УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2786-6254-2023-1-07

ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ТОПОЛОГІЙ НА СКІНЧЕННИХ МНОЖИНАХ

Скрябіна А. В.
Аспірантка математичного факультету
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-5391-2001
anna_29_95@ukr.net

Стєганцева П. Г.
Кандидат фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри загальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-8871-139X
stegpol@gmail.com

Ключові слова: *вага топології, вектор топології, мінімальний окіл елемента, T_0-топології, узгоджені топології.*

Дослідження топологічної структура на скінченній множині передбачає розв'язання задач підрахунку та перерахування топологій. Для цього топології моделюють графами, матрицями, булевими функціями, впорядкованими наборами невід'ємних цілих чисел – векторами топологій. Результати досліджень топологій на скінченній множині тісно пов'язані з цифровою обробкою зображень на основі скінченних наборів спостережень, тобто намаганням зрозуміти вміст зображення на основі поняття близькості точок.

В цій роботі наведено стислий огляд методів дослідження топологій на n-елементній множині. При розв'язанні задач перерахування та підрахунку топологій виключну роль відіграють T_0-топології. Зручно говорити, що коли топологія має m відкритих множин, то вона належить до m-класу (або має вагу m).

Використання вектору топології дозволило дослідити всі T_0-топології з вагою $m > 2^{n-1}$ (близькі до дискретної топології), описати всі T_0-топології на n-елементній множині з вагою $2^{n-1} < m \leq 2^n$, які є узгодженими з близькими до дискретної топологіями на $(n-1)$-елементній множині. Порівняння отриманих результатів з результатами з робіт Stanley R.P. 1971, Kolli M. 2007 та 2014 років допомогло перерахувати класи топологій, в яких всі топології є узгодженими з близькими до дискретної топологіями, а також показати існування класів топологій з вагою $m \in \left[5 \cdot 2^{n-4}, 13 \cdot 2^{n-5}\right)$, які не вичерпуються T_0-топологіями, узгодженими з близькими до дискретних на $(n-1)$-елементній множині та двоїстими до них.

При моделюванні топологій булевими функціями кожній T_0-топології ставиться у відповідність єдина кон'юнктивна нормальна форма певного вигляду (максимальна 2-КНФ). Використання 2-КНФ булевих функцій дозволило розробити методику розпізнавання взаємно двоїстих та самодвоїстих T_0-топологій та підрахунку кількості T_0-топологій із заданою вагою.

В цій статті досліджуються T_0-топології на n-елементній множині з вагою $2^{n-1} < m \leq 2^n$, які не є узгодженими з близькими до дискретної топології на $(n-1)$-елементній множині. Для дослідження у якості моделі T_0-топології використовується вектор топології.

APPLICATION OF DIFFERENT MODELS FOR RESEARCH TOPOLOGY ON FINITE SETS

Skryabina A. V.
PhD Student of the Faculty of Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5391-2001
anna_29_95@ukr.net

Stegantseva P. G.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Professor at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8871-139X
stegpol@gmail.com

Key words: *topology weight, topology vector, minimum element neighborhood, T_0-topologies, consistent topologies.*

The study of topological structure on a finite set includes solving problems of counting and enumerating topologies. For this purpose, topologies are modeled by graphs, matrices, Boolean functions, ordered sets of non-negative integers – topology vectors. The results of studies of topologies on a finite set are closely related to digital image processing based on finite sets of observations, that is, an attempt to understand the content of an image based on the concept of proximity of points.

This paper provides a brief overview of methods for studying topologies on an n-element set. T_0-topologies play an exceptional role in solving the problems of enumerating and calculating the number of all topologies. It is convenient to say that when a topology has m open sets, it belongs to the m-class (or has weight m).

The use of topology vector made it possible to investigate all T_0-topologies with weight $m > 2^{n-1}$ (close to discrete topology), to describe all T_0-topologies on the n-element set with weight $2^{n-1} < m \leq 2^n$, which are compatible with topologies close to discrete topology on an $(n-1)$-element set. Comparison of the obtained results with the results of the works Stanley R.P. 1971, Kolli M. 2007 2014 helped to list the classes of topologies in which all topologies are compatible with topologies close to discrete topology on an $(n-1)$-element set, as well as to show that there are the classes of topologies with the weight $m \in \left[5 \cdot 2^{n-4}, 13 \cdot 2^{n-5}\right)$, which are not exhausted by T_0-topologies compatible with topologies close to discrete topology on an $(n-1)$-element set or dual to them.

