УДК 539.3 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-15

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ГУМОПОДІБНОГО МАТЕРІАЛУ НА ПРИКЛАДІ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО СТЕРЖНЯ

О. Х. Остос, Я. О. Жук

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
ostos.alexander1994@gmal.com, y.zhuk@i.ua

Ключові слова:
гумоподібний стержень, кінематичне навантаження, комплексні модулі, дисипативний розігрів, гармонічні коливання.

Досліджено термомеханічні властивості в'язкопружного матеріалу. Розглянуто задачу про гармонічні коливання гумоподібного стержня при кінематичному навантаженні, прикладеному на одному з його кінців. Для розв'язання задачі використано концепцію комплексних модулів. Отримані амплітудно-частотні характеристики для напруження та деформації. Введено дисипативну функцію, за допомогою якої досягнуто дисипативний розігрів стержня. На основі скінченно-елементної моделі побудовано розв'язок задачі з врахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу. Проаналізовано результати згідно з термомеханічними властивостями матеріалу. Зроблені відповідні висновки щодо поведінки гумоподібного матеріалу при термомеханічному навантаженні. Перевірено достовірність значень частот для перших резонансів.

RESEARCH OF THE BEHAVIOUR OF THE RUBBER-LIKE MATERIAL ON THE EXAMPLE OF A THERMOMECHANICAL PROBLEM ON VIBRATION OF A VISCOELASTIC CYLINDRICAL ROD

O. J. Ostos, Ya. O. Zhuk

Taras Shevchenko National University of Kyiv
ostos.alexander1994@gmal.com, y.zhuk@i.ua

Key words:
rubber-like rod, kinematic load, complex moduli, dissipative heating, harmonic vibration.

The Thermomechanical coupling problems are common phenomena in the field of Solid Mechanics. In the area of structural mechanics and materials engineering the primary motivation for studying damping is its importance as an engineering property in the analysis of structural response and performance. There are a number of interesting applications where modeling viscoelastic materials is fundamental, including uses in civil engineering, the food industry, land mine detection and ultrasonic imaging. Nowadays, in structural design, the analysis of all but simple structures is carried out using the finite element method. This investigation deals with the notions of stress-strain and strain-displacements relation, which are fundamental in understanding mechanics.

The problem on harmonic vibration of a viscoelastic rubber-like rod under kinematic load at one of its ends is considered. The thermomechanical properties of a viscoelastic material is investigated. The external loading has a significant influence on the dynamic characteristics of the material. By using the complex moduli, the problem on vibration of the viscoelastic rod was solved. The complex shear and Young's moduli of a rubber-like material should exhibit the same dependence on frequency. The properties of a rubber-like material was applied. The temperature influence is associated both with the Newton boundary conditions and dissipative heating. The dissipative function is expressed in terms of deformations. The frequencies of high-damping materials occur at or near frequencies that are normally of interest in vibration problems at room temperature. For solving the problem a finite element model was applied. Using this model, qualitative analysis of the influence of dynamic load and dissipative heating on the resonant vibrations of viscoelastic rod is performed. According to the theory of viscoelasticity an analysis of the results was done. The reliability of the values of frequencies for the first resonances was checked. The numerical results of the problem on vibration of a viscoelastic cylindrical rod under kinematic load at one of its end by the general thermomechanical laws on vibration in damped mechanical systems were obtained and investigated. The numerical understanding of the thermomechanical coupling of rubber-like materials is a prerequisite to predict the temperature rise in viscoelastic components. Distribution of the temperature of dissipative heating along the rod axis is built and analyzed.

1. Вступ

Еластомерні та полімерні матеріали є незамінними в багатьох практичних застосуваннях завдяки їх дисипативним властивостям та високій деформівній здатності. Важливість дослідження термомеханічної поведінки елементів конструкції, які складаються з полімерів та еластомерів, виникає в багатьох сферах сучасної техніки, у тому числі при розрахунку механічного та теплового стану гумотехнічних виробів, віброізоляторів, великогабаритних пневматичних шин тощо. Виходячи з досягнень та вимог в технічному плані у промисловому світі, такі елементи, як автомобільні шини, ролики транспортерів, покришки, підшипники, в процесі експлуатації піддаються дії цілого комплексу навантажень, які мають суттєвий вплив на динамічні характеристики матеріалів. Внаслідок таких специфічних властивостей цих матеріалів, як істотна залежність механічних характеристик від температури, низька теплопровідність, значні внутрішні втрати, тривале динамічне навантаження, може супроводжуватися високим рівнем дисипативного розігріву. Взаємодія теплових та механічних полів у в’язкопружних тілах вивчається в межах теорії термов’язкопружності. Тепер термомеханічний стан гумоподібних елементів досліджується зазвичай на основі розв’язання зв’язаних задач лінійної термов’язкопружності, в яких співвідношення між напруженнями та деформаціями є лінійними, хоча при цьому враховується залежність властивостей матеріалу від температури. Демпфуюча здатність матеріалу грає величезну роль в динамічній поведінці конструкції. Існує велика кількість досягнень та розробок в цій сфері науки, але також є багато матеріалів, над якими можна проводити розрахунки та отримувати нові результати.

