

ISSN 2413-6549 (Print)  
ISSN 2518-1785 (Online)

Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет

Заснований  
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію  
друкованого засобу масової інформації  
Серія КВ № 24766-14706Р від 25 березня 2021 р.

## Computer Science and Applied Mathematics

**Адреса редакції:**

вул. Жуковського 66, корп. 1, ауд. 216,  
м. Запоріжжя, Україна, 69060

**Телефон**

для довідок:  
+38 066 53 57 687

**№ 2, 2021**



Видавничий дім  
«Гельветика»  
2021

Computer Science and Applied Mathematics. Запоріжжя: Видавничий дім «Гельветика», 2021. № 2. 60 с.

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Internet вченою радою ЗНУ (протокол засідання № 9 від 22.02.2022 р.)

На підставі Наказу Міністерства освіти і науки України № 886 від 02.07.2020 р. (додаток 4) журнал включено до Переліку наукових фахових видань України категорії «Б» у галузі фізико-математичних наук (113 – Прикладна математика, 121 – Інженерія програмного забезпечення, 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології).

До 25 березня 2021 р. журнал виходив під назвою «Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки».

У зв'язку зі зміною назви журналу було внесено відповідні зміни до Переліку наукових фахових видань України на підставі Наказу Міністерства освіти та науки України № 735 від 29.06.2021 р. (додаток 3).

Журнал індексується в міжнародній наукометричній базі даних Index Copernicus

Статті у виданні перевірені на наявність плагіату за допомогою програмного забезпечення StrikePlagiarism.com від польської компанії Plagiat.pl.

#### **РЕДАКЦІЙНА РАДА:**

**Головний редактор** – Гоменюк С. І., доктор технічних наук, професор

**Відповідальні**

**редактори:**

– Стеганцев Є. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент

– Швидка С. П., кандидат фізико-математичних наук, доцент

#### **РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

- Гребенюк С. М. – доктор технічних наук, доцент (Україна)  
Гришак В. З. – доктор технічних наук, професор (Україна)  
Єрмолаєв В. А. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)  
Кеберле Н. Г. – кандидат технічних наук, доцент (Україна)  
Клименко М. І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)  
Козін І. В. – доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)  
Кудін О. В. – кандидат фізико-математичних наук (Україна)  
Панасенко Є. В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)  
Чопоров С. В. – доктор технічних наук, доцент (Україна)  
Шило Г. М. – доктор технічних наук, доцент (Україна)  
Breslavsky I. – PhD in Mechanics, Docent (Канада)  
Djakon R. – Dr.sc.ing., Professor, Academician (Латвія)  
Gerasimov T. – PhD in Mathematics, Docent (Німеччина)  
Kolakowski Z. – Doctor of Science in Engineering, Professor (Польща)

# ЗМІСТ

## РОЗДІЛ I. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

<b>Baburov V. V., Gristchak V. Z., Hryshchak D. D., Dyachenko N. M.</b> <i>THE EFFECT OF THE VARIABILITY OF EXTERNAL PRESSURE ON THE LOCAL AND OVERALL BUCKLING LOADS FOR THE REINFORCED COMPOUND TYPE “BARREL-OGIVE” SHELL STRUCTURE WITH COMPARTMENTS OF DIFFERENT GAUSSIAN CURVATURES</i> .....	5
<b>Дмитрів К. М., Д’яченко Н. М.</b> <i>ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ КОНФОРМНИХ ПЛОСКИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ПРО ЗНОШУВАННЯ ЗА СТЕПЕНЕВИМ ЗАКОНОМ ПРИ ФІКСОВАНІЙ ПЛОЩАДЦІ КОНТАКТУ</i> .....	14
<b>Kozhushko O. D., Boiko M. V., Kovbasa N. Yu., Martyniuk P. M., Stepanchenko O. M., Uvarov N. V.</b> <i>EVALUATING PREDICTIONS OF THE SOIL MOISTURE MODEL WITH DATA ASSIMILATION BY THE TRIPLE COLLOCATION METHOD</i> .....	25
<b>Лук’янов П. В.</b> <i>ОСОБЛИВОСТІ ГЕНЕРАЦІЇ ВІ-ШУМУ РОТОРА ГЕЛІКОПТЕРА НА РЕЖИМІ «ВИХРОВЕ КІЛЬЦЕ»</i> .....	36

## РОЗДІЛ II. КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ

<b>Гоменюк С. І., Калюжняк А. В.</b> <i>СУЧАСНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ’ЄКТІВ У КОМП’ЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ</i> .....	45
<b>Kolesnikov V. A.</b> <i>USING BLOCKCHAIN TECHNOLOGY IN VOTING</i> .....	51

# CONTENTS

## SECTION I. APPLIED MATHEMATICS

<b>Baburov V. V., Gristchak V. Z., Hryshchak D. D., Dyachenko N. M.</b> <i>THE EFFECT OF THE VARIABILITY OF EXTERNAL PRESSURE ON THE LOCAL AND OVERALL BUCKLING LOADS FOR THE REINFORCED COMPOUND TYPE “BARREL-OGIVE” SHELL STRUCTURE WITH COMPARTMENTS OF DIFFERENT GAUSSIAN CURVATURES</i> .....	5
<b>Dmytriv K. M., Dyachenko N. M.</b> <i>COMPARATIVE ANALYSIS OF CONFORMAL CONTACT PROBLEMS OF WEARING UNDER THE POWER LAW WITH FIXED CONTACT ZONE</i> .....	14
<b>Kozhushko O. D., Boiko M. V., Kovbasa N. Yu., Martyniuk P. M., Stepanchenko O. M., Uvarov N. V.</b> <i>EVALUATING PREDICTIONS OF THE SOIL MOISTURE MODEL WITH DATA ASSIMILATION BY THE TRIPLE COLLOCATION METHOD</i> .....	25
<b>Lukianov P. V.</b> <i>PECULIARITIES OF GENERATION OF BVI-NOISE OF A HELICOPTER ROTOR IN “VORTEX RING” MODE</i> .....	36

## SECTION II. COMPUTER SCIENCES

<b>Gomenyk S. I., Kaliuzhniak A. V.</b> <i>MODERN METHODS FOR GEOMETRIC OBJECT MODELING IN COMPUTER SYSTEMS</i> .....	45
<b>Kolesnikov V. A.</b> <i>USING BLOCKCHAIN TECHNOLOGY IN VOTING</i> .....	51

# РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

UDC 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-2-01>

## THE EFFECT OF THE VARIABILITY OF EXTERNAL PRESSURE ON THE LOCAL AND OVERALL BUCKLING LOADS FOR THE REINFORCED COMPOUND TYPE “BARREL-OGIVE” SHELL STRUCTURE WITH COMPARTMENTS OF DIFFERENT GAUSSIAN CURVATURES

**Baburov V. V.**

*Head of Sector*

*State Design Bureau “Southern” named after M. K. Yangel*

*Krivorozhskaya str., 3, Dnipro, Ukraine*

*orcid.org/0000-0001-7202-5133*

*literator11@i.ua*

**Gristchak V. Z.**

*Doctor of Technical Sciences, Professor,*

*Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics*

*Zaporizhzhia National University*

*Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine*

*orcid.org/0000-0001-8685-3191*

*grk@znu.edu.ua*

**Hryshchak D. D.**

*Philosophy Doctor, Chief Technology Officer*

*“Culver Aviation”*

*Polevaya str., 21, Kiev, 01001, Ukraine*

*orcid.org/0000-0002-7382-5201*

*gristchak@gmail.com*

**Dyachenko N. M.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,*

*Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics*

*Zaporizhzhia National University*

*Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine*

*orcid.org/0000-0001-5284-4502*

*dyachenkonata69@gmail.com*

**Key words:** *buckling, critical loads, “barrel-ogive” shell design, a sign of Gaussian curvature of the middle surface, rational rigidity of circular reinforcements.*

The problem of the stability of the compound shell design with the middle surface meridian of various shapes under the simultaneous effect of variable distributed external pressure and axial stretching-compression is analyzed using numerical approach. The “barrel-ogive” type structures introduced in the previous papers is generalized in the case of the presence of a negative Gaussian curvature sign on one of its compartments. The impact on the reinforced by discretely distributed circular ribs compound system under the external pressure of various configurations is studied.

The solution is based on the use of the finite differences method with respect to the resolution equations for each compartment under the conditions of

interfacing sections through the docking rib. The impact on the stability of the of the sign Gaussian curvature of the system under study, the laws of the external pressure distribution on the longitudinal coordinate and axial loads, taking into account the stiffness of the intermediate rib from the plane of the initial curvature are analyzed. Particular attention is paid to the analysis of the external load influence on the effects of the interaction between local and overall buckling modes with the determination of the stability of the compound shell structure under combined load. The proposed algorithm for visualization of the deformation character for the shell design allows for local and general buckling mode analysis, compound shell structure “barrel-ogive” generalized type structures, to conclude its rational characteristics with identifying potentially hazardous areas of destruction.

## **ЕФЕКТ ВПЛИВУ ЗМІННОСТІ ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ НА ЛОКАЛЬНІ І ЗАГАЛЬНІ КРИТИЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ ПІДКРІПЛЕНОЇ СКЛАДЕНОЇ ТИПУ «БОЧКА-ОЖИВАЛО» ОБОЛОНКОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ З ВІДСІКАМИ РІЗНОЇ ГАУСОВОЇ КРИВИЗНИ**

**Бабуров В. В.**

*начальник сектору*

*Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» імені М. К. Янгеля»*

*вул. Криворізька, 3, Дніпро, Україна*

*orcid.org/0000-0001-7202-5133*

*literator11@i.ua*

**Гришак В. З.**

*доктор технічних наук, професор,*

*професор кафедри фундаментальної та прикладної математики*

*Запорізький національний університет*

*orcid.org/0000-0001-8685-3191*

*grk@znu.edu.ua*

**Гришак Д. Д.**

*кандидат фізико-математичних наук, технічний директор*

*«Culver Aviation»*

*вул. Польова, 21, Київ, 01001, Україна*

*orcid.org/0000-0002-7382-5201*

*gristchak@gmail.com*

**Д'яченко Н. М.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,*

*доцент кафедри фундаментальної і прикладної математики*

*Запорізький національний університет*

*вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна*

*orcid.org/0000-0001-5284-4502*

*dyachenkonata69@gmail.com*

**Ключові слова:** *випинання, критичні навантаження, 'бочка-оживало' оболонкова конструкція, знак Гаусової кривизни серединної поверхні, раціональна жорсткість кругових підкріплень.*

На основі запропонованого чисельного підходу надається аналіз стійкості складеної оболонкової конструкції з меридіаном серединної поверхні різної форми, що знаходиться під одночасною дією нерівномірно розподіленого зовнішнього тиску і осьового розтягування-стискання. Введений у попередніх роботах вид конструкцій типу 'бочка-оживало' узагальнений на випадок наявності від'ємного знаку Гаусової кривизни на одному з її відсіків. Вивчена дія на підкріплену

дискретно розподіленими шпангоутами оболонкову систему нерівномірного зовнішнього тиску при наявності осьових зусиль.

Розв'язання базується на застосуванні методу скінченних різниць по відношенню до основних диференціальних рівнянь деформування для кожного відсіку за умов сполучення секцій через стикувальний шпангоут. Досліджується вплив на стійкість конструкції параметрів Гаусової кривизни серединної поверхні досліджуваної системи, законів розподілу зовнішнього тиску за повздовжньою координатою і осьових зусиль з урахуванням жорсткості проміжного шпангоута з площини початкової кривизни.

Особлива увага зосереджена на аналізі впливу характеру зовнішнього навантаження на ефекти взаємодії локальних і загальних форм випинання з визначенням стійкості складеної оболонкової конструкції при комбінованому навантаженні.

Запропонований алгоритм візуалізації характеру деформації оболонкової конструкції дозволяє провести аналіз локальних і загальних форм випинання, зробити висновок про її раціональні характеристики з точки зору стійкості складеної оболонкової конструкції узагальненого типу 'бочка-оживало' з виявленням потенційно небезпечних зон руйнування.

## Introduction

The stability study of thin shell designs is dictated by the needs and development of modern engineering, instrument making, chemical industry, aviation, rocket and space technology. The choice of effective forms of shell structures and reinforcing elements depends on specific operating conditions, in particular, on the nature of aerodynamic loading, combining external loads [1; 2] and represents a relevant problem when choosing rational geometric and rigidity characteristics of the designed systems for new techniques. A significant part of theoretical and experimental studies is aimed at compound shell structures, 'cylinder-cone' type, of zero Gaussian curvature for the middle surface [3; 4].

The initial imperfections of the middle surface, or its deviations from classical one, can lead to significant influence on the values of critical loads [5–10]. Thus, in the papers [5; 6] the effect of sign Gaussian curvature of the middle surface on the stability of individual sections of the compound shell structure and axial loading on the value of critical pressure are investigated. To buckling problem of the shell structures for negative Gaussian curvature are devoted [9; 10].

As the analysis of the current state of the problem under study shows, the variability of external pressure on the coordinate may in some cases significantly affect for stability of the shell design [11–14]. The influence of discretely located circular ribs on the stability of the shell structures is considered in [4; 5; 6], where, in particular, the problem of rational choice of their rigidity parameters was investigated.

It should be noted that the analysis of the buckling modes of the compound shell design, the detection of the zones of the largest deflection are contributed to an algorithms of computer visualization of the release process, which is dedicated to monograph [14].

The purpose of this paper is to study the effects of the variability influence of external pressure on the local and overall critical loads of the reinforced compound type "barrel-ogive" shell structure, taking

into account axial loading and the sign of the Gaussian curvature of the middle surface compartments with visualizing the buckling modes structure under combined loading.

### 1. Setting the problem and resolution equations.

Following [5; 6], a compound shell construction consisting of sections in which the deviation from the ideal shape of the forming (cylinder and cone) has a sinusoidal shape. Holding to the terminology introduced in these papers in the case of convexity of the compartments, which corresponds to the positive direction of the Gaussian curvature of the middle surface, will be called the shell of the 'barrel' or 'ogive' compartments, respectively. In the case of negative curvature of the meridian, the terms with the prefix 'pseudo' ('pseudo-barrel' or 'pseudo-ogive') are introduced. The compound shell structure of a constant thickness  $h$ , a module of the elasticity  $E$  of the material and the coefficient of Poisson  $\nu$  is investigated. In accordance with the theory of gentle shells of 'medium length' [15; 16], a restriction is imposed on the geometry of the design, according to which the relative height of deviations from the cylinder and the cone is less than one fifth of the smallest linear size.

In the elastic area of material deformation, compound shell structure is under the influence of variable external pressure

$$q(x) = q_0 \cdot f(x), \quad (1)$$

where  $f(x)$  – is smooth function, and axial forces  $T$  (compressing or tensile).

At the same time, it is assumed to the prevailing effect of external pressure in relation to axial compression, which leads to such buckling forms that correspond to the formation of one half-wave in the longitudinal direction and  $n$  waves in the circumferential and  $n^2 \gg 1$  [15].

Through  $\bar{s}$  and  $s$  referred to the coordinates along the forming cylindrical and conical surfaces, respectively,  $y$  – the arc coordinates for the cylinder,  $\varphi$  – the angular coordinate along the cone parallel. The middle surface of each section



of the shell design is the surface of rotation with the following functions of the radius of the parallel circle in the section, perpendicular to the axis of rotation [5; 6]:

1) for a “generalized barrel” compartment:

$$r = R \left( 1 + C_{bar} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \right), \quad (2)$$

where  $L$  – the distance between the bases  $R$  – the radius of the base of the section,  $C_{bar}$  – is the relative deviation of the shell forming from the cylinder;

2) for “generalized ogive” section:

$$r = \cos \alpha \left[ s + C_{og} l_1 \sin \frac{\pi (s - l_0)}{l_1 - l_0} \right], \quad (3)$$

where  $l_0$  and  $l_1$  – the distances along the axis to the smaller and larger base,  $\alpha$  – is the angle of the taper,  $C_{og}$  – the relative deviation of the shell forming from the cone.

Restrictions on the parameters of the shells and, based on equations (2) and (3), the approximate values of the radii of the main curvature were obtained [5]:

3) for a “generalized barrel” compartment:

$$\tilde{R}_1 = -\frac{(1 + (r')^2)^{3/2}}{r''} \approx \frac{L^2}{RC_{bar}\pi^2 \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}},$$

$$\tilde{R}_2 = r \sqrt{1 + (r')^2} \approx R \left( 1 + C_{bar} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \right), \quad (4)$$

4) for a “generalized ogive” compartment:

$$\tilde{R}_1 \approx \frac{(l_1 - l_0)^2}{C_{og} l_1 \pi^2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \Omega}, \quad \tilde{R}_2 \approx \text{ctg } \alpha (s + C_{og} l_1 \sin \Omega), \quad (5)$$

signs of  $C_{bar}$  and  $C_{og}$  determine the sign of Gaussian curvature of the middle surface  $\kappa = 1/(R_1 R_2)$  of the corresponding design compartment.

Allowing differential equations of the main stress-strain state relative to the deflection functions for each composite design compartment obtained in [5]:

$$a_4(\bar{x}) W_{bar}^{IV}(\bar{x}) + a_3(\bar{x}) W_{bar}'''(\bar{x}) + a_2(\bar{x}) W_{bar}''(\bar{x}) + a_1(\bar{x}) W_{bar}'(\bar{x}) + a_0(\bar{x}) W_{bar}(\bar{x}) = 0 \quad (6)$$

$$b_4(x) W_{og}^{IV}(x) + b_3(x) W_{og}'''(x) + b_2(x) W_{og}''(x) + b_1(x) W_{og}'(x) + b_0(x) W_{og}(x) = 0 \quad (7)$$

where  $\bar{x} = \bar{s}/L$ ,  $x = s/l_1$  and variable the coefficients  $a_i(\bar{x})$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $b_j(x)$ ,  $j = \overline{1, 4}$  of equations depend on the geometric characteristics of the shells and external loads. Equations (6) and (7) are suitable for study on the stability of the shell design under the action of variable pressure, taking into account the axial loading, for which the substitution is necessary in equation (6) and (7) of functions  $q(x)$  in the form (1). The features for the finite difference method to the equations (6), (7) solution and the initial parameter method in matrix form for taking into account the discreteness of the intermediate circular ribs, in particular, the docking one, are formulated as well.

At the same time there are conditions:

$$W_{og}(1) = W_{bar}(0), \quad W'_{og}(1) = W'_{bar}(0), \quad (8)$$

$$W''_{og}(1) + G_2^* W'_{og}(1) = W''_{bar}(0), \quad W'''_{og}(1) - G_1^* W_{og}(1) = W'''_{bar}(0), \quad (9)$$

where  $G_1^*$  and  $G_2^*$  – the dimensionless parameters of the rigidity of the splits, respectively, in the plane and from the initial curvature plane.

The condition of conjugation of the generalized “ogive” and “barrel” -shaped sections are determined by the equality of tilt tangent the angles  $\beta$  to the middle meridians of the sections, so the location of the docking splint can be considered locally conical. In this regard, the rigidity of the rib are determined by formulas:

$$G_1^* = G_1 \frac{1}{\cos^3 \beta}, \quad G_2^* = G_2 \frac{1}{\cos \beta}; \quad (10)$$

$$G_1 = \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 (EJ)_x^{ring}}{Eh R^3}, \quad G_2 = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 (EJ)_z^{ring}}{Eh R^3 (n^2 + 1)}. \quad (11)$$

In the study of the construction of the cylinder cone, we will follow the idea to paper [4], where the docking rib was divided into two parts corresponding to its cylindrical and conical component, as a result of which rigidity was taken into account in the form

$$G_{cyl,1} = \frac{G_1}{2}, \quad G_{cyl,2} = \frac{G_2}{2}; \quad G_{cone,1} = \frac{G_1}{2} \frac{1}{\cos^3 \alpha},$$

$$G_{cone,2} = \frac{G_1}{2} \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (12)$$

At the same time, the conditions of the conjugation (8) through the spline were preserved, and the conditions (9) were presented in the form

$$W''_{og}(1) + G_{cone,2} W'_{og}(1) = W''_{bar}(0) + G_{cyl,2} W'_{bar}(0),$$

$$W'''_{og}(1) - G_{cone,1} W_{og}(1) = W'''_{bar}(0) + G_{cyl,1} W_{bar}(0), \quad (13)$$

In the case of the design ‘cylinder-cone’ we obtain

$$W_{bar} = W_{cyl}, \quad W_{og} = W_{cone}. \quad (14)$$

**2. Numerical results analysis for the compound structure.** For the estimated implementation, the compound shell design with the characteristics is selected:  $h = 0,3$  cm,  $E = 7 \cdot 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\nu = 0,32$ . The values  $l_1 = 182$  cm, and  $L = 2,5R$  for “generalized ogive” and “generalized barrel” shaped compartments respectively are accepted. Calculations were carried out for the case of boundary conditions corresponding to the hinge support of the ends of the compound structure.

The dimensionless load parameters (axial loading and external pressure) are introduced:

$$T^* = \frac{T}{Eh^2}, \quad q^* = \frac{q_0}{q_{cyl}}. \quad (15)$$

where  $q_{cyl}$  is the classic value of critical pressure for the cylindrical shell [8]:

$$q_{classic, cyl} = 0,92 E \left( \frac{h}{R} \right)^{5/2} \frac{R}{L}. \quad (16)$$



**2.1. The calculated parameters of the compound design for variable distribution of external pressure.** Calculations were carried out for the parameters of the shell  $l_0 = 0,45 l_1$ ,  $\alpha = 75^\circ$ , the rigidity parameters of the docking splint are  $G_1 = 5000$ ,  $G_2 = 10$ .

At the same time, two types of variable external pressure distribution are considered: according to the linear law along the axial coordinate and nonlinear one. We introduce an auxiliary function specifying external pressure having a distribution of the same intensity:

$$f(x) = \frac{\left(2 - \frac{l_0}{l_1}\right) f_1(x)}{\int_{l_0/l_1}^2 f_1(x) dx}, \quad x \in \left[\frac{l_0}{l_1}, 2\right]. \quad (17)$$

For a linear law, functions  $f_1(x) = x$  and  $f_1(x) = 2 - cx$  (here  $c$  – the parameter of the linear function) are selected.

For the nonlinear function it is accepted formulas:

$$f_1(x) = \frac{F_1(x)}{\max_{[l_0/l_1; 2]} F_1(x)} + \frac{F_2(x)}{\max_{[l_0/l_1; 2]} F_2(x)};$$

$$F_1(x) = \frac{x}{C_1 \left( x - \left( \frac{l_0}{l_1} + \frac{l_1 - l_0}{l_1} x_1 \right) \right)^{2s} + 1},$$

$$F_2(x) = \frac{C_3 \cdot x}{C_2 \left( x - \left( \frac{l_1 + l_0}{l_1} + \frac{l_1 - l_0}{l_1} x_2 \right) \right)^{2s} + 1} \quad (18)$$

where  $C_1, C_2 > 0$  – quite large function parameters;  $C_3 \in [0, 1]$ ;  $s = 1, 2, \dots$

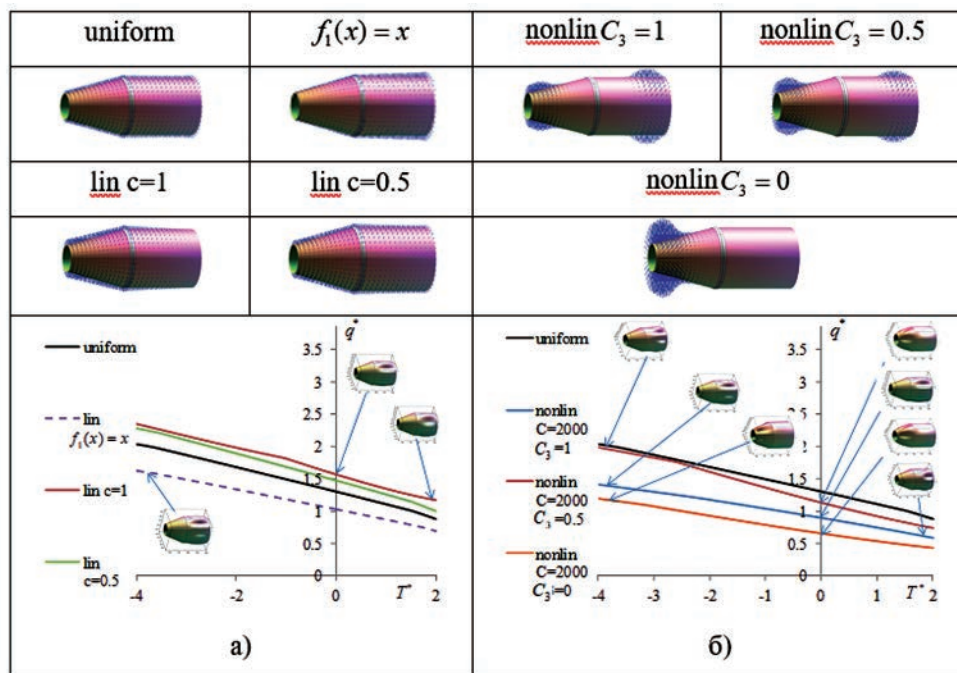
The auxiliary function  $f(x)$  in calculations is used to determine the calculated functions on the generalized ‘barrel’ and ‘ogive’ compartments in their own dimensionless coordinates:

$$f_{bar}(\bar{x}) = f(\bar{x} + 1), \quad \bar{x} \in [0; 1]; \quad f_{og}(x) = f(x), \quad x \in \left[\frac{l_0}{l_1}; 1\right]. \quad (19)$$

**2.2. The effect of variable distribution of external pressure on the ‘cylinder-cone’ design stability under combine loading.** The dependences  $q^*$  on  $T^*$  for the ‘cylinder-cone’ structure on parameters  $l_0 = 0,45 l_1$ ,  $\alpha = 75^\circ$ , and  $G_1 = 5000$ ,  $G_2 = 10$  (docking rib rigidity) under the action of axial loading and variable distributed external pressure along every compartment with visualization of the buckling modes are shown on fig. 1 (1(a)-linear and 1(b)-nonlinear laws).