When modeling topologies using Boolean functions for each T_0-topology there is a single conjunctive normal form of a certain type (maximal 2-CNF). The use of 2-CNF of Boolean functions made it possible to develop a technique for recognizing mutually dual and self-dual T_0-topologies and counting the number of T_0-topologies with a given weight.

This article studies T_0-topologies on the n-element set with weight $2^{n-1} < m \leq 2^n$, which are not compatible with topologies close to discrete topology on an $(n-1)$-element set. Topology vector as a model is used to study of these T_0-topologies.

Вступ. На сучасному етапі розвитку математики топологія є надзвичайно універсальним інструментом для досліджень, топологічна структура часто є базою, на якій будуються інші математичні структури. Топологічні простори та їх неперервні відображення з'являються в багатьох розділах математики.

При дослідженні топологій на скінченній множині дуже важливу роль відіграють T_0-топології. Це пояснюється тим фактом, що T_1- та T_2-топології на скінченній множині можуть бути лише дискретними, а серед T_0-топологій є цікаві нетривіальні приклади. Крім цього, для розв'язання задачі підрахунку всіх можливих топологій на скінченній множині достатньо знайти число всіх T_0-топологій на цій множині. Зі статті J.W. Evans., F. Harary, M.S. Lynn [1] відома формула про зв'язок числа $T(n)$ усіх топологій на n-елементній множині та числа $\tilde{T}(m)$ усіх T_0-топологій на її m-елементних підмножинах:

$$T(n)=\sum_{m=1}^{n} S(n,m)\tilde{T}(m),$$

де $S(n,m)$ – числа Стірлінга другого роду.

Для вивчення топологій на скінченній множині їх моделювали, використовуючи різні математичні об'єкти (графи, відношення, булеві функції та інші). Топологічні простори на скінченній множині точок можуть бути описані та досліджені комбінаторними методами завдяки їх тісному зв'язку зі скінченними частковими порядками. Ця взаємодія комбінатонної та топологічної структур на скінченній множині робить скінченні топології важливими математичними об'єктами.

Топології на скінченній множині відіграють ключову роль в теорії розпізнавання образів [2;3], теорії молекулярних структур [4;5], геометріях на скінченних множинах [6].

Огляд методів дослідження топологій на скінченній множині

Топологічна структура на *n*-елементній множині є дискретною. Тому при її дослідженні на перший план висуваються задачі підрахунку та перерахування топологій, тобто задачі дискретної математики.

Задача підрахунку топологій на скінченній множині на данний момент залишається нерозв'язаною, тому інтерес до неї зберігається, з'являються публікації дослідників з різних країн з новими результатами. Цей інтерес підсилюється тим, що при дослідженні топологій на скінчених множинах використовуються різні математичні структури. Топології моделюються за допомогою графів, матриць, булевих функцій, упорядкованих наборів цілих чисел. Широко застосовуються методи алгебраїчної топології, комбінаторного аналізу, теорії груп.

а) Між множиною топологій на скінченній множині і множиною всіх передпорядків на цій множині (тобто рефлексивних та транзитивних відношень) існує взаємнооднозначна відповідність. Її існування зводить задачі підрахунку або перерахування елементів однієї з цих множин до аналогічних задач для іншої множини.

Для застосувань топологій на скінчених множинах важливу роль відіграє задача перерахування гомотопічних типів скінчених множин, а також використання інших понять алгебраїчної топології.

Відношення передпорядку ρ на скінченній множині X з топологією τ можна ввести різними способами. Наприклад, в роботі [7] $(x,y)\in\rho$ тоді і тільки тоді, коли кожна відкрита множина, що містить *x*, містить також і *y*, тобто $x\in\overline{\{y\}}$, де $\overline{\{y\}}$ є замиканням множини $\{y\}$ відносно топології τ. Обернено, для передпорядку ρ на скінченній множині X сукупність $\tau=\{U\subseteq X \mid (\forall x\in U)\,\rho(x)\subseteq U\}$, де $\rho(x)=\{y \mid (x,y)\in\rho\}$, є топологією на X. Такі передпорядок та топологію називають відповідними. В роботі [8] зазначається, що для класифікації скінченних топологічних просторів з точністю до гомотопічної еквівалентності достатньо класифікувати T_0-простори з точністю до гомотопічної еквівалентності.

