

УДК 004.92 : 539.3 : 624.04
DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-2-05>

БІФУРКАЦІЙНІ СТАНИ ТА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЗАКРИТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ТРИШАРОВИХ СКЛАДЕНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Грищак В. З.

*доктор технічних наук, професор
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
просп. Дмитра Яворницького, 19, Дніпро, Україна
orcid.org/0000-0001-8685-3191
HRYSHCHAK.V.Z@mnu.one*

Грищак Д. В.

*кандидат технічних наук
Міністерство з питань стратегічних галузей промисловості України
вул. Івана Франка, 21-23, Київ, Україна
orcid.org/0000-0001-6474-6926
GDVspace@gmail.com*

Д'яченко Н. М.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-5284-4502
dyachenkonata69@gmail.com*

Купріков В. О.

*аспірант кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Університетська, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0009-0008-3221-582X
Paladman2009@gmail.com*

Ключові слова: *стійкість тришарової оболонки, складені конструкції типу «циліндр-конус» та «циліндр-конус-циліндр», комбіноване навантаження, стикувальні та проміжні шпангоути, алгоритмізація та комп'ютерна візуалізація закритичного хвилеутворення.*

Досліджуються біфуркаційні стани підкріпленої складених оболонкових тришарової конструкції типу «циліндр-конус» та «циліндр-конус-циліндр» з візуалізацією закритичних форм відповідно до характеру зовнішнього навантаження. Розглядається втрата стійкості при комбінації зусиль: зовнішнього тиску, осьової сили та крутного моменту.

Система рівнянь для визначення характеристик стійкості утворюється із диференціальних розв'язувальних рівнянь шостого порядку для конічної та циліндричних секцій конструкції та співвідношень, що визначають спряження з переходом через шпангоути. До розв'язання системи застосовується метод скінченних різниць.

На основі розрахунків зазначеним методом розроблено загальний алгоритм побудови сітки каркасу випинання конструкції, на базі якого – поетапну схему та програмний код Maple для візуалізації форм втрати стійкості досліджуваних конструкцій. Побудовано форми хвилеутворення за різних вхідних геометричних характеристик конструкції та жорсткостей шпангоутів.

Проведено порівняльний аналіз з відомими результатами через граничний перехід від отриманих в роботі результатів для тришарової до одношарової оболонкової конструкції «циліндр-конус».

Побудовано граничні поверхні, що відокремлюють область стійкості конструкцій обох типів.

Проведено аналіз впливу на критичний тиск характеристик внутрішнього шару матеріалу конструкцій.

Аналіз поведінки хвилі при випинанні дозволяє відслідковувати перепади в амплітудах та знайти ефективну комбінацію жорсткостей шпангоутів та місця розміщення проміжного шпангоута, за яких поведінка хвилі має найбезпечніший характер для конструкції.

Вибір раціональних значень жорсткостей шпангоутів як з точки зору впливу на критичний тиск, так і на безпечний характер форми втрати стійкості, дозволяє також знизити масу конструкції.

BIFURCATION STATES AND VISUALIZATION OF POST-CRITICAL DEFORMATION OF THREE-LAYER COMPOSITE STRUCTURES

Gristchak V. Z.

*Doctor of Technical Sciences, Professor
Dnipro University of Technology
Dmytra Yavornytskoho Ave., 19, Dnipro, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8685-319
HRYSHCHAK.V.Z@mnu.one*

Hryshchak D. V.

*Candidate of Technical Sciences
The Ministry of Strategic Industries
Ivan Franko str., 21-23, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-6474-6926
GDVspace@gmail.com*

Dyachenko N. M.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5284-4502
dyachenkonata69@gmail.com*

Kuprikov V. O.

*Postgraduate at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Universytetska str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0009-0008-3221-582X
Paladman2009@gmail.com*

Key words: *stability of three-layer shells, compound structures of the ‘cylinder-cone’ and ‘cylinder-cone-cylinder’ types, combined loading, connecting and intermediate rings, algorithmization, and computer visualization of post-critical wave formation.*

The bifurcation states of reinforced compound shell three-layer structures of the ‘cylinder-cone’ and ‘cylinder-cone-cylinder’ type are studied with the visualization of post-critical forms according to the nature of the external load. The loss of stability with a combination of forces: external pressure, axial force and torque is considered.

The system of equations for determining the stability characteristics is formed from the sixth-order differential solving equations for the conical and

cylindrical sections of the structure and the ratios that determine the conjugation with the transition through the rings. The finite difference method is used to solve the system.

Based on calculations using the specified method, a general algorithm for constructing the mesh of the structure's buckling frame was developed. Using this algorithm, a step-by-step scheme and Maple software code were created to visualize the buckling forms of the studied structures. Wave formation patterns were constructed for various input geometrical characteristics of the structure and different ring stiffness values.

A comparative analysis was conducted with known results through the limit transition from the results obtained in the work for a three-layer to a single-layer 'cylinder-cone' shell structure.

Boundary surfaces that separate the area of stability of structures of both types are constructed.

An analysis of the influence on the critical pressure of the characteristics of the inner layer of the material of both types of structures was carried out.

The analysis of wave behavior during buckling allows you to monitor amplitude differences and find an effective combination of rings stiffnesses and the location of the intermediate frame, under which the wave behavior has the safest character for the structure.

The choice of rational stiffness values of the rings, both from the point of view of the impact on the critical pressure and on the safe nature of the shape of the buckling, also allows reducing the weight of the structure.

Вступ. Тонкостінні оболонки є силовими елементами конструкцій в багатьох галузях: в будівництві, хімічній промисловості, спорудженні літальних апаратів різного призначення, авіаційної і ракетно-космічної техніки, та в інших галузях. При проектуванні оболонкових конструкцій значна увага приділяється їхній стійкості та міцності під дією зовнішнього навантаження (зовнішнього тиску, осьових зусиль, крутіння). Для покращення експлуатаційних характеристик при мінімальній матеріаломісткості використовують композитні або тришарові матеріали [1–5].

Комп'ютерна візуалізація хвилеутворення при втраті стійкості оболонкової конструкції дозволяє наочно дослідити форму хвилі, місця її зосередження з метою дослідження проблеми раціонального проектування конструкції, зокрема, обирати геометричні параметри конструкції, жорсткісні характеристики підкріплюючих елементів, що, у тому числі, впливає на загальну масу конструкції [3].

У роботі візуалізація форм випинання конструкції реалізується під час вивчення задачі стійкості складеної оболонкової конструкції, утвореної з циліндричних та конічної секцій. Конструкція знаходиться під впливом комбінованого зовнішнього навантаження рівномірним зовнішнім тиском, осьовим зусиллям та крутним моментом, в результаті чого вона може втратити стійкість.

Метою дослідження є алгоритмізація комп'ютерної візуалізації хвилеутворення та аналіз біфуркаційних станів за загальної втрати стійкості складених конструкцій типу «циліндр-конус» та «циліндр-конус-циліндр» при комбінованому навантаженні, аналізу хвилеутворення, зокрема, під впливом підкріплюючих шпангоутів, з метою раціонального проектування і зниження вагових характеристик досліджуваної конструкції.

Огляд літератури. Дослідженням стійкості однорідних і багатошарових оболонкових кон-

струкцій присвячені, зокрема, роботи [1–3; 6–19]. Огляд публікацій в цій галузі міститься у працях [10; 13; 16]. Останнім часом значна увага приділяється теоретичним та експериментальним дослідженням складених конструкцій, утворених з конічної та циліндричної секцій [6; 8–10; 12–14; 16–18]. Дослідження втрати стійкості супроводжується побудовою граничних поверхонь, що відокремлюють область стійкості конструкцій [2; 6; 8; 12; 16].

Вивченню впливу на стійкість оболонкової конструкції тришарового матеріалу, що складається з двох зовнішніх жорстких шарів і внутрішнього шара-наповнювача незначної жорсткості і щільності, присвячено роботи [1–3]. Для збільшення стійкості оболонкової конструкції її підкріплюють торцевими і проміжними шпангоутами [3; 6; 8–10; 13–18].

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в працях [2; 3], в першій з яких досліджено стійкість тришарової невідкріпленої конічної оболонки, а в другій – складеної підкріпленої оболонкової конструкції типу «конус-циліндр», відсіки якої стикаються з великої основи конуса.

Наразі значного розвитку набувають різноманітні аспекти комп'ютерної візуалізації характеру хвилеутворення оболонок у закритичному стані [3; 7–9; 14; 16]. Проблеми комп'ютерної візуалізації форм втрати стійкості є важливим питанням проектування оболонкових конструкцій, який дозволяє проводити комп'ютерний експеримент замість дороговартісного реального.

Для розрахунків напружено-деформівного стану оболонкових конструкцій, розрахунків на міцність, несучу здатність та стійкість використовуються вітчизняні та зарубіжні системи автоматизації інженерних розрахунків і аналізу, серед яких найбільш поширеними є програмні комплекси ANSYS, Abacus, MSC.Patran і MSC.Nastran та інші. Таке програмне забезпечення найбільш ефективно

при скінченно-елементному чисельному аналізі, а також скінченно-різницевою для рівнянь у частинних похідних з візуалізацією результатів [8; 9; 14; 16]. В даній роботі застосовується метод скінченних різниць по відношенню до розв'язувальних звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних співвідношень переходу через шпангоути, за результатами якого проводиться візуалізація. Системи комп'ютерної математики дозволяють швидко, ефективно та якісно проводити як інженерні розрахунки (у поставленій задачі – реалізувати метод скінченних різниць), так і здійснювати комп'ютерну візуалізацію.