It is necessary to note that in contrast to the results obtained for the conical three-layer shell in paper [14], where a minor effect was found on the stability of the linear distribution of external pressure  $f_1(x) = 2 - cx$ , for the investigated compound designs, the influence of the linear law was significant and leads to increasing and to a decrease in critical pressure depending on the structure parameters.

Dependencies in fig. 1 for the “cylinder-cone” design demonstrate the deviation of the values of the critical pressure to 20% with respect to the case of uniform pressure (in the considered range of loads and the parameters of the shells). In this case, the external pressure distributed in accordance with the functions  $f_1(x) = x$  and  $f_1(x) = 2 - cx$  leads to decreasing and increasing critical pressure respectively.



**Fig. 1. The dependences  $q^*$  on  $T^*$  for the compound ‘cylinder-cone’ structure**

Analysis of critical loads and visualization of the nature of wave-formation of the studied compound design showed that the linear distribution of external pressure changes only into the number of waves in the circumferential direction, ranging from  $n=5$  to  $n=8$ , depending on the external pressure distribution functions and axial loading, in corresponding to formulated approach investigation.

The nonlinear law of the distribution of external pressure on the ‘cylinder-cone’ design gives more significant deviations both in the values of buckling pressures (up to 42%) and in post critical wave formation surface.

It is necessary to note, that in fig. 1 b) calculated parameters of the function of non-linear external pressure with two in the same height of bursts on the ‘‘cylinder’’ and ‘‘cone’’ (which corresponds to  $C_3 = 1$ ) give a decrease in critical pressure to 31% compared with evenly distributed.

In the case of a nonlinear distribution of pressure with amplitude on the ‘‘cone’’ two times greater than on the ‘‘cylinder’’ (here  $C_3 = 0.5$ ), a relatively small deviation is observed in the value of the critical pressure (up to 15%) with respect to uniformly distributed external pressure. In the range of changes in the axial force  $T^*$  from  $-2,7$  to  $2$ , the crest of the buckling wave is placed on the conical compartment, while  $n = 5$ . At  $T^* < -2,7$  the wave number increases to  $n = 9$  and the crest of the wave shifts to the cylindrical compartment.

2.3. The influence of the linear laws distribution of external pressure on the buckling structure with nonzero curvature compartments. The dependences  $q^*(T^*)$  for

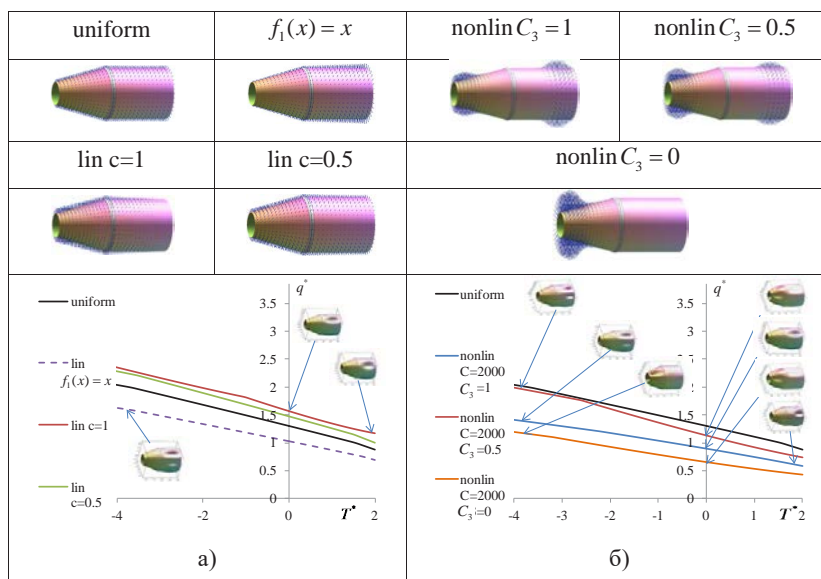
compartments with various combinations of curvature signs of middle meridians are shown in fig. 2:

- 1) in Fig. 2 (a) considered the design ‘barrel-pseudo-ogive’ for
- 2)  $C_{bar} = 0.25, C_{og} = -0.03019235707$ ;
- 3) in Fig. 2 (b) – ‘barrel – ogive’ for
- a.  $C_{bar} = 0.137, C_{og} = 0.06258642604$ ;
- 4) in Fig. 2 (c) – ‘pseudo-barrel-ogive’ for
- 5)  $C_{bar} = -0.07, C_{og} = 0.2325440198$ .

Analyzing the values of critical pressures with a linear distribution of external pressure (fig. 2), it can be concluded that in the case of a compressive force, the convex shell leads more efficiently. When tensile designs, the structure with negative values of Gaussian curvature on one of the compartments is more efficient than the ‘barrel-ogive’ shell structure.

The designs with a negative curvature on one of the compartments demonstrate sharp changes in behavior, which is characterized by a jump-shaking absolute increase in the wave number  $n$  (flow of dependence curve  $q^*(T^*)$ ) and with a sharp change in the form of wave formation. Although the considered design ‘barrel – ogive’ mainly has predictable behavior when tensile-compression with a gradually changing wave number  $n$  in redistribution from 9 to 12, however, at  $c = 1$ , a similar situation with buckling modes appears as in the case of the presence of negative curvature on one of the compartments.

Buckling modes for a convex structure selected from the condition of equal resistance at uniform pressure and the corresponding axial force (fig. 2 (b)) are considered. The most striking change in the post-buckling form of a shell during compression gives a shift of the maximum value of a linearly distributed external pressure toward the ‘‘generalized barrel’’ ( $f_1(x) = x$ ) compartment. In this



**Fig. 2. Dependences  $q^*(T^*)$  for compartments with various combinations of curvature signs of middle meridians**

case the crest of the buckling form replace to the end of the “barrel” compartment. Stretching results in a more uniformly distributed waveform located along the barrel-shaped section. In this case, the wave transition to the conical part does not occur for this design.

The linear distribution of external pressure, built on the basis of a function  $f_1(x) = 2 - cx$ , for a parameter  $c = 0.5$  gives similar patterns in wave formation, as with uniform external pressure, but with a shift of similar forms towards stretching. For  $c = 1$ : in the case of the axial force  $T^* > -1$ , the crest of the waves is distributed near the rib with a greater or less degree of localization near the rib, already when  $T^* < -2$  the comb is placed on the “barrel” with the capture of the rib and the “ogive” small part. For the  $c = 0.5$  wave formation parameter with the arrangement of the crest of the wave of the release on the “ogive” compartment was not detected.

If  $c = 1$  and the axial load parameter  $T^* > -1$ , the crest of the wave is visualized in the spangling area. If parameter  $T^* \in (-3.3; -1.2)$ , the comb is shifted toward the “ogive” compartment. In these cases, the wave number  $n$  is equal to 9 or 10. A further increasing of the axial compression leads to a sharp changing in the wave number to a value  $n = 12$  and the crest of the wave moves to the “barrel-shaped” compartment.

2.4 The influence of external pressure nonlinear distribution for the compound design with a nonzero middle surface compartment curvature. The effect of the parameters  $C_1, C_2$  distribution function of the nonlinear law of external pressure with equal values of the maximum pressure ( $C_3 = 1$ ) on the value of the critical pressure for “generalized barrel-ogive” structure was studied.

Calculations for parameters  $l_0 = 0,45 l_1, \alpha = 75^\circ, G_1 = 5000, G_2 = 10$ . For the first step choose  $x_1 = 0,05; x_2 = 0,6; s = 2, C_2 = C_1 = C$ . The dependences  $q^*$  on  $T^*$  for the shells of various shape combinations of the “generalized barrel-ogive structure” are shown in fig. 3:

– in Fig. 3 (a) considered the ‘barrel-pseudo-ogive’ design for

$$C_{bar} = 0.25, C_{og} = -0.03019235707;$$

– in Fig. 3 (b) – ‘barrel – ogive’ design for

$$C_{bar} = 0.137, C_{og} = 0.06258642604;$$

– in fig. 3 (c) – ‘pseudo-barrel-ogive’ design for

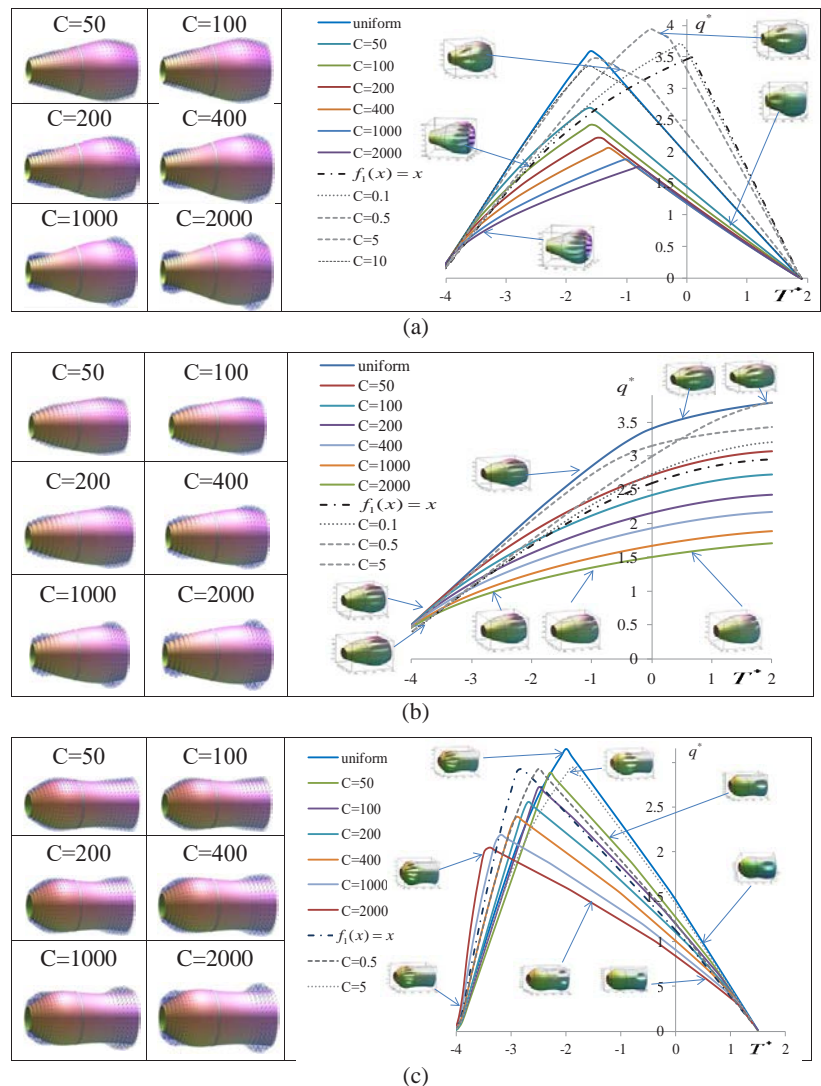
$$C_{bar} = -0.07, C_{og} = 0.2325440198.$$

For the nonlinear distribution parameters of external pressure  $x_1 = 0,1; x_2 = 0,9; s = 1, C_2 = C_1 = C$  the parameters of the shell  $l_0 = 0,45 l_1, \alpha = 75^\circ, C_{bar} = 0,25, C_{og} = -0.03019235707$  (“barrel-pseudo-ogive”) and the rigidity of the docking rib  $G_1 = 5000, G_2 = 10$ . The dependence  $q^*$  on  $T^*$  for the various values of the parameter  $C$  of given nonlinear law shown in fig. 4.

A distinctive feature of the external pressure distribution by laws corresponding to fig. 4 with parameters  $C = 1000, C = 2000$  is its approach to the effects of localized external pressure.

**Conclusions**

1. The buckling problem for the compound shell structure with deviation compartments from the cylinder (“generalized barrel”) and the cone (“generalized ogive”), in particularly, with



**Fig. 3. The dependences  $q^*$  on  $T^*$  for the compartments of various shape combinations of the “generalized barrel-ogive” structure**



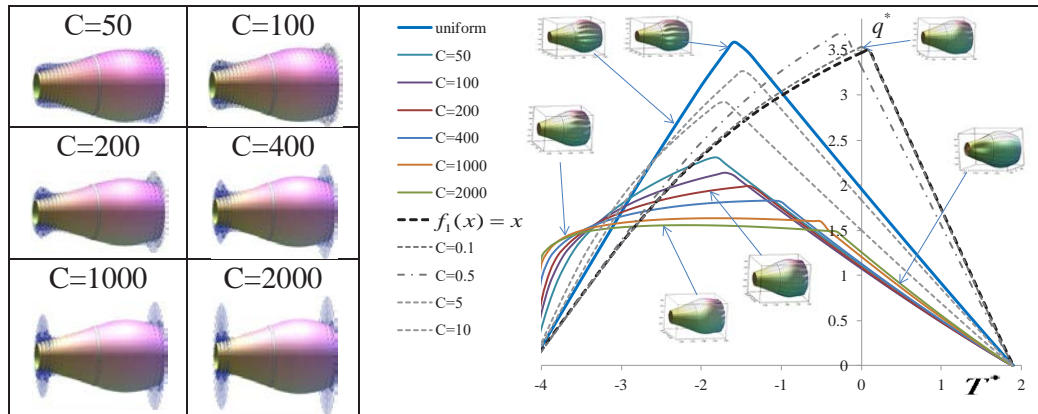


Fig. 4. Critical loads dependences for the different parameters C

different signs of curvature of the middle meridians is discussed. An analysis of the influence of Gaussian curvature of the middle surface of the design for stability under combined loading was carried out with implementation of buckling modes visualization for various parameters of the structure geometry and the functions of the external pressure distribution.

2. Two type laws (linear and non-linear) identical intensity of variable distribution of external pressure are investigated. It is shown that in the case of axial compressing is more effective is a “convex” compound

structure, and in tension –“convex-concave” structure. At exposed to the design of non-linear external pressure distribution with one maximum on the ‘ogive’ more efficiently from the point of view stability is the ‘barrel-pseudo-ogive’ design.

3. A nonlinear distribution of external pressure in some cases leads to situation when the wave of the bulking has a significant displacement to one of the ends. The smoothing of the buckling wave, necessary from a technological point of view, when designing a real structure, possibly by changing the curvature parameters of the middle surface meridian.

#### BIBLIOGRAPHY

- Schmidt H. (2018). Two decades of research on the stability of steel shell structures at the University of Essen (1985–2005): Experiments, evaluations, and impact on design standards. *Advances in Structural Engineering*. Vol. 21 (16), pp. 2364–2392. URL: <https://doi.org/10.1177/1369433218756273>.
- Ifayefunmi O. (2014). A survey of buckling of conical shells subjected to axial compression and external pressure. *Journal of Engineering Science and Technology Review*. Vol. 7(2), pp. 182–189.
- Teng J. G., Barbagallo M. (1997). Shell restraint to ring buckling at cone-cylinder intersections. *Engineering Structures*. Vol. 19 (6), pp. 425–431. URL: [https://doi.org/10.1016/s0141-0296\(96\)00087-9](https://doi.org/10.1016/s0141-0296(96)00087-9).
- Дегтяренко П.Г., Грищак В.З., Грищак Д.Д., Дьяченко Н.Н. (2019) К проблеме равноустойчивости подкрепленной оболочечной конструкции при комбинированном нагружении. *Космическая наука и технология*. Т. 25, № 6(121). С. 3–14. URL: <https://doi.org/10.15407/knit2019.06.003>.
- Gristchak V., Hryshchak D., Dyachenko N., Degtiarenko P. (2020) Stability and rational design of the ‘barrel-ogive’ type strengthened shell structures under combined loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Vol. 4, no. 7(106), pp. 6–15. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.209228>.
- Gristchak V.Z., Dyachenko N.M. (2020) Axial force effect on the overall buckling of a compound reinforced shell structure with the positive gaussian curvature at an external pressure. In collective monograph: O. V. Choporova ets. *Mathematical and computer modelling of engineering systems* / In edition by V. S. Hudramovich. Riga, Latvia : “Baltija Publishing”, pp. 35–49. URL: <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-019-3-3>.
- Iqbal M. A., Tiwari G., Gupta P. K. (2016). Energy dissipation in thin metallic shells under projectile impact. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. Vol. 59, pp. 37–57. URL: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.03.004>.
- Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва : Наука, 1976. 984 с.
- Boriseiko A. V., Zhukova N. B., Semenyuk N. P. & Trach V. M. (2010) Stability of anisotropic shells of revolution of positive or negative Gaussian curvature. *International Applied Mechanics*. Vol. 46, pp. 269–278.
- Mars J., Koubaa S., Wali M. and Dammak F. (2017) Numerical Analysis of Geometrically Non-Linear Behavior of Functionally Graded Shells. *Lat. Am. J. Solids Struct. Rio de Janeiro*. Vol. 14(11), pp. 1847–1873. Doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78253914>.

11. Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г. Устойчивость оболочек при несимметричном деформировании. Москва : Наука, 1988. 208 p.
12. Blachat J., Ifayefunmi O., Corfa M. (2011). Collapse and Buckling of Conical Shells. *Proceedings of the Twenty-first (2011) International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)*. Maui, Hawaii, USA, pp. 887–893.
13. Антоненко Э.В., Шульга Т.Э. Математические модели потери устойчивости неоднородных цилиндрических оболочек от неравномерной радиальной нагрузки. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2009. Т. 9(3). С. 79–83.
14. Грищак Д.В. Комп'ютерна алгебра у розв'язанні прикладних задач механіки конструкцій зі змінними параметрами: монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2020. 218 с.
15. Преображенский И.Н., Грищак В.З. Устойчивость и колебания конических оболочек. Москва : Машиностроение, 1986. 240 с.
16. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. Москва : Высш. школа, 1972. 296 с.

#### REFERENCES

1. Schmidt H. (2018). Two decades of research on the stability of steel shell structures at the University of Essen (1985–2005): Experiments, evaluations, and impact on design standards. *Advances in Structural Engineering*. Vol. 21 (16), pp. 2364–2392. Doi: <https://doi.org/10.1177/1369433218756273>
2. Ifayefunmi O. (2014). A survey of buckling of conical shells subjected to axial compression and external pressure. *Journal of Engineering Science and Technology Review*. Vol. 7(2), pp. 182–189.
3. Teng J. G., Barbagallo M. (1997). Shell restraint to ring buckling at cone-cylinder intersections. *Engineering Structures*. Vol. 19 (6), pp. 425–431. Doi: [https://doi.org/10.1016/s0141-0296\(96\)00087-9](https://doi.org/10.1016/s0141-0296(96)00087-9).
4. Degtyarenko P. G., Grishchak V. Z., Grishchak D. D., Dyachenko, N. M. (2019). To equistability problem of the reinforced shell structure under combined loading. *Space Science and Technology*, 25 (6 (121)), pp. 3–14. Doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.06.003> / [in Russian].
5. Gristchak V., Hryshchak D., Dyachenko N., Degtiarenko P. (2020) Stability and rational design of the ‘barrel-ogive’ type strengthened shell structures under combined loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Vol. 4, no. 7(106), pp. 6-15. Doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.209228>
6. Gristchak V.Z., Dyachenko N.M. (2020) Axial force effect on the overall buckling of a compound reinforced shell structure with the positive gaussian curvature at an external pressure. In collective monograph: O. V. Choporova ets. *Mathematical and computer modelling of engineering systems* / In edition by V. S. Hudramovich. Riga, Latvia : “Baltija Publishing”, pp. 35-49. Doi: <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-019-3-3>
7. Iqbal M. A., Tiwari G., Gupta P. K. (2016). Energy dissipation in thin metallic shells under projectile impact. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. Vol. 59, pp. 37–57. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.03.004>
8. Volmir A. S. (1967) Stability of deformable systems. Moscow: Nauka, 984 p. [in Russian].
9. Boriseiko A. V., Zhukova N. B., Semenyuk N. P. & Trach V. M. (2010) Stability of anisotropic shells of revolution of positive or negative Gaussian curvature. *International Applied Mechanics*. Vol. 46, pp.269–278
10. Mars J., Koubaa S., Wali M. and Dammak F. (2017) Numerical Analysis of Geometrically Non-Linear Behavior of Functionally Graded Shells. *Lat. Am. J. Solids Struct. Rio de Janeiro*. Vol. 14(11), pp. 1847-1873. Doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78253914>.
11. Andreyev L.V., Obodan N.I., Lebedev A.G. (1988). Stability of shells under nonaxisymmetric deformation. M. : Nauka, 208 p. [in Russian].
12. Blachat J., Ifayefunmi O., Corfa M. (2011). Collapse and Buckling of Conical Shells. *Proceedings of the Twenty-first (2011) International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)*. Maui, Hawaii, USA, pp. 887-893.
13. Antonenko E. V., Shulga T. E. (2009). Mathematical Models of Stability Loss of Nonuniform Cylindrical Shells Because of Nonuniform Radial Loading. *Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 9(3), pp. 79-83 [in Russian].
14. Hryshchak D.V. (2020) Application of computer algebra to the solution of applied problems of mechanics of structures with variable parameters: monograph. Kherson: Helvetica Publishing House, 218 p. [in Ukrainian].
15. Preobrazhenskii I. N. And Gristchak V. Z. (1986) Ustoychivost' i kolebaniya konicheskikh obolochek [Stability and oscillations of conical shells]. M. : Mashinostroenie. 240p. [in Russian].
16. Kolkunov, N. V. (1972) Osnovy rascheta uprugih obolochek [Calculation fundamentals of of elastic shells]. M. : Vyssh. Shkola. 296 p. [in Russian].

## ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ КОНФОРМНИХ ПЛОСКИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ПРО ЗНОШУВАННЯ ЗА СТЕПЕНЕВИМ ЗАКОНОМ ПРИ ФІКСОВАНІЙ ПЛОЩАДЦІ КОНТАКТУ

**Дмитрів К. М.**

*аспірант кафедри фундаментальної і прикладної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0001-7259-7510](https://orcid.org/0000-0001-7259-7510)  
[c.dmitrova@gmail.com](mailto:c.dmitrova@gmail.com)*

**Д'яченко Н. М.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри фундаментальної і прикладної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0001-5284-4502](https://orcid.org/0000-0001-5284-4502)  
[dyachenkonata69@gmail.com](mailto:dyachenkonata69@gmail.com)*

**Ключові слова:** *плоска зносоконтактна задача, степеневий закон зношування, штамп з плоскою підшовою, конформний контакт, швидко осцилююча функція форми підшови штампа, метод редукції.*

Зношування – це процес часткового або повного видалення матеріалу з поверхні тертя внаслідок її руйнування, який призводить до поступової зміни форми і розмірів тіл, що взаємодіють. Закон зношування виражає, зокрема, залежність швидкості зношування від тиску, яка може бути лінійною або степеневою.

У роботі розглянуто плоску контактну задачу про зношування за степеневим законом тонкої пружної смуги при ковзанні по ній штампа. Розглянуто два випадки. Випадок 1: штамп має плоску підшову та випадок 2: конформний контакт смуги і штампа з підшовою, форма якої визначається швидко осцилюючою тригонометричною функцією. При цьому область контакту є фіксованою. Для розв'язання поставленої задачі застосовується покроковий за часом метод. На кожному часовому кроці систему інтегральних рівнянь, що моделює дану задачу, зведено до операторного рівняння Фредгольма другого роду, яке має єдиний розв'язок, котрий можна знайти методом послідовних наближень. Для випадку 1 отримано аналітичний і чисельний розв'язки, у випадку 2 – лише чисельний. Аналітичний розв'язок подано степеневим рядом з невідомими коефіцієнтами, які можна знайти з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Наближено аналітичний розв'язок знайдено за допомогою методу редукції. Чисельне розв'язання передбачає заміну інтегрального рівняння системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно дискретних значень функції контактного тиску. Отримано висновок про ефективність наближено аналітичного підходу розв'язання над чисельним для випадку 1 і неефективність – у випадку 2.