Отже, розглянемо T_0-топологію на скінченній множині *X*. Позначимо символом M_x мінімальний окіл точки x з множини X. Сукупність мінімальних околів всіх елементів множини X утворює мінімальну базу T_0-топології. Наведемо ще одне означення порядку на скінченній множині з топологією τ, з використанням поняття мінімальних околів:

для будь яких $x,y\in X$ $x\le y$ якщо $Mx\subseteq My$.

При цьому топологія τ є T_0-топологією на X якщо з $x\le y$ і $y\le x$ випливає $x=y$. Це означає, що відношення $x\le y$ на X є рефлексивним, транзитивним та антисиметричним, тобто є відношенням часткового порядку.

Означення зв'язності скінченного топологічного простору таке саме як і для будь-якого топологічного простору. Наприклад, мінімальний окіл M_x будь-якої точки x є зв'язним.

Властивості неперервних відображень топологічних просторів та їх гомеоморфізмів також можна сформулювати в термінах частково впорядкованих множин. Наприклад, має місце твердження:

Якщо X, Y -скінченні, то функція $f:X\to Y$ є неперервною тоді і тільки тоді, коли вона зберігає порядок, тобто з $x\le y$ в X випливає $f(x)\le f(y)$ в Y.

Означення гомотопії, гомотопічно еквівалентних просторів, стягуваних топологічних просторів переноситься з алгебраїчної топології без змін. В роботі [8] було показано, що будь-який скінченний симпліціальний комплекс слабко гомотопічно еквівалентний скінченному топологічному простору

Отже, задача перерахування гомотопічних типів скінченних топологічних просторів настільки ж важлива, як і задача перерахування гомотопічних типів скінченних симпліціальних комплексів. Вказаний факт гомотопічної еквівалентності перетворює скінченні топологічні простори в інструмент для багатьох сучасних застосувань. Зокрема, вказані задачі тісно пов'язані з цифровою обробкою зображень на основі скінченних наборів спостережень, тобто намаганням зрозуміти вміст зображення на основі поняття близькості точок.

б) Моделювання топологій на скінченних множинах за допомогою булевих функцій виявилось достатньо зручним для їх описання та дослідження, оскільки кожну таку топологію можна задати кон'юнктивною нормальною формою спеціального виду і використовувати результати досліджень нормальних форм булевих функцій. В роботі [9] описано T_0-топології саме за допомогою 2-КНФ булевих функцій. Використовуючи цю модель, досліджено взаємно двоїсті та самодвоїсті T_0-топології, а також підраховано кількості T_0-топологій з вагою $25 \cdot 2^{n-6}$.

в) Для досліджень топологій у роботі [10] було введено поняття вектора топології – впорядкованого набору цілих невід'ємних чисел, що визначають мінімальні околи елементів заданої скінченної множини. За допомогою цієї моделі вдалось повністю розв'язати задачі дослідження структури топологій з більшим за 2^{n-1} числом елементів, які часто називають близькими до дискретної топологіями. Вектор топології було використано також в роботі [11] для дослідження топологій з не більшим за 2^{n-1} числом елементів.

В цій роботі ми продовжимо дослідження топологій на скінченній множині, описуючи їх вектором топології.

Основна частина

Найпоширенішою класифікацією топологій на n-елементній множині, яка застосовується в більшості досліджень, є розбиття топологій на класи по кількості елементів в них. Іншими словами, говорять, що топологія на довільній n-елементній множині X відноситься до *m-класу топологій (*або *має вагу m)*, якщо вона складається з m елементів ($m = 2, 3, \ldots, 2^n$). Топологія з вагою $m = 2^n$ є дискретною. Аналіз наявних на даний момент публікацій свідчить про те, що повністю досліджено топології, які належать до класів $m > 2^{n-1}$. Зазначимо, що в проміжку $2^{n-1} < m \le 2^n$ є такі натуральні числа m, що не існує жодної топології з вагою m. Цілком природною є постановка задачі дослідження топологій з вагою $2^{n-2} < m \le 2^{n-1}$.

У 1971 р. R. Stanley [12] опублікував результат про число T_0-топологій на n-елементній множині з вагою $k \ge 7 \cdot 2^{n-4}$, в роботі M. Kolli [13] 2007 року знайдено число всіх топологій з вагою $k \ge 3 \cdot 2^{n-3}$, а в його роботі [14] 2014 року знайдено кількості всіх T_0-топологій з вагою $k \ge 5 \cdot 2^{n-4}$.

Для формулювання задач цієї статті нагадаємо необхідні поняття.