Підхід до використання візуалізації в аналізі біфуркаційних станів розпочато в роботах [7; 8] для деяких типів тонкостінних одношарових оболонкових конструкцій, в роботах [3; 7] – для тришарових. Проте алгоритму комп'ютерної візуалізації не приділено увагу. Тут запропонуємо алгоритм для конструкцій таких типів, які раніше не розглядалися.

Постановка задачі та розв'язувальні рівняння. На основі відомих повних систем основних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що моделюють стійкість тришарових циліндричної та конічної оболонок, котрі застосовують гіпотези Кирхгофа-Лява для несучих шарів, нестисливість матеріалу заповнювача, а також приведені коефіцієнт Пуассона і модуль пружності, в роботах [2; 3] виведено розв'язувальні рівняння відносно функцій прогинів відповідних оболонок.

Для тришарових стінок оболонок (рис. 1, а)

дотримуємося позначень робіт [2; 3]: h_j , ν_j та E_j – товщини, коефіцієнти Пуассона та модулі пружності зовнішнього шару ($j=1$), внутрішнього ($j=2$) та заповнювача ($j=3$), h_0 – товщина стінки оболонки. За умови, що стінки тришарової оболонки утворено з ізотропних несучих шарів і трансверсально ізотропного заповнювача, вводяться наступні параметри [2]:

$$\nu = \sum_{j=1}^3 \frac{E_j h_j \nu_j}{1 - \nu_j^2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2} \right)^{-1}, \quad E = \frac{1 - \nu^2}{h_0} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2} \right) -$$

приведені коефіцієнт Пуассона та модуль пружності,

$$K_{cone} = \frac{h_0^2}{\beta l_1^2}, \quad K_{cyl,i} = \frac{h_0^2}{\beta L_i^2} \quad (i = \overline{1, 2}) -$$

параметри зсуву конічного та циліндричного відсіку конструкції відповідно.

Для обчислення параметрів Θ , ϑ , β використовуються формули, наведені в роботі [2].

У даній роботі розглянемо лінійну осесиметрична задача стійкості тонких пружних тришарових оболонкових конструкцій типу «циліндр-конус» (рис. 1, б), що стикаються з малою основою конуса, та «циліндр-конус-циліндр» (рис. 1, в), що стикаються з обома основами конуса. Будемо досліджувати випадок, коли конструкції знаходяться під одночасним впливом зовнішнього тиску, осьової сили і крутіння, здатним викликати втрату стійкості. Продовжуючи дослідження, розпочаті в роботах [2; 3; 8], будемо знаходитися

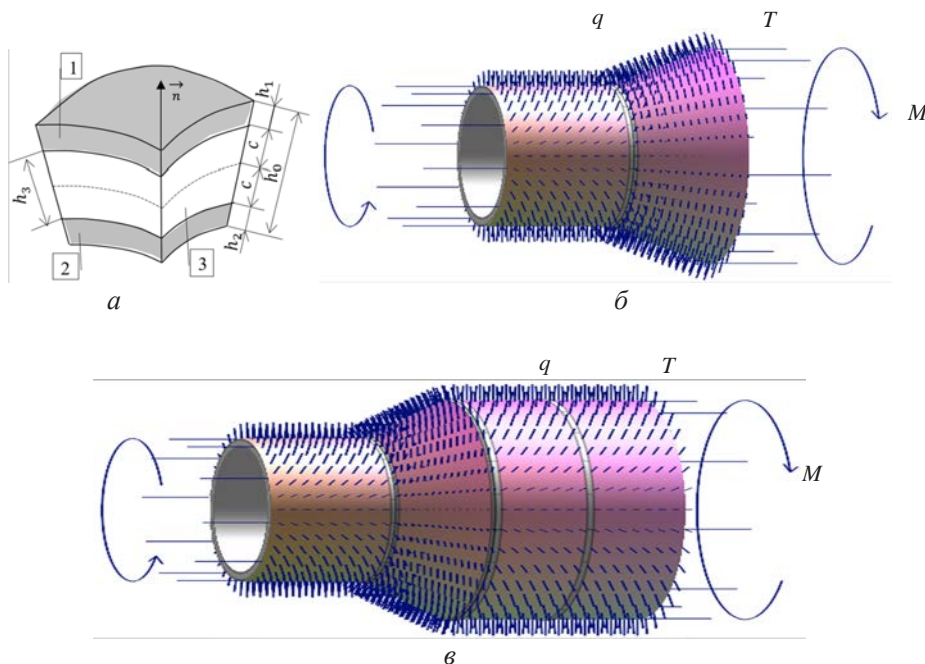


Рис. 1. Схеми складених тришарових оболонкових конструкцій при комбінованому навантаженні

в рамках теорії тонких оболонок, в якій припускається, що зміна напружено-деформованого стану у кільцевому напрямку суттєво перевищує зміну напружено-деформованого стану в осьовому напрямку, а хвильове число задовольняє нерівність.

Дотримуючись позначень робіт [2; 3; 8], для складеної конструкції покладемо: \bar{s}_i та s – координати вздовж твірної циліндричних та конічного відсіків відповідно; y_i – координата вздовж дуги циліндрів; φ – дугова координата вздовж паралелі конуса; α – кут при основі конуса; l_0 і l_1 – відстані вздовж твірної до меншої та більшої основ зрізаного конуса; L_i і R_i – довжини твірних та радіуси циліндрів ($i = \overline{1, 2}$). Розглядатимемо конструкції, відсіки яких стикаються так, як показано на рис. 1, б, в. Вводяться величини

$$x = \frac{s}{l_1}, \quad \bar{x}_i = \frac{\bar{s}_i}{L_i}, \quad \bar{\varphi}_i = \frac{y_i}{R_i}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{h_0 \operatorname{ctg} \alpha}{l_1 \sqrt{12(1-\nu^2)}}},$$

$$k_i = \frac{L_i}{R_i}, \quad \varepsilon_{1,i} = \frac{h_0}{R_i}, \quad \gamma_{\text{cone}} = \frac{n}{\cos \alpha} \gamma_1, \quad \gamma_{\text{cyl},i} = \frac{nL_i}{R_i} \gamma_1,$$

де γ_1 – кут нахилу гребня хвилі до твірної, $i = \overline{1, 2}$.

Для конічної оболонки, нехтуючи доданками, що містили ε в степені не менше другого, в роботі [2] виведено розв'язувальне диференціальне рівняння шостого порядку зі змінними коефіцієнтами відносно функції прогину $\Psi_{\text{cone}}(x)$, а для циліндричних оболонок, нехтуючи доданки, що містять множник $\frac{\varepsilon_{1,i}}{k_i^2 n^2}$, в роботі [3] отримано розв'язувальне диференціальне рівняння основного напруженого стану відносно функції прогину $\Psi_{\text{cyl},i}(\bar{x}_i)$. Відповідні рівняння мають вигляд:

$$a_0(x)\Psi_{\text{cone}}(x) + a_1(x)\Psi'_{\text{cone}}(x) + a_2(x)\Psi''_{\text{cone}}(x) + a_3(x)\Psi'''_{\text{cone}}(x) + a_4(x)\Psi^{IV}_{\text{cone}}(x) + a_5(x)\Psi^V_{\text{cone}}(x) + a_6(x)\Psi^{VI}_{\text{cone}}(x) = 0; \quad (1)$$

$$b_{0,i}\Psi_{\text{cyl},i}(\bar{x}_i) + b_{2,i}\Psi''_{\text{cyl},i}(\bar{x}_i) + b_{4,i}\Psi^{IV}_{\text{cyl},i}(\bar{x}_i) + b_{6,i}\Psi^{VI}_{\text{cyl},i}(\bar{x}_i) = 0, \quad (2)$$

де коефіцієнти $a_j(x)$ ($j = \overline{0, 6}$) і $b_{j,i}$ ($j = \overline{0, 2, 4, 6}$, $i = \overline{1, 2}$) виражаються через параметри, що характеризують геометрію конуса α , l_1 , l_0 , h_0 та циліндричних оболонок L_i , R_i , h_0 , k_i відповідно, тришаровий матеріал стінки оболонок E , ν , ϑ , Θ , K_{cone} , $K_{\text{cyl},i}$, зовнішні навантаження q , T , M , хвильове число n , кут нахилу гребня хвилі до твірної конуса γ_{cone} і циліндрів $\gamma_{\text{cyl},i}$ відповідно, малі параметри ε та $\varepsilon_{1,i}$, ($i = \overline{1, 2}$). Формули для обчислення коефіцієнтів рівнянь (1) і (2) наведені в [3].

Крайові умови передбачають, що торці тришарової складеної оболонкової конструкції вільно оперті, а також є діафрагма нескінченної жорсткості, що перешкоджає відносному зсуву несучих шарів уздовж краю оболонки [2; 3]. Зважаючи на взаємні розміщення відсіків оболонок, зазначені крайові умови записується у вигляді:

$$\Psi_{\text{cyl},1} = \frac{\partial^2 \Psi_{\text{cyl},1}}{\partial \bar{x}_1^2} = \frac{\partial^4 \Psi_{\text{cyl},1}}{\partial \bar{x}_1^4} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x}_1 = 0; \quad (3)$$

$$\Psi_{\text{cone}} = \frac{\partial^2 \Psi_{\text{cone}}}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \Psi_{\text{cone}}}{\partial x^4} = 0 \quad \text{при} \quad x = 1 \quad (4)$$

для конструкцій обох типів («циліндр-конус» та «циліндр-конус-циліндр»);

$$\Psi_{\text{cyl},2} = \frac{\partial^2 \Psi_{\text{cyl},2}}{\partial \bar{x}_2^2} = \frac{\partial^4 \Psi_{\text{cyl},2}}{\partial \bar{x}_2^4} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x}_2 = 1 \quad (5)$$

для конструкції «циліндр-конус-циліндр».