2. Математична модель термопружних коливань

Використання концепції комплексних модулів має широке застосування в сучасній інженерії [5], крім того, цей метод є зручним для опису поведінки в’язкопружного матеріалу [7]. Комплексними будуть модуль Юнга $\tilde{E} = E' + iE''$, амплітуда напруження $\tilde{\sigma} = \sigma' + i\sigma''$, амплітуда деформації $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''$, при цьому коефіцієнт Пуассона ν залишається дійсним. Запишемо основні співвідношення між комплексними модулями для в’язкопружного матеріалу:

$$\tilde{\mu} = \frac{\tilde{E}}{2(1+\nu)}, \tilde{\lambda} = \frac{\nu\tilde{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (1)$$

Гармонічні коливання у в’язкопружному середовищі у спрощеній постановці описуються рівнянням вигляду

$$\left(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}\right)\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mu}\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (2)$$

де $\tilde{\lambda} = \lambda' + i\lambda''$, $\tilde{\mu} = \mu' + i\mu''$ – комплексні коефіцієнти Ламе, ω – кругова частота коливань, ρ – густина матеріалу. Рівняння записане в термінах переміщень.

При коливаннях в’язкопружного матеріалу відбуваються втрати енергії, що приводить до його нагрівання. Інтенсивність виділення тепла при гармонічних коливаннях описується усередненою дисипативною функцією, яка може бути виражена через амплітуди деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{D} = \frac{\omega}{2}[\lambda''\{(\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33})^2 + \\ +(\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22} + \varepsilon''_{33})^2\} + \mu''\{2(\varepsilon'^2_{11} + \varepsilon'^2_{22} + \\ +\varepsilon'^2_{33}) + (\gamma'^2_{12} + \gamma'^2_{13} + \gamma'^2_{23}) + \\ +2\left(\varepsilon''^2_{11} + \varepsilon''^2_{22} + \varepsilon''^2_{33}\right) + \\ +(\gamma''^2_{12} + \gamma''^2_{13} + \gamma''^2_{23})\}], \quad (3)\end{aligned}$$

де $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, \quad i \neq j,$

$$\lambda'' = \frac{\nu \mathrm{E}''}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu'' = \frac{\mathrm{E}''}{2(1+\nu)}.$$

Передачу тепла у середовищі описуватимемо рівнянням теплопровідності відносно наближених, усереднених за період коливань значень температури $\bar{T}$:

$$k\nabla^2\bar{T} + \bar{D} = \rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}, \qquad (4)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, c– теплоємність.

3. Постановка задачі про термопружні коливання циліндричного стержня з кінематичним збудженням

Задача про дисипативний розігрів розв’язується на прикладі гармонічних коливань скінченного циліндричного стержня $0 \leq z \leq l$ та радіусом R (рис. 1).

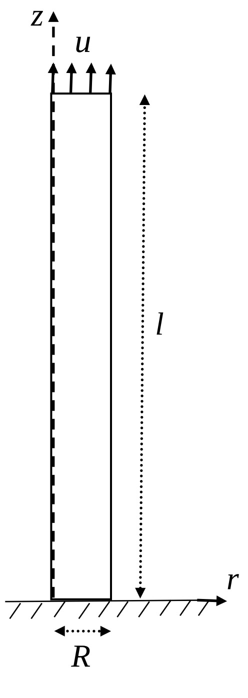

Рис. 1. Схема навантаження

На верхньому кінці стержня задана кінематична умова:

$$\tilde{u}_z | z = l = u_0. \qquad (5)$$

Нижній край стержня жорстко закріплений.

У початковий момент часу стержень має температуру навколишнього середовища T_0. На його бічній поверхні накладається умова Ньютона, яка наближено описує конвективну теплопередачу:

$$Q = -k\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} | r = R = \alpha(\bar{T} - T_0), \qquad (6)$$

де Q – густина теплового потоку, α – коефіцієнт тепловіддачі. Верхній та нижній кінці стержня теплоізольовані (рис. 2).