Нехай X – скінченна множина і τ_X – топологія на ній. Множина A з τ_X називається *максимальною* в τ_X, якщо A не міститься ні в якій іншій множині з τ_X, окрім самої множини X. Множина X у цьому випадку називається *охопною.*

Нехай задано множини A, X, $A \subset X$ і топологію τ_A. Будемо відновлювати всі такі топології на множині X, в яких множина A є максимальною і які індукують на множині A топологію τ_A (в цьому випадку топологію τ_A і відповідні топології на X будемо називати *узгодженими*) [10].

В роботі [11] було доведено теореми про вигляд векторів, які задають топології на n-елементній множині, узгоджені з близькими до дискретної топологіями на $(n-1)$-елементній множині, та знайдено вагу таких топологій. Виявилось, що у класах топологій з вагою $|\tau| \in \left[13 \cdot 2^{n-5}, 2^{n-1}\right]$, за виключенням T_0-топологій, узгоджених з близькими до дискретних та двоїстих до них, інших топологій немає. Було знайдено класи топологій з вагою $|\tau| \in \left[5 \cdot 2^{n-4}, 13 \cdot 2^{n-5}\right)$, які не вичерпуються T_0-топологіями, узгодженими з близькими до дискретних на $(n-1)$-елементній множині та двоїстими до них. Існують класи топологій з вагою $|\tau| \in (2^{n-2}, 5 \cdot 2^{n-4})$, в яких немає топологій з векторами $(0, \ldots, 0, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ і $(0, \ldots, 0, 1, 1, \alpha_n)$ при умові $M_{n-2} \cap M_{n-1} = \varnothing$, тобто жодна топологія в класі не є узгодженою ні з якою близькою до дискретної топологією на $(n-1)$-елементній множині.

Природно поставити задачу дослідження топологій з вагою $k \in \left(2^{n-2}, 2^{n-1}\right]$, які не є узгодженими з близькими до дискретної топологіями.

а) Розглянемо T_0-топології з вектором $(0, \ldots, 0, 1, 3, 3)$, для $n \ge 5$. Зручно аналізувати такі топології, знаходити їх вагу, розглядаючи мінімальні околи елементів. Для цього достатньо розглядати лише мінімальні околи елементів, індекс яких у векторі топології не дорівнює нулю. В даному випадку це M_{n-2}, M_{n-1} і M_n, причому M_{n-2} є двоелементною множиною, а M_{n-1} і M_n – чотирьохелеметними множинами. Вага топології залежатиме від попарних перетинів вказаних мінімальних околів. Всі можливі випадки ми розбили на три класи, описавши потужності попарних перетинів мінімальних околів. При підрахунку ваги топології використано формули з роботи [11] і поняття глибини відкритої множини, яке введено в роботі [10]. Наприклад, розглянемо один із випадків, коли $M_{n-2}=\{x_1,x_{n-2}\}$, $M_{n-1}=\{x_1,x_{n-2},x_j,x_{n-1}\}$ і $M_n=\{x_1,x_{n-2},x_j,x_n\}$. В цьому випадку вага такої топології дорівнює $|\tau|=14\cdot 2^{n-6}+g(\{x_1,x_{n-2},x_j\})$. Перший доданок дорівнює вазі топології на $(n-1)$-елементній множині з вектором $(0,\ldots,0,1,3)$ [17], яка є узгодженою з близькою до дискретної топологією на $(n-2)$-елементній множині [11]. Другий доданок $g(\{x_1,x_{n-2},x_j\})$ дає глибину вказанної множини і дорівнює $2\cdot 2^{n-5}$, тому $|\tau|=9\cdot 2^{n-5}>2^{n-2}$.

Отримано наступні результати:

1) Якщо $|M_{n-2}\cap M_{n-1}|=2$ і потужність хоча б одного з двох інших перетинів дорівнює нулю, то вага топології є меншою або дорівнює 2^{n-2}, тобто не належить множині $(2^{n-2},2^{n-1}]$;

2) Якщо $|M_{n-2}\cap M_{n-1}|=1$ і хоча б один з двох інших перетинів є порожньою множиною, то вага топології не належить множині $(2^{n-2},2^{n-1}]$;

3) Якщо $|M_{n-2}\cap M_{n-1}|=0$, то вага топології не належить множині $(2^{n-2},2^{n-1}]$.