Продовжуючи дослідження роботи [3], до розв'язання поставленої задачі застосовуємо метод скінченних різниць (МСР) [19]. Для звичайних диференціальних рівнянь шостого порядку, що відповідають конічній (1) та циліндричній (2) секціям, у МСР застосовуються центральні скінченні різниці третього порядку у внутрішніх точках $\bar{x}_{k,i}$ або x_k ($k = \overline{1, N-1}$, $i = \overline{1, 2}$) розбиття відрізків $[0; 1]$ або $[l_0/l_1; 1]$, що відповідають цим секціям. Крайові умови (3) – (5) подаються скінченими різницями другого порядку. Такі різниці відношення виписані у роботі [3].

В роботі [8] містяться деталі щодо урахування впливу дискретного характеру розміщення проміжних шпангоутів, у тому числі, стикувального, причому параметри жорсткості шпангоутів приймаються у вигляді:

$$G_{\text{cone},2}^* = G_2 \frac{1}{\cos \alpha}, \quad G_{\text{cone},2}^* = G_2 \frac{1}{\cos \alpha}; \quad G_{\text{cyl},1}^* = G_1, \quad G_{\text{cyl},2}^* = G_2; \quad (6)$$

$$G_1 = \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 (EJ)_x^{\text{ring}}}{Eh R_{\text{ring}}^3}, \quad G_2 = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 (EJ)_z^{\text{ring}}}{Eh R_{\text{ring}}^3 (n^2 + 1)},$$

де J_x^{ring} , J_z^{ring} – моменти інерції при згинанні шпангоута в площині початкової кривизни та із площини (на кручення) відповідно.

У випадку розміщення шпангоута на стику секцій так само, як в роботі [8], розглянемо два стикувальних шпангоути на краях конічного та циліндричного відсіків з половиною жорсткістю, так що умови спряження через шпангоут матимуть вигляд:

– для конструкцій обох типів:

$$\Psi_{\text{cyl},1}^{(j)}(1) = \Psi_{\text{cone}}^{(j)}(l_0/l_1) \quad \text{для всіх} \quad j = 0; 4; 5; \quad (7)$$

$$\Psi_{\text{cyl},1}''(1) + \frac{1}{2} G_{\text{cyl},2} \Psi_{\text{cyl},2}'(1) = \Psi_{\text{cone}}''(l_0/l_1) + \frac{1}{2} G_{\text{cone},2} \Psi_{\text{cone}}'(l_0/l_1); \quad (8)$$

$$\Psi_{\text{cyl},1}'''(1) + \frac{1}{2} G_{\text{cyl},1} \Psi_{\text{cyl},1}'(1) = \Psi_{\text{cone}}'''(l_0/l_1) - \frac{1}{2} G_{\text{cone},1} \Psi_{\text{cone}}'(l_0/l_1); \quad (9)$$

– для конструкції типу «циліндр-конус-циліндр» додатково

$$\Psi_{\text{cone}}^{(j)}(1) = \Psi_{\text{cyl},2}^{(j)}(0) \quad \text{для всіх} \quad j = 0; 4; 5; \quad (10)$$

$$\Psi_{\text{cone}}''(1) + \frac{1}{2} G_{\text{cone},2} \Psi_{\text{cone}}'(1) = \Psi_{\text{cyl},2}''(0) - \frac{1}{2} G_{\text{cyl},2} \Psi_{\text{cyl},2}'(0); \quad (11)$$

$$\Psi_{\text{cone}}'''(1) - \frac{1}{2} G_{\text{cone},1} \Psi_{\text{cone}}'(1) = \Psi_{\text{cyl},2}'''(0) + \frac{1}{2} G_{\text{cyl},1} \Psi_{\text{cyl},2}'(0). \quad (12)$$

За формулами, аналогічними до наведених в [3], зазначені умови записуються через скінченні різниці другого порядку з одним кроком назад для похідних в лівих частинах рівностей (7) – (12) та вперед – в правих.

У випадку розміщення проміжного шпангоута на циліндричній оболонці використовуються умови [3]:

$$\Psi_{cyl,i}^{(j)}(\bar{x}_{cyl,left}) = \Psi_{cyl,i}^{(j)}(\bar{x}_{cyl,right}) \text{ для всіх } j = 0; 4; 5;$$

$$\Psi_{cyl,i}''(\bar{x}_{cyl,left}) + G_{cyl,2} \Psi_{cyl,i}'(\bar{x}_{cyl,left}) = \Psi_{cyl,i}''(\bar{x}_{cyl,right}), \quad (13)$$

$$\Psi_{cyl,i}''(\bar{x}_{cyl,left}) - G_{cyl,1} \Psi_{cyl,i}'(\bar{x}_{cyl,left}) = \Psi_{cyl,i}''(\bar{x}_{cyl,right}), \quad i = 1 \text{ або } 2, \quad (14)$$

зі скінченними різницями, аналогічними до зазначеного вище типу.

Комп'ютерна візуалізація. В методі скінченних різниць відрізки, на яких визначено функції прогину кожної оболонкової секції, діляться на N рівних частин. Місце розміщенні проміжного шпангоута на циліндричній секції більшого радіусу визначається коефіцієнтом поділу k_{cyl} .

Загальний алгоритм для побудови сітки каркасу оболонкової конструкції у закритичному стані відображає блок-схема на рис. 2. Узгодженні з нею розрахунки та комп'ютерну візуалізацію форм втрати стійкості проведено засобами системи комп'ютерної математики Maple17 поетапно.

Етап 1.

– Метод скінченних різниць, застосований до системи однорідних рівнянь (1)–(5), (7)–(14), зводить її до однорідної системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно скінченної кількості значень функції прогину у вузлах розбиття.

– Прирівнюємо визначник СЛАР до нуля, приходимо до характеристичного рівняння відносно параметрів хвилеутворення втрати стійкості n, q, T, M, γ_1 . Для заданих значень осьового зусилля T та крутного моменту M потрібно знайти такі значення хвильового числа n в кільцевому напрямку та параметр нахилу хвилі до твірної оболонки γ_1 , щоб значення тиску q було найменшим.

Етап 2. Значення характеристик стійкості використаних (T та M) та знайдених (n, γ_1 та q) на етапі 1 підставляємо в різницеву систему алгебраїчних рівнянь відносно значень функції прогину в точках розбиття. Для отримання ненульових значень дискретизованої функції прогину, праву частину одного з рівнянь системи перевиначаємо не нулем.

Розв'язок отриманої системи нормуємо та помножаємо на константу, придатну для візуалізації закритичного хвилеутворення. Застосовуємо для нього позначення $\{y[i]\}$.

Етап 3. Розглянемо візуалізацію закритичного хвилеутворення оболонкової конструкції.

– *Циліндрична секція меншого радіусу.* Визначаємо координати точок поверхні для зазначеної секції. Врахуємо, що нормальні переміщення точок серединної поверхні виражаються через функцію прогину формулою

$\Psi_{cyl,1}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = \Psi_{cyl,1}(\bar{x}) \cdot \cos(\gamma_{cyl,1}(1 - \bar{x}) + n\bar{\varphi})$ [3]. Реалізуємо розбиття відрізка $[0; 2\pi]$, на якому визначена дуга координата циліндра, на 100 рівних частин. Застосовуємо перехід до циліндричних координат для визначення масиву точок поверхні, що записуємо за допомогою коду

$$\int_{-1}^1 \frac{\Psi_m^*(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{N} \Psi_m^*(s_k)$$

Задаємо параметри освітлення, орієнтації та стилів відповідної поверхні:

– *Конічна секція.* Для визначення координат точок конічної секції при випинанні використаємо формулу залежності нормальних переміщень точок серединної поверхні конічної оболонки від функції прогину $\Psi_{cone}(x, \varphi) = \Psi_{cone}(x) \cdot \text{tg } \alpha \cdot \cos(\gamma_{cone}(1 - x) + n\varphi)$ [2], геометрію конічної оболонки, взаємне розміщення оболонок, їхню орієнтацію та нумерацію змінних, у тому числі тих, що входять до відношень стикування через шпангоут. Візуалізуємо хвилеутворення конічної секцію за допомогою коду:

```
G1 := surfdata(g1, axes = none, lightmodel = "light2", orientation = [90, -0, 100], shading = XYZ, style = surface) :
```

– *Циліндрична секція більшого радіусу.* Для конструкції «циліндр-конус-циліндр» з проміжним шпангоутом на циліндричній секції більшого радіусу застосовуємо ідеї, викладені для випадку циліндричної секції меншого радіусу, а також враховуємо узгодженість секцій та нумерацію змінних. Для секції, розташованої ліворуч від шпангоута, застосовуємо код:

$$a := 0; b := 1; h3 := \frac{b-a}{N-1}; xB := a + h3 \cdot (ii - 1); B := L2 \cdot xB :$$

$$sl := -\frac{\gamma l \cdot n \cdot L1}{2 \cdot R1} - \frac{\gamma l \cdot l0 \cdot n}{2 \cdot l1 \cdot \cos(\alpha)} :$$

$$A := R2 + y[ii + 2 \cdot N + 8] \cdot \cos\left(sl + \frac{\gamma l \cdot (1 - xB) \cdot n \cdot L2}{R2} \cdot k_{cyl} + n \cdot \text{phiB}\right) :$$

$$g3 := [seq([seq([A \cdot \cos(\text{phiB}), A \cdot \sin(\text{phiB}), B \cdot k_{cyl} + L1 + (l1 - l0) \cdot \sin(\alpha)], ii = 1 .. N)], jj = 1 .. 101)] :$$

```
G3 := surfdata(g3, axes = none, lightmodel = "light2", orientation = [90, -0, 100], shading = XYZ, style = surface) :
```