Проведено аналіз числових результатів. Зокрема, у випадку 2 конформного контакту розподіл контактного тиску в кожний момент часу характеризується функцією, локальні екстремуми якої протилежні екстремумам функції, що визначає форму штампа. Порівняльний аналіз зносоконтактних характеристик у двох випадках показав їх узгодженість. Результати даної роботи підтверджують, що процес зношування в обох розглянутих випадках можна умовно поділити на дві стадії: стадію припрацювання та стадію сталого зносу, що було зазначено в роботах І.Г. Горячевої.

Вплив степеневого закону зношування характеризується сповільненням процесу зношування у порівнянні з лінійним законом.

## COMPARATIVE ANALYSIS OF CONFORMAL CONTACT PROBLEMS OF WEARING UNDER THE POWER LAW WITH FIXED CONTACT ZONE

**Dmytriv K. M.**

*Postgraduate Student at the Department of Fundamental and Applied Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-7259-7510  
c.dmitrova@gmail.com*

**Dyachenko N. M.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-5284-4502  
dyachenkonata69@gmail.com*

**Key words:** *a flat wear contact problem, the power law of wear, stamp with a flat bottom, conformal contact, a fast oscillating function of stamp bottom shape, reduction method.*

Wear is the process of partial or complete removal of material from the friction surface due to its destruction, which leads to a gradual change in the shape and size of the interacting units. The wear law displays how the wear rate depends on pressure, which can be linear or power.

In the paper, the flat contact problem of wearing a thin elastic strip when a stamp slides on it under the power law is considered. There are two cases. Case 1: the stamp has a flat bottom; case 2: conformal contact of the strip and the stamp, the bottom shape of which is determined by the fast oscillating trigonometric function. The contact area is fixed. To solve this problem a step-by-step method in time is used. At each time step, the system of integral equations modeling this problem is reduced to the Fredholm operator equation of the second kind, which has a single solution that can be found by the iteration method. For case 1, analytical and numerical solutions are obtained in case 2 – only numerical. The analytical solution is represented by a power series with unknown coefficients, which can be found from an infinite system of linear algebraic equations. The approximate analytical solution is found by using the reduction method. The numerical solution is found by replacing the integral equation with a system of linear algebraic equations, in which discrete values of the contact pressure function are unknown. As a result, the approximate analytical approach is more efficient than the numerical one for case 1 and less efficient for case 2.

The analysis of numerical results is carried out. Therefore, in case 2 the contact pressure distribution at each time point is described by a function, which local extremes are opposite to the extremes of the function that determines the shape of the stamp. Comparative analysis of wear contact characteristics in two cases shows their consistency.

The results of the paper confirm that the wear process in both cases can be divided into two stages: the stage of running-in and the stage of steady-state wear, which was mentioned in I. G. Goryacheva's researches.

The influence of wearing under the power law is characterized by a slowing down of the wear process compared to the linear law.



**Вступ.** Одним з актуальних питань сучасного машинобудування є збільшення терміну служби машин, обладнання, приладів та підвищення їх надійності. Успішному вирішенню даної проблеми сприяють ґрунтовні наукові дослідження у галузі трибології та її інженерних додатків.

На довговічність машин впливає їх міцність, зносостійкість і жорсткість. При цьому зношування є одним з основних видів руйнування та найбільш розповсюдженою причиною виходу деталей та механізмів з ладу.

Руйнування контактуючих тіл в процесі зношування супроводжується частковим видаленням матеріалу, а отже, й зміною форми і розмірів тіл [1–3]. Одним з ефективних способів запобігання передчасного зносу вузлів тертя є використання в них покриттів [3–5].

У даній роботі розглянемо контактну задачу зношування пружної тонкої смуги-покриття, що лежить на основі, внаслідок ковзання по ній штампа. Функція, що визначає форму підшви штампа, повинна бути парною, а в центрі площадки контакту дорівнюватиме нулю. У роботі дослідимо два випадки: *випадок 1* – плоска підшва штампа, *випадок 2* – підшва визначається швидко осцилюючою тригонометричною функцією. Крім того, задача розв’язується в діапазоні часу, я якому відсутнє повне зношування покриття.

Під конформними розуміють взаємно повторювані поверхні. У даному випадку повторюються форми поверхонь підшви штампа і смуги-покриття. Конформні контактні задачі досліджено, зокрема, в роботах К.Є. Казакова [6] для в’язкопружних тіл. Подібний контакт може виникнути, наприклад, коли штамп занурюється в покриття, що твердне, до його повного затвердіння. У результаті цього поверхня покриття отримує форму підшви штампа.

Кінетику зміни форми контактуючих поверхонь характеризує швидкість зношування. З теоретичних та експериментальних досліджень відомо, що залежність швидкості зношування від тиску може визначатися лінійним або степеневим (нелінійним) законами [1; 2; 5]. У даній роботі акцентовано увагу на степеневому законі зношування.

**Огляд літератури.** Вперше задачу розрахунку зношування абсолютно жорстких тіл, що контактують, поставив О.С. Проніков [6]. Його задача допускала знос обох тіл пари тертя при нелінійному законі зношування. Саме він побудував загальну модель зношування жорстких тіл.

Ця проблема отримала подальший розвиток, зокрема, в роботах [1–5; 7–17], а робота [3] містить детальний огляд досліджень в цій галузі. Увага дослідників зносоконтактних задач спрямована

на плоскі [1; 3–5; 7–11], осесиметричні [1; 2; 4], просторові задачі [1; 4; 12–14], з різними умовами навантаження, зокрема, динамічного [5; 15], з різними фізичними властивостями тіл, що контактують [4; 5; 7], для випадків фіксованої [1; 2; 5; 7; 12; 13] та невідомої площадок контакту [5; 16].

Однією з поширених постановок контактних задач є розрахунок зносу поверхні за наявності тонкого покриття. Зазвичай, механічні характеристики таких шарів описуються моделлю Вінклера. Зокрема, цей підхід запропоновано В.М. Александровим [2].

У роботах І.Г. Горячевої, М.М. Добичіна [1; 2] виведено інтегральні рівняння зносоконтактних плоских задач і застосовано покроковий за часом метод для отримання чисельних розв’язків у випадках лінійного і степеневих законів зношування тонкої смуги-покриття при ковзанні по ній штампа з плоскою підшвою.

Залишилося відкритим питання отримання наближено аналітичного розв’язку задачі у *випадку 1* при степеневому законі зношування. У статті [10] запропоновано наближено аналітичний підхід до розв’язання даної задачі при лінійному законі, деякі ідеї якого збережено в цій роботі. Для розв’язання поставленої задачі застосуємо покроковий за часом метод, що передбачає знаходження на кожному кроці наближено аналітичного розв’язку з використанням степеневих рядів і методу редукції.

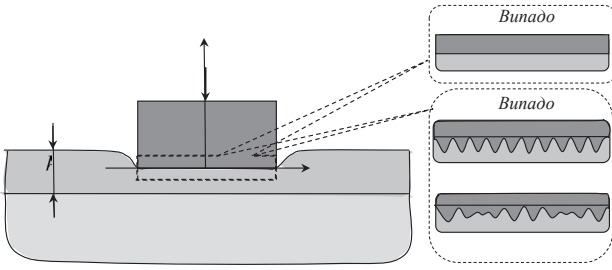
Чисельний підхід до отримання розв’язку плоскої зносоконтактної задачі у *випадку 1*, запропонований в [1; 2], застосуємо як до задачі у *випадку 1* так і у *випадку 2*. Проведемо аналіз щодо ефективності застосування аналітичного підходу у кожному випадку.

Чимало підходів до обчислення зносу пружних тіл, що контактують при постійній області контакту та постійному зовнішньому навантаженні, засновано на наявності стадії сталого зносу, коли нормальний тиск стає рівномірним на всій області контакту. Цю властивість досліджено в роботах [1; 2]. Слід зазначити, що існування стадії сталого зносу виявлено в статті [17] дослідним шляхом. На це вказував незмінний в часі профіль поверхні, що зношується. Поставимо за мету перевірку зазначеного ефекту.

#### **Постановка задачі та її інтегральні рівняння**

Розглянемо плоску контактну задачу про взаємодію штампа з двошаровою пружною основою в наступній постановці [1; 2]. Нехай пружна смуга початкової товщини  $h_0$  лежить на пружній основі (рис. 1). Смуга може бути закріпленою двома способами ( $y = h_0$ ):

- 1) смуга лежить на пружній основі без тертя (задача 1);
- 2) смуга жорстко закріплена на основі (задача 2).



**Рис. 1. Схема контакту штамп з пружною тонкою смугою**

На штамп з плоскою основою півширини  $a$  (рис. 1.1) діє постійна вертикальна сила  $P$ . Смугу вважаємо тонкою, тобто її ширина задовольняє умову  $h_0 / a \ll 1$ . Смуга товщиною  $h(x, t)$  зношується штампом, що ковзає в напрямі осі  $Oz$ . Припустимо, що швидкість зносу смуги  $\partial h(x, t) / \partial t$  залежить від контактного тиску  $p(x, t)$  за степеневим законом:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -K_w \left( \frac{p(x, t)}{p^*} \right)^\alpha, \quad (1)$$

де  $K_w$  – коефіцієнт зносу, що залежить від швидкості руху, температури і умов взаємодії;  $p^*$  – деякий характерний тиск [1; 2; 7].

Як зазначено в монографії [1], дотичні напруження на площадці контакту діють тільки у напрямі руху штамп і відсутні у напрямі осі  $Ox$ , тобто  $\tau_{xy} = 0$ ; крім того, компонента  $\tau_{zy}$  не впливає на розподіл контактних тисків, проте, впливає на швидкість процесу зношування.

Якщо зміщення пружної смуги задовольняє умову  $\partial h(x, t) / \partial x < 1$ , то рівняння для визначення тиску  $p(x, t)$  у довільний момент часу  $t$  має вигляд [1; 2]:

$$\begin{aligned} [h(x, t) - h(0, t)] - \frac{A}{E_1} [h(x, t) p(x, t) - h(0, t) p(0, t)] + \\ + \frac{1}{\pi E_2} \int_{-a}^a p(x', t) \ln \left| \frac{x' - x}{x'} \right| dx' = f(x), \quad (2) \end{aligned}$$

де  $E_i^* = \frac{E_i}{2(1-\nu_i^2)}$ ,  $E_i, \nu_i$  – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона смуги ( $i = 1$ ) і основи ( $i = 2$ ). Відомо [1], що за припущення  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ , значення  $A$  для першої задачі дорівнює  $0,5$ , а для другої задачі  $-A = \frac{2(1-\nu)(\kappa-1)(2-\nu+\nu\kappa)}{(\kappa+1)^2}$ , де  $n = \frac{E_1^*}{E_2^*}$ ,  $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$  ( $i = 1, 2$ ). Функція  $f(x)$  у правій частині рівняння (2) відрізняється для випадків 1 і 2: у випадку 1 для штамп з плоскою підшоною  $f(x) = 0$ , у випадку 2 для штамп з осцилюючою функцією форму підшови визначимо функцією

$$f(x) = g(x) - \max g(x); \quad g(x) = \sum_{k=1}^s C_k \cos \pi n_k x.$$

де  $n_k$  ( $k = \overline{1, s}$ ) – натуральні числа, більші за 1.

У випадку 1 в початковий момент часу товщина смуги  $h(x, 0) = h_0$  для будь-яких  $x \in [-a; a]$ .

Для того, щоб задовольнити умову конформності контакту, у випадку 2 потрібно покласти  $h(x, 0) = h_0 - |f(x)|$ .

У рівнянні (2) другий доданок лівої частини можна розглядати як переміщення поверхні завдяки наявності тонкої смуги, що поводить як покриття вінклерівського типу з коефіцієнтом пропорційності  $k = \frac{Ah_0}{E_1^*}$ , а третій доданок характеризує переміщення пружної основи [1; 2].

Товщину смуги у довільний момент часу  $t$  можна визначити з рівняння зносу (1):

$$h(x, t) = h_0 - K_w \int_0^t \left( \frac{p(x, t')}{p^*} \right)^\alpha dt'. \quad (3)$$

Крім того, зазначені рівняння доповнюються умовою рівноваги:

$$\int_{-a}^a p(x', t) dx' = P. \quad (4)$$

Таким чином, маємо систему інтегральних рівнянь (2)-(4). В ній невідомими є функція товщини смуги  $h(x, t)$  та функція контактного тиску  $p(x, t)$ .

**Методи розв'язання**

**Метод дискретизації за часом.** У монографіях [1; 2] запропоновано покроковий за часом метод розв'язання рівнянь (2)-(4), де зазначено, що крок за часом  $\Delta t$  варто обирати таким чином, щоб в межах будь-якого інтервалу  $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ , де  $\tau_{k+1} = \tau_k + \Delta t$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , можна було знехтувати величиною зносу поверхні і перерозподілом тиску на площадці контакту.

Якщо ввести наступні безрозмірні координати і функції:

$$\tau = t \frac{K_w}{a}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{aE_2^*}, \quad \tilde{h}_0 = \frac{h_0}{a}, \quad \tilde{h}(\xi, \tau) = \frac{1}{a} h \left( \xi a, \tau \frac{a}{K_w} \right),$$

$$\tilde{A} = \frac{A}{n}, \quad \tilde{p}(\xi, \tau) = \frac{1}{E_2^*} p \left( \xi a, \tau \frac{a}{K_w} \right), \quad \tilde{f}(\xi) = \frac{1}{a} f(\xi a),$$

то система інтегральних рівнянь (2)-(4) апроксимується наступними співвідношеннями, поданими в безрозмірному вигляді:

$$\tilde{h}_{k+1}(\xi) = \tilde{h}_k(\xi) - \left( \frac{\tilde{p}_k(\xi)}{\tilde{p}^*} \right)^\alpha \Delta \tau, \quad \tilde{h}_0(\xi) = \tilde{h}_0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_k(\xi) - \tilde{h}_k(0) - \tilde{A} [\tilde{h}_k(\xi) \tilde{p}_k(\xi) - \tilde{h}_k(0) \tilde{p}_k(0)] + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{p}_k(\xi') \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi' = \tilde{f}(\xi), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}_k(\xi') d\xi' = \tilde{P}. \quad (7)$$

Отже, на кожному часовому кроці необхідно:

1) з рівнянь (6) та (7) знайти функцію нормального тиску  $\tilde{p}_k(\xi)$ ;

2) з рівняння (5) знайти функцію товщини смуги  $\tilde{h}_{k+1}(\xi)$  для наступного за часом кроку.

У результаті можна отримати товщину смуги та розподіл тиску у різні моменти дискретного часу при зношуванні поверхневого шару. Даний метод дискретизації за часом застосовується у

сполучені з аналітичним або чисельним методом розв'язання інтегральних рівнянь (6), (7).

**Аналітичний метод розв'язання системи (6), (7) у випадку 1 на кожному часовому кроці.**

Нульовий крок за часом. Розглянемо момент часу  $\tau_0 = 0$ . Розв'язок задачі на цьому кроці дублює відповідний розв'язок, наведений в роботі [10] на всіх етапах, за винятком останнього. Наведемо тут основні результати, що будуть використані у подальшому.

1. Введено позначення:

$$\alpha_0 = 1 - \tilde{A}h_0, \quad P_0(\xi) = \tilde{p}_0(\xi) - \tilde{p}_0(0),$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi'. \quad (8)$$

2. З рівняння рівноваги  $\int_{-1}^1 \tilde{p}_0(\xi') d\xi' = \tilde{P}$  виражено значення  $\tilde{p}_0(0)$ :

$$\tilde{p}_0(0) = \frac{\tilde{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_0(\xi') d\xi'. \quad (9)$$

3. Враховуючи співвідношення (6), (8), (9), у момент часу  $\tau_0 = 0$  отримано інтегральне рівняння

$$P_0(\xi) = \alpha_0 P_0(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| P_0(\xi') d\xi' -$$

$$- \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 P_0(\xi') d\xi' + \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi). \quad (10)$$

4. Введення операторів

$$[B_1 f](\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| f(\xi') d\xi',$$

$$[B_2 f](\xi) = \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi',$$

$$[L f](\xi) = [(B_1 - B_2) f](\xi) \quad (11)$$

дозволило переписати рівняння (10) у вигляді операторного рівняння Фредгольма другого роду

$$P_0(\xi) = [(\alpha_0 I + L) P_0](\xi) + \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi). \quad (12)$$

5. Введення множини  $\Gamma$  неперервних, невід'ємних, парних на відрізку  $[-1; 1]$  та зростаючих на відрізку  $[0; 0,9]$  функцій  $f(x)$  для яких  $f(0) = 0$  дозволило довести, що на цій множині оператор  $(\alpha_0 I + L) : C_{[-1;1]} \rightarrow C_{[-1;1]}$  є стискуючим за умов  $\tilde{A}h_0 < 1, 0 < \alpha_0 < 1$ . Отже, за цих умов рівняння (12) має єдиний розв'язок на множині  $\Gamma$

6. Знайдено розклади образу степеневі функції  $\psi(\xi) = \xi^{2n}$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) під дією введених вище операторів:

$$[B_1 \psi](\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{n,i} \xi^{2i}, \quad [L \psi](\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{n,i} \xi^{2i}, \quad (13)$$

де  $\beta_{n,i} = -\frac{1}{\pi \cdot i \cdot (2n - 2i + 1)}, i = 1, 2, 3, \dots;$

$$b_{n,i} = \beta_{n,i} - \frac{1}{2n + 1} \beta_{0,i}, i = 1, 2, 3, \dots$$

Оскільки  $w(\xi) = [Be](\xi)$ , де  $e(\xi) \equiv 1$ , то

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{0,i} \xi^{2i}. \quad (14)$$

7. За допомогою розвинення розв'язку рівняння в ряд Неймана доведено, що розв'язок рівняння (12) можна подати рядом

$$P_0(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(0)} \xi^{2n}. \quad (15)$$

8. Розклади (13)-(15) дозволяють звести рівняння (12) до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів ряду (15):

$$\delta_n^{(0)} = \alpha_0 \delta_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(0)} b_{j,n} + \beta_{0,n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (16)$$

9. Нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь (16) розв'язується наближено за допомогою методу редукції шляхом зведення її до скінченної системи з  $M$  рівнянь. Остання розв'язується ітераційним методом. Можливість застосування методу редукції і збіжність послідовності наближених розв'язків до точного на множині  $\Gamma$  за умов  $\tilde{A}h_0 < 1, 0 < \alpha_0 < 1$  пояснюється в [10].

10. Співвідношення (8) і (9) дозволяють знайти невідому функцію контактної тиску в нульовий момент часу:

$$\tilde{p}_0(\xi) = \tilde{p}_0(0) + P_0(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \left( 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(0)} \xi^{2j} \right). \quad (17)$$

Особливість поставленої задачі у випадку 1 полягає у пошуку товщини смуги по завершенню часу  $\Delta\tau$  за допомогою співвідношення (5):

$$\tilde{h}_1(\xi) = \tilde{h}_0 - \Delta\tau \left( \frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^{\circ} \left( 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^{\circ}.$$

Оскільки у подальшому потрібно мати розклад отриманої функції в степеневий ряд, то виконаємо наступні перетворення.

Спочатку перепишемо функцію  $\tilde{h}_1(\xi)$  у вигляді:

$$\tilde{h}_1(\xi) = \tilde{h}_0 - \Delta\tau \left( \frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^{\circ} \left( 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2j+1} \right)^{\circ} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^{\circ}, \quad (18)$$

де  $\sigma_0^{(0)} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2j+1}, \sigma_j^{(0)} = \frac{\delta_j^{(0)}}{\sigma_0^{(0)}} (j = 1, 2, 3, \dots)$ .

Отримаємо розклад функції  $\left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^{\circ}$  в ряд Маклорена, використавши відомий розклад для функції  $(1 + u)^{\circ}$ :

$$\left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^{\circ} = 1 + \omega \left( \sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right) +$$

$$+ \frac{\omega(\omega-1)}{2!} \left( \sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right)^2 +$$

$$+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} \left( \sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right)^3 +$$

$$+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{4!} \left( \sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right)^4 + \dots$$

Далі зведемо подібні доданки при однакових степенях  $\xi$  і знайдемо закономірності

$$p_{m,s} = \prod_{i=1}^{s-m+1} \frac{\omega - i + 1}{i}, \quad a_{s,m} = \sum_{i=1}^m a_{s-i,m-i+1} \sigma_i^{(0)}, \quad a_{s,s} = \sigma_s^{(0)},$$

$$\gamma_s^{(0)} = \sum_{m=1}^s p_{m,s} a_{s,m}$$

(m = 1, ..., s - 1, s = 1, 2, 3, ...),

що дозволяють подати функцію  $\tilde{h}_1(\xi)$  у вигляді степеневому ряду

$$\tilde{h}_1(\xi) = \tilde{h}_0 - \Delta\tau \left( \frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^\omega (\sigma_0^{(0)})^\omega \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(0)} \xi^{2j} \right).$$

*k*-ий за часом крок. Нехай розв'язок на попередньому кроці  $\tilde{p}_{k-1}(\xi)$  уже знайдено. У тому числі відома й функція товщини смуги

$$\tilde{h}_k(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^{(k)} \xi^{2i}. \quad (19)$$

Щоб знайти функцію нормального тиску на *k*-му за часом кроці, потрібно розв'язати систему інтегральних рівнянь (6)-(7). Аналогічний вигляд мала задача на *k*-му кроці для лінійного закону зношування. Викладемо послідовність дій щодо її дослідження відповідно до роботи [10].

1. Введено позначення:

$$\alpha_k = 1 - \tilde{A}\tilde{h}_k(0), \quad P_k(\xi) = \tilde{p}_k(\xi) - \tilde{p}_k(0),$$

$$H_k(\xi) = \tilde{h}_k(\xi) - \tilde{h}_k(0). \quad (20)$$

2. З умови рівноваги (7) виражено  $\tilde{p}_k(0)$ :

$$\tilde{p}_k(0) = \frac{\tilde{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi'. \quad (21)$$

3. З використанням (20) і (21) інтегральне рівняння (6) набуде вигляду

$$P_k(\xi) = \alpha_k P_k(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| P_k(\xi') d\xi' - \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi' -$$

$$-\tilde{A}H_k(\xi) \left[ P_k(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi' \right] + \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi) - \frac{\tilde{P}}{2} \tilde{A}H_k(\xi) + H_k(\xi). \quad (22)$$

4. Введено наступні лінійні оператори

$$[R_k f](\xi) = \tilde{A}H_k(\xi) \left[ f(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi' \right],$$

$$[L_k f](\xi) = [(L - R_k) f](\xi) \quad (23)$$

і функцію

$$v_k(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi) - \frac{\tilde{P}}{2} \tilde{A}H_k(\xi) + H_k(\xi), \quad (24)$$

яка виражається через степеневі ряди з коефіцієнтами, що визначені на кроці *k* - 1. Таким чином, інтегральне рівняння (23) перетворюється в операторне рівняння Фредгольма другого роду, де функція  $v_k(\xi)$  буде вільним членом:

$$P_k(\xi) = [(\alpha_k I + L_k) P_k](\xi) + v_k(\xi). \quad (25)$$

5. Доведено, що на множині *M* рівняння (25) має єдиний розв'язок, який можна подати рядом

$$P_k(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{(k)} \xi^{2i}, \quad (26)$$

а коефіцієнти знайти з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\delta_n^{(k)} = \alpha_k \delta_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(k)} b_{j,n} - \tilde{A} \left[ -\phi_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1} + \sum_{s=1}^{n-1} \phi_{n-s} \delta_s^{(k)} \right] +$$

$$+\beta_{0,n} - \tilde{A}\phi_n + \frac{2}{\tilde{P}} \phi_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (27)$$

6. Показано, що для наближеного розв'язання системи (27) можна застосовувати метод редукції і метод ітерацій.

7. Використання (20), (21), (26) дозволило знайти шукану функцію нормального тиску в момент часу  $\tau_k$ :

$$\tilde{p}_k(\xi) = \tilde{p}_k(0) + P_k(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \left( 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(k)} \xi^{2j} \right). \quad (28)$$

Наступна дія характеризує відмінність в розв'язанні даної задачі від випадку лінійного закону [10]. З співвідношень (5) і (28) знайдемо функцію товщини смуги  $\tilde{h}_{k+1}(\xi)$ :

$$\tilde{h}_{k+1}(\xi) = \tilde{h}_k(\xi) - \left( \frac{\tilde{p}_k(\xi)}{\tilde{p}^*} \right)^\omega \Delta\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^{(k)} \xi^{2i} -$$

$$-\Delta\tau \left( \frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^\omega \left[ 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(k)} \xi^{2j} \right]^\omega.$$

Введення позначень

$$\sigma_0^{(k)} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1}, \quad \sigma_j^{(k)} = \frac{\delta_j^{(k)}}{\sigma_0^{(k)}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

$$a_{s,m} = \sum_{i=1}^m a_{s-i,m-i+1} \sigma_i^{(k)}, \quad a_{s,s} = \sigma_s^{(k)}, \quad \gamma_s^{(k)} = \sum_{m=1}^s p_{m,s} a_{s,m}$$

(m = 1, ..., s - 1, s = 1, 2, 3, ...)