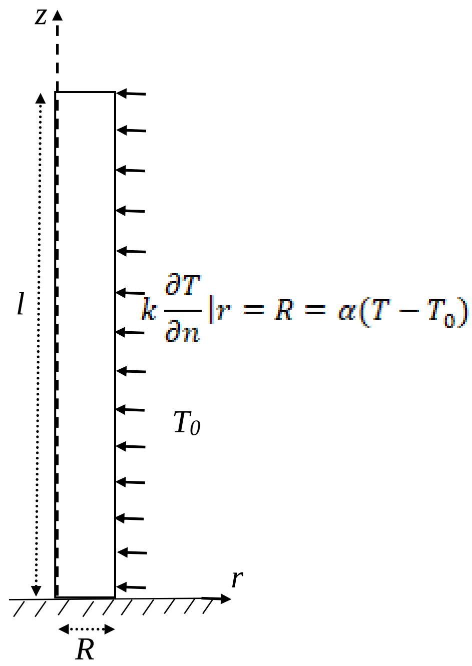

Рис. 2. Схема теплової задачі

4. Розв’язок задачі та чисельні розрахунки

При чисельному розрахунку задачі були взяті наступні значення: $R = 0{,}01$ м, $l = 0{,}2$ м, $u_0 = 0{,}0001$ м, $T_0 = 20$°C.

Для отриманої зв’язаної термомеханічної задачі як гумоподібний матеріал був вибраний неогуківський матеріал, який має наступні термомеханічні величини:

$$E' = 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, E'' = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\mu' = \frac{E'}{2(1+\nu)} = 3{,}356 \times 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\mu'' = \frac{E''}{2(1+\nu)} = 3{,}356 \times 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\nu = 0{,}49, \rho = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, c = 2005 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ C},$$

$$k = 0{,}09 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}, \alpha = 8{,}2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot{}^\circ C}.$$

Задача розглядалася в наступному частотному діапазоні: $0 \leq f \leq 1000$ Гц, а розв’язок задачі будувався в околі першого резонансу $f = 114$ Гц.

Використовуючи скінченно-елементну модель, були отримані розподіли напруження, деформації, переміщення та температури вздовж стержня при частоті, близькій до резонансної при заданих механічних та теплових умовах. Нижче наведені розподіли деформації та температури, де значення температур вказані в градусах °С (рис. 3, 4).

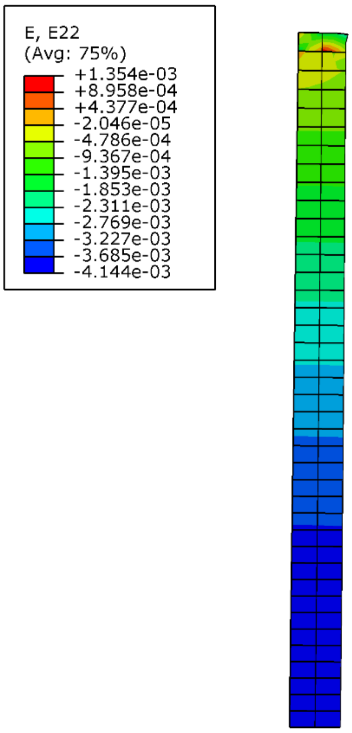

Рис. 3. Розподіл деформації вздовж стержня

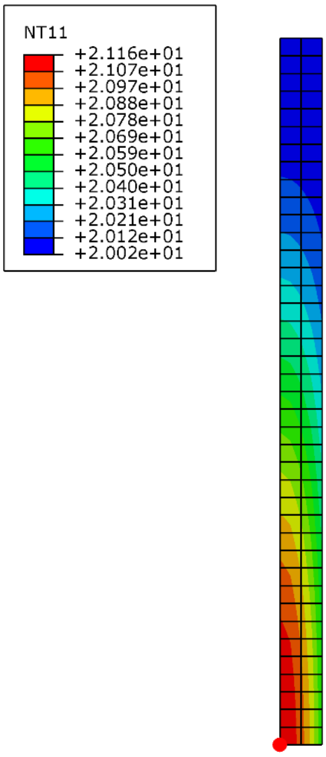

Рис. 4. Розподіл температури вздовж стержня

Задача про дисипативний розігрів в'язкопружного стержня нестаціонарна, тому також побудовано температурно-часова (час вказано в секундах) залежність в точці максимального розігріву, яку помітно з розподілу температури вздовж стержня (рис. 5).