для секції праворуч від шпангоута –

$$sl := -\frac{\gamma l \cdot n \cdot L1}{2 \cdot R1} - \frac{\gamma l \cdot l0 \cdot n}{2 \cdot l1 \cdot \cos(\alpha)} - \gamma l \cdot \left(1 - \frac{2}{N-1}\right) \cdot \frac{n \cdot L2}{R2} \cdot k_{cyl}$$

$$A := R2 + y[ii + 3 \cdot N + 12] \cdot \cos\left(sl + \frac{\gamma l \cdot (1 - xB) \cdot n \cdot L2}{R2} \cdot (1 - k_{cyl}) + n \cdot \text{phiB}\right) :$$

$$g4 := [seq([seq([A \cdot \cos(\text{phiB}), A \cdot \sin(\text{phiB}), L1 \cdot k_{cyl} + B \cdot (1 - k_{cyl}) + L1 + (l1 - l0) \cdot \sin(\alpha)], ii = 1 .. N)], jj = 1 .. 101)] :$$

```
GG4 := surfdata(g4, axes = none, lightmodel = "light2", orientation = [90, -0, 100], shading = XYZ, style = surface) ;
```

Якщо шпангоут на циліндричній секції більшого радіусу не розміщується, то в наведеному кодї для «лівої» секції потрібно покласти $k_{cyl} := 1$.

– *Візуалізація шпангоутів* на конструкції реалізується на основі кодів, побудованих вище для

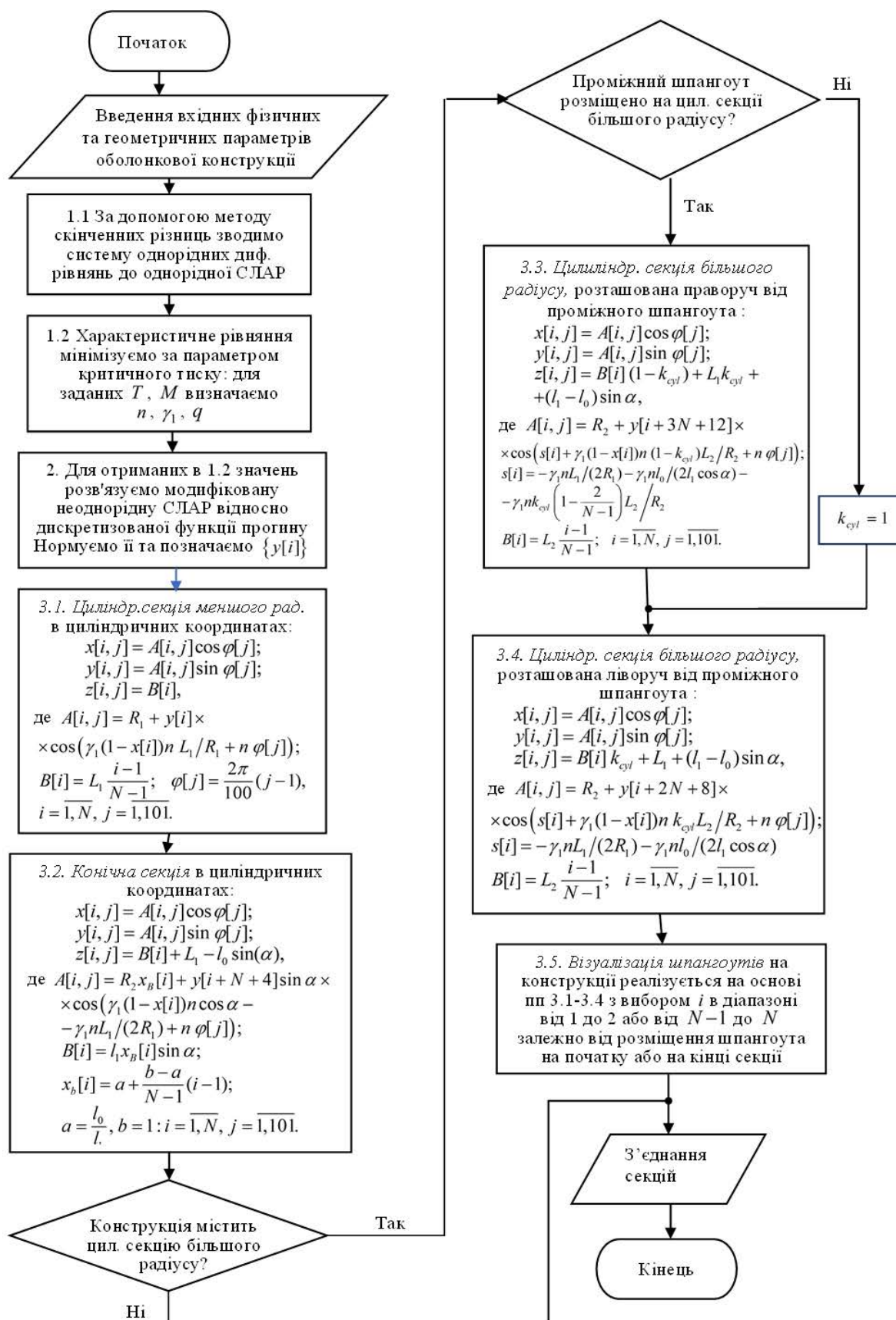


Рис. 2. Блок-схема алгоритму побудови сітки каркасу оболонкової конструкції у закритичному стані

основних оболонок, з вибором змінної ii в діапазоні від 1 до 2 або від $N - 1$ до N залежно від розміщення шпангоута на початку або на кінці секції, а також з вибором видозмінених стилів візуалізації поверхні.

–Остаточна візуалізація *хвилеутворення при загальній втраті стійкості* конструкції реалізується з використанням команди ‘display’.

4. Аналіз числових результатів та візуалізація закритичного хвилеутворення. Аналогічно до [3] чисельний аналіз проводився для оболонок з параметрами: $l_1 = 1.82$ м і $h_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ м, коефіцієнтами Пуассона усіх шарів $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu = 0.3$, модулями пружності зовнішніх шарів $E_1 = E_2 = 1.04 \cdot 10^{11}$ Па; вводяться безрозмірні параметри

$$T^* = \frac{T}{Eh_0^2}, M^* = \frac{M}{2\pi Eh_0^3}$$

та допоміжний параметр зовнішнього критичного тиску

$$q^* = q \cdot 10^{-5} [\text{Pa}].$$

Для розрахунків критичних зусиль загальної втрати стійкості спочатку обирається тришарова оболонкова конструкція «циліндр-конус» з параметрами $E_3/E_1 = 0.01$, $L_1 = 2.5R_1$, $l_0 = 0.65 l_1$, $\alpha = 75^\circ$.

Порівняльний аналіз з відомими результатами. В роботі [3] проведено порівняння числових результатів, отриманих зазначеними методами для циліндричної та конічної оболонок, з результатами, отриманими за відомими формулами, і одержано значну узгодженість. Для порівняльного аналізу у випадку складених конструкцій скористаємося результатами роботи [8] для одношарової оболонкової конструкції, застосуємо наведені в ній рівняння та методи для розрахунку стійкості конструкції «циліндр-конус» та реалізуємо граничний перехід від тришарової до одношарової оболонкової конструкції. Виберемо достатньо мале значення $h_3/h_0 = 0.01$, яке дозволяє визначити граничний перехід (при $h_3/h_0 \rightarrow 0$) від тришарової до одношарової оболонки. Табл. 1 містить значення критичного тиску для тришарової та одношарової конструкції. Аналітичне

Таблиця 1

Порівняння результатів розрахунків загальної втрати стійкості для тришарової та одношарової оболонкових конструкцій «циліндр-конус»

«Циліндр-конус»	$G_1 = 0, G_2 = 0$ (без підкріплення)		$G_1 = 5000, G_2 = 10$ для стикувального шпангоута	
	q^*	n	q^*	n
За рівняннями (1)–(3), (7)–(9) при $h_3/h_0 = 0.01$	6.295394	4	11.865176	7
За рівняннями роботи [8]	6.311711	4	11.825235	7

обґрунтування можливості граничного переходу для конічної оболонки містяться у роботі [2]. Результати, наведені у табл. 1, демонструють можливість реалізації зазначеного граничного переходу для складеної оболонкової конструкції типу «циліндр-конус».

Узгодженість результатів проведених розрахунків (табл. 1) з результатами роботи [8] свідчить також про достовірність запропонованих математичних моделей та алгоритмів.

Граничні поверхні досліджуваних складених оболонкових конструкцій. Тут і далі розглянемо тришарову оболонку з параметром товщини внутрішнього шару $h_3/h_0 = 0.6$. На рис. 3 представлені граничні поверхні, що відокремлюють області стійкості від області втрати стійкості для тришарової невідкріпленої оболонкової конструкції «циліндр-конус» із зазначеними вище параметрами, а на рис. 4 – для конструкції «циліндр-конус-циліндр», підкріпленої стикувальними шпангоутом з параметрами жорсткості $G_1 = 5000$, $G_2 = 10$.

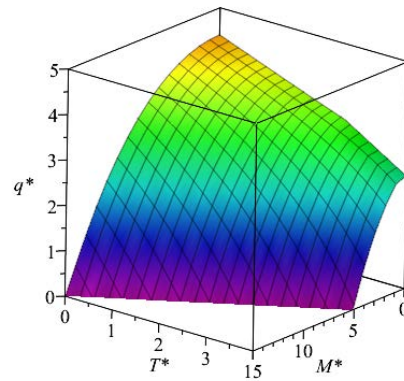


Рис. 3. Гранична поверхня стійкості тришарової невідкріпленої оболонкової конструкції «циліндр-конус»

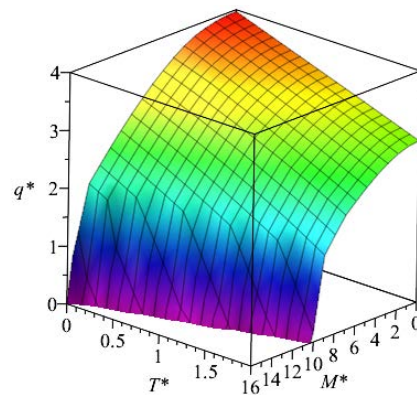


Рис. 4. Гранична поверхня стійкості підкріпленої тришарової конструкції «циліндр-конус-циліндр»

Так само, як і в [2; 3; 8], для розглянутих типів конструкцій граничні поверхні є опуклими: збільшення осьового стискаючого зусилля і крутного моменту призводить до зменшення критичного зовнішнього тиску.

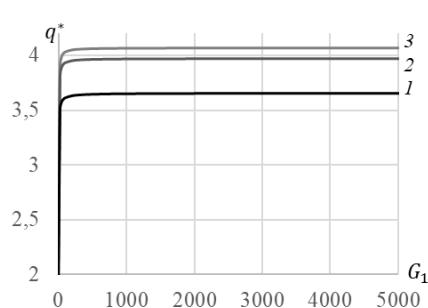


Рис. 5. Вплив параметрів жорсткості стиковальних шпангоутів на стійкість конструкції «циліндр-конус»

Вплив жорсткості шпангоутів на стійкість конструкції «циліндр-конус». На рис. 5 при $M^* = 0, T^* = 0$ зображено графіки залежностей критичного тиску від параметра жорсткості G_1 (в площині початкової кривизни) для наступних значень другого параметра G_2 (з площини початкової кривизни): лінія 1 відповідає $G_2 = 0$, лінія 2 – $G_2 = 10$, лінія 3 – $G_2 = 30$. Збільшення значень обох параметрів жорсткості шпангоутів призводить до збільшення критичного тиску загальної втрати стійкості конструкції. При цьому, збільшення параметра жорсткості G_1 в площині початкової кривизни шпангоута понад значення 500 призводить до незначного збільшення критичного тиску, що дозволяє обирати раціональне значення жорсткості для зменшення загальної маси конструкції «циліндр-конус». Аналогічний висновок отримано у роботах [3; 8].

Візуалізація закритичного деформування складених оболонкових конструкцій. У табл.

Таблиця 2

Хвилеутворення при втраті стійкості конструкції «циліндр-конус» з параметрами $\alpha = 75^\circ, l_0/l_1 = 0.65, L_1/R_1 = 2.5$

$G_1 = 0, G_2 = 0$						
	$M^* = 0$			$M^* = 10$		$M^* = 5$
T^*	-3	0	2	-3	0	2
n	4	4	4	4	4	4
q^*	5.635779	4.402812	3.596839	4.684199	2.593891	2.69176
γ_1	0	0	0	0.131	0.218	0.219
$G_1 = 5000, G_2 = 10$						
	$M^* = 0$			$M^* = 10$		$M^* = 5$
T^*	-3	0	2	-3	0	2
n	6	6	6	7	5	6
q^*	11.55768	7.914187	5.478108	10.75653	6.161440	5.130847
γ_1	0	0	0	0.097	0.256	0.169

2 наведено параметри критичних зусиль, а також надана візуалізація форм випинання в результаті втрати стійкості невідкріплених та відкріплених конструкцій типу «циліндр-конус».

У випадку невідкріпленої конструкції «циліндр-конус» під дією зовнішнього тиску та осьового зусилля форма втрати стійкості характеризується гребнем хвилі, який розміщується в межах стикування секцій. Додатковий вплив крутіння призводить до пересування гребня в бік циліндричної секції.

Під впливом підкріплюючих шпангоутів обраної жорсткості хвиля зазнає перегину в місці стикування секцій. За відсутності крутного моменту максимум хвилі розміщується на кінчній секції, при цьому, осьове розтягування призводить до візуалізації розтягування хвилі вздовж твірної. За певної комбінації значень крутного моменту та осьового зусилля, при $T^* \geq 0$ хвилює число n може зменшитися, а максимум хвилі пересунується на циліндричну секцію, а при $T^* < 0$ число n може збільшитися, а максимум хвилі залишиться на кінчній секції.

Розглянемо оболонкову конструкцію «циліндр-конус-циліндр» з параметрами $\alpha = 75^\circ, l_0/l_1 = 0.65, L_1/R_1 = L_2/R_2 = 2.5$, для якої в табл. 3 наведено візуалізацію хвилеутворення за різного характеру підкріплення.

Таблиця 3

Вплив підкріплюючих шпангоутів на хвилеутворення при втраті стійкості конструкції «циліндр-конус-циліндр»

Відсутнє підкріплення шпангоутами: $G_1 = 0, G_2 = 0$						
	$M^* = 0$			$M^* = 10$		$M^* = 5$
T^*	-3	0	2	-3	0	2
n	3	3	3	3	3	3
q^*	1.669903	1.193405	0.848489	1.124695	0.212909	0.152743
γ_1	0	0	0	0.119	0.176	0.184
Підкріплення стиковальними шпангоутами меншого радіусу: $G_1 = 5000, G_2 = 10$						
	$M^* = 0$			$M^* = 10$		$M^* = 5$
T^*	-3	0	2	-3	0	2
n	4	4	4	4	4	4
q^*	3.135151	2.223881	1.651559	2.675035	1.920431	0.925142
γ_1	0	0	0	0.106	0.121	0.19
$G_1 = 5000, G_2 = 10, M^* = 0$						
	Підкріплення стиковальними шпангоутами більшого радіусу			Підкріплення стиковальними шпангоутами за обома спряженнями		
T^*	-3	0	2	-3	0	2
n	6	5	5	6	5	5
q^*	5.218293	3.958484	2.787854	5.219495	3.968583	2.792508
Підкріплення стиковальними шпангоутами за обома спряженнями: $G_1 = 5000, G_2 = 10$						
	Жорсткості всіх стиковальних шпангоутів – G_1, G_2		Жорсткості малих шпангоутів – $0.1G_1, 0.1G_2$, великих – G_1, G_2		Жорсткості малих шпангоутів – G_1, G_2 , великих – $0.1G_1, 0.1G_2$	
T^*	$M^* = 10$	$M^* = 5$	$M^* = 10$	$M^* = 5$	$M^* = 10$	$M^* = 5$
n	6	5	6	5	6	5
q^*	2.869121	2.330532	2.868800	2.326321	2.776833	2.141338
γ_1	0.2042	0.1570	0.2043	0.1572	0.2047	0.1594

Якщо конструкція обраних розмірів не підкріплена, спостерігаємо розтягування хвилі вздовж всіх трьох секцій конструкції. Розміщення шпангоутів з меншої основи конуса призводить до зсуву гребня на конічну та циліндричну секції більшого радіусу. Підкріплення конструкції стиковальними шпангоутами з більшими радіусами чи шпангоутами як більшого, так і меншого радіусів, візуально мало відрізняється за розподілом хвилі, гребінь якої розміщується над циліндром більшого радіусу. До того ж, у останніх випадках підкріплення, значення жорсткості шпангоутів та значення осьового зусилля несуттєво впливають на форму окремої хвилі, проте впливають на кількість хвиль n , значення критичного тиску q^* та параметр γ_1 нахилу гребня хвилі до твірної конструкції. Більший вплив на стійкісні характеристики визначають жорсткості великих шпангоутів.

Зважаючи на те, що на конструкції, підкріпленій шпангоутами за обома спряженнями секцій, гребінь хвилі розміщується над циліндричною секцією більшого радіусу, саме на ній потрібно розмістити проміжний шпангоут.

Аналіз ефективного з точки зору стійкості місця розміщення проміжного шпангоута. Розглянемо оболонкову конструкцію «циліндр-конус-циліндр» з тими самими параметрами, що й вище. В табл. 4 і 5 внесені характеристики стійкості та візуалізовано форми втрати стійкості залежно від місця розміщення проміжного шпангоута, яке визначається коефіцієнтом k_{cyl} поділу твірної циліндричної секції більшого радіусу.

Для конструкції, підкріпленої стиковальними шпангоутом на обох спряженнях, частина хвилі з найбільшою амплітудою розміщується на циліндричному відсіку більшого радіусу. При постановці проміжного шпангоута на цей відсік конструкція підсилюється, в результаті змінюється форма хвилі залежно від місця розміщення шпангоута. В табл. 4 і 5 найбільші значення критичного тиску виділено жирним шрифтом у кожному з розглянутих випадків жорсткості проміжного шпангоута. Зауважимо, що розміщенню проміжного шпангоута посередині відсіку не відповідає найбільше значення критичного тиску.

Слід зазначити, що перепади в амплітудах критичної хвилі можуть вплинути на руйнівні процеси конструкції в наслідок втрати стійкості. У кожному з досліджених варіантів жорсткостей шпангоутів саме у випадках, де значення критичного тиску найбільше, хвиля має рівні амплітуди на частинах циліндричного відсіку більшого радіусу, що відповідає прийнятнішій формі хвилеутворення. Обираємо ці конструкції.