дозволяє подати функцію товщини смуги в момент часу  $\tau_{k+1}$  у вигляді:

$$\tilde{h}_{k+1}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^{(k)} \xi^{2i} - \Delta\tau \left( \frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^\omega (\delta_0^{(k)})^\omega \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(k)} \xi^{2j} \right).$$

Чисельне розв'язання системи (6), (7) на кожному часовому кроці.

Дослідження властивостей інтегральних операторів рівнянь (6) і (7) і висновки про розв'язність системи для будь-якої неперервної функції в правій частині проведено в [1; 3; 9]. Деталі отримання чисельного розв'язку виписано в монографії [2]. Опишемо лише ідею методу.

1. Відрізок [-1;1] розбивається на непарну кількість *N* рівних частин  $[\xi_{j-1}; \xi_j]$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

2. На кожному відрізку розбиття до інтегралів в рівняннях застосується наближення теореми про середнє з відомим значенням інтеграла:

$$\int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| \tilde{p}_k(\xi') d\xi' \approx \sum_{j=1}^N \tilde{p}_k(\xi_{j-1/2}) \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi';$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}_k(\xi') d\xi' \approx \sum_{j=1}^N \tilde{p}_k(\xi_{j-1/2}) (\xi_j - \xi_{j-1}).$$



3. Рівняння  $(N + 1)/2$  задовольняється тотожно.

4. В результаті система (6)-(7) замінюється на систему з  $N$  рівняння з  $N$  змінними. Система допускає зменшення порядку вдвічі [2].

Аналіз числових результатів

Числові результати отримуємо для випадку, коли смуга жорстко закріплена на основі (задача 2). Розрахунки будемо проводити у припущенні, що відношення модулів пружностей смуги і основи дорівнює  $n = \frac{E_1}{E_2} = 0,1$ . Значення безрозмірних величин оберемо такі самі, як в монографії [1]:  $\omega = 1, 4$ ,  $\tilde{h}_0 = 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\tilde{P} = 9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\tilde{p}^* = 0,26$ . Часовий крок обрано  $\Delta\tau = 0,01$ .

Наближено аналітичний розв'язок у випадку 1 обчислювався за методом редукції для  $M = 50$  і  $M = 100$  розрахунки показали збіжність у значеннях шуканих величин до третього значущого знаку.

На рис. 2 наведено графіки розподілу нормального тиску під штампом з плоскою основою (випадок 1) в різні моменти часу процесу зношування за степеневим (а) і лінійним (б) законом зношування. А на рис. 3 – графіки відповідних профілів зношеної поверхні в ті самі моменти часу. Оскільки обидві функції є симетричними, то графіки побудовано на відрізку  $[0,1]$ . Суцільним лініям відповідають наближено аналітичному розв'язку, маркованим – чисельним при  $N = 61$  і  $N = 21$ . Спостерігається відхилення між аналітичним і чисельним розв'язками при  $N = 21$  до 8%, при  $N = 61$  – до 2%.

Проаналізуємо ефективність наближено аналітичного розв'язання. По-перше, запропонований наближено аналітичний підхід, окрім іншого, спрямований на зведення інтегрального рівняння до такого вигляду, який дозволяє на певному класі функцій застосовувати ітераційні методи. Вони, в свою чергу, суттєво прискорюють отри-

мання числових результатів порівняно з прямими методами розв'язання систем, до яких зводиться задача чисельними методами. По-друге, ефективність наближено аналітичного підходу розв'язання визначається можливістю отримання однакової точності, розв'язуючи систему меншого порядку, як порівняти з чисельним розв'язанням. По-третє, наближено аналітичний розв'язок дозволяє знайти значення контактних характеристик безпосередньо в межових точках площадки контакту, в той час, як чисельний – лише в точках, близьких до межі.

Розрахунки у випадку 2 проводилися для тригонометричних функцій  $f_1(x) = C(\cos 10\pi x - 1)$  і  $f_2(x) = C(0.5\cos 10\pi x + 0.5\cos 8\pi x - 1)$ , де  $C = 0.015 h_0$ , при тих самих параметрах степеневому закону зношування. Застосування описаного вище аналітичного підходу передбачало б розвинення даної функції в степеневий ряд з не виправдано великою кількістю доданків, що знижує ефективність аналітичного розв'язання. Крім того, аналіз можливості застосування методу редукції проведено на множині  $\Gamma$  функцій, яким не задовольняють розв'язки у випадку 2. Тому у даному випадку застосовано саме чисельний метод при  $N = 101$ . Відповідні результати наведено на рис. 4 суцільними лініями.

Вибір більшого значення  $N$ , ніж у випадку 1, пов'язано саме з осцилюючими властивостями функції, що визначає форму підшови штампа. Зокрема, відхилення між чисельними розв'язками, отриманими при  $N = 81$  і  $N = 101$ , становить до 2%, в той час, як у випадку 1 для таких значень  $N$  відхилення становить менше за 0,2%.

Задля покращення наочності поведінки цих функцій контактного тиску на рис. 4 в) для форми підшови, визначеної функцією  $f_2(x)$ , діапазон зміни значень функцій тиску звужено до відрізка [12; 22].

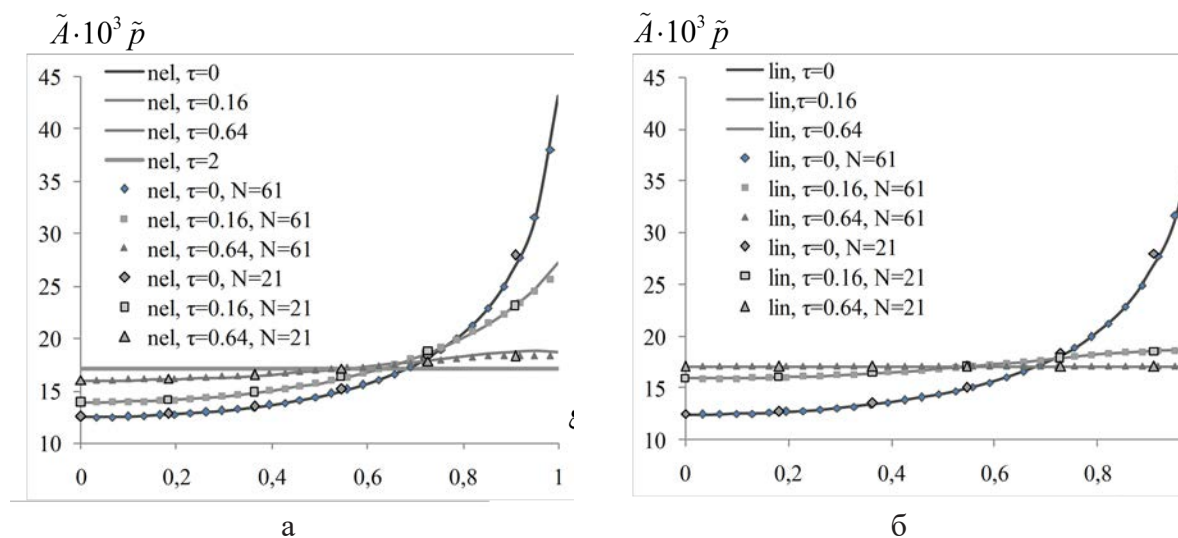


Рис. 2. Функції розподілу нормального тиску під плоским штампом в різні моменти часу для нелінійного (а) і лінійного (б) законів зношування

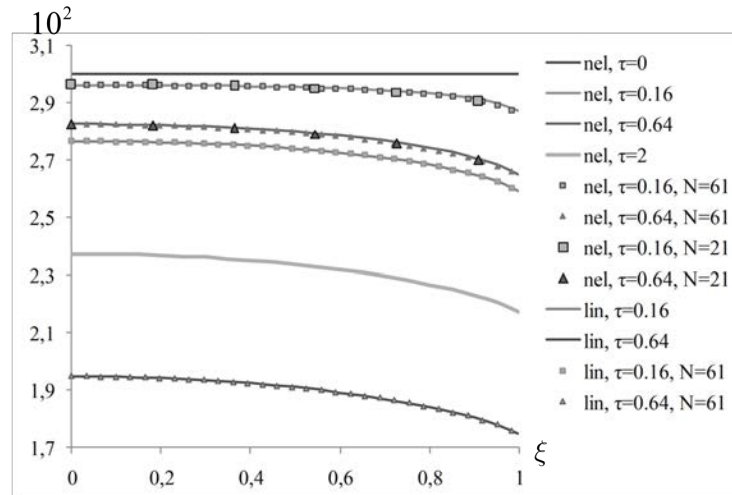


Рис. 3. Функції профілів зношеної поверхні смуги під плоским штампом в різні моменти часу для нелінійного і лінійного законів зношування

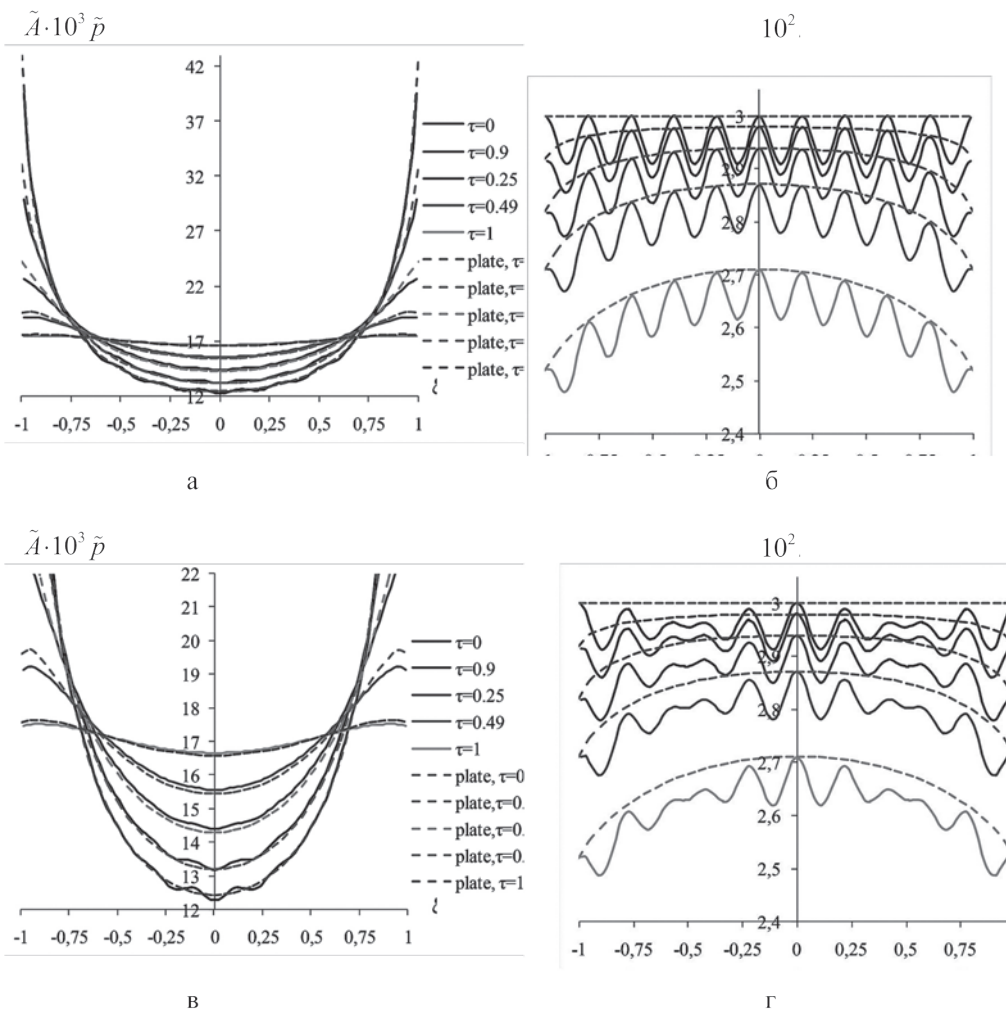


Рис. 4. Конформний контакт тонкої смуги і штампу, форма якого описується функціями  $f_1(x)$  (а), (б) і  $f_2(x)$  (в), (г): розподіл контактного тиску (а), (в) і функції профілів зношеної поверхні тонкої смуги (б), (г) в різні моменти часу

У випадку 2 швидко осцилюючої функції підшви штамп, що знаходиться у конформному контакті зі смугою, розподіл контактного тиску в кожний момент часу характеризується функцією, локальні максимуми (мінімуми) якої розміщуються в точках локального мінімуму (максимуму) функції, що визначає форму штамп.

Рисунок 4 доповнено штриховими лініями, що відповідають контакту штамп з плоскою підшвою (випадок 1), що надає змогу встановити зв'язок між зносоконтактними характеристиками задач у випадках 1 і 2. У кожний момент часу крива профілю зношеної смуги обмежує під штампом з плоскою підшвою обмежує зверху профіль зношення під штампом з тригонометричною формою підшви. При цьому, функція розподілу контактної тиску під плоским штампом «усереднює» значення функції тиску під штампом з осцилюючою формою. До того ж, мають місце суттєві відхилення в значеннях функції тиску в точках, близьких до межі площадки контакту. Для обраного типу осцилюючої функції значення функції тиску на межі у випадку 1 більші за значення у випадку 2.

Аналіз результатів дозволив дійти загальних висновків:

1) у будь-який момент часу функція розподілу контактної тиску є обмеженою, причому найменший тиск спостерігається в центрі області контакту, а найбільший – в точках, близьких до межі цієї області;

2) з часом нормальний тиск вирівнюється, тобто збільшується в центрі області контакту і зменшується у точках, близьких до межі; причому, у випадку 2 функція тиску з часом зменшує коливання на всіх відрізках площадки контакту;

3) найбільший знос тонкої смуги спостерігаємо в точках, близьких до межі області контакту.

Аналіз результатів в розглянутому прикладі показує якісну відповідність висновкам, отриманим в [1]. Зокрема, отримано, що процес зношення умовно ділиться на дві стадії:

1. На початковій стадії (стадії припрацювання) як нормальний тиск, так і форма зношеної поверхні стрімко змінюються.

2. На другій стадії (стадії сталого зносу) тиск перерозподіляється і наближається до рівномірного, а форма зношеної поверхні стає незмінною.

Причому нелінійному закону зношення відповідає менша швидкість зношення, тому нелінійний закон потребує більшого часу для досягнення аналогічних лінійному закону значень зносоконтактних характеристик.

Достовірність отриманих результатів підтверджується порівнянням з результатами, отриманими науковцями іншими методами. Так, задача у випадку 1 була розв'язана не тільки запропонованим в роботі наближено аналітичним підходом, але й чисельним, викладеним в роботі [1]. Результати повною мірою узгоджені.

Аналогічна задача до випадку 2 розглянута для в'язкопружної смуги-покриття в роботі [7]. Наведені в [7] числові результати якісно узгоджуються з отриманими в даній роботі.

### Висновки

Конформний контакт передбачає взаємне повторення форми поверхонь підшви штамп і смуги. Найпростішим випадком таких задач є контакт штамп з плоскою основою і гладкої смуги. Саме цей випадок розглянуто в роботі першим і знайдено як наближено аналітичний, так і чисельний розв'язок. Другим став випадок штамп з формою підшви, що визначається швидко осцилюючою функцією. Застосування наближено аналітичного підходу є неефективним для такої задачі.

Дані задачі розглянуто при степеневому законі зношення. У першому випадку розрахунки проведено також і для лінійного закону. Порівняльний аналіз свідчить про повільніший процес зношення при нелінійному законі.

В обох випадках підтверджено наявність двох стадій зношення: стадії припрацювання і стадії сталого зносу. Остання, зокрема, характеризується вирівнюванням функції контактної тиску в обох випадках.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва : Наука, 2001. 478 с.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа. Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 827–830.
3. Горячева И.Г., Солдатенков И.А. Контактные задачи с учетом износа. Механика контактных взаимодействий / под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. Москва, 2001. С. 438–458.
4. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Прикладные контактные задачи для обобщенной стержневой модели покрытия: монография. Санкт-Петербург : Научное издание технологий, 2019. 221 с. URL: [https://publishing.intelgr.com/archive/core\\_model.pdf](https://publishing.intelgr.com/archive/core_model.pdf).
5. Солдатенков И.А. Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. Москва : Физматкнига, 2010. 160 с.
6. Проников А.С. Классификация и расчет сопряжений деталей машин на изнашивание. Трение и износ в машинах. Москва : Изд-во АН СССР, 1956. Вып. 11. С. 121–181.



7. Kazakov K.E., Manzhairov A.V. Conformal contact between layered foundations and punches. *Mechanics of Solids. United States: Allerton Press Inc.* 2008. Vol. 43, No. 3. P. 512–524. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654408030229>.
8. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва : Наука, 1980. 304 с.
9. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. Москва : Машиностроение, 1988. 254 с.
10. Дьяченко Н.М., Манько Н.И. Приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом изнашивания тонкого упругого слоя при фиксированной области контакта. *Проблеми трибології (Problem of Tribology)*. 2016. № 2. С. 34–45.
11. Онишкевич В.М., Сулим Г.Т. Урахування зношування при плоскому контакті прямокутного штамп з пружною півплощиною. *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки.* 2019. № 1. С. 138–141. URL: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.31>.
12. Han, D., Han, W., Jureczka, M., Ochal, A. Numerical analysis of a contact problem with wear. *Computers & Mathematics with Applications.* 2020. Vol. 79. P. 2942–2951. URL: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.12.027>.
13. Jureczka M., Ochal A. Numerical analysis and simulations of contact problem with wear. *Comput. Math. Appl.* 2019. Vol. 77. P. 2980–2988. URL: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.044>.
14. Xuan H., Cheng X. Numerical Analysis and Simulation of a Frictional Contact Problem with Wear, Damage and Long Memory. *East Asian Journal on Applied Mathematics.* 2020. Vol. 10, No. 4. P. 659–678. URL: <https://doi.org/10.4208/eajam.130320.260520>.
15. Voitov A.V. Modeling the processes of friction and wear under dynamic influences on the tribosystem. *Problems of tribology*, 2020. Vol. 25, No 3/97. P. 45–49. URL: <https://doi.org/10.31891/2079-1372-2020-97-3-45-49>.
16. Савчук Ю.В., Максимук О.В., Саланда І.П. Аналітико-числове обчислення ітераційними методами областей контакту для задачі про зношування пружної півплощини канонічними штампами. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фіз.-мат. науки.* 2019. Вип.. 20. С. 70–78. URL: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2019-20.70-78>.
17. Aiblas J.B., Kuipers M. Contact problems of a rectangular block on an elastic layer of finite thickness. *Acta mechanica.* 1969. B. 3. P. 133–145.

#### REFERENCES

1. Goryacheva I.G. (2001) *Mekhanika frikcionnogo vzaimodejstviya* [Mechanics of Frictional Interaction]. M.: Nauka (in Russian)
2. Aleksandrov V. M., Kovalenko E. V. (1984) О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа [About the contact interaction of bodies with coatings in the presence of wear]. *Doklady AN SSSR*, vol. 275, no. 4, pp. 827–830. (in Russian).
3. Goryacheva I. G., Soldatenkov I. A. (2001) Контактные задачи с учетом износа [Contact tasks taking into account wear]. *Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy* [Contact mechanics] / in edit. I. I. Vorovich, V. M. Aleksandrov. Москва : Fizmatlit, pp. 438–458 (in Russian).
4. Kravchuk A. S., Kravchuk A.I. (2019) *Prikladnye kontaktnye zadachi dlya obobshchennoj sterzhnevoj modeli pokrytiya* [Applied contact problems for a generalized bar coverage model]: monograph. SPb: Naukoemkie tekhnologii (in Russian). [https://publishing.intelgr.com/archive/core\\_model.pdf](https://publishing.intelgr.com/archive/core_model.pdf).
5. Soldatenkov I. A. (2010) *Iznosokontaktnaya zadacha s prilozheniyami k inzhenernomu raschetu iznosa* [Wear-Contact Problem with Applications to Engineering Wear calculation]. M.: Fizmatkniga (in Russian).
6. Pronikov A. S. (1956) Классификация и расчет сопряжений деталей машин на изнашивание [Classification and calculation coupling of machine parts for wear]. *Trenie i iznos v mashinah.* M.: Izd-vo AN SSSR, issue. 11, pp. 121–181 (in Russian).
7. Kazakov K.E., Manzhairov A.V. (2008) Conformal contact between layered foundations and punches. *Mechanics of Solids. United States: Allerton Press Inc.*, vol. 43, no. 3, pp. 512–524. <https://doi.org/10.3103/S0025654408030229>.
8. Galin L. A. (1980) Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости [Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity]. M.: Nauka (in Russian).
9. Goryacheva I. G., Dobychin M. N. (1988) Контактные задачи в трибологии [Contact problems in tribology]. M.: Mashinostroenie (in Russian).
10. Dyachenko N. M., Manko N. I. (2016) Приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом изнашивания тонкого упругого слоя при фиксированной области контакта [The approached analytical decision of the flat contact problem into account wear of the thin elastic layer at the fixed area of contact]. *Problem of Tribology*, no. 2, pp. 34–45 (in Russian).

11. Onyshkevych V. M., Sulim G. T. (2019) Urahuvannya znoshuvannya pri ploskomu kontakti pryamokutnogo shtampa z pruzhnoyu pivploshchynoyu [Consideration of wear in plane contact of rectangular punch and elastic half-plane]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*, no. 1, pp. 138–141 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.31>.
12. Han, D., Han, W., Jureczka, M., Ochal, A. (2020) Numerical analysis of a contact problem with wear. *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 79, pp. 2942–2951. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.12.027>.
13. Jureczka M., Ochal A. (2019) Numerical analysis and simulations of contact problem with wear. *Comput. Math. Appl.*, vol. 77, pp. 2980–2988. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.044>
14. Xuan H., Cheng X. (2020) Numerical Analysis and Simulation of a Frictional Contact Problem with Wear, Damage and Long Memory. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, vol. 10, no. 4, pp. 659–678 <https://doi.org/10.4208/eajam.130320.260520>.
15. Voitov A.V. (2020) Modeling the processes of friction and wear under dynamic influences on the tribosystem. *Problems of tribology*, vol. 25, no 3/97, pp. 45–49. <https://doi.org/10.31891/2079-1372-2020-97-3-45-49>.
16. Savchuk Yu. V, Maksimuk O.V., Salanda I.P. (2019) Analitiko-chislove obchislennya iteracijnimi metodami oblastej kontaktu dlya zadachi pro znoshuvannya pruzhnoï pivploshchyni kanonichnymi shtampami [Analytical and numerical calculations by iteration method for contact area for the problem of wearing the elastic area by canonical stamps]. *Mathematical and computer modeling. Series: Phys.-Math. Science*, issue 20, pp. 70–78 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2019-20.70-78>.
17. Aiblas J. B., Kuipers M. (1969) Contact problems of a rectangular block on an elastic layer of finite thickness. *Acta mechanica*, b.3, pp. 133–145.

UDC [004.94+519.64]:556.3  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-2-03>

## EVALUATING PREDICTIONS OF THE SOIL MOISTURE MODEL WITH DATA ASSIMILATION BY THE TRIPLE COLLOCATION METHOD

**Kozhushko O. D.**

*Postgraduate Student*  
*National University of Water and Environmental Engineering*  
*Soborna str., 11, Rivne, Ukraine*  
*orcid.org/0000-0001-9934-1013*  
*ol.d.kozhushko@nuwm.edu.ua*

**Boiko M. V.**

*Postgraduate Student*  
*National University of Water and Environmental Engineering*  
*Soborna str., 11, Rivne, Ukraine*  
*orcid.org/0000-0002-0962-8625*  
*m.v.boiko@nuwm.edu.ua*

**Kovbasa N. Yu.**

*Junior Research Fellow*  
*V. Ye. Lashkaryov Institute of Semiconductor Physics*  
*Nauky ave., 41, Kyiv, Ukraine*  
*orcid.org/0000-0001-7988-0175*  
*kovbasa\_myu@nas.gov.ua*

**Martyniuk P. M.**

*Doctor of Technical Sciences, Professor,*  
*Head of the Institute of Automatics, Cybernetics and Computer Engineering*  
*National University of Water and Environmental Engineering*  
*Soborna str., 11, Rivne, Ukraine*  
*orcid.org/0000-0002-2750-2508*  
*p.m.martyniuk@nuwm.edu.ua*

**Stepanchenko O. M.**

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,*  
*Doctorate Student*  
*National University of Water and Environmental Engineering*  
*Soborna str., 11, Rivne, Ukraine*  
*orcid.org/0000-0001-6033-7404*  
*o.m.stepanchenko@nuwm.edu.ua*

**Uvarov N. V.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences*  
*Research Fellow*  
*G. V. Kurdyumov Institute for Metal Physics*  
*Academician Vernadsky boul., 36, Kyiv, Ukraine*  
*orcid.org/0000-0001-7988-0175*  
*uvarovn@gmail.com*

**Key words:** *Newtonian nudging, nonlinear mathematical modelling, Richards equation, Earth remote sensing, statistical model validation.*

For a long time, ground measurements are considered the most accurate method of regular monitoring of soil moisture. However, ground stations are expensive, require local calibration and thus often not practical to use. Other, more affordable means of soil moisture monitoring can be developed with the recent advancement of Earth remote sensing technologies.