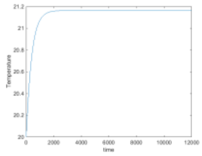

Рис. 5. Залежність температури від часу в точці найбільшого розігріву

З графіка бачимо, що температура з часом встановлюється, тобто ніяких небезпечних процесів не відбувається.

5. Висновки

Використовуючи концепцію комплексних модулів, була розв'язана термомеханічна задача про розігрів циліндричного стержня при гармонічних поздовжніх коливаннях в околі першої резонансної частоти. Дану задачу в термінах комплексних амплітуд основних польових змінних розв'язано із застосуванням методу скінченних елементів, який узагальнено на випадок амплітудних співвідношень при гармонічному деформуванні. З графіка розподілу температури бачимо, що температура зростає згори донизу та спадає від середини стержня до бічної поверхні. Це зумовлено збільшенням амплітуди деформацій та напружень на даній формі коливань у нижній частині стержня. При амплітуді переміщення на верхній поверхні стержня 10^{-3} м та температурі зовнішнього середовища 20 °С найбільше значення температури досягається в нижній середній точці стержня: T_{max} = 21,16 °С. Таким чином, можемо зробити висновок, що скінченно-елементне моделювання дозволяє ефективно розв'язувати термомеханічні задачі про розігрів в'язкопружних тіл з використанням концепції комплексних модулів.

Література

1. Anderson V. W., Lazan B. J. Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials. Minnesota: Internal rept., Aero Library. 1957. 243 p.
2. Snowdon J. C. Vibration and shock in damped mechanical systems. New York: The Pensylvania State University, 1968. 486 p.
3. Green A. E., Adkins J. E. Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: At the Clarendon Press, 1960. 455 p.
4. Behnke R., Kalishke M. Thermo-mechanically coupled inves-tigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. N 68. P. 101–131.
5. Карнаухов В. Г., Гуменюк Б. П. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел. Киев: Наук. думка, 1990. 304 с.
6. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Червинко О. П. Влияние предварительного деформирования на резонансные колебания и дисипативный разогрев вязкоупругого цилиндра конечной длины. *Прикладная механика*. 1997. 33, № 1. С. 39–42.
7. Nashif A. D., Jones D. I., Henderson J. P. Vibration Damping. New York: A Wiley-Interscience Publication, 1985. 448 p.
8. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Гуменюк Б. П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. Киев: Наук. думка, 1985. 288 с.
9. Astarita G. Thermodynamics of dissipative materials with entropic elasticity. *Polymer Engineering & Sci*. 1974. 14, N 10. P. 730–733.
10. Babra R. C. Thermodynamics of simple materials of differential type. *J. Mech*. 1976. 15, N 3. P. 457–466.
11. Goodman J. Mechanics applied to engineering. London: Longmans-Green, 1899. 148 p.

References

1. Anderson, V. W. & Lazan, B. J. (1957). Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials. Minnesota: Internal rept., Aero Library.
2. Snowdon, J. C. (1968). Vibration and shock in damped mechanical systems. New York: The Pensylvania State University.
3. Green, A. E. & Adkins, J. E. (1960). Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: At the Clarendon Press.
4. Behnke, R. & Kaliske, M. (2015). Thermomechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment. International Journal of Non-Linear Mechanics, No. 68, pp. 101–131.
5. Karnaukhov, V. G. & Gumenuk, B. P. (1990). The thermomechanics of pre-deformed viscoelastic bodies. Kyev: Naukova dumka.
6. Karnaukhov, V. G., Senchenkov, I. K. & Chervinko, O. P. (1997). The effect of preliminary deformation on resonant vibrations and disipative heating of a viscoelastic cylinder of finite length. Applied mechanics, No 33(1), pp. 39–42.
7. Nashif, A. D., Jones, D. I. & Henderson, J. P. (1985). Vibration Damping. New York: A Wiley-Interscience Publication.
8. Karnaukhov, V. G., Senchenkov, I. K. & Chervinko, O. P. (1985). The thermomechanical behavior of viscoelastic bodies under harmonic loading. Kyev: Naukova dumka.
9. Astarita, G. (1974). Thermodynamics of dissipative materials with entropic elasticity. Polymer Engineering & Sci, No 14(10), pp. 730–733.
10. Babra, R. C. (1976). Thermodynamics of simple materials of differential type. J. Mech., No 15(3), pp. 457–466.
11. Goodman, J. (1899). Mechanics applied to engineering. London: Longmans-Green.