи дослідження стійкості [5], побудови оптимального регулятора [6] та стабілізації системи [7].

У [1] започатковано дослідження деякого класу лінійних диференціальних систем парного порядку з малим параметром, які можна звести до майже консервативних систем [2] за допомогою зворотного зв'язку. Такий підхід дозволяє застосувати до майже консервативних систем напрацьовані раніше методи визначення стійкості [2, 3], побудови оптимального регулятора [4, 5] та стабілізації системи [6].

1. ОДИН ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ЛІНІЙНОЇ ДИСКРЕТНОЇ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо повністю керовану лінійну дискретну систему з малим параметром

$$x(k+1) = F(\varepsilon)x(k) + Gu(k) = \left(\tilde{F}_0 + \varepsilon\tilde{F}_1\right)x(k) + Gu(k), \quad x(0) = x_0, \quad k = 0,1,..., \tag{1}$$

причому виконується умова

$$\tilde{F}_0\tilde{F}_0^T \neq I_n, \tag{2}$$

де $x(k) = \left[x_1(k),...,x_n(k)\right]^T \in \Re_n$ – вектор стану, $\tilde{F}_0, \tilde{F}_1 \in \Re_{n\times n}$, $u(k) = \left[u_1(k),...,u_m(k)\right]^T \in \Re_m$ – вектор керувань, $G \in \Re_{n\times m}$, $rangG = m$, ε – малий параметр. Тут I_n – одинична матриця розмірності n.

З умови (2) випливає, що система (1) не є майже консервативною [5], а для отримання такої побудуємо лінійний статичний зворотний зв'язок за станом

$$u(k) = -\left(H_0 + \varepsilon H_1\right)x(k). \tag{3}$$

Після підстановки (3) в (1), отримаємо замкнену систему:

$$x(k+1) = \left(F_0 + \varepsilon F_1\right)x(k), \tag{4}$$

де, якщо існує відповідна матриця H_0, то

$$F_0 = \tilde{F}_0 - GH_0, \quad F_0F_0^T = F_0^TF_0 = I_n, \quad F_1 = \tilde{F}_1 - GH_1. \tag{5}$$

З умов (5) випливає, що замкнена система (4) є майже консервативною.

Тепер будемо рухатись у зворотному напрямку: спочатку побудуємо необхідну матрицю коефіцієнтів, а потім обчислимо вектор зворотного зв'язку. Якщо вважати, що ортогональна матриця F_0 рівняння (4) задана, то з першого рівняння (5) легко знаходимо матрицю H_0, оскільки матриця G повного рангу.

Отже, маємо

$$H_0 = \left(G^TG\right)^{-1}G^T\left(\tilde{F}_0 - F_0\right). \tag{6}$$

Далі підставимо вираз для H_0 з (6) в перше рівняння (5) і отримаємо таку рівність

$$\left(I - G\left(G^TG\right)^{-1}G^T\right)\tilde{F}_0 = \left(I - G\left(G^TG\right)^{-1}G^T\right)F_0. \tag{7}$$

Очевидно, що не для всіх ортогональних матриць F_0 (7) є тотожністю.

Таким же способом можна отримати матрицю H_1, коли задати матрицю F_1

$$H_1 = \left(G^T G\right)^{-1} G^T \left(\tilde{F}_1 - F_1\right). \tag{8}$$

Далі підставимо (8) в друге рівняння (5) і отримаємо рівність аналогічну (7), якщо матриця F_1 допустима

$$\left(I - G\left(G^T G\right)^{-1} G^T\right)\tilde{F}_1 = \left(I - G\left(G^T G\right)^{-1} G^T\right)F_1. \tag{9}$$

І в цьому випадку не всі матриці F_1 будуть допустимими, тобто тільки деякий клас матриць задовольняє (9).