In this paper, we describe a nonlinear problem of soil moisture transfer problem with addition of satellite soil moisture measurements. The mathematical model is based on

the Richards equation for soil moisture transport, and solved with the finite difference method on implicit iterative scheme. Satellite moisture retrievals are acquired by combining active and passive sensors data with the decomposition algorithm. The satellite data are incorporated into the model with the data assimilation algorithm called Newtonian nudging. This method adds a special ‘nudging’ term into the model governing equation. This assures that the model is corrected by satellite measurements without affecting the process physics. Moreover, we look into the nudging factor problem, and propose a simple empirical relation based on the soil properties for more universally stable work of the method.

For validation purpose, we conduct a massive numerical experiments over all registered ground stations in the USA. Evaluation is done by the use of triple collocation method, which allows assessing the errors of three independent data sources. The data sources used for evaluation are the model results, ground station measurements and ERA5 satellite observations. The results demonstrate that the presented model is capable of producing results with close accuracy to the ground station measurements.

## **ОЦІНКА ПРОГНОЗУ МОДЕЛІ ВОЛОГОСТІ ҐРУНТУ ІЗ АСИМІЛЯЦІЄЮ ДАНИХ МЕТОДОМ ПОТРІЙНОЇ КОЛЛОКАЦІЇ**

**Кожушко О. Д.**

*аспірант*

*Національний університет водного господарства та природокористування*

*вул. Соборна, 11, Рівне, Україна*

*orcid.org/0000-0001-9934-1013*

*ol.d.kozhushko@niwmt.edu.ua*

**Бойко М. В.**

*аспірант*

*Національний університет водного господарства та природокористування*

*вул. Соборна, 11, Рівне, Україна*

*orcid.org/0000-0002-0962-8625*

*m.v.boiko@niwmt.edu.ua*

**Ковбаса М. Ю.**

*молодший науковий співробітник*

*Інститут фізики напівпровідників імені В. Є. Лашкарьова*

*просп. Науки, 41, Київ, Україна*

*orcid.org/0000-0001-7988-0175*

*kovbasa\_myu@nas.gov.ua*

**Мартинюк П. М.**

*доктор технічних наук, професор,*

*директор інституту автоматичної, кібернетичної та обчислювальної техніки*

*Національний університет водного господарства та природокористування*

*вул. Соборна, 11, Рівне, Україна*

*orcid.org/0000-0002-2750-2508*

*p.m.martyniuk@niwmt.edu.ua*

**Степанченко О. М.**

*кандидат технічних наук, доцент, докторант*

*Національний університет водного господарства та природокористування*

*вул. Соборна, 11, Рівне, Україна*

*orcid.org/0000-0001-6033-7404*

*o.m.stepanchenko@niwmt.edu.ua*

**Уваров М. В.**

*кандидат фізико-математичних наук,*

*науковий співробітник*

*Інститут металофізики імені Г. В. Курдюмова,*

*бул. Академіка Вернадського, 36, Київ, Україна*

*orcid.org/0000-0001-7988-0175*

*uvarovm@gmail.com*

**Ключові слова:** ньютонівське підштовхування, нелінійне математичне моделювання, рівняння Річардса, дистанційне зондування Землі, статистична валідація.

Упродовж довго часу наземні вимірювання вважалися найточнішим способом регулярного моніторингу вологості ґрунту. Проте наземні вимірювальні станції є дорогі та потребують калібрування на місці встановлення, що часто робить їх використання недоцільним на практиці. З нещодавнім розвитком технологій дистанційного зондування Землі можуть бути розроблені інші, більш дешеві методи.

У цій роботі представлено нелінійну задачу вологоперенесення із додаванням супутникових вимірювань вологості ґрунту. Математична модель базується на рівнянні Річардса для вологоперенесення та розв'язується методом скінченних різниць з використанням неявної ітераційної схеми Самарського. Супутникові оцінки вологості ґрунту отримані із поєднання даних активних та пасивних сенсорів за допомогою алгоритмів декомпозиції.

Супутникові дані включалися до моделі згідно з алгоритмом асиміляції даних, що називається ньютонівським підштовхуванням. Цей метод передбачає додавання особливого члену «підштовхування» до модельного рівняння. Таким чином, модель коригується згідно супутникових вимірювань та забезпечується дотримання фізики процесу. Крім того, було здійснено огляд проблеми із вибором фактору підштовхування та запропонована емпірична формула з використанням параметрів ґрунту, що дозволяє підвищити універсальність та стійкість методу.

З метою валідації моделі було здійснено масштабний числовий експеримент з використанням усіх зареєстрованих наземних станцій вимірювання вологості в США. Оцінку було здійснено методом потрійної коллокації, що дає можливість оцінити похибки у трьох незалежних наборах даних. Для оцінки було використано такі джерела даних: модельні результати, дані вимірювань наземних станцій та супутникові спостереження із бази даних ERA5. Отримані результати демонструють, що представлена модель здатна показувати результати із точністю, що наближається до точності наземних вимірювань.

**Introduction.** Soil moisture data can be valuable in numerous practical applications, from agriculture to climate forecasts. Up-to-date information on moisture can improve the precision of predictions, optimize water resource management and advice on irrigation planning. These applications demand frequent and precise data which may be provided by measurements or model simulations. However, soil moisture is a notoriously difficult parameter to measure [1], and the accuracy of collected data, especially if they are derived from a model simulation, is not easily evaluated. This is particularly true for practical cases, where data is limited due to economical reasons. For that reason, our study aims not only to provide soil moisture predictions, but also to evaluate the model results, as well as other data that may be available in a practical case, against the available historical datasets.

In-situ observations are usually considered the most reliable soil moisture measurements. To provide immediate observation data at different soil depth, ground stations use multiple measurement methods, such as oven-drying, neutron probe, capacitance method etc. However, they are not used systematically due to their cost, installation difficulties and other practical reasons. It has also been pointed out that in-situ data, measured at a single observation point, may fail to

describe the state of the whole system, so the installation point should be considered carefully [2].

Another way to measure soil moisture is by satellite imagery. Recently, the method became popular in real-world applications due to its increasing quality and availability, and it is considered relatively cheap. Satellite microwave sensors are able to measure soil moisture in different spatial scales. The accuracy of these observations is satisfactory for global scale, but derivation of precise local data requires complex image processing algorithms. Moreover, microwave sensors measure only surface soil moisture (0-5 cm layer), and provide data on a few days interval, which cannot accurately represent the state of the system.

Land models are another alternative to assess soil moisture. Model simulations provide continuous data of all system states, and are cheap to perform. On the other hand, they unavoidably contain errors due to generalizations of physics since every participating process and effect cannot be accounted for. Moreover, the more complex and full the model is, the more parameters it requires, which, on their own turn, demand additional data. Therefore, modern soil moisture models are often combined with other data sources and measurements to estimate the parameters accurately. For example, studies [3; 4] propose



formulas for calculating model coefficients with the use of satellite moisture data.

In a case where multiple methods are available, and each of them has its own strengths and weaknesses, combination of differently acquired data might provide substantial improvements. For example, addition of satellite data into a simulation model is lately becoming a widely used tool, called data assimilation. It adapts model to the observed data, and allows to achieve higher precision level than provided by each data source alone [5]. There are multiple data assimilation algorithms available, the most widely used of which are described in [6]. In our study, we implement a method called Newtonian relaxation or nudging.

Newtonian nudging is a rather simple and effective data assimilation method, first used for oceanography problems. It is also widely used in hydrology problems, and has been implemented into a number of hydrological and environmental models, such as GLEAM [7] and CATHY [8]. The method consists in adding a nudging term, multiplied by the difference between model prediction and observed value, into the governing equation. The term works as a physical force that relaxes the result towards observations.

In this study, we describe our model and data assimilation approach, and also perform a statistical verification test. Traditionally, the results are validated against in-situ measurements, which are taken as a benchmark for comparison. However, among the variety of statistical methods designed to evaluate prediction accuracy, we chose the triple collocation method as it does not imply knowing the absolute truth. The method involves comparison of three independent data sources, where each is assumed to contain errors of some sort. Therefore, the method is effective for real-world validation tests, and is often employed in evaluation of soil moisture models [9; 10].

**Mathematical problem setting.** Our model includes moisture transfer problem based on the Richards equation. The problem domain is one-dimensional of thickness  $l$ , with downward  $x$  axis and  $x=0$  at the soil surface. The boundary value problem setting is as follows:

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial k(h)}{\partial x} - S(h, x, t), \quad (1)$$

$$\left( -k(h) \frac{\partial h}{\partial x} + k(h) \right) \Big|_{x=0} = Q(t) - E_s(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad x \in [0; l]. \quad (4)$$

Here  $\theta$  is absolute soil moisture,  $h$  – pressure head,  $k$  – soil hydraulic conductivity,  $S(h, x, t)$  – root water uptake,  $Q(t)$  – precipitation rate,  $E_s(t)$  – soil evaporation rate,  $h_0(x)$  is initial condition for pressure

head. Potential evaporation  $E_s$  is derived from meteorological parameters [5], root water uptake  $S$  is calculated according to potential evapotranspiration and water availability based on the Feddes model [12].

Since the Richards equation requires a translation rule between moisture and pressure head values, we chose a widely used Mualem–van Genuchten model [13]. The model is represented by the following equations:

$$\theta(h) = \theta_{\min} + \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{\left(1 + (-\alpha h)^n\right)^m}, \quad m = 1 - \frac{1}{n}, \quad (5)$$

$$k(h) = k_s S' \left( 1 - \left(1 - S^{\frac{1}{m}}\right)^m \right)^2, \quad S = \frac{\theta - \theta_{\min}}{\theta_{\max} - \theta_{\min}}, \quad (6)$$

where  $\theta_{\min}$ ,  $\theta_{\max}$  are residual and saturation water content,  $k_s$  – saturated soil hydraulic conductivity,  $S$  – saturation degree,  $\alpha$ ,  $n$ ,  $l$  – empirical model parameters. These parameters define water retention curve of the soil. The reliable values of Mualem–van Genuchten model parameters for basic soil types can be found in the various researches on the topic, as well as estimated by the program systems like Rosetta [14].

Substituting (5) into (1), the governing model equation is rewritten in pressure heads and becomes

$$\beta(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \nu(h) \frac{\partial h}{\partial x} - S(h, x, t), \quad (7)$$

where values of coefficients  $\beta(h) = \partial \theta / \partial h$ ,  $\nu(h) = \partial k(h) / \partial h$  can be calculated analytically according to equations (5), (6).

The one-dimensional problem described above is then discretized using an implicit time scheme and solved on a uniform grid. Specifically, the homogeneous finite difference scheme is used for numerical calculations, since it is rather cheap computationally and allows variable coefficients in equations. To deal with nonlinearity of Mualem–van Genuchten relations, we use an implicit iterative scheme described by Samarskiy. The scheme requires doing additional solving iterations on each time step, recalculating parameters until the solution converges. This scheme is not optimal in the sense of computational time, but is simple to implement and has good convergence [15].

**Newtonian nudging assimilation.** Newtonian nudging is a smoother algorithm that modifies the simulation result on each time based on the past and future observations. Its original application was for determining best initial conditions in oceanography and meteorology problems, but later was adapted for updating current model state in hydrology problems, including soil moisture [16].

Despite being not as popular as the filtering methods, e.g. ensemble Kalman filters [17], Newtonian nudging is one of the prominent 4-dimensional data assimilation (4DDA) methods. It is incorporated directly into the model governing

equation, which makes it better suited for use in boundary-value problems [18]. Unlike the filtering methods that treat the solution as a random variable, nudging introduces a physical force into the equation, yielding smooth and physically sensible results. The nudging term, inserted into the Richard equation (1), has the following form:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(h) \frac{\partial h}{\partial x} - k(h) \right) - S(h, x, t) + G \cdot W(x, t) \varepsilon(x) (\theta_{obs} - \theta), \quad (8)$$

where  $\theta_{obs}$  is observed surface soil moisture,  $G$  – nudging factor,  $W(x, t)$  – weight function, and  $\varepsilon(x)$  is the degree of trust to the observations, limited by the interval of  $[0; 1]$ .

The core of the term is the difference between observed and simulated soil moisture. In a more general case, the term can include a few observations, past and future, at the same time. The nudging factor represents the magnitude of the nudging force. It is recommended by the authors that this force should correspond to the slowest process in the model. The weight function corrects the force of nudging based on the distance from observation point and time span between the simulation and observation time [19].

Original formulation of Newtonian nudging uses constant nudging factor. However, while testing the method, we found out the constant factor causes irregular behavior, as the nudging seems stronger on lower moisture values and weaker near saturation values. This can be attributed to the fact that coefficients of the model equation (7) are nonlinear and can vary in the order of magnitude.

Some studies suggest choosing nudging coefficient from optimality conditions [20] or by solving an adjoint problem [21]. While these methods are well-justified and proved to be accurate, they introduce a significant computational overhead from solving the additional problem. Here we suggest a completely different approach to tackle the nudging factor problem. The idea is to calculate the suitable factor value using the current model equation coefficients. In our numerical experiments, we employed the following adaptive relation to calculate the factor considering the current soil retention and permeability characteristics:

$$G = 100 \left( \beta(h) \cdot |h| + 0.5 \frac{k(h)}{k_s} \right). \quad (9)$$

Here, as above,  $h$  is pressure head,  $k$  and  $k_s$  are saturated and actual soil hydraulic conductivity, and  $\beta$  is defined as  $\beta(h) = \partial \theta / \partial h$  according to (5).

Though this ‘adaptive nudging’ relies on unverified relations and cannot offer the optimal accuracy, it can be calibrated further to provide stable and accurate results, and it does not add any computation difficulty to the problem since the values of coefficients  $\beta(h)$  and  $k(h)$  are already calculated during the solving process.

**Satellite moisture retrieving.** Data assimilation procedure requires low-noise and frequent satellite

data. Active instruments on Sentinel-1, RADARSAT, RISAT-1 etc. can provide high-resolution soil moisture data with appropriate algorithms; however, as a rule, they have a sparse repeated interval around 10 days worldwide. On the other hand, passive instruments on SMAP, SMOS, AMSR-E and AMSR2 can provide data with repeated intervals of a couple of days worldwide, although without disaggregation algorithms these instruments provide low resolution of about tens of kilometers [22].

A disaggregation method is applied to obtain high-resolution soil moisture data from passive sensors AMSR-E, AMSR2 and SMAP, land surface temperature from AMSR2 and AMSR-E data. To calculate dielectric permittivity of the soil, we applied Single Channel Algorithm – Vertical [23] for SMAP disaggregated data and Land Parameter Retrieval Model for AMSR-E and AMSR2 data. The method allows us to get high-resolution dielectric permittivity maps with  $250 \times 250$  m resolution, which is close to the field scale. We applied the Mironov model for L-band [24], Dobson model [25] for C-band to convert dielectric permittivity to soil moisture content.

**Model evaluation methods.** We apply the triple collocation method to combine and assess the errors of ground station measurements, satellite observations and model simulations. The method considers at least three data sets, represented here by random variables  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  and  $\theta_3$ , each containing the same number of estimations of some variable. It is also required that the datasets are unbiased, which cannot be guaranteed in practice, so the bias is removed artificially. Each of the variables  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  and  $\theta_3$  differs from the hypothetical truth  $\theta$  by a residual  $r_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , as shown by the equations

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta + r_1, \\ \theta_2 &= \theta + r_2, \\ \theta_3 &= \theta + r_3. \end{aligned} \quad (10)$$

The method does not allow to find the truth value  $\theta$ , only to evaluate the quality of each dataset through the estimation of the random errors  $r_i$ . After eliminating the hypothetical truth from the equations (10) and taking average over the resulting equation, we can estimate the variances of residuals, denoted  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  respectively, with the following formula:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \langle (\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_3) \rangle, \\ \sigma_2^2 &= \langle (\theta_1 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_3) \rangle, \\ \sigma_3^2 &= \langle (\theta_1 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_3) \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

where  $\langle \bullet \rangle$  denotes covariance operator. Hence, using the random error variance, we can estimate the residuals as

$$\begin{aligned} \langle r_1^2 \rangle &= \langle \theta_1^2 \rangle - \langle \theta_1^2 \theta_2^2 \rangle / \langle \theta_2^2 \theta_3^2 \rangle, \\ \langle r_2^2 \rangle &= \langle \theta_2^2 \rangle - \langle \theta_2^2 \theta_1^2 \rangle / \langle \theta_1^2 \theta_3^2 \rangle, \\ \langle r_3^2 \rangle &= \langle \theta_3^2 \rangle - \langle \theta_3^2 \theta_1^2 \rangle / \langle \theta_1^2 \theta_2^2 \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

where prime sign means anomaly, for example  $\theta'_i = \theta_i - \langle \theta_i \rangle$  [10].



Though in this work we use the triple collocation analysis only to verify and compare the accuracy of datasets, its application in fact is much more wider. The supposed variance of given datasets can be employed for further calibration. For example, authors of [26] propose using the variances provided by triple collocation analysis as weights to merge active and passive sensor retrieved values.

The model results are also evaluated against the measurements using the following traditional metrics: average absolute deviation (AAD), root mean square deviation (RMSD), bias, Pearson correlation (R) and the index of agreement (IoA), defined as follows:

$$IoA = 1 - \frac{\sum_t (\theta^{DA}(t) - \theta^{obs}(t))^2}{\sum_t \left( \left| \theta^{DA}(t) - \overline{\theta^{obs}} \right| + \left| \theta^{obs}(t) - \overline{\theta^{obs}} \right| \right)^2}. \quad (13)$$

In the equation above  $\theta^{DA}(t)$  are model simulated moisture values on time points  $t$ ,  $\theta^{obs}(t)$  are soil moisture measurements, and  $\overline{\theta^{obs}}$  is their mean value over the simulation period.

All of the metrics mentioned above are calculated using the Pytesmo library, developed specifically for evaluation of soil moisture observations [27].

**Numerical experiments.** To achieve statistically relevant accuracy evaluation, we conducted a large-scale numerical experiment using the open ground sensor data provided by the International Soil Moisture Network (ISMN) [28]. The database includes information from hundreds of in-situ soil moisture sensors over the world, that is intended to be used as validation data for various modelling problems.

We chose ERA5 Climate Reanalysis data as a third dataset for triple collocation analysis. It contains spatial data of various meteorological and climate variables at 0.25° spatial resolution, including satellite-derived soil moisture on four soil layers [29]. Here, we use only the satellite topsoil moisture data for comparison.

The weather data were acquired from the NOAA database as for the nearest meteorological station. The NOAA provides one of the most full open meteorological datasets; however, the format of data is not easy to read. We downloaded the weather data from Lametsy API service [30], which provides the same NOAA data with daily aggregation and in a more readable format. Soil parameters were assumed based on the soil type individually for each station, based on the data provided by SoilGrids [31]. Initial conditions were set according to the satellite moisture data used for data assimilation.

The experiment was conducted for 2018 over all 659 ground stations in the USA, registered in the ISMN database. Out of them, 14 stations were excluded due to the issues with data availability, and another 83 stations – because of inconsistent or scarce measurement data, severe model errors etc.

Therefore, the summary presented below includes experiment results for the remaining 562 stations.

Note also that comparison has been done only for the soil surface moisture since some ground stations provided no belowground data, and satellites sense moisture at the top soil layer only.

**Results and discussion.** First, we perform a traditional comparison of model simulation results against ground station measurements. The averaged metrics over all stations are presented in Table 1. Analysis shows that absolute deviation and RMSD values are rather high, and must be caused chiefly by the lack of correlation. Moreover, the deviation can be attributed to incorrect initial conditions or soil parameters. These are two of the key model parameters, but the chosen values were rough due to the great number of stations in the experiment. Nevertheless, the bias between the datasets is very low, meaning their average values are the same, and only the deviations from the mean might not be represented correctly by the model.

The average correlation demonstrated by the datasets is 26%, which is a rather weak correlation. However, the index of agreement is about 50%, which implies a tolerably good convergence.

Further analysis of the latter two characteristics is shown on Fig. 1. The first frequency histogram indicates that many simulations demonstrated negative correlation with ground station data. This may be primary due to imprecise weather data, e.g. when the meteorological station is very remote, and its data differ from actual situation on the site. Another reason may be the groundwater, which can cause a significant influence and is not yet accounted for in the model. Most of the positive correlation values are near the 0.3-0.4 interval, which is medium correlation. The index of agreement demonstrates a normal-like frequency distribution, clustered around the 50% value. It indicates that the datasets demonstrate a stable agreement with each other, even if correlation is weak.

Table 1  
Evaluation of the model results against ground station measurements

Metrics	AAD	RMSD	Bias	R	IoA
Values	0.100001	0.11830	0.01782	0.26080	0.48001

Resuming the discussion of nudging factor issue, we can now compare the verification results for both nudging methods. It should be pointed out that bias seems to be the chief indicator of the problem with constant factor. Original calculations with constant factor resulted in the bias value of 0.06554, whereas adapted formulation reduced it to 0.01782, which is approximately 3.5 times less. RMSD is lowered accordingly, whereas other metrics are only slightly improved.

We also provide here likewise comparison of model results with ERA5 surface satellite data. As an evaluation benchmark, ERA5 data have an advantage of being consistent and harmonized with each other, whereas ISMN in-situ measurements are provided by various types of sensors, having different measurement methods and limitations. At the same time, ERA5 data represent satellite measurements, but are not used in data assimilation process, therefore they can serve as another benchmark for model predictions. The average key metrics of model evaluation against the independent satellite data are presented in Table 2.

Surprisingly, we acquired less convergence between the model and satellite data than between the model and in-situ measurements. Average deviation and RMSD are nearly 50% higher in this case, but this must be due to the significant bias between the data. In fact, while revising the ERA5 soil moisture dataset, we found that the values presented there are significantly higher than in the other datasets, especially our satellite-retrieved

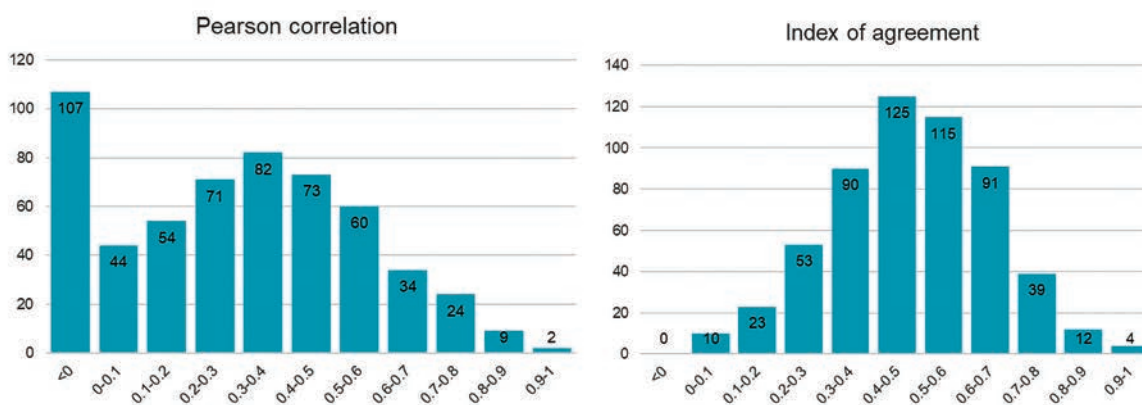
moisture. However, ERA5 database is aimed for climatic and meteorological analysis, so the difference might be caused by the different speciality of the datasets. While analyzing the data further with triple collocation method, we obviously remove the bias, so this should no longer present a problem.