б) T_0-топології з вектором $(0,\ldots,0,1,2,\alpha_n)$, де $2\le\alpha_n\le n-1$ також не є узгодженими з близькими до дискретної. Аналогічний аналіз перетинів мінімальних околів M_{n-2}, M_{n-1} і M_n дозволив виділити такі випадки:

1) Якщо $|M_{n-2}\cap M_{n-1}|=2$ або $|M_{n-2}\cap M_{n-1}|=1$, то вага топології належить множині $(2^{n-2},2^{n-1}]$ незалежно від інших перетинів;

2) Якщо $|M_{n-2}\cap M_{n-1}|=0$, то вага топології не належить множині $(2^{n-2},2^{n-1}]$.

Зазначимо, що нами також проведено дослідження T_0-топологій з векторами $(0,\ldots,0,1,1,1,2,2)$; $(0,\ldots,0,1,1,2,3)$; $(0,\ldots,0,1,1,1,1,2,2)$; $(0,\ldots,0,1,2,2,2)$; $(0,\ldots,0,2,\ldots,2)$ і знайдено умови на мінімальні околи елементів, які забезпечують належність ваги топології проміжку $(2^{n-2},2^{n-1}]$.

Висновки Задача підрахунку всіх топологій на довільній скінченній множині залишається нерозв'язаною. Однією з причин можна вважати відсутність такої моделі топології, яка б дозволила створити ефективний алгоритм для підрахунку, або отримати розрахункову формулу від *n* – кількості елементів в множині.

Кожна з розглянутих моделей топології має як переваги так і недоліки. Один і той самий вектор можуть мати негомеоморфні топології – це суттєвий недолік, але, в той же час, використання цієї моделі дало можливість отримати вагомі результати. Зокрема, ми вже маємо повний список векторів T_0-топологій, вага яких належить проміжку $(2^{n-2},2^{n-1}]$ і які є узгодженими з близькими до дискретної топології. В цій роботі представлено результати дослідження T_0-топологій, вага яких належить $(2^{n-2},2^{n-1}]$ і які не є узгодженими з близькими до дискретної. Це дослідження продовжується.

ЛІТЕРАТУРА

1. Evans J.W., Harary F., Lynn M.S. On the computer enumeration of finite topologies. *Communications of the ACM*. 1967. Vol.10, № 5. P. 295–297.
2. Kovalevsky V.A. Finite topology as applied to image analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*. 1989. Vol. 46. P. 141–161.
3. Kovalevsky V.A. Finite topology and image analysis. *Advances in electronics and electron physics*. 1992. Vol. 84. P. 197–259.
4. Merrifield R., Simmons H. The structures of molecular topological spaces. *Theoretica Chimica Acta*. 1980. Vol. 55. P. 55–75.
5. Merrifield R., Simmons H. Topological methods in chemistry / R. Merrifield and H. Simmons. Wiley, New York, 1989. 230 p.
6. Rosenfeld A., Kong T., Wu A., Graphical Models and Image Processing. *Digital surfaces*. 1991. Vol. 53. P. 305-312.
7. Dongseok Kim, Young Soo Kwon, Jaeun Lee. Enumerations of finite topologies associated with a finite graph. *Kyungpook Mathematical Journal*. 2014. Vol. 54. P. 655–665.
8. McCord M. C. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Mathematical Journal.* 1966. Vol. 33, Issue 3. P. 465-474.
9. Skryabina Anna, Stegantseva Polina, Bashova Nadia. The properties of 2-CNF of the mutually dual and self-dual T0-topologies on the finite set and the calculation of T0-topologies of a certain weight. *Proceedings of the International Geometry Center.* 2022. Vol. 15, no. 1. P. 75–85.
10. Velichko I.G., Stegantseva P.G., Bashova N.P. Enumeration of topologies close to discrete on finite sets. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved*., *Ser. Mat*. 2015. No.11. P. 23–31.

11. Stegantseva P.G., Skryabina A.V. Topologies on the n-element set consistent with topologies close to the discrete on an $(n-1)$-element set. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2021. No. 2. Vol.73. P. 276-288.
12. Stanley R.P. On the number of open sets of finite topologies. *Journal of combinatorial theory*. 1971. Vol. 10. P. 74–79.
13. Kolli M. Direct and elementary approach to enumerate topologies on a finite set. *Journal of Integer Sequences.* 2007. Vol. 10. Article 07.3.1. P. 1–11.
14. Kolli M. On the Cardinality of the T_0-Topologies on a Finite Set. *International Journal of Combinatorics*. 2014. Article ID 798074, P. 1–7.