Матриця $S = G\left(G^T G\right)^{-1} G^T$ є матрицею проектування, вона симетрична та ідемпотентна, тобто її власні значення одиничні та нульові [8] і $rangH = rangG$ [9]. Отже, отримана матриця проектування має m одиничних власних значень. Ліва і права частини (7) виконують проектування векторів-стовпців відповідно матриць $\tilde{F}_0$, F_0 на ортогональне доповнення простору стовпців матриці G. Формула (7) буде тотожністю тоді, коли хоча б для однієї ортогональної матриці F_0 проекції всіх відповідних векторів-стовпців збігаються.

Матрицею проектування буде також матриця $I - S$ [8]. Можна показати, що матриці коефіцієнтів розімкненої та замкненої динамічних систем пов'язані між собою за допомогою метода найменших квадратів. Наведемо відповідну теорему з [3] у наших позначеннях.

Теорема 1.1. [3] *Нехай* $\tilde{y}_i^0, y_i^0 \in \Re_m$ *розв'язки відповідних лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$G\tilde{y}_i = \tilde{f}_i, \quad Gy_i = f_i, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{10}$$

$$\tilde{F}_0 = \left[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_n\right], \quad F_0 = \left[f_1, f_2, \ldots, f_n\right], \quad \tilde{f}_i, f_i \in \Re_n,$$

знайдені за методом найменших квадратів. Тоді для всіх матриць коефіцієнтів F_0, *які можна отримати за допомогою зворотного зв'язку(3), вектори-нев'язки для розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь (10) збігаються*

$$G\tilde{y}_i^0 - \tilde{f}_i = Gy_i^0 - f_i, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{11}$$

Теорема 1.1 виконується також для матриць $\tilde{F}_1$, F_1.

Оскільки за допомогою зворотного зв'язку отримуємо матрицю, для якої завжди виконується (11), то на неї можна накладати додаткові умови, тобто вибирати її з певного класу матриць (наприклад, ортогональних). При повній керованості лінійної дискретної системи завжди можна побудувати оптимальний регулятор зворотного зв'язку, який стабілізує систему, тобто матриця коефіцієнтів замкненої системи вибирається з класу асимптотично стійких матриць.

Умова однакових проекцій відповідних стовпців матриць $\tilde{F}_0$, F_0 (рівняння (7)) при загальному вигляді матриці G, як і для неперервних систем [3], не дає ефективного способу отримання ортогональної матриці. Тому розглянемо випадок, коли в матриці повного рангу G стовпці є одиничними векторами, тобто $G = \left[e_{i_1} \quad e_{i_2} \quad \ldots \quad e_{i_m}\right]$, де $e_j \in \Re_n$ – вектор з одиницею на j-му місці і нулями на інших місцях. Із структури матриці G випливає рівність

$G^T G = I_m$. Запишемо матрицю G також у вигляді $G = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^T \\ \dots \\ \tilde{e}_n^T \end{bmatrix}$, $G^T = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & \dots & \tilde{e}_n \end{bmatrix}$, $\tilde{e}_i \in \Re_m$, причому тільки вектори $\tilde{e}_{i_j}$, $j = 1,...,m$ є одиничні розмірності m, а інші – нульові. Тоді елементи матриці $U = GG^T = \{u_{ij}\}_1^n$ дорівнюють $u_{ij} = \tilde{e}_i^T \tilde{e}_j = \begin{cases} 1 & при \quad i = j \in \{i_1,...,i_m\}, \\ 0 & в \quad інших \quad випадках. \end{cases}$