Table 2

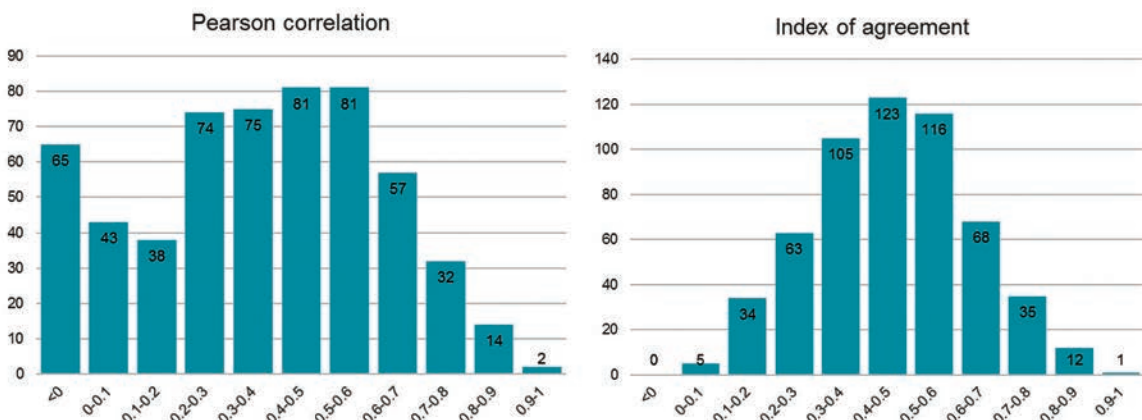
**Evaluation of the model results against ERA5 satellite measurements**

Metrics	AAD	RMSD	Bias	R	IoA
Values	0.14119	0.16052	0.12023	0.35014	0.46031

As for the correlation, the model and ERA5 satellite data agree by 35%, which is significantly better than in the previous case. Fig. 2 presents the frequency histograms of Pearson correlation and index of agreement results. Index of agreement chart is very similar to that on the Fig. 1, and its average value (46%) is also nearly the same. As for the correlation, its values are distributed rather evenly



**Fig. 1. Frequency histogram of the correlation (left) and index of agreement (right) between the model and the ground station data**



**Fig. 2. Frequency histogram of the correlation (left) and index of agreement (right) between the model and ERA5 satellite data**

on the histogram. Nevertheless, low and negative correlation values are less frequent than in the previous case.

The triple collocation analysis yielded an average 0.05258, 0.04290 and 0.07473 variances for ground station measurements, satellite observations and model simulations, respectively. These results suggest that ERA5 satellite data are the most accurate of the three, and ground sensor observations only slightly behind. The model appears to be the least accurate of the estimations, yet its error is comparable with that of in-situ measurements.

The most peculiar result of this triple collocation analysis might be the variance of the satellite observations. The lowest variance value implies that satellite data must be the most accurate of all considered data sources. However, it seems very likely that our satellite soil moisture data and those provided by the ERA5, though calculated independently and by different algorithms, might be derived from the same satellite images. If that is the case, then the three datasets used for analysis are not truly independent, as is required by the triple collocation methods. Recent research shows, that thought actual independence of data sources cannot be guaranteed, it does not influence the results significantly [32]. To avoid making unfounded inferences, we leave out the results of triple collocation analysis for satellite retrievals and further discuss only the interdependence between model results and in-situ measurements.

Fig. 3 demonstrates the relation between the variances of ground station and model data. The dots represent the variance pairs, and the thin black line represents the equality  $y = x$ . Most of the pairs are above the line, meaning model estimations are mostly less credible than in-situ measurements. However, the points are mostly clustered near the equality line, and 29% of the model variances are better than that of the measurements. We consider it a favorable result, since it proves that in a sufficient number of cases model estimations are as accurate as the ground sensors.

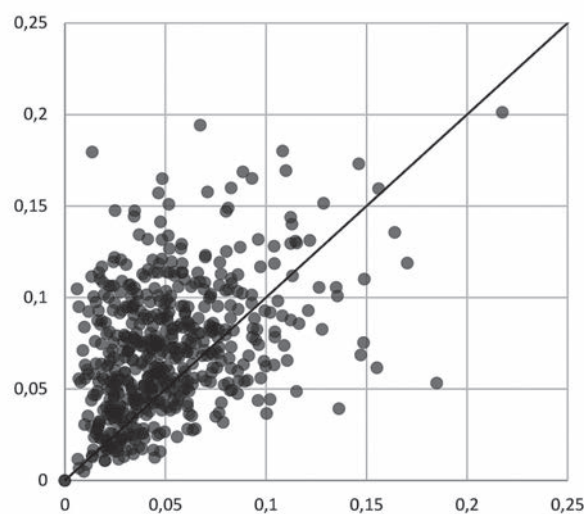
**Conclusion.** The chief purpose of our article and the presented experiment was to compare the model performance with the ground sensor measurements, and to determine whether the satellite model can be a reliable alternative for the ground station. Thought direct comparison of the model predictions against the benchmarks suggested rather low accuracy of the

former, triple collocation analysis showed that overall accuracy of the model was not far from the ground sensors. Nearly 30% of model results were estimated to have even better accuracy than in-situ measurements.

As suggested by our results, the mathematical model still faces a number of problems, such as determining model parameters, taking into account all essential physical processes, finding reliable weather and assimilation data etc. However, it still has advantages over the traditional measurements methods as it does not require installing additional sensors, and can predict moisture even in belowground layers. The results are less accurate than that acquired by the direct measurements, but still the model accuracy is comparable to measured results.

In addition, the model has a vast potential for improvement. Boundary conditions may be considering groundwater level, soil parameters on different soil depths and factors such as soil hysteresis and temperature driven water flow may be taken into account. Assimilation methods and satellite accuracy are likewise improving, which is hopefully indicating the high potential of current research.

**Acknowledgements.** This research is supported and funded by EOS Data Analytics.



**Fig. 3. Scatterplot of the model variance (vertical axis) against the ground station measurements (horizontal axis), estimated by the triple collocation method**

## BIBLIOGRAPHY

1. Lekshmi S., Singh D., Baghini M. S. A critical review of soil moisture measurement. *Measurement*. 2014. Vol. 54. P. 92–105. URL: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2014.04.007>.
2. Shen X., Liang J., Zeleke K. T. et al. Optimizing the Positioning of Soil Moisture Monitoring Sensors in Winter Wheat Fields. *Water*. 2018. Vol. 10. No. 12/1707. URL: <https://doi.org/10.3390/w10121707>.
3. Tian Y., Xiong L., Bin X., Zhuang R. A prior estimation of the spatial distribution parameter of soil moisture storage capacity using satellite-based root-zone soil moisture data. *Remote Sensing*. 2019. Vol. 11, No. 2580. URL: <https://doi.org/10.3390/rs11212580>.



4. Chen W., Shen H., Huang C., Li X. Improving soil moisture estimation with a dual ensemble Kalman smoother by jointly assimilating AMSR-E brightness temperature and MODIS LST. *Remote Sensing*. 2017. Vol. 9, No. 273. URL: <https://doi.org/10.3390/rs9030273>.
5. Nearing G., Yatheendradas S., Crow W. et al. The efficiency of data assimilation. *Water Resources Research*. 2018. Vol. 54. No. 9, P. 6374–6392. URL: <https://doi.org/10.1029/2017WR020991>.
6. Houser P. R., de Lannoy G. J. M., Walker J. P. Hydrologic data assimilation. *Approaches to Managing Disaster – Assessing Hazards, Emergencies and Disaster Impacts* / ed. by J. Tiefenbacher. IntechOpen: Rijeka, 2012. P. 41–64. URL: <https://doi.org/10.5772/31246>.
7. Martens B., Miralles D. G., Lievens H. et al. GLEAM v3: satellite-based land evaporation and root-zone soil moisture. *Geoscientific Model Development*. 2017. Vol. 10. P. 1903–1925. URL: <https://doi.org/10.5194/gmd-10-1903-2017>.
8. Paniconi C., Marrocu M., Putti M., Verbunt M. Newtonian nudging for a Richards equation-based distributed hydrological model. *Advances in Water Resources*. 2003. Vol. 26. P. 161–178. URL: [https://doi.org/10.1016/S03091708\(02\)00099-4](https://doi.org/10.1016/S03091708(02)00099-4).
9. Scipal K., Dorigo W., de Jeu R. Triple collocation — a new tool to determine the error structure of global soil moisture products. *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS): conference proceedings, Honolulu, 25-30 July 2010*. IEEE, 2010. P. 4426–4429. URL: <https://doi.org/10.1109/IGARSS.2010.5652128>.
10. Kedzior M., Zawadzki J. Comparative study of soil moisture estimations from SMOS satellite mission, GLDAs database, and cosmic-ray neutrons measurements at COSMOS station in eastern Poland. *Geoderma*. 2016. Vol. 283. P. 21–31. URL: <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2016.07.023>.
11. Hang G., Ng J. L., Huang Y., Yong S. Performance of potential evapotranspiration models in Peninsular Malaysia. *Journal of Water and Climate Change*. 2021. URL: <https://doi.org/10.2166/wcc.2021.018>. (Preprint. IWA Publishing).
12. Melo M., de Jong van Lier Q. Revisiting the Feddes reduction function for modeling root water uptake and crop transpiration. *Journal of Hydrology*. 2021. Vol. 603. No. 126952. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.126952>.
13. Terleev V., Mirschel W., Badenko V., Guseva I. An improved Mualem–Van Genuchten method and its verification using data on Beit Netofa clay. *Eurasian Soil Science*. 2017. Vol. 50, P. 445–455. URL: <https://doi.org/10.1134/S1064229317040135>.
14. Zhang Y., Schaap M. G. Weighted recalibration of the Rosetta pedotransfer model with improved estimates of hydraulic parameter distributions and summary statistics (Rosetta3). *Journal of Hydrology*. 2017. Vol. 547, P. 39–53. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.01.004>.
15. Samarskiy A. A. *The theory of difference schemes*. New York: Marcel Dekker, 2001. 786 p.
16. Houser P. R., Shuttleworth W. J., Famiglietti J. S. et al. Integration of soil moisture remote sensing and hydrologic modeling using data assimilation. *Water Resources Research*. 1998. Vol. 34. No. 12. P. 3405–3420. URL: <https://doi.org/10.1029/1998WR900001>.
17. Conti G., Aydoğdu A., Gualdi S. et al. On the physical nudging equations. *Climate Dynamics*. 2021. URL: <https://doi.org/10.1007/s00382-021-05972-w>. (Preprint. Springer Nature).
18. Camporese M., Paniconi C., Putti M., Salandin P. Comparison of data assimilation techniques for a coupled model of surface and subsurface flow. *Vadose Zone Journal*. 2009. Vol. 8. No. 4. P. 837–845. URL: <https://doi.org/10.2136/vzj2009.0018>.
19. Mirosław-Świątek D. Application of Newtonian nudging data assimilation method in hydrodynamic model of flood flow in the lower Biebrza basin. *Studia Geotechnica et Mechanica*. 2012. Vol. 34, No. 2. P. 91–105. URL: <https://doi.org/10.2478/sgm021208>.
20. Vidard A., le Dimet F. X., Piacentini A. Optimal determination of nudging coefficients. *Tellus A*. 2003. Vol. 55. No. 1, P. 1–15. URL: <https://doi.org/10.3402/tellusa.v55i1.14576>.
21. Stauffer D. R., Bao J. W. Optimal determination of nudging coefficients using the adjoint equations. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 1993. Vol. 45. No. 5. P. 358–369. URL: <https://doi.org/10.3402/tellusa.v45i5.14899>.
22. Reichle R. H., Koster R. D., Liu P. et al. Comparison and assimilation of global soil moisture retrievals from the Advanced Microwave Scanning Radiometer for the Earth Observing System (AMSR-E) and the Scanning Multichannel Microwave Radiometer (SMMR). *Journal of Geophysical Research*. 2007. Vol. 112. No. D09108. URL: <https://doi.org/10.1029/2006JD008033>.
23. Holmes T. R. H., de Jeu R. A. M., Owe M., Dolman A. J. Land surface temperature from Ka band (37 GHz) passive microwave observations. *Journal of Geophysical Research*. 2009. Vol. 114, No. D04113. URL: <https://doi.org/10.1029/2008JD010257>.

24. Chan S., Bindlish R., O'Neill P. et al. Assessment of the SMAP passive soil moisture product. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2016. Vol. 54. P. 1–14. URL: <https://doi.org/10.1109/TGRS.2016.2561938>.
25. Mironov V. L., Kerr Y., Wigneron J.-P. et al. Temperature- and texture-dependent dielectric model for moist soils at 1.4 GHz. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*. 2013. Vol. 10. P. 419–423. URL: <https://doi.org/10.1109/LGRS.2012.2207878>.
26. Gruber A., Dorigo W. A., Crow W., Wagner W. Triple collocation-based merging of satellite soil moisture retrievals. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2017. Vol. 55. P. 6780–6792. URL: <https://doi.org/10.1109/TGRS.2017.2734070>.
27. Paulik C., Preimesberger W., Hahn S. et al. TUV-GEO/pytesmo: v0.12.0 (Python library). *Zenodo*. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.596422>.
28. Dorigo W., Wagner W., Hohensinn R. et al. The International Soil Moisture Network: a data hosting facility for global in situ soil moisture measurements. *Hydrology and Earth System Sciences*. 2011. Vol. 15. P. 1675–1698. URL: <https://doi.org/10.5194/hess-15-1675-2011>.
29. Hersbach H., Bell B., Berrisford P. et al. The ERA5 global reanalysis. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. 2020. Vol. 146, P. 1999–2049. URL: <https://doi.org/10.1002/qj.3803>.
30. Thea C. M. LaMetSy, Aggregated meteorological database. URL: <https://lametsy.pp.ua>.
31. Poggio L., de Sousa L., Batjes N. et al. SoilGrids 2.0: Producing soil information for the globe with quantified spatial uncertainty. *Soil*. 2021. Vol. 7, P. 217–240. URL: <https://doi.org/10.5194/soil-7-217-2021>.
32. Yilmaz M., Crow W. Evaluation of assumptions in soil moisture triple collocation analysis. *Journal of Hydrometeorology*. 2014. Vol. 15, P. 1293–1302. URL: <https://doi.org/10.1175/JHM-D-13-0158.1>.

#### REFERENCES

1. Lekshmi, S., Singh, D., & Baghini, M. S. (2014). A critical review of soil moisture measurement. *Measurement*, 54, 92–105. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2014.04.007>
2. Shen, X., Liang, J., Zeleke, K. T., Liang, Y., Wang, G., Duan, A., Mi, Z., Ning, H., Gao, Y., & Zhang, J. (2018). Optimizing the Positioning of Soil Moisture Monitoring Sensors in Winter Wheat Fields. *Water*, 10(12), 1707. <https://doi.org/10.3390/w10121707>
3. Tian, Y., Xiong, L., Bin, X., & Zhuang, R. (2019). A prior estimation of the spatial distribution parameter of soil moisture storage capacity using satellite-based root-zone soil moisture data. *Remote Sensing*, 11, 2580. <https://doi.org/10.3390/rs11212580>
4. Chen, W., Shen, H., Huang, C., & Li, X. (2017). Improving soil moisture estimation with a dual ensemble Kalman smoother by jointly assimilating AMSR-E brightness temperature and MODIS LST. *Remote Sensing*, 9, 273. <https://doi.org/10.3390/rs9030273>
5. Nearing, G., Yatheendradas, S., Crow, W., Zhan, X., Liu, J., & Chen, F. (2018). The efficiency of data assimilation. *Water Resources Research*, 54(9), 6374–6392. <https://doi.org/10.1029/2017WR020991>
6. Houser, P. R., de Lannoy, G. J. M., & Walker, J. P. (2012). Hydrologic data assimilation. In J. Tiefenbacher (Ed.), *Approaches to Managing Disaster – Assessing Hazards, Emergencies and Disaster Impacts* (pp. 41–64). IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/31246>
7. Martens, B., Miralles, D. G., Lievens, H., van der Schalie, R., de Jeu, R. A. M., Fernández-Prieto, D., Beck, H. E., Dorigo, W. A., & Verhoest, N. E. C. (2017). GLEAM v3: satellite-based land evaporation and root-zone soil moisture. *Geoscientific Model Development*, 10, 1903–1925. <https://doi.org/10.5194/gmd-10-1903-2017>
8. Paniconi, C., Marrocu, M., Putti, M., & Verbunt, M. (2003). Newtonian nudging for a Richards equation-based distributed hydrological model. *Advances in Water Resources*, 26, 161–178. [https://doi.org/10.1016/S03091708\(02\)00099-4](https://doi.org/10.1016/S03091708(02)00099-4)
9. Scipal, K., Dorigo, W., & de Jeu, R. (2010). Triple collocation — a new tool to determine the error structure of global soil moisture products. *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), Honolulu, 2010*, 4426–4429. <https://doi.org/10.1109/IGARSS.2010.5652128>
10. Kedzior, M., & Zawadzki, J. (2016). Comparative study of soil moisture estimations from SMOS satellite mission, GLDAs database, and cosmic-ray neutrons measurements at COSMOS station in eastern Poland. *Geoderma*, 283, 21–31. <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2016.07.023>
11. Hang, G., Ng, J. L., Huang, Y., & Yong, S. (2021). Performance of potential evapotranspiration models in Peninsular Malaysia. *Journal of Water and Climate Change*, preprint. <https://doi.org/10.2166/wcc.2021.018>
12. Melo, M., & de Jong van Lier, Q. (2021). Revisiting the Feddes reduction function for modeling root water uptake and crop transpiration. *Journal of Hydrology*, 603, 126952. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.126952>

13. Terleev, V., Mirschel, W., Badenko, V., & Guseva, I. (2017). An improved Mualem–Van Genuchten method and its verification using data on Beit Netofa clay. *Eurasian Soil Science*, 50, 445–455. <https://doi.org/10.1134/S1064229317040135>
14. Zhang, Y., & Schaap, M. G. (2017). Weighted recalibration of the Rosetta pedotransfer model with improved estimates of hydraulic parameter distributions and summary statistics (Rosetta3). *Journal of Hydrology*, 547, 39–53. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.01.004>
15. Samarskiy, A. A. (2001). *The theory of difference schemes*. Marcel Dekker.
16. Houser, P. R., Shuttleworth, W. J., Famiglietti, J. S., Gupta, H. V., Syed, K. H., & Goodrich, D. C. (1998). Integration of soil moisture remote sensing and hydrologic modeling using data assimilation. *Water Resources Research*, 34(12), 3405–3420. <https://doi.org/10.1029/1998WR900001>
17. Conti, G., Aydođdu, A., Gualdi, S., Navarra, A., & Tribbia, J. (2021). On the physical nudging equations. *Climate Dynamics*, preprint. <https://doi.org/10.1007/s00382-021-05972-w>
18. Camporese, M., Paniconi, C., Putti, M., & Salandin, P. (2009). Comparison of data assimilation techniques for a coupled model of surface and subsurface flow. *Vadose Zone Journal*, 8(4), 837–845. <https://doi.org/10.2136/vzj2009.0018>
19. Mirosław-Świątek, D. (2012). Application of Newtonian nudging data assimilation method in hydrodynamic model of flood flow in the lower Biebrza basin. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 34(2), 91–105. <https://doi.org/10.2478/sgm021208>
20. Vidard, A., le Dimet, F. X., & Piacentini, A. (2003). Optimal determination of nudging coefficients. *Tellus A*, 55(1), 1–15. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v55i1.14576>
21. Stauffer, D. R., & Bao, J. W. (1993). Optimal determination of nudging coefficients using the adjoint equations. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 45(5), 358–369. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v45i5.14899>
22. Reichle, R. H., Koster, R. D., Liu, P., Mahanama, S. P. P., Njoku, E. G., & Owe, M. (2007). Comparison and assimilation of global soil moisture retrievals from the Advanced Microwave Scanning Radiometer for the Earth Observing System (AMSR-E) and the Scanning Multichannel Microwave Radiometer (SMMR). *Journal of Geophysical Research*, 112, Article D09108. <https://doi.org/10.1029/2006JD008033>
23. Holmes, T. R. H., de Jeu, R. A. M., Owe, M., & Dolman, A. J. (2009). Land surface temperature from Ka band (37 GHz) passive microwave observations. *Journal of Geophysical Research*, 114, Article D04113. <https://doi.org/10.1029/2008JD010257>
24. Chan, S., Bindlish, R., O'Neill, P., Njoku, E., Jackson, T., Colliander, A., Chen, F., Burgin, M., Dunbar, S., Piepmeier, J., Yueh, S., Entekhabi, D., Cosh, M., Caldwell, T., Walker, J., Wu, X., Berg, A., Rowlandson, T., Pacheco, A., & Kerr, Y. (2016). Assessment of the SMAP passive soil moisture product. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 54, 1–14. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2016.2561938>
25. Mironov, V. L., Kerr, Y., Wigneron, J.-P., Kosolapova, L., & Demontoux, F. (2013). Temperature- and texture-dependent dielectric model for moist soils at 1.4 GHz. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 10, 419–423. <https://doi.org/10.1109/LGRS.2012.2207878>
26. Gruber, A., Dorigo, W. A., Crow, W., & Wagner, W. (2017). Triple collocation-based merging of satellite soil moisture retrievals. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 55, 6780–6792. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2017.2734070>
27. Paulik, C., Preimesberger, W., Hahn, S., Baum, D., Plocon, A., Mistelbauer, Th., & Schmitzer M. (2021). *TUW-GEO/pytesmo: v0.12.0* (Python library). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.596422>
28. Dorigo, W., Wagner, W., Hohensinn, R., Hahn, S., Paulik, C., Xaver, A., Gruber, A., Drusch, M., Mecklenburg, S., Oevelen, P., Robock, A., & Jackson, Tj. (2011). The International Soil Moisture Network: a data hosting facility for global in situ soil moisture measurements. *Hydrology and Earth System Sciences*, 15, 1675–1698. <https://doi.org/10.5194/hess-15-1675-2011>
29. Hersbach, H., Bell, B., Berrisford, P., Hirahara, Sh., Horányi A., Muñoz-Sabater, J., Nicolas, J., Peubey, C., Radu, R., Schepers, D., Simmons, A., Soci, C., Abdalla, S., Abellan, X, Balsamo, G., Bechtold, P., Biavati, G., Bidlot, J., Bonavita, M., ... Thépaut, J. N. (2020). The ERA5 global reanalysis. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 146, 1999–2049. <https://doi.org/10.1002/qj.3803>
30. Thea C. M. (2019). *LaMetSy, Aggregated meteorological database* [Data set]. <https://lametsy.pp.ua>.
31. Poggio, L., de Sousa, L., Batjes, N., Heuvelink, G., Kempen, B., Ribeiro, E., & Rossiter, D. (2021). Soil-Grids 2.0: Producing soil information for the globe with quantified spatial uncertainty. *Soil*, 7, 217–240. <https://doi.org/10.5194/soil-7-217-2021>
32. Yilmaz, M., & Crow, W. (2014). Evaluation of assumptions in soil moisture triple collocation analysis. *Journal of Hydrometeorology*, 15, 1293–1302. <https://doi.org/10.1175/JHM-D-13-0158.1>



## ОСОБЛИВОСТІ ГЕНЕРАЦІЇ ВІ-ШУМУ РОТОРА ГЕЛІКОПТЕРА НА РЕЖИМІ «ВИХРОВЕ КІЛЬЦЕ»

Лук'янов П. В.

доцент

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

вул. Боткіна, 1, Київ, Україна

[petr\\_lukianov@bigmir.net](mailto:petr_lukianov@bigmir.net)

**Ключові слова:** генерація  
ВІ-шуму, «вихрове кільце»,  
флатер лопаті.

Під час вертикального, або майже вертикального, зниження гелікоптера навколо ротора утворюється тороїдальне «вихрове кільце». Вивченню аеродинамічних параметрів течії в даному режимі польоту приділено достатньо уваги. Досліджено зміну основних силових характеристик роботи гелікоптера в режимі «вихрове кільце». Однак для більш детальнішого вивчення даного режиму необхідно мати інформацію про звукове поле, яке формується під час взаємодії ротора гелікоптера з «вихровим кільцем.» Виникає така задача: як впливає «вихрове кільце» на процес генерації звуку, часткової трансформації його у вібрації? У даній роботі поставлена і чисельно розв'язана задача генерації ВІ-шуму ротора гелікоптера на режимі «вихрове кільце». Задача складається з аеродинамічної і акустичної частин. Аеродинамічна частина задачі включає в себе систему рівнянь Ейлера і нерозривності. Акустична частина задачі складається з раніше отриманої автором системи рівнянь, що описує процес генерації і поширення звуку. На її основі вивчено ближнє звукове поле. Чисельний розрахунок дальнього звукового поля виконаний на основі інтегрального представлення. Використана в роботі модель вважається перехідною, наближеною, оскільки виникаючі на поверхні інтенсивні вібрації не є малими величинами. Не дивлячись на те, що в ній враховані лише малі акустичні збурення, вона дозволяє наблизитися до опису вібрацій, виділити їх серед акустичних коливань, які виникають в процесі генерації звуку. Аналіз безрозмірних пульсацій щільності говорить про те, що на режимі роботи ротора «вихрове кільце» на поверхні лопаті реалізуються 3-4 серії поперечних коливань, вібрацій. Ці поперечні вібрації є досить небезпечним явищем, оскільки можуть призвести до інтенсивних згинальних коливань лопаті, її руйнування під час флатера. Зазначимо, що область, де реалізуються дані вібрації, істотно більше, ніж для випадку літакової посадки вертольота. Для більш вигнутої лопаті вібраційна область компактною зосереджена у порівнянні з лопаттю з меншим вигином. Шум, що генерується при цьому, має низькочастотний характер та на 10-20дБ вище шуму літакової посадки гелікоптера. Основна енергія його міститься в перших 7-8 гармоніках, значним чином посиленіх вібраційною складовою частиною шуму. Ці особливості ідентифікують режим «вихрове кільце», що дозволяє на практиці подальше вдосконалення системи безпеки польоту.