Жорсткість проміжного шпангоута визначає перерозподіл хвилі вздовж відсіків. В обох таблицях 4 і 5 саме другі з розглянутих варіантів обра-

них конструкцій відповідають більш рівномірному розподілу хвилі вздовж твірної у порівнянні з іншими: амплітуди хвилі над всіма циліндричними секціями близькі за значеннями (табл. 4) або мало відрізняються (табл. 5). Така поведінка хвилі є *безпечнішою* за інші випадки, хоча не відповідає більшим значенням критичного тиску у порівнянні з третім варіантом конструкції в табл. 4 та 5.

Таблиця 4

Аналіз розміщення проміжного шпангоута на конструкції «циліндр-конус-циліндр», підкріпленій стиковальними шпангоутом за обома спряженнями, якщо жорсткості малих шпангоутів – G_1, G_2 , великих – $0.1G_1, 0.1G_2$

$G_1 = 5000, G_2 = 10, T^* = 0, M^* = 0$				
Жорсткості проміжного шпангоута – $0.2G_1, 0.2G_2$				
k_{cyl}	0.5	0.53	0.55	0.6
q^*	6.617245 ($n=7$)	6.736068 ($n=7$)	6.679096 ($n=7$)	6.345322 ($n=7$)
Жорсткості проміжного шпангоута – $0.25G_1, 0.25G_2$				
k_{cyl}	0.528	0.53	0.55	0.6
q^*	7.040914 ($n=7$)	7.040364 ($n=7$)	6.914612 ($n=7$)	6.487056 ($n=7$)
Жорсткості проміжного шпангоута – $0.3G_1, 0.3G_2$				
k_{cyl}	0.525	0.53	0.55	0.6
q^*	7.250784 ($n=7$)	7.211005 ($n=7$)	7.066503 ($n=7$)	6.586552 ($n=7$)

Таблиця 5

Аналіз розміщення проміжного шпангоута на конструкції «циліндр-конус-циліндр», підкріпленій стиковальними шпангоутами за обома спряженнями з жорсткостями G_1, G_2

$G_1 = 5000, G_2 = 10, T^* = 0, M^* = 0$				
Жорсткості проміжного шпангоута – $0.1G_1, 0.1G_2$				
k_{cyl}	0.5	0.53	0.55	0.6
q^*	5.940621 ($n=7$)	6.007339 ($n=7$)	6.021317 ($n=7$)	5.944031 ($n=7$)
Жорсткості проміжного шпангоута – $0.2G_1, 0.2G_2$				
k_{cyl}	0.5	0.53	0.545	0.6
q^*	6.617234 ($n=7$)	6.831298 ($n=7$)	6.871317 ($n=7$)	6.571257 ($n=7$)
Жорсткості проміжного шпангоута – $0.25G_1, 0.25G_2$				
k_{cyl}	0.5	0.53	0.54	0.55
q^*	6.835166 ($n=7$)	7.146180 ($n=7$)	7.201648 ($n=7$)	7.201116 ($n=7$)

Для деяких конструкцій з таблиць 4 та 5 проведено комп'ютерну візуалізацію закритичного хвилеутворення підкріпленої конструкції «циліндр-конус-циліндр», під впливом осьового зусилля та/або крутіння. Результати розрахунків та візуалізації наведено в табл. 6.

Таблиця 6
Вплив комбінованого навантаження на закритичне хвилеутворення конструкції «циліндр-конус-циліндр», підкріпленої стиковальними шпангоутами за обома

Жорсткості малих стиковальних шпангоутів – G_1, G_2 , великих – $0.1G_1, 0.1G_2$ $G_1 = 5000, G_2 = 10, k_{cyl} = 0.53$						
Жорсткості проміжного шпангоута – $0.25G_1, 0.25G_2$						
	$M^* = 0$		$M^* = 10$		$M^* = 5$	$M^* = 10$
T^*						
n	8	7	8	7	7	6
q^*	8.040517	5.233317	7.692357	5.698601	4.803548	1.336188
γ_1	0	0	0.101	0.233	0.260	0.417
Жорсткості всіх стиковальних шпангоутів – G_1, G_2 $G_1 = 5000, G_2 = 10, k_{cyl} = 0.55$						
Жорсткості проміжного шпангоута – $0.1G_1, 0.1G_2$; $M^* = 0$						
T^*						
n	7	7	7	7	7	
q^*	7.726618	7.326877	6.893854	6.021317	5.107804	
Жорсткості проміжного шпангоута – $0.2G_1, 0.2G_2$						
	$M^* = 0$					
T^*						
n	7	7	7	7	7	
q^*	8.062541351	6.868018	6.284147	5.395219	4.258257	
	$M^* = 10$		$M^* = 5$			
T^*						
n	8	8	7	7	7	
q^*	7.634454	7.136206	5.484937	7.625022	5.556492	

Під впливом розтягувальної сили гребінь хвилі пересувається на циліндричну секцію малого радіусу. Для деяких конструкцій стискаюча сила може призвести до пересування хвилі на циліндричну секцію більшого радіусу.

Зазначимо, що за певної комбінації зовнішніх зусиль може спостерігатися виникнення хвилі, яка отримує перегин при переході через проміжний шпангоут (перша та третя конструкції табл. 6), що задає значний перепад амплітуд. Крім того, перерозподіл хвилі вздовж циліндричного відсіку більшого радіусу зі стану відсутності хвилі з перегином при переході через проміжний шпангоут до його появи супроводжується підвищенням гребінця хвилі над циліндричним відсіком меншого радіусу.

Аналіз хвилеутворень втрати стійкості, наведених в табл. 6, дозволяє також обрати ефективне сполучення жорсткостей шпангоутів, за яких втрата стійкості призводить до найбезпечнішого розподілу хвилі незалежно від комбінації зовнішніх зусиль. У досліджених варіантах найприйнятнішою є друга конструкція табл. 6 (з жорсткостями всіх стиковальних шпангоутів G_1, G_2 , проміжного – $0.1G_1, 0.1G_2$, з коефіцієнтом поділу циліндричного відсіку більшого радіусу проміжним шпангоутом $k_{cyl} = 0.55$).

Таблиця 7

Вплив характеристик шарів матеріалу оболонки на стійкість конструкції ($\alpha = 75^\circ, l_0/l_1 = 0.65, k = 2.5, E_1 = E_2, h_1 = h_2, M^* = 0, T^* = 0$)

Непідкріплена конструкція «циліндр-конус»									
		$E_3/E_1 = 0.01$			$E_3/E_1 = 0.001$				
h_3/h_0	q^* [Па]	$E \cdot 10^{-10}$ [Па]	$10^6 \cdot q/E$	q^* [Па]	$E \cdot 10^{-10}$ [Па]	$10^6 \cdot q/E$			
0.1	6.1551	9.3704	6.5686	6.1538	9.3610	6.5738			
0.2	5.9832	8.3408	7.1734	5.9803	8.3221	7.1861			
0.3	5.7506	7.3112	7.8654	5.7455	7.2831	7.8888			
0.4	5.4284	6.2816	8.6418	5.4204	6.2442	8.6807			
0.5	4.9885	5.2520	9.4982	4.9762	5.2052	9.5601			
0.6	4.4028	4.2224	10.4273	4.3851	4.1662	10.5252			
0.7	3.6442	3.1928	11.4138	3.6193	3.1273	11.5733			
0.8	2.6858	2.1632	12.4160	2.6519	2.0883	12.6986			
0.9	1.5014	1.1336	13.2444	1.4563	1.0494	13.8781			
Підкріплені конструкції, $G_1 = 5000, G_2 = 10$									
«циліндр-конус»				«циліндр-конус-циліндр»; для малих шп. – G_1, G_2 , великих – $0.1G_1, 0.1G_2$					
		$E_3/E_1 = 0.01$		$E_3/E_1 = 0.001$		$E_3/E_1 = 0.01$		$E_3/E_1 = 0.001$	
h_3/h_0	q^* [Па]	$10^6 \cdot q/E$	q^* [Па]	$10^6 \cdot q/E$	q^* [Па]	$10^6 \cdot q/E$	q^* [Па]	$10^6 \cdot q/E$	
0.1	11.6035	12.3831	11.6011	12.3930	5.4237	5.7882	5.4228	5.7930	
0.2	11.2813	13.5255	11.2760	13.5495	5.2932	6.3461	5.2911	6.3579	
0.3	10.8436	14.8315	10.8342	14.8758	5.1085	6.9873	5.1047	7.0090	
0.4	10.1410	16.1439	10.1159	16.2006	4.7930	7.6303	4.7810	7.6567	
0.5	9.1332	17.3900	9.0988	17.4802	4.3137	8.2135	4.2973	8.2558	
0.6	7.9142	18.7433	7.8685	18.8862	3.7367	8.8496	3.7150	8.9168	
0.7	6.4439	20.1826	6.3845	20.4155	3.0423	9.5286	3.0143	9.6387	
0.8	4.6827	21.6470	4.6070	22.0606	2.2112	10.2221	2.1757	10.4182	
0.9	2.5913	22.8593	2.4962	23.7879	1.2241	10.7979	1.1795	11.2398	

Вплив параметрів шарів матеріалу оболонки на стійкість конструкцій. В табл. 7 випи-сано значення критичного тиску q^* , приведеного модуля пружності E та безрозмірного тиску q/E для різних значень відносної товщини h_3/h_0 та модуля пружності E_3/E_1 внутрішнього шару матеріалу тришарової оболонки.

Розрахунки проведені для непідкріпленої та підкріплених конструкцій типу «циліндр-конус» та «циліндр-конус-циліндр». Для зазначених типів конструкцій отримуємо висновок про зменшення критичного тиску q^* та збільшення параметра q/E як при «пом'якшенні» внутрішнього шару (зменшення E_3/E_1) за фіксованої його товщини, так і при зростанні товщини внутрішнього шару h_3/h_0 за фіксованого значення E_3/E_1 . Щодо поведінки параметра q/E , то вона аналогічна випадкам як конічної оболонки [2], так і конструкції «конус-циліндр», що має спряження вздовж основи конуса більшого радіусу [3]. Стосовно тиску q^* , то для конструкції «конус-циліндр», розглянутої в роботі [3], зростання q^* спостерігалося не на всьому діапазоні зміни товщини h_3/h_0 . Це пов'язано з геометрією конструкції: в роботі [3] вона має опукле спряження, а в даній роботі – одне зі спряжень є увігнутим.

Вплив розмірів циліндричних секцій на закритичне хвилеутворення. Розглядатимемо підкріплені конструкції «циліндр-конус-циліндр» з жорсткостями всіх стикувальних шпангоутів G_1, G_2 . В табл. 8 візуалізовано форми втрати стійності зазначеної конструкції «циліндр-конус-циліндр» для різних розмірів циліндричних секцій. Як можна спостерігати, гребінь хвилі не завжди розміщується на секції більшої довжини.

Тепер розглянемо підкріплену конструкцію «циліндр-конус-циліндр» з циліндричними секціями, що мають вдвічі більшу довжину за ту, що наводилася в табл. 4-6. Уведемо позначення для коефіцієнта жорсткості проміжного шпангоута по відношенню до жорсткості стикувальних: $k_{G,int} = G_{1,int}/G_1 = G_{2,int}/G_2$. Проведено аналіз впливу місця розміщення проміжного шпангоута на характер втрати стійкості з вибором таких параметрів, за яких хвиля має майже однакову абсолютну амплітуду з обох боків від проміжного шпангоута на циліндричному відсіку більшого радіусу. В табл. 9 наведено результат такого вибору. У випадках $k_{G,int} = 0.35$ та 0.5 спостерігається перегин хвилі при переході через проміжний шпангоут.

Для другої та третьої з наведених в табл. 9 конструкцій розглянемо вплив осьових зусиль та крутіння на характер хвилеутворення втрати стійкості. Результати візуалізації зведено до табл. 10.

Для обраних конструкцій в табл. 10 за наявності осьового стискання без крутіння обидві кон-

струкції отримують перегин хвилі на циліндричному відсіку більшого радіусу при переході через проміжний шпангоут. Для другої з розглянутих конструкцій табл. 10, такого типу перегин спостерігався ще й при $T^* = 0$, а для першої – лише при $T^* > 0.7$.

Таблиця 8

Вплив розмірів циліндричних секцій на закритичне хвилеутворення при $l_0/l_1 = 0.8, G_1 = 5000, G_2 = 10$

	L_1/R_1	L_2/R_2	L_1/R_1	L_2/R_2	L_1/R_1	L_2/R_2
	2.5	2.5	4	2.5	5	2.5
q^*	3.997107 (n=5)		3.997071 (n=5)		3.413275 (n=5)	
	5	3	2.5	5	5	5
q^*	3.1792789 (n=5)		1.875588 (n=5)		1.875453 (n=5)	

Таблиця 9

Рациональне розміщення проміжного шпангоута на конструкції «циліндр-конус-циліндр» залежно від коефіцієнта $k_{G,int}$ при $l_0/l_1 = 0.65, G_1 = 5000, G_2 = 10, L_1/R_1 = L_2/R_2 = 5, T^* = 0, M^* = 0$

$k_{G,int}$	0.2	0.25	0.35	0.5
k_{cyl}	0.5456	0.5445	0.5424	0.54
q^*	3.227675 (n=5)	3.370491 (n=5)	3.597736 (n=5)	3.644468 (n=5)

Крутіння другої конструкції призводить до поступового перерозподілу хвилі у першу чергу на обох циліндричних відсіках. Виявлено, що при досить незначному крутінні $M^* = 0.5$ гребінь хвилі розміщується на циліндричному відсіку меншого радіусу, а при збільшенні крутіння спостерігається поступове зниження гребінця на цьому відсіку, а також зникнення перегину хвилі на відсіку більшого радіусу при переході через проміжний шпангоут.

Аналогічно до випадку оболонок, наведених в табл. 6, для обох конструкцій табл. 10 перерозподіл хвилі вздовж циліндричного відсіку більшого радіусу зі стану з перегином при переході через проміжний шпангоут до його зникнення і навпаки супроводжується підвищенням гребня хвилі над циліндричним відсіком меншого радіусу. До того ж, цей гребінь сконцентрований в околі центрального поясу циліндричного відсіку меншого радіусу. Для кожної з розглянутих конструкцій потрібно відслідковувати поведінку оболонки у зазначеному «перехідному стані». Для першої конструкції табл. 10 «перехідний стан» проходить у пом'якшеній формі на відміну від другої. Тому безпечніша поведінка втрати стійкості під впливом комбінованого навантаження відповідає

першій конструкції, яка, крім того, має критичний тиск, який несуттєво менший, ніж у другої конструкції.

Таблиця 10

Вплив комбінованого навантаження на закритичне хвилеутворення конструкцій «циліндр-конус-циліндр» з параметрами

$$l_0/l_1 = 0.65, L_1/R_1 = L_2/R_2 = 5, G_1 = 5000, G_2 = 10$$

M^*	10	0	0	5
T^*	-4	0.5	2	2
$k_{cyl} = 0.5445, k_{G,ant} = 0.25$				
q^*	3.625217 (n=6)	3.242451 (n=5)	2.487865 (n=5)	1.905255 (n=5)
γ_1	0.119	0	0	0.234
$k_{cyl} = 0.5424, k_{G,ant} = 0.35$				
$M^* = 0, \gamma_1 = 0$				
T^*	-4	-0.1	0.1	2
q^*	4.692904 (n=6)	3.629264 (n=5)	3.544339 (n=5)	2.517162 (n=5)
M^*	10	0.5	1	5
T^*	-4	0	0	2
q^*	3.800933 (n=6)	3.593776 (n=5)	3.578727 (n=5)	2.093536 (n=5)
γ_1	0.119	0.018	0.042	0.229

При аналізі хвилеутворення враховано, що перепади в амплітудах хвилі закритичного випинання можуть призвести до руйнівних процесів. Потрібно обрати таку комбінацію жорсткостей шпангоутів та місця розміщення проміжного шпангоута, за якої хвиля найбільш рівномірно розподілена вздовж твірної. Значне збільшення жорсткостей шпангоутів призводить до несуттєвого збільшення критичного тиску, проте може викликати суттєві перепади в амплітудах. Таким чином комп'ютерна візуалізація та аналіз хвилеутворення дозволяє вибрати раціональну комбінацію жорсткостей шпангоутів як з точки зору безпечної поведінки розподілу хвилі вздовж

твірної конструкції в закритичному стані, так і з точки зору зменшення загальної маси конструкції. При такому виборі важливо провести візуалізацію хвилеутворення під впливом комбінованого навантаження для відслідковування перехідних етапів в перерозподілі хвилі, який може супроводжуватися таким випинанням хвилі, за якого конструкція може зруйнуватися.

Наприкінці зауважимо, що оболонкові конструкції з однаковими параметрами жорсткості та геометричними характеристиками конічного відсіку, мають більший критичний тиск, якщо у них розмір циліндричних відсіків менший. Той самий висновок справджується і у порівнянні критичного тиску для конструкцій «циліндр-конус» та «циліндр-конус-циліндр» з однаковими жорсткостями шпангоутів: перша має більший критичний тиск за другу.

Висновки. В роботі надано алгоритм побудови каркасу закритичного стану оболонкової конструкції, отриманого на основі розрахунків стійкості методом скінченних різниць, наведено поетапну схему візуалізації форм втрати стійкості, реалізовану за допомогою системи комп'ютерної математики Maple17. Ця система дозволила швидко, без великих витрат ресурсів машинного часу та якісно побудувати низку форм втрати стійкості оболонкових конструкцій для різних входних параметрів.

В роботі проведено аналіз біфуркаційних станів тришарових складених оболонкових конструкцій, що утворюються з циліндричних та конічної секцій під дією комбінованого навантаження зовнішнім тиском, осьовим зусиллям та крутінням.

Проведено візуалізацію хвилеутворення і виявлені раціональні параметри досліджуваної системи з точки зору загальної втрати стійкості конструкції в цілому.

ЛІТЕРАТУРА

1. Congying Zhong C., Reimerdes H.-G. Stability Behavior of Cylindrical and Conical Sandwich Shells with Flexible Core. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2007, Vol. 9. No. 2, March 2007. P. 143–166. URL: <https://doi.org/10.1177/1099636207068687>.
2. Gristchak V. Z., Hryshchak D. D., Dyachenko N. M. Efficient Approximate Analytic Solution for the Problem of Stability of a Three-Layer Conic Shell Under Combined Loading. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 254. No. 1. P. 71–88. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05289-3>.
3. Gristchak V. Z., Hryshchak D. V., Dyachenko N. M., Sanin A. F., Sukhyu K. M. Bifurcation state and rational design of three-layer reinforced compound cone-cylinder shell structure under combined loading. *Space Science and Technology*. 2023. Vol. 29. No. 6(145). P. 26–41. URL: <https://doi.org/10.15407/knit2023.06.026>.
4. Столярова А.В. Эффективные механические характеристики композиционных материалов из транслопными порожнистыми волокнами : монография. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с.
5. Slyvynskiy V. I., Sanin A. F., Kharchenko M. E., Kondratyev A. V. Thermally and dimensionally stable structures of carbon-carbon laminated composites for space applications. *Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC this link is disabled*. 2014. Vol. 8. P. 5739–5751. URL: <https://www.researchgate.net/publication/295549483>.

6. Singer J, Arbocz J, Weller T. Buckling experiments: experimental methods in buckling of thin-walled structures, volume 2. Shells, built-up structures, composites, and additional topics. Wiley, New York, 2002. 1132 p.
7. Грищак Д.В. Комп'ютерна алгебра у розв'язанні прикладних задач механіки конструкцій зі змінними параметрами: монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2020. 218 с.
8. Дегтярьов О.В., Грищак В.З., Акімов Д.В. та ін. Математичні моделі та прогнозування руйнівних навантажень в ракетно-космічних системах : колективна монографія / за ред. О. В. Дегтярьова, В. З. Грищака, В. М. Сіренка. Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2020. 260 с.
9. Ifayefunmi O., Ismail M. S. An Overview of Buckling and Imperfection of Cone-Cylinder Transition under Various Loading Condition. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 17. No. 8. E329. URL: <https://doi.org/10.1590/1679-78256197>.
10. Ifayefunmi O., Ruan D. Buckling of Stiffened Cone–Cylinder Structures Under Axial Compression. *International Journal of Applied Mechanics*. 2022. Vol. 14. No. 07. Id: 2250075. URL: <https://doi.org/10.1142/S1758825122500752>.
11. Iqbal, M. A., Tiwari, G., Gupta, P. K. Energy dissipation in thin metallic shells under projectile impact. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2016. No. 59. P. 37–57. URL: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.03.004>.
12. Ismail M. S., Ifayefunmi O., Mazli A. H. Combined stability of cone-cylinder transition subjected to axial compression and external pressure. *Thin-Walled Structures*. 2020. Vol. 157. December 2020. Id: 107102. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107102>.
13. Ismail M.S., Ifayefunmi O., Fadzullah S.H.S.M. Buckling Analysis of Stiffened Cone-Cylinder Intersection Subjected to External Pressure. *Key Engineering Materials*. 2020. Vol. 833. March 2020. P. 223–227. URL: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.833.223>.
14. Khalili F., Showkati H. T-ring stiffened cone cylinder intersection under internal pressure. *Thin-Walled Structures*. 2012. Vol. 54. May 2012. P. 54–64. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2012.01.015>.
15. Pasternak H., Li Z., Juozapaitis A., Daniūnas A. Ring Stiffened Cylindrical Shell Structures. *Appl. Sci*. 2022. Vol. 12. No. 22. Id: 11665. URL: <https://doi.org/10.3390/app122211665>.
16. Schmidt H. Two decades of research on the stability of steel shell structures at the University of Essen (1985–2005): Experiments, evaluations, and impact on design standards. *Advances in Structural Engineering*. 2018. Vol. 21. No. 16. P. 2364–2392. URL: <https://doi.org/10.1177/1369433218756273>.
17. Teng J. G., Barbagallo M. Shell restraint to ring buckling at cone-cylinder intersections. *Engineering Structures*. 1997. Vol. 19. No. 6. P. 425–431. URL: [https://doi.org/10.1016/s0141-0296\(96\)00087-9](https://doi.org/10.1016/s0141-0296(96)00087-9).
18. Wang A. Stresses and stability for the cone-cylinder shells with toroidal transition. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1998. Vol. 75. No. 1. P. 49–56. URL: [https://doi.org/10.1016/S0308-0161\(98\)00013-1](https://doi.org/10.1016/S0308-0161(98)00013-1).
19. Kamke E. Differentialgleichungen, Bd. 1, Gewöhnliche Differentialgleichungen Hardcover – 1. Springer Fachmedien Wiesbaden GMBH, Jan., 1983. 696 p.

REFERENCES

1. Congying Zhong C., Reimerdes H.-G. (2007) Stability Behavior of Cylindrical and Conical Sandwich Shells with Flexible Core. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 9, no. 2, March 2007. 143-166. <https://doi.org/10.1177/1099636207068687>
2. Gristchak V. Z., Hryshchak D. D., Dyachenko N. M. (2021) Efficient Approximate Analytic Solution for the Problem of Stability of a Three-Layer Conic Shell Under Combined Loading. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 254, no. 1, pp. 71-88. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05289-3>
3. Gristchak V. Z., Hryshchak D. V., Dyachenko N. M., Sanin A. F., Sukhyy K. M. (2023) Bifurcation state and rational design of three-layer reinforced compound cone-cylinder shell structure under combined loading. *Space Science and Technology*, vol. 29, no. 6 (145), pp. 26–41. <https://doi.org/10.15407/knit2023.06.026>
4. Stoliarova A. V. (2021) Efektyvni mekhanichni kharakterystyky kompozytsiinykh materialiv iz transtropnymy porozhnystymy voloknamy: monohrafia [Effective mechanical characteristics of composite materials with transtropic hollow fibers: monograph]. Kherson: Publishing House 'Helvetica' LLC [in Ukrainian].
5. Slyvynskiy V. I., Sanin A. F., Kharchenko M. E., Kondratyev A. V. (2014) Thermally and dimensionally stable structures of carbon-carbon laminated composites for space applications. *Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC* this link is disabled, vol. 8, pp. 5739–5751. <https://www.researchgate.net/publication/295549483>

6. Singer J, Arbocz J, Weller T. (2002) Buckling experiments: experimental methods in buckling of thin-walled structures, volume 2. Shells, built-up structures, composites, and additional topics. Wiley, New York.
7. Hryshchak D.V. (2020) Kompiuterna alhebra u rozviazanni prykladnykh zadach mekhaniky konstrukttsii zi zminnyimi parametramy: monohrafiia [Application of computer algebra to the solution of applied problems of mechanics of structures with variable parameters: monograph]. Kherson: Publishing House 'Helvetica' LLC [in Ukrainian].
8. Degtyarev A. V., Gristchak V. Z., Akimov D. V., Gomenyuk S. I., Grebenyuk S. M., Degtiarenko P. G., Dyachenko N. M., Klimenko D. V., Kudin O. V., Larionov I. F., Sirenko V. N., Choporov S. V. ((2020) Matematychni modeli ta prohnouzuvannia ruiniivnykh navantazhen v raketno-kosmichnykh systemakh: kolektyvna monohrafiia [Mathematical models and prediction of damage loads in rocket-space systems: collective monograph]. Eds by A. V. Degtyarev, V. Z. Gristchak, V. N. Sirenko. Zaporizhzhia: Publishing House 'Helvetica' LLC [in Ukrainian].
9. Ifayefunmi O., Ismail M. S. (2020) An Overview of Buckling and Imperfection of Cone-Cylinder Transition under Various Loading Condition. Latin American Journal of Solids and Structures, vol. 17, no. 8. E329. <https://doi.org/10.1590/1679-78256197>
10. Ifayefunmi O., Ruan D. (2022) Buckling of Stiffened Cone–Cylinder Structures Under Axial Compression. International Journal of Applied Mechanics, vol. 14, no. 07. Id: 2250075. <https://doi.org/10.1142/S1758825122500752>
11. Iqbal, M. A., Tiwari, G., Gupta, P. K. (2016) Energy dissipation in thin metallic shells under projectile impact. European Journal of Mechanics - A/Solids, no. 59, pp. 37–57. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.03.004>
12. Ismail M. S., Ifayefunmi O., Mazli A. H. (2020) Combined stability of cone-cylinder transition subjected to axial compression and external pressure. Thin-Walled Structures, vol. 157. December 2020. Id: 107102. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107102>
13. Ismail M.S., Ifayefunmi O., Fadzullah S.H.S.M. (2020) Buckling Analysis of Stiffened Cone-Cylinder Intersection Subjected to External Pressure. Key Engineering Materials, vol. 833. March 2020, pp. 223–227. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.833.223>
14. Khalili F., Showkati H. (2012) T-ring stiffened cone cylinder intersection under internal pressure. Thin-Walled Structures, vol. 54. May 2012, pp. 54-64. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2012.01.015>.
15. Pasternak H., Li Z., Juozapaitis A., Daniūnas A. (2022) Ring Stiffened Cylindrical Shell Structures. Appl. Sci, vol. 12, no. 22. Id: 11665. <https://doi.org/10.3390/app122211665>
16. Schmidt H. (2018) Two decades of research on the stability of steel shell structures at the University of Essen (1985–2005): Experiments, evaluations, and impact on design standards. Advances in Structural Engineering, vol. 21, no. 16, pp. 2364–2392. <https://doi.org/10.1177/1369433218756273>.
17. Teng J. G., Barbagallo M. (1997) Shell restraint to ring buckling at cone-cylinder intersections. Engineering Structures, vol. 19, no. 6, pp. 425–431. [https://doi.org/10.1016/s0141-0296\(96\)00087-9](https://doi.org/10.1016/s0141-0296(96)00087-9).
18. Wang A. (1998) Stresses and stability for the cone-cylinder shells with toroidal transition. International Journal of Pressure Vessels and Piping, vol. 75, no. 1, pp. 49-56. [https://doi.org/10.1016/S0308-0161\(98\)00013-1](https://doi.org/10.1016/S0308-0161(98)00013-1)
19. Kamke E. (1983) Differentialgleichungen, Bd. 1, Gewöhnliche Differentialgleichungen Hardcover – 1. Springer Fachmedien Wiesbaden GMBH, Jan.