Визначимо для яких матриць $\tilde{F}_0$ рівняння (7) матиме розв'язком ортогональну матрицю F_0. Оскільки матриця S має ненульовими тільки елементи (i_1,i_1), $(i_2,i_2),\ldots,(i_m,i_m)$, то в матриці $I - S$ будуть ненульовими тільки елементи (j,j), $j \in \{1,...,n\} \setminus \{i_1,i_2,...,i_m\}$. Тоді матриці $(I-S)\tilde{F}_0$, $(I-S)F_0$ матимуть нульовими рядки $i_1,i_2,...,i_m$, причому це будуть відповідно матриці $\tilde{F}_0$, F_0 з обнуленими цими рядками. Виходячи із загальної структури ортогональної матриці [11], для виконання (7) необхідно і достатньо, щоб для рядків $l,j \in \{1,...,n\} \setminus \{i_1,i_2,...,i_m\}$ матриці $\tilde{F}_0 = \{\tilde{f}_{ij}\}_1^n$ виконувалась умова: $\tilde{F}_{0,l*} \tilde{F}_{0,j*}^T = \delta_{lj}$, де $\delta_{lj} = \begin{cases} 1, якщо & l = j, \\ 0, якщо & l \neq j. \end{cases}$ Тоді зв'язані елементи матриці $F_0 = \{f_{ij}\}_1^n$ такі: $f_{lj} = \tilde{f}_{lj}$, $l \in \{1,...,n\} \setminus \{i_1,i_2,...,i_m\}$, $j = 1,...,n$. Інші елементи залишаються вільними параметрами, які можуть набувати тільки таких значень, що забезпечують ортогональність матриці F_0.

Отже, виконується твердження.

Теорема 1.2 *Нехай матриця при керуванні системи (1) має вигляд* $G = \begin{bmatrix} e_{i_1} & e_{i_2} & \dots & e_{i_m} \end{bmatrix}$, $rangG = m$, $e_{i_j} \in \Re_n$, $j = 1,...,m.$

Тоді за допомогою зворотного зв'язку (3) можна отримати деяку ортогональну матрицю $F_0 = \tilde{F}_0 - GH_0$, $F_0 F_0^T = F_0^T F_0 = I$ *в тому і тільки в тому випадку, коли рядки* $\{1,...,n\} \setminus \{i_1,i_2,...,i_m\}$ *матриці* $\tilde{F}_0$ *ортогональні. Відповідні рядки матриці* F_0 *мають збігатися з ними, а рядки* $i_1,i_2,...,i_m$ *– довільні, але такі, що забезпечують ортогональність шуканої матриці.*

Розглядаючи рівняння (9), структуру матриці F_1 (також H_1) вибираємо, виходячи з практичної доцільності, наприклад, для стабілізації замкненої системи. З іншого боку матрицю H_1 можна отримати не з рівняння (8), а при побудові оптимального регулятора зворотного зв'язку для майже консервативної системи [6] чи з системи нерівностей для її стабілізації [7].

2. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ НАВЕДЕНОГО ВИЩЕ ПІДХОДУ

Наведемо приклад переходу до майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку та побудуємо оптимальний регулятор для отриманої системи.

Приклад 2.1 Розглянемо систему (1) з матрицями коефіцієнтів

$$F\left(\varepsilon\right)=\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3+\varepsilon & m_4 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 2\varepsilon \\ 0 & 3\varepsilon & 12/13 & 5/13 \\ l_1+4\varepsilon & l_2 & l_3 & l_4 \end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тут $m_i, l_i, i=1,\ldots,4$ – деякі параметри, ε – малий параметр.

Необхідно побудувати майже консервативну систему за допомогою зворотного зв'язку (3) (матриця H_0) та знайти для неї оптимальний регулятор (матриця H_1) з квадратичним критерієм якості

$$\hat{J}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[x^T\left(k\right)Qx\left(k\right)+u^T\left(k\right)Ru\left(k\right)\right], \tag{12}$$

де $Q=I_4,\ R=2I_2$.

Неважко впевнитись в тому, що задана система повністю керована. Матрицю $F(\varepsilon)$ запишемо у вигляді суми двох матриць $F\left(\varepsilon\right)=\tilde{F}_0+\varepsilon F_1$, де

$$\tilde{F}_0=\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/13 & 5/13 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{bmatrix},\quad F_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут ми зобразили матрицю збурення через F_1 замість $\tilde{F}_1$, виходячи з подальших спрощень.

Оскільки рядки $\tilde{F}_{0,2*}\tilde{F}_{0,3*}^T$ матриці $\tilde{F}_0$ ортогональні та нормовані, а також у матриці $\left(I-S\right)\tilde{F}_0$ перший і четвертий рядки нульові, то за допомогою зворотного зв'язку (3) можна отримати ортогональну матрицю. Для цього розв'язуємо систему рівнянь $\tilde{F}_{0,i*}\tilde{F}_{0,j*}^T=\delta_{ij}$, $i\le j, i, j\in\{1,\ldots,4\}$ з вилученням тотожностей $\tilde{F}_{0,2*}\tilde{F}_{0,2*}^T=1$, $\tilde{F}_{0,2*}\tilde{F}_{0,3*}^T=0$, $\tilde{F}_{0,3*}\tilde{F}_{0,3*}^T=1$, при невідомих $\tilde{F}_{0,1*}, \tilde{F}_{0,4*}$ і вибираємо один з її розв'язків $\tilde{F}_{0,1*}=\left[4/5, 3/5, 0, 0\right]$, $\tilde{F}_{0,4*}=\left[0, 0, -5/13, 12/13\right]$. Побудована ортогональна матриця канонічної форми та матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку (формула (6)) мають вигляд:

$$F_0=\begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/13 & 5/13 \\ 0 & 0 & -5/13 & 12/13 \end{bmatrix},\quad H_0=\begin{bmatrix} m_1-\dfrac{4}{5} & m_2-\dfrac{3}{5} & m_3 & m_4 \\ l_1 & l_2 & l_3+\dfrac{5}{13} & l_4-\dfrac{12}{13} \end{bmatrix}.$$

Відзначимо, що знайдений регулятор зворотного зв'язку виконує певні робасні функції – компенсує параметри $m_i, l_i,\ i=1,\ldots,4$.

Матриця F_0 зображена в канонічній формі, тому для побудови оптимального регулятора застосуємо алгоритм [6]. Регулятор буде оптимальним, якщо вибрати [12]

$$H_1 = \left(\varepsilon G^T PG + R\right)^{-1} G^T PF \,, \tag{13}$$

де $F = F_0 + \varepsilon F_1$, а $P \in \Re_{n\times n}$ – симетрична додатно визначена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$P = F^T PF - \varepsilon F^T PG\left(\varepsilon G^T PG + R\right)^{-1} G^T PF + \varepsilon Q\,. \tag{14}$$

Тут Q та R – матриці з (12).

Виходячи з (14), будемо шукати матрицю-розв'язок P та матрицю Q у вигляді розкладу за малим параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots, \quad Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \ldots. \tag{15}$$

З (14) отримаємо нескінченну систему матричних рівнянь типу Ріккаті [6]

$$P_0 - F_0^T P_0 F_0 = 0\,, \tag{16}$$

$$P_i - F_0^T P_i F_0 = F_1^T P_{i-1} F_0 + F_0^T P_{i-1} F_1 - \sum_{(k,j,q,l,t)\in J(i)} F_k^T P_j G M_q G^T P_l F_t + Q_{i-1}, i = 1,2,\ldots, \tag{17}$$

де

$$M_0 = R^{-1}, \quad M_i = -R^{-1}\sum_{k=1}^{i} G^T P_{k-1} G M_{i-k}\,, \quad i = 1,2,\ldots$$

Тут $J(i) = \left\{ (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) \middle| i_1, i_5 \in \{0,1\}; i_2, i_3, i_4 \in \{0,\ldots,i-1\}; \sum_{j=1}^{5} i_j = i-1 \right\}$ – множини індексів, $i = 1,2,\ldots$. Покладаємо $Q_0 = I_4$, $Q_i = 0$, $i = 1,2,\ldots$.

Матриця F_0 має різні власні значення, тому матриця P_0, як переставна з нею (16), має таку структуру $P_0 = diag\{c_{10}, c_{10}, c_{20}, c_{20}\}$, де

$$\begin{aligned} c_{10} &= \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{\left(a_{11}+a_{22}\right)^2 + \left(b_{11}+b_{22}\right)\left(v_{11}+v_{22}\right)}}{b_{11}+b_{22}} = 2, \\ c_{20} &= \frac{a_{33} + a_{44} + \sqrt{\left(a_{33}+a_{44}\right)^2 + \left(b_{33}+b_{44}\right)\left(v_{33}+v_{44}\right)}}{b_{33}+b_{44}} = 2, \end{aligned} \tag{18}$$

$A = \left\{a_{ij}\right\}_1^4 = F_0 F_1^T$, $B = \left\{b_{ij}\right\}_1^4 = GR^{-1}G^T$, $V_0 = \left\{v_{ij}\right\}_1^4 = F_0 Q_0 F_0^T$.

Далі обчислюємо елементи матриці $P_1 = \left\{p_{ij}\right\}_1^4$ з першого рівняння системи (17) за формулами

$$p_{22} = p_{11} + d_{11} - \frac{f_{11}}{f_{12}} d_{22} = p_{11} - 1, \quad p_{12} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f_{11}}{f_{12}} d_{11} + d_{22}\right) = \frac{2}{3},$$

$$p_{44} = p_{33} + d_{33} - \frac{f_{33}}{f_{34}} d_{44} = p_{33} + 1, \quad p_{34} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f_{33}}{f_{34}} d_{33} + d_{44}\right) = -\frac{6}{5},$$

$$p_{13} = -\frac{d_{13}}{2} - \frac{f_{12}d_{23} - f_{34}d_{14}}{2\left(f_{11} - f_{33}\right)} = \frac{2043}{520}, \quad p_{14} = -\frac{d_{14}}{2} - \frac{f_{12}d_{24} + f_{34}d_{13}}{2\left(f_{11} - f_{33}\right)} = \frac{1557}{520},$$

 ISSN 2518-1785 (Online), ISSN 2413-6549 (Print)

$$p_{23} = -\frac{d_{23}}{2} + \frac{f_{12}d_{13} + f_{34}d_{24}}{2\left(f_{11} - f_{33}\right)} = -\frac{7651}{520}, \quad p_{24} = -\frac{d_{24}}{2} + \frac{f_{12}d_{14} - f_{34}d_{23}}{2\left(f_{11} - f_{33}\right)} = -\frac{1699}{520},$$

де $F_0 = \left\{f_{ij}\right\}_1^4, \ D_1 = \left\{d_{ij}\right\}_1^4 = AP_0 + P_0A^T - P_0BP_0 + V_0$.

Зобразимо матрицю-розв'язок $P = P_0 + \varepsilon P_1$ матричного рівняння Ріккаті (14) для $\varepsilon = 0,01$

$$P = \begin{bmatrix} 1.931826923 & 0.0066666667 & 0.0392884615 & 0.0299423077 \\ 0.0066666667 & 1.921826923 & -0.1471346154 & -0.0326730769 \\ 0.0392884615 & -0.1471346154 & 1.88125 & -0.012 \\ 0.0299423077 & -0.0326730769 & -0.012 & 1.89125 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1 = 1.738399549$, $\lambda_2 = 1.888223322$, $\lambda_3 = 1.942988817$, $\lambda_4 = 2.056542158$ та матрицю зворотного зв'язку H_1 (13)

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.7639417761 & 0.5772291817 & 0.0218775563 & 0.0211087093 \\ 0.0589321977 & -0.0043121793 & -0.3656363992 & 0.8620948477 \end{bmatrix}.$$

Тоді матриця коефіцієнтів замкненої системи $F_z = F\left(\varepsilon\right) - G\left(H_0 + \varepsilon H_1\right)$ при $\varepsilon = 0{,}01$ набуде вигляду

$$F_z = \begin{bmatrix} 0.7923605822 & 0.5942277082 & 0.0097812244 & -0.0002110871 \\ -3/5 & 4/5 & 12/13 & 5/13 \\ 0 & 0.03 & 12/13 & 5/13 \\ 0.0394106780 & 0.0000431218 & -0.3809590206 & 0.9144559746 \end{bmatrix},$$

власні значення якої дорівнюють $\lambda_{1,2} = 0.7957519546 \pm 0.5972509677i$, $\lambda_{3,4} = 0.9191947853 \pm 0.3826620915\, i$ і за модулем менші одиниці.

Отже, задана система четвертого порядку за допомогою побудованого з точністю до першого наближення оптимального регулятора стабілізована.

ЛІТЕРАТУРА

1. Святовець І. Ф. Формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування / І. Ф. Святовець, О. П. Коломійчук, В. В. Новицький // Аналітична механіка та її застосування : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – 9, № 1. – С. 301-307.
2. Новицький В. В. Моделювання майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / В. В. Новицький, О. П. Коломійчук, І. Ф. Святовець // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 2. – С. 76-82.
3. Новицький В. В. Умови формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування / В. В. Новицький, М. О. Зінчук, І. Ф. Святовець // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 174-183.
4. Новицький В. В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем / В. В. Новицький // Препринт. – К. : Ін-т математики НАН України, 2004. – 34 с.
5. Зінчук М. О. Дослідження рівняння Ляпунова для дискретних майже консервативних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Аналітичні дослідження моделей механічних систем. Препринт. – К. : Ін-т математики НАН України, 2005. – С. 1-26.

6. Зінчук М. О. Оптимальне керування дискретними майже консервативними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Аналітична механіка та її застосування : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – 5, №2. – С. 124-140.

7. Зінчук М. О. Стійкість та стабілізація лінійних параметричних динамічних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – 4, №2. – С. 58-71.

8. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения / Г. Стренг. – М. : Мир, 1980. – 456 с.

9. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир,1989. – 656 с.

10. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition / S. Barnett, R. G. Cameron. – Oxford : Clarendon press, 1985. – 404 p.

11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 552 с.

12. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц. – М. : Наука, 1985. – 296 с.

REFERENCES

1. Svyatovets, I.F., Kolomiychuk, O.P. and Novitskiy, V.V. (2012), “Formation almost conservative system using vector control”, *Analitychna mekhanika ta yiyi zastosuvannia: Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 9, no. 1, pp. 301-307.

2. Novitskiy, V.V., Kolomiychuk, O.P. and Svyatovets, I.F. (2013), “Modeling almost conservative system using feedback”, *Visnyk Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Fizyko-matematichni nauky,* no. 2, pp. 76-82.

3. Novitskiy, V.V., Zinchuk, M.O. and Svyatovets, I.F. (2016), “Conditions formation almost conservative system using vector control”, *Visnyk Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Fizyko-matematichni nauky,* no. 1, pp. 174-183.

4. Novitskiy, V.V. (2004), “Lyapunov equation for almost conservative systems”, *Preprint*, In-t matematyki NAN Ukrainy, 34 p., Kiev, Ukraine.

5. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2005), “Research Lyapunov equations for discrete almost conservative systems”, *Analitychni doslidzhennya modeley mekhanichnykh system,* Preprint, In-t matematyki NAN Ukrainy, pp. 1-26, Kiev, Ukraine.

6. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2008), “Optimal control of discrete almost conservative systems”, *Analitychna mekhanika ta yiyi zastosuvannia: Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy,* vol. 5, no. 2, pp. 124-140.

7. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2007), “Stability and stabilization of parametric linear dynamical systems”, *Problemy dynamiky ta stiykosti bagatovymirnykh system: Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, vol. 4, no. 2, pp. 58-71.

8. Streng,G. (1980), *Lineynaya algebra i eey primeneniya* [Linear algebra and its application], Mir, Moskow, Russia.

9. Khorn, R. and Dzhonson, Ch. (1989), *Matrichnyy analiz* [Matrix Analysis], Mir, Moskow, Russia.

10. Barnett, S. and Cameron, R.G. (1985), “Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition”, Clarendon press, Oxford.

11. Gantmakher, F.R. (1967), *Teoriya matrits* [Matrix theory], Nauka, Moskow, Russia.

12. Streyts, V. (1985), *Metod prostranstva sostoyaniy v teorii diskretnykh lineynykh system upravleniya* [Method of state space in the theory of discrete linear control systems], Nauka, Moskow, Russia.