## PECULIARITIES OF GENERATION OF BVI-NOISE OF A HELICOPTER ROTOR IN “VORTEX RING” MODE

**Lukianov P. V.**

*Associate Professor*

*National Technical University of Ukraine*

*“Igor Sicorsky Kyiv Ploitechic Institute”,*

*Botkina str.,1, Kiev, Ukraine*

*petr\_lukianov@bigmir.net*

**Key words:** *BVI-noise generation, vortex ring, blade flutter.*

During the vertical, or almost vertical, descent of the helicopter around the rotor, a toroidal “vortex ring” is formed. Sufficient attention has been paid to the study of aerodynamic parameters of the flow in this flight mode. The change of the main power characteristics of the helicopter operation in the “vortex ring” mode is investigated. However, for a more detailed study of this mode, it is necessary to have information about the sound field that is formed during the interaction of the helicopter rotor with the “vortex ring”. The following problem arises: how does the “vortex ring” affect the process of sound generation, its partial transformation into vibration? In this work, the problem of generating BVI noise in the “vortex ring” mode is formulated and numerically solved. The overall problem consists of aerodynamic and acoustic parts. The aerodynamic part of the problem includes the system of Euler and continuity equations. The acoustic part of the problem consists of a system of equations previously obtained by the author that describes the process of sound generation and propagation. On its basis, the near sound field was studied. The numerical calculation of the far sound field is based on the integral representation. The model used in this work is considered to be transitional, approximate, since the intense vibrations arising on the surface are not small values. Since today there are no models that allow you to simultaneously correctly describe sound and vibration, the model of sound generation is used in the work as a transitional one. Despite the fact that a priori only small acoustic disturbances are taken into account in it, nevertheless, it allows one to approach the description of vibrations. Analysis of dimensionless density pulsations suggests that in the rotor operating mode “vortex ring” 3-4 series of transverse vibrations are realized on the blade surface. These lateral vibrations are quite a dangerous phenomenon, since they can lead to intense bending vibrations of the blade, its destruction on the flutter. At the same time, the area where these vibrations are realized is significantly larger than for the case of an airplane landing of a helicopter. The degree of blade bending makes the vibration region more compact for a blade with a large bend. The noise generated in this case has a low-frequency nature 10-20 dB higher than the noise of an airplane landing of a helicopter. Its main energy is concentrated in the first 7-8 harmonics, which is significantly amplified by the vibrational leaving noise. These features make it possible to identify the “vortex ring” mode, which in practice allows further improvement of the flight safety system.

### ВСТУП

Одним із цікавих і небезпечних режимів роботи ротора гелікоптера є обертання його на режимі «вихрового кільця». Особливістю даного режиму є те, що «вихрове кільце» утворюється при певних умовах польоту: під час вертикального, або майже вертикального, зниження вертольота на швидкості близько 3-7м/с. На сьогодні існують роботи, в яких представлені математичні моделі, що дозволяють розрахувати аеродинамічні параметри течії для режиму «вихрове кільце».

Так, в роботі [1] запропоновано математичну модель і алгоритм чисельного розрахунку параметрів течії навколо ротора гелікоптера для режимів крутого планування і «вихрового кільця». Дана модель враховує циркуляційну складову течії і дозволяє описати індуктивну течію, що створює разом з основною течією вихрове кільце. Розрахунки на основі цієї моделі показали, що режим вихрового кільця супроводжується збільшенням індуктивних швидкостей течії, але в той же час відбувається зниження сили тяги ротора.

В роботі [2] використовується нелінійна лопа-тева модель з вільним вихровим слідом, яка дозволяє визначити сукупність ознак виникнення «вихрового кільця». Одним із них є значна пульсація сили тяги, що досягає 20%. При цьому спостерігається нестійке маховий рух лопаті. Дані фактори роблять цей режим польоту дуже небезпечним.

В роботі [3] наводиться чисельний розрахунок течії в режимі «вихрового кільця» з використанням нестационарного рівняння Нав'є-Стокса (URANS), а також розрахункові траєкторії виходу з даного режиму. Аналітична модель утворення «вихрового кільця», представлена в роботі [4], описує вихрове кільце із закруткою для ідеальної нестисливої течії.

Не дивлячись на те, що аеродинамічним аспектам роботи ротора на режимі «вихрового кільця» приділено достатньо уваги, в той час процес генерації звуку на даному режимі польоту мало вивчений. Так, в роботах [6; 7] досліджений шум гвинта гелікоптера в режимі висіння з формуванням «вихрового кільця». Виконано розрахунок пульсацій тиску, а також коефіцієнта тиску уздовж хорди лопаті ротора. Однак просторовий розподіл характеристик ближнього поля не наводиться. Для розрахунку далекого поля використовується рівняння Фоукс-Уільмса-Хоукінгса. Авторами роботи приділено чимало уваги порівнянню розрахункових даних з експериментальними даними, але не виділені характерні особливості генерації шуму, властиві режиму «вихрового кільця». А це дуже важливе питання з точки зору безпеки польоту: прилади гелікоптера повинні зафіксувати відмінні риси генерації шуму, які вказують на те, що ротор гелікоптера дійсно опинився у «вихровому кільці».

Одним з факторів, який притаманний режиму «вихрового кільця» ротора гелікоптера, є виникнення різких вібрацій. Дійсно, як показали експериментальні дослідження [8–10], а також розрахунки генерації шуму взаємодії лопаті і вихорів (BVI-noise), при малих числах Маха польоту гелікоптера ( $M < 0.1$ ) відбувається трансформація енергії генерації шуму у вібрації [11; 12]. Оскільки кінетична енергія потоку, котрий набігає на лопать, в основному витрачається на підйомну силу і подолання лобового опору, то вібрації, які виникають на лопаті, захоплюють частину цієї енергії. Тому і відбувається втрата сили тяги. А якщо лопать ще потрапить в резонансний режим (флатер), то вертоліт може втратити керування. Отже, дуже важливим моментом є знання відмінних характеристик шуму ротора гелікоптера на режимі «вихровий кільце». На основі цих даних прилади, що реєструють звукове поле, можуть ідентифікувати даний режим роботи ротора, попередити пілотів про нього.

У даній роботі для моделювання шуму ротора гелікоптера на режимі «вихрове кільце» використовується тривимірна нестационарна модель генерації звуку, запропонована раніше і успішно апробована автором для ряду задач. Слід зазначити, що процес генерації звуку на даному режимі роботи ротора гелікоптера супроводжується виникненням значних за величиною вібрацій на окремих частинах лопаті. Тому цю математичну модель можна розглядати як наближену, що описує процес переходу від генерації звуку до вібрацій.

На підставі даної моделі вперше вдалося детально вивчити ближнє звукове поле: побудувати просторовий розподіл пульсацій густини. Це дозволило, в залежності від параметрів задачі, чітко визначити області трансформації звукових коливань у вібрації. Отримані розрахункові дані ближнього звукового поля використано для розрахунку дальнього звукового поля, в той час як раніше використовували лише наближені підходи розрахунку ближнього поля, не розв'язуючи тривимірної задачі. Використання тривимірного підходу для ближнього поля дозволило визначити особливості генерації шуму, виникнення вібрацій.

**Мета роботи.** Метою даної роботи є постановка і розв'язання тривимірної нестационарної задачі генерації BVI-шуму на режимі «вихрове кільце», виявлення за результатами розрахунку звукового поля ознак, що ідентифікують роботу ротора на даному режимі.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай гелікоптер здійснює вертикальне зниження на швидкості 3-5 м/с, при цьому навколо ротора сформувалося «вихрове кільце» (рис. 1). Розглянемо ротор, лопаті якого мають подвійний «sin-sin» вигин і відносяться до «Blue-edge» типу зі зниженим шумом [13; 14]. Необхідно вивчити генерацію шуму взаємодії ротора гелікоптера з «вихровим кільцем».



**Рис. 1. Формування вихрового кільця на режимі вертикального спуску,  $V = 3-5$  м/с**

**Фізична модель.** На режимі вертикального або майже вертикального зниження (з малою горизонтальною швидкістю) утворюється «вихрове кільце». Це відбувається тому, що компоненти індуктивної і вертикальної складових швидко-

стей потоку, що набігає знизу, мають один і той же порядок за величиною. Цей потік не в змозі «змести» з лопаті індуковану течію, а тому вступає з нею у взаємодію з формуванням тороїдального вихору – «вихрового кільця». «Вихрове кільце» в даній роботі моделюється у вигляді компактно розподілених вихорів Тейлора, що утворюють тор.

**Аеродинамічна постановка задачі.** Система рівнянь, що описує ідеальну стисливу течію навколо лопаті [13; 14], складається з рівняння Ейлера і рівняння нерозривності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \lambda c v' \frac{\partial u'}{\partial \eta} + \frac{c}{AR} w' \frac{\partial u'}{\partial \zeta} &= - \frac{1}{M^2 \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial v'}{\partial \xi} + \lambda c v' \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{1}{AR} w' \frac{\partial v'}{\partial \zeta} &= - \frac{\lambda c}{M^2 \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial w'}{\partial \xi} + \lambda c v' \frac{\partial w'}{\partial \eta} + \frac{1}{AR} w' \frac{\partial w'}{\partial \zeta} &= - \frac{1}{M^2 AR \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho' u')}{\partial \xi} + \lambda c \frac{\partial(\rho' v')}{\partial \eta} + \frac{1}{AR} \frac{\partial(\rho' w')}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $\xi = x / c, \eta = y \lambda, \zeta = z / R, \tau = kt$ ,

$u' = u / U_\infty, v' = v / U_\infty, w' = w / U_\infty; p = p' \rho_\infty U_\infty^2, \rho = \rho_\infty \rho'$ , а  $c, \lambda, R$  – довжина хорди лопаті, товщина параметр, радіус лопаті відповідно;  $M$  – число Маха,  $AR = R / c$  («aspect ratio»).

Граничною умовою на поверхні лопаті є умова непротікання рідини через поверхню:

$$\vec{V}_n|_r = 0. \quad (2)$$

Крім граничної умови (2), задаються вихори Тейлора (рис. 2). Рішення даної задачі дозволяє знайти безрозмірні компоненти швидкості і щільності.

**Рис. 2. Лопать у «вихровому кільці»**

Для з'ясування особливостей генерації звуку в режимі «вихрове кільце» необхідна постановка акустичної задачі.

**Акустична постановка задачі.** Система рівнянь, що описують генерацію і поширення звуку має вигляд [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \tau^2} - \frac{1}{M_\infty^2} \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \xi^2} - a^2 (\lambda^2 c^2 \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \eta^2} + \frac{1}{AR^2} \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \zeta^2}) + \\ R(\bar{p}', \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \eta}, \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \eta \partial \xi}, \dots, \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \zeta^2}) = \\ = \gamma (\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta \partial \xi}, \dots, \frac{\partial^3 \bar{\varphi}}{\partial \zeta^3}); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} (\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} + c^2 \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{AR^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \zeta^2}) + c \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} \\ + c^2 \lambda^2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} + \frac{1}{AR^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \zeta} = - \left[ c \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \right. \\ \left. \bar{\rho}' (c \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \lambda c^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{c^2}{R} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta}) + c \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} + \lambda c^2 \bar{v} \frac{\partial \rho'}{\partial \eta} + \frac{c^2}{R} \bar{w} \frac{\partial \rho'}{\partial \zeta} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

У рівняннях (3)-(4)  $\bar{\varphi}, \bar{p}'$  – безрозмірний звуковий потенціал та густина.

Вираз  $R(\bar{p}', \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \eta}, \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \xi \partial \eta}, \dots, \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \zeta^2})$

містить доданки, які залежать від густини  $\bar{\rho}'$  та її похідних. Гранична умова для акустичних компонентів швидкості врахована в аеродинамічній постановці (2). На великій відстані від лопаті виконується умова випромінювання Зомерфельда, яка врахована у виразі дальнього звукового поля, наведеного нижче.

**Метод розв'язання задачі.** Поставлена задача розв'язувалась у прямокутній декартовій системі координат за допомогою чисельно-аналітичного методу [15]. Використання чисельного методу призводить до утворення замкненої системи рівнянь, з яких шукані функції та їхні похідні виражаються неявно (неявна схема). Цей метод раніше автором опрацьований на задачах генерації звуку лопаттю гелікоптера. Розрахункова сітка на поверхні лопаті мала такі розміри: 82 x 40 – вздовж хорди лопаті та за її розмахом відповідно.

**Ближнє поле**

Для того щоб вивчити відмінні риси формування звукового поля в режимі «вихрове кільце», дослідимо поведінку пульсацій безрозмірної щільності, які генерують звук на поверхні лопаті. У задачі була розглянута лопать з такими параметрами: переріз лопаті є 10% параболічний профіль NASA, довжина лопаті  $R = 3\text{м}$ ,  $AR = R / c = 10$ . Лопать в довільний момент часу розташована під деяким кутом  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  в площині обертання ротора і поставлена під кутом атаки  $\gamma = 10^\circ$  (не змінювався). У розрахунках розглянуті два варіанти ступеня вигину лопаті:  $\delta = 0.1, 0.15$ .

Дані розрахунків, наведені на рис. 3-4, говорять про таке. Інтенсивна генерація звуку, що переходить в вібрації, формується не вздовж лопаті, як це відбувається при звичайному польоті гелікоптера, а поперек неї – уздовж за хордою поперечного перерізу лопаті. Це означає, що в режимі вертикального зниження відбувається інтенсивне захоплення енергії звукових поздовжніх коливань і трансформація цих коливань в поперечні (вібрації). Раніше в роботі [11] вивчена літакова посадка гелікоптера, де подібне явище вже спостерігалось. Однак там трансформація звуку у вібрації була не настільки інтенсивною, ніж в даній задачі.

При цьому слід зауважити, що на рис. 3,4 чітко видно 3-4 поперечні серії, які варіюються в залежності від ступеня вигину лопаті і кута постановки її до потоку. Подібні явища можуть призвести не тільки до виникнення флаттера лопаті, але і до швидкого руйнування лопаті як такої. Зауважимо, що пульсації щільності більш сконцентровані для лопаті з великим вигином, ніж у лопаті з меншим вигином. Це говорить про те, що форма лопаті

вздовж її розмаху здатна впливати не тільки на генерацію звуку, але і на вібрації. Виявлені закономірності, безумовно, повинні позначитися на результатах розрахунку дальнього звукового поля.

#### Дальнє поле

Після розрахунку параметрів ближнього поля скористаємося виразом для дальнього звукового поля. На основі відомого підходу Кірхгофа раніше було отримано наступне співвідношення [16]:

$$\varphi(x, t_1) = \frac{-M_1^2}{4\pi} \left( \int_S \left[ \frac{F_1}{R} \right]_t \cdot dS_x + \int_S [F_2]_t \cdot dS \right),$$

де

$$F_1 = \rho[(\nabla\varphi \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \nabla\varphi] + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{v} \cdot \text{div}(\rho\nabla\varphi + \rho\vec{v}) + \nabla\varphi \text{div}(\rho\vec{v})$$

$$F_2 = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial(1/R)}{\partial n}.$$

На рис. 5-6 представлені рівні шуму, що генерується, в залежності від кута постановки лопаті і ступеня вигину лопаті. Аналіз розрахунків дальнього звукового поля показав такі закономірності: рівень шуму у всіх розрахункових ситуаціях значно вище рівня шуму при літакової посадці гелікоптера. Якщо при літаковій посадці він варі-

ювався в межах 60-90дБ, то в цієї задачі він змінюється в діапазоні від 80-110дБ.

Отримані розрахункові значення рівня шуму кількісно близькі результатам роботи [7], але трохи вище за величиною, що може бути пояснено тим, що в [7] лопать мала дещо інші розміри і форму, ніж в даній роботі.

Спектр шуму показує, що основний внесок дають перші 7-8 гармонік. Причому різко виділених високих частот, наприклад як для літакової посадки гелікоптера [11], не спостерігається. Це говорить про те, що на режимі «вихрове кільце» переважає низькочастотний шум, що складається з шуму обертання і посиленій вібраційними складовими. Таким чином, відмінною особливістю шуму, що генерується, є чітко виражений низькочастотний характер шуму зі значним рівнем  $L=80-110$ дБ.

#### Висновки

1. Поставлено і чисельно розв'язано задачу генерації VVI-шуму в режимі роботи ротора «вихрове кільце».

2. Аналіз ближнього і дальнього звукових полів показав, що в режимі «вихрове кільце» реалізується 3-4 серії поперечних вібрацій на поверхні

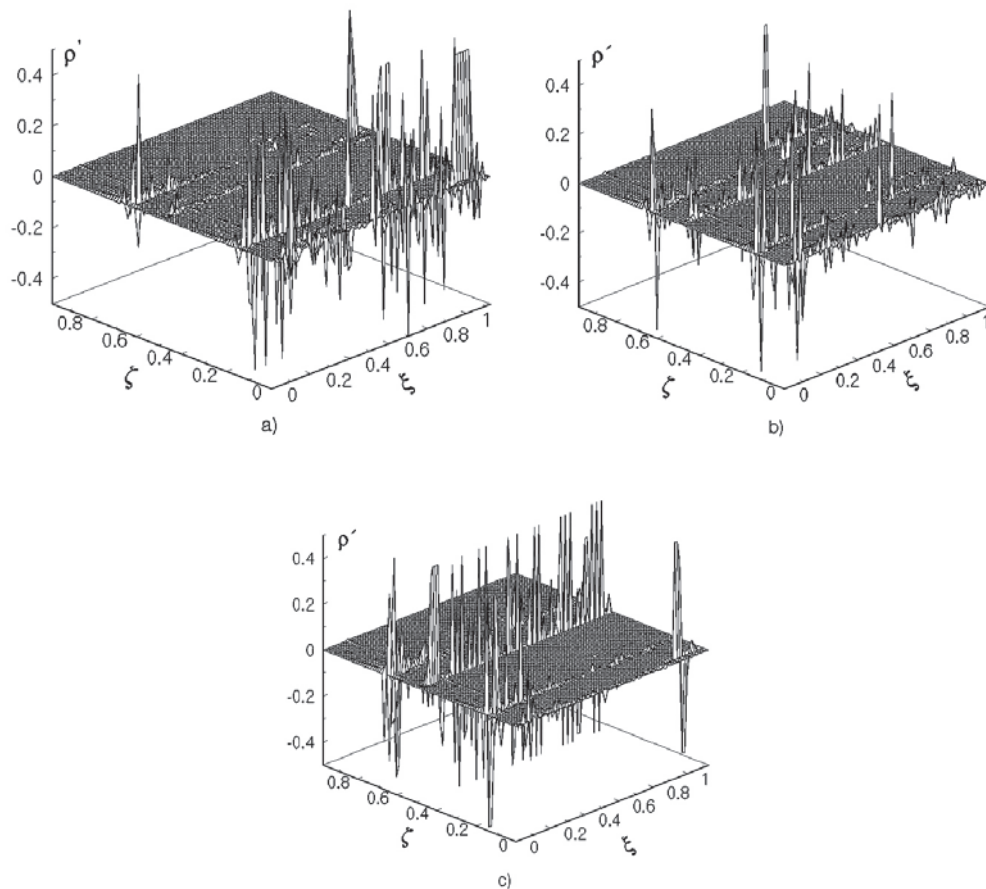


Рис. 3. Пульсації  $p'$ ,  $\delta = 0.1$ : a)  $\alpha = 30^\circ$ , b)  $\alpha = 45^\circ$ , c)  $\alpha = 60^\circ$



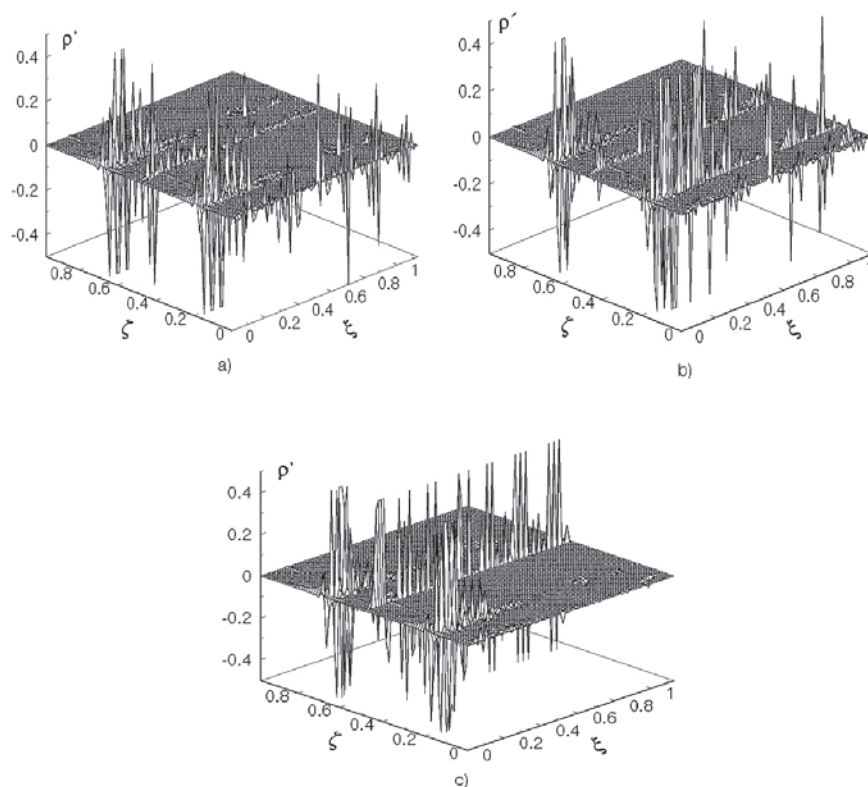


Рис. 4. Пульсації  $\rho'$ ,  $\delta = 0.15$ : *a)*  $\alpha = 30^\circ$ , *b)*  $\alpha = 45^\circ$ , *c)*  $\alpha = 60^\circ$

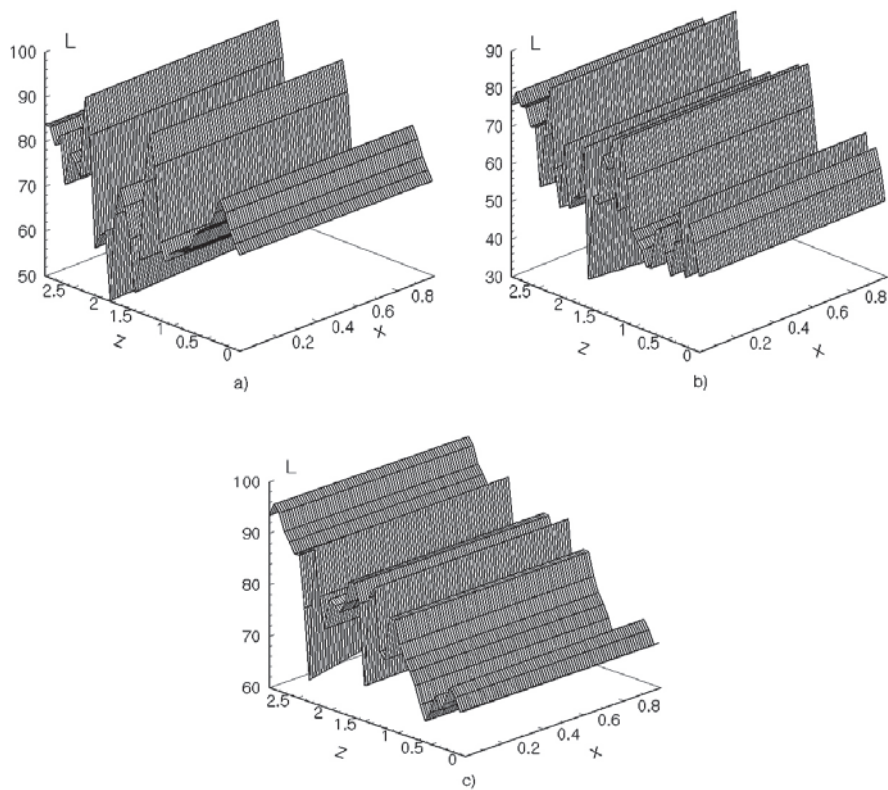
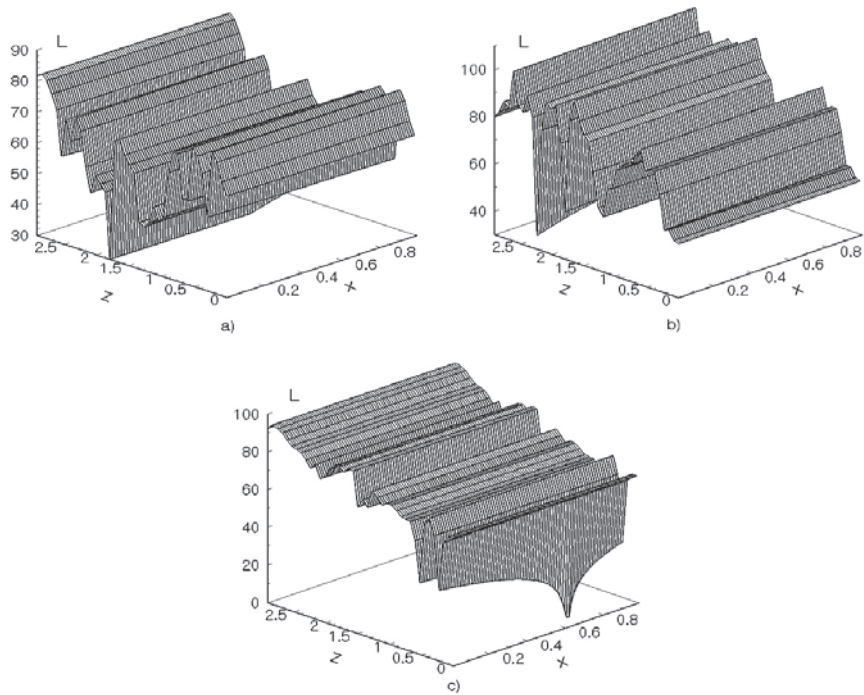
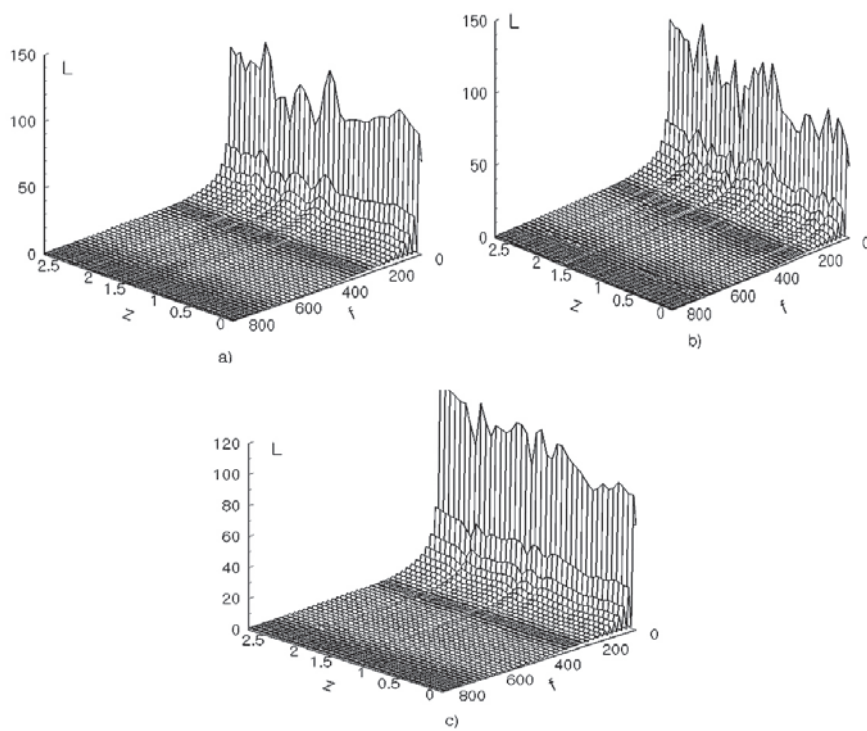


Рис. 5. Рівень звукового тиску  $L$   $\delta = 0.1$ : *a)*  $\alpha = 30^\circ$ , *b)*  $\alpha = 45^\circ$ , *c)*  $\alpha = 60^\circ$



**Рис. 6. Рівень звукового тиску  $L$ ,  $\delta = 0.15$   $\delta = 0.1$  :**  
*a)  $\alpha = 30^\circ$ , b)  $\alpha = 45^\circ$ , c)  $\alpha = 60^\circ$*



**Рис. 7. Спектр шуму,  $\delta = 0.1$  :** *a)  $\alpha = 30^\circ$ , b)  $\alpha = 45^\circ$ , c)  $\alpha = 60^\circ$*

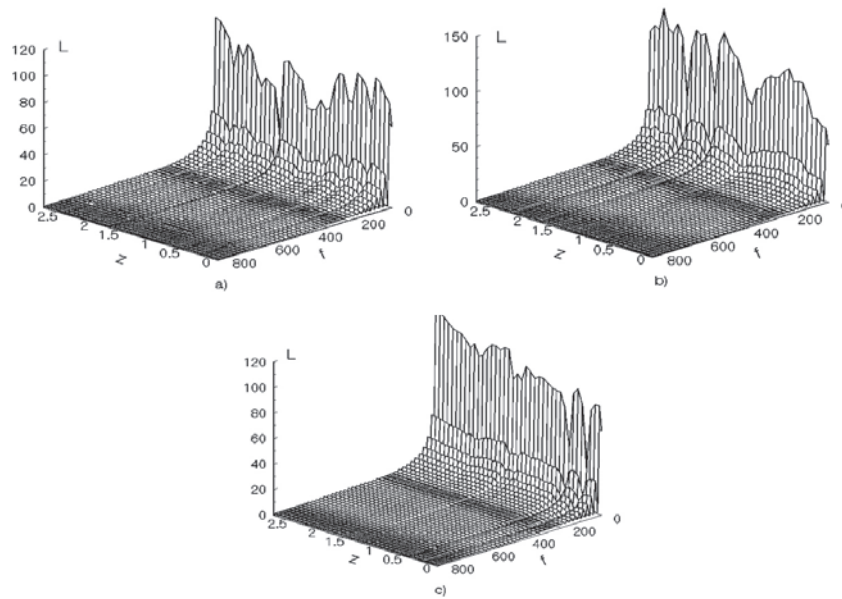


Рис. 8. Спектр шума,  $\delta = 0.15$ : а)  $\alpha = 30^\circ$ , б)  $\alpha = 45^\circ$ , в)  $\alpha = 60^\circ$

лопаті, які вносять істотний внесок в рівень шуму, що генерується взаємодією лопаті ротора і вихровою течією навколо неї. Рівень шуму значно перевершує (на 10-20дБ) шум на режимі роботи лопаті для  $0.1 < M < 0.4$ , а також шум літакової посадки гелікоптера. Характерною відмінністю є те, що основна енергія в спектрі сконцентрована в 7-8 перших гармоніках, в той час як для літако-

вої посадки гелікоптера високочастотна область також мала досить високий рівень у спектрі.

3. Виконаний порівняльний аналіз шуму на режимі «вихровий кільце» дозволяє ідентифікувати його серед інших режимів роботи ротора гелікоптера, отже, може бути використаний для подальшого вдосконалення системи безпеки польотів.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Щеглова В.М. Нестационарное обтекание несущего винта на режимах крутого планирования и вихревого кольца. *Учёные записки ЦАГИ*. Том XLIII. № 3. 2012. С. 51–68.
2. Макеев П.В., Шомов А.И. Численное моделирование режимов «вихревое кольцо» несущего винта вертолёта. *Труды МАИ*. Вып. 45. 2011. С. 1–20. URL: [www.mai.ru/science/trudy/](http://www.mai.ru/science/trudy/).
3. Игнаткин Ю.М., Макеев П.В., Шомов А.И. Численное моделирование интерференции между несущим и рулевым винтами, включая режим «вихревого кольца» несущего винта. *Труды МАИ*. Вып. 69. 2013. С. 1–25. URL: [www.mai.ru/science/trudy/](http://www.mai.ru/science/trudy/).
4. Wienczyslaw Stalewski and Katarzyna Surmacz. Investigations of Vortex ring state on helicopter main rotor based on computational methodology using URANS solver. *MATEC Web of Conferences 304, 02011*. 2019. URL: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201930402011>.
5. Банникова Е.Ю., Конторович В.М., Пославский С.А. Спиральность тороидального вихря с закруткой. *ЖЭТФ*. 2016. Том.149. Вып.4. С. 888–895.
6. Копьев В.Ф., Зайцев М.Ю., Остриков Н.Н., Денисов С.Л., Макашов С.Ю., Аникин В.А., Громов В.В. Об определении акустических характеристик моделей несущих вертолётных винтов на открытом стенде. *Акустический журнал*. 2016. Том 62. № 6. С. 725–730.
7. Копьев В.Ф., Зайцев В.В., Воронцов В.И., Карабасов С.А., Аникин В.А. Расчёт шума несущего винта вертолёта и его экспериментальная проверка на режиме висения. *Акустический журнал*. 2017. Том 63. № 6. С. 651–664.
8. Chen Peter C., Barder James D., Evens Robert A.D., and Niemczuk John. Blade-vortex interaction noise reduction with active twist smart rotor technology. *Smart Mater.Struct.* 2001. no. 10. P. 77–85.
9. Booth Earl R., Wilbur Jr., Matthew L. Acoustic Aspects of Active-twist Rotor control. *American Helicopter Society 58-th Annual Forum, Montreal, Canada, June 11-14, 2002*. P. 15.
10. Booth, E.R., and Wilbur, J.L. Acoustics Aspects of Active-Twist Rotor Control. *Journal of American Helicopter Society*. 2004. Vol. 49, no. 1. P. 3–10.

11. Лукьянов П.В. Особенности генерации BVI-шума при самолётной посадке вертолѐта. *Вісник Запорізького національного університету. Сер.: Математичне моделювання і прикладна механіка.* 2018. № 2. С. 73–88. DOI: 26661/2413-6549-2018-2-08.
12. Лукьянов П.В. Снижение BVI-шума ротора вертолѐта с помощью лопасти с двойным изгибом. *Вісник Черкаського університету. Сер.: Прикладна математика. Інформатика.* 2017. № 1-2. С. 50–64.
13. Лукьянов П.В. Влияние закругления конца лопасти на шум взаимодействия вихрь-лопасть. *Акустичний вісник.* 2015. № 2(17). С. 23–37.
14. Лукьянов П.В. Об одном численно-аналитическом подходе к решению задачи генерации звука тонким крылом. Часть II. Схема применения для нестационарных задач. *Акустичний вісник.* 2012. № 3(15). С. 45–52.
15. Лукьянов П.В. Об одной модели аэроакустики сжимаемого газа. Часть II. Шум близкого взаимодействия вихря-лопасти вертолѐта. *Акустичний вісник.* 2013-2014. № 3(16). С. 31–40.
16. Лук'янов Петро В. Генерація звуку взаємодії вихорів Тейлора і Скуллі з лопаттю змінної товщини. *Наукові вісті НТТУ «КПІ». Сер. фіз.-мат. науки.* 2014. № 4. С. 139–145.

#### REFERENCES

1. Shcheglova, V.M. (2012) Nestatsionaroye obtekanie nesushchego vinta na rezhymakh krutogo planirovaniya a vikhrevogo koltsa [Unsteady flow around the main rotor in steep gliding and vortex ring modes]. *Uchenye zapiski TsAGI*, tom XLIII, no.3, pp.51-58.
2. Makeyev, P.V., Shomov, A.I. (2011) Chislennoye modelirovanie rezhymov «vikhrevoe koltso» nesushchego vinta vertolyota [Numerical simulation of the «vortex ring» modes of the helicopter main rotor]. *«Trudy MAI»*, vol.45, pp.1-20. Retrieved from: [www.mai.ru/science/trudy/](http://www.mai.ru/science/trudy/).
3. Ignatkin, Yu.M., Makeyev, P.V., Shomov A.I. (2013) Chislennoye modelirovanie interferentsii mezhdu nesushchim I rulevym vintami, vklyu chaya rezhym «vikhrevogo koltsa» nesushchego vinta [Numerical modeling of the interference between the main rotor and the tail rotor, including the rotor vortex ring mode]. *«Trudy MAI»*, vol.69, pp.1-25. Retrieved from: [www.mai.ru/science/trudy/](http://www.mai.ru/science/trudy/).
4. Stalewski, Wienczyslaw and Surmacz, Katarzyna (2019). Investigations of Vortex ring state on helicopter main rotor based on computational methodology using URANS solver. *MATEC Web of Conferences 304, 02011*. Retrieved from: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201930402011>.
5. Bannikova, Ye., Yu., Kontorovich, V.M., S.A. (2016) Poslavsky. Spiralnost' toroidal'nogo vikhrya s zakrutkoy [Spirality of a twisted toroidal vortex]. *Zh.E.T.F.*, vol.49, no. 4, pp.888-895.
6. Kopyov, V.F., Zaytsev, M.Yu., Vorotsov, V.I., Karabasov, S.A., Anikin, V.A. (2017) Rashchyet shuma nesushchego vinta vertolyota I ego eksperimental'naya proverka na rezhyme viseniya [Calculation of helicopter main rotor noise and its experimental verification in hover mode]. *Akustichesky zhurnal*, vol. 63, no.6, pp.651-664.
7. Kopyov, V.F., Zaytsev, M.Yu., Ostrikov, N.N., Denisov, S.L., Makashov, S.Yu., Anikin V.A., Gromov V.V. (2016) Ob opredelenii akusticheskikh kharakteristik modeley nesushchskh verolyotnykh vintov na otkrytom stende [On the determination of the acoustic characteristics of models of helicopter rotor propellers on an open stand]. *Akustichesky zhurnal*, vol. 62, no.6, pp.725-730.
8. Chen, Peter C., Barder, James D., Evens, Robert A.D. (2001), and Niemczuk, John. Blade-vortex interaction noise reduction with active twist smart rotor technology. *Smart Mater.Struct.* no.10, pp.77-85.
9. Booth, Earl R., Wilbur, Jr., Matthew, L (2002). Acoustic Aspects of Active-twist Rotor control. *American Helicopter Society 58-th Annual Forum*, Montreal, Canada, June 11-14, pp.15.
10. Booth, E.R., and Wilbur, J.L. (2004). Acoustics Aspects of Active-Twist Rotor Control. *Journal of American Helicopter Society*, vol.49, N1, pp.3-10.
11. Lukianov, P.V. (2018). The peculiarities of BVI-noise generation at helicopter airplane landing. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, no.2, pp.73-88.
12. Lukianov, P.V. (2017). Helicopter rotor BVI-noise reduction by twice-bent blade. *Visnyk Cherkaskoho universytety. Ser.: Applied mathematics. Informatics.* No.2, pp.50-64.
13. Lukianov, P.V. (2015). The effect of blade tip truncation on the BVI-noise level. *Akustychnyi visnyk*, vol.17, no.2, pp.23-37. Retrieved from: <http://dspase.nuv.gov.ua/handle/123456789/116240>.
14. Lukianov, P.V. (2015). On one numerically-analytical approach to solving of a problem on sound generation by a thin wing. Part II. A schematic of application to non-stationary problems. *Akustychnyi visnyk*. Vol.15, no.3, pp.45-52. Retrieved from: <http://dspase.nuv.gov.ua/handle/123456789/116180>.
15. Lukianov, P.V. (2013-2014). On one model for aeroacoustics of viscous compressible gas. Part II. Noise of the near helicopter blade-vortex interaction. vol.16, no.3, pp.31-40. Retrieved from: <http://dspase.nuv.gov.ua/handle/123456789/116180>.
16. Lukianov, P.V. (2014). Sound generation by Taylor & Scully vortex with blade of variable thin. *Research bulletin of the National Technical University of Ukraine «KPI». ser.: Physics and Mathematics.* no.4, pp.139-145.



## РОЗДІЛ II. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

УДК 519.688:519.6:514.752

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-2-05>

### СУЧАСНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ У КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ

**Гоменюк С. І.**

*доктор технічних наук, професор*  
*Запорізький національний університет*  
*вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна*  
*orcid.org/0000-0001-7340-5947*  
*mf@znu.edu.ua*

**Калюжняк А. В.**

*аспірантка*  
*Запорізький національний університет*  
*вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна*  
*orcid.org/0000-0002-4837-7566*  
*anastasia.korgun@gmail.com*

**Ключові слова:** САПР,  
*R-функції, B-rep, F-rep,*  
*геометричне моделювання,*  
*дискретна модель.*

У даний час розвиток автоматизації проєктних робіт неможливий без удосконалення наявних методів геометричного моделювання. Без використання комп'ютерного обладнання неможливо створити або проєктувати складні механізми, машини, споруди. Відомі методи геометричного моделювання вирішують проблеми побудови складних форм без високих матеріальних та часових затрат. Але дані методи готові вирішити не всі проблеми, та інколи використання того чи іншого підходу неможливе, оскільки реалізація становиться занадто складною. У даній статті розглядаються відомі методи геометричного моделювання, опис форм за допомогою теоретико-множинних операцій. Одним із найважливіших елементів чисельного аналізу напружено-деформованого стану проєктованих інженерних конструкцій та споруд є побудова їх адекватної геометричної моделі. Створення дискретної геометричної моделі конструкції нетипової форми є дуже складним і трудомістким завданням, що вимагає наявності формальних методів опису топології плоских та просторових геометричних областей, придатних для подальшого використання в автоматичних процедурах дискретизації кінцевих елементів заданого типу. Одним із перспективних варіантів є використання R-функцій, але його застосування на практиці викликає певні складності

## MODERN METHODS FOR GEOMETRIC OBJECT MODELING IN COMPUTER SYSTEMS

**Gomenyk S. I.**

*Doctor of Technology, Professor  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-7340-5947  
mf@znu.edu.ua*

**Kaliuzhniak A. V.**

*Postgraduate Student  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-4837-7566  
anastasia.korgun@gmail.com*

**Key words:** *CAD, R-function, B-rep, F-rep, geometric modeling, discrete model.*

Currently, the development of design work automation is impossible without improving existing geometric modeling methods. The non-usage of appropriate computer equipment prevents from creating or designing complex mechanisms, machines or structures. Already existing methods of geometric modelling can solve the issues with constructing complex shapes without great material and time consumption. However, the given techniques are not able to fulfil all the assigned tasks. However, the given techniques are not able to fulfil all the assigned tasks. Moreover, applying particular approaches becomes impossible as their implementation can present a complex issue. In the given article we consider existing methods of geometric modeling and shape description by means of set-theoretic operations. One of the key elements of the numerical analysis of the stress-strain state of the designed engineering structures is their adequate geometric model construction.

Creation of the discrete geometric model of an atypical shape construction is a very complex and time-consuming task, which requires implementation of methods of description the topology of flat and spatial geometric domains, applicable in further automatic sampling procedures of finite elements of a given type. One of the most forward-looking options is to implement R-functions. However, its practical application causes some difficulties particularly in folding an implicitly assigned function, which can be rather time-consuming in its turn.

**Вступ.** Розвиток сучасних технологій, а саме машинобудування та будівництва неможливо уявити сьогодні без ефективних методів геометричного моделювання та складних конструкцій в інтегрованих системах. Таким чином, автоматизація побудови геометричних моделей складних інженерних об'єктів з наступною дискретизацією на кінцеві елементи є дуже складним і актуальним завданням. У статті виконано аналіз основних способів опису топології геометричних об'єктів, їх переваги та недоліки, а також запропоновані шляхи усунення проблем.

Існуючі методи геометричного моделювання дозволяють створювати геометричні об'єкти, визначати їх різноманітні параметри, а також отримувати необхідні графічні зображення на

комп'ютері. Функціональні можливості моделювання реалізуються за допомогою програмного забезпечення, яке взаємодіє в процесі роботи з графічними пристроями вводу/виводу. Сьогоднішній рівень обчислювальної техніки постійно сприяє оптимізації або автоматизації систем. Автоматизація, яка здійснюється за допомогою проєктувальних робіт з використанням інформаційних технологій, застосовується в трьох напрямках, а саме:

- 1) виконання проєктних робіт створення креслень;
- 2) аналіз властивостей об'єкта, характеристик та особливостей;
- 3) виконання додаткових задач, які не підлягають формалізації.

Головною областю застосування інтегрованих систем в геометричному моделюванні є системи автоматизованого проектування, які використовуються для автоматизації інженерних робіт. За допомогою даних систем створюються геометричні об'єкти на площині та в тривимірному просторі з метою синтезу та аналізу просторових форм проєктованих виробів. Однією з основних проблем при практичній реалізації є автоматизація побудови складних форм геометричних моделей з найменшою похибкою.

**1. Огляд методів сучасних систем.** Щоб реалізувати будь-яку геометричну модель, необхідно врахувати, до якої із двох груп за характеристикою відносити її: розміри об'єкта, його форма (макрогеометрія) та відхилення форм, шорсткість (мікрогеометрія).

Процес геометричного моделювання прийнято розділяти на три етапи:

- 1) simulation;
- 2) modeling;
- 3) visualization.

Сучасні інформаційні системи використовують 4 методи геометричного моделювання:

- 1) каркасне моделювання;
- 2) моделювання твердого тіла;
- 3) точкове моделювання;
- 4) моделювання складних поверхней [1].

Проте відомі також іще 4 класичних методів подання схем:

- 5) інженерне креслення;
- 6) подання екземплярами;
- 7) подання розгорткою;
- 8) подання у вигляді дискретної моделі.

Найбільш зручним та універсальним є функціональний підхід побудови об'єктів так як за його допомоги можна легко побудувати модель будь-якої складності. R-функції дозволяють за допомогою математичних відношень в неявному вигляді описати будь-яку модель.

У даній статті розглядаються методи геометричного моделювання та підходи до швидкої візуалізації геометричних моделей складних систем.

В каркасній моделі лежать моделі, які мають форму у вигляді кінцевої множини ліній, які описують ребра об'єктів, з'єднаних між собою в точках (вершинах). На криволінійній поверхні лінії нагадують форму каркасу.

Каркасне представлення часто використовується не для моделювання, а для відображення моделей як один із видів візуалізації. Дані моделі потребують менше пам'яті, ніж інші моделі, але придатні для вирішення задач побудови простих форм. Тому що дана модель представляє собою моделювання низького рівня і має ряд важливих обмежень, які виникають за недостатньою інформацією про грані, заключеними між лініями,

і неможливість виділити внутрішню і зовнішню область зображення твердого об'єму тіла [1].

Найбільш частими обмеженнями каркасної моделі є:

1) каркасна модель не несе інформації про поверхні, що обмежують об'єкт, що обумовлює неможливість виявлення небажаних взаємодій між гранями об'єкта;

2) складність при визначенні внутрішньої частини моделі і отриманні однозначної проєкції. Не маючи відомостей про зовнішню і внутрішню поверхні, неможливо розрахувати масу об'єкта або створити сітку для кінцево-елементного аналізу;

3) ускладнене автоматичне видалення невидимих ліній і поверхонь;

4) операцію з видалення невидимих ліній можна виконати тільки вручну із застосуванням команд редагування кожної окремої лінії, але результат цієї роботи рівносильний руйнуванню всієї створеної каркасної конструкції, оскільки лінії невидимі в одному вигляді і видимі в іншому;

5) неможливість розпізнання криволінійних граней. Бічні поверхні циліндричної форми реально не мають ребер, хоча на зображенні є деякі уявні ребра, які обмежують такі поверхні. Розташування цих уявних ребер змінюється залежно від напрямку виду, тому силуети розпізнаються як елементи каркасної моделі і не відображаються на них. Щоб спробувати уявити криволінійні грані, вдаються до ряду умовностей (інтерпретуючи поверхню циліндра плоскими гранями);

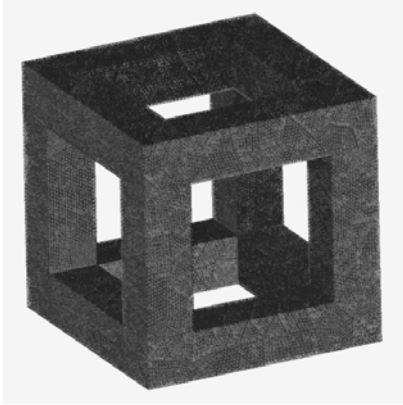
6) складності при обчисленні фізичних характеристик внаслідок нестачі даних про поверхні.

У даний час для підвищення ефективності праці створюваних об'єктів і якості розроблюваної продукції замість плоского проєкційного креслення широко застосовують тривимірне твердотільне моделювання, яке працює з об'єктами, що складаються з замкнутого контуру або моноліту (solid). Воно забезпечує повний однозначний опис 3D геометричної форми [2].

При твердотільному способі основними інструментами є тіла, обмежені поверхнями, а головні операції – булеві: об'єднання, доповнення, перетин. В цьому випадку конструктор повинен представити форму простими тілами (куля, циліндр, піраміда) і більш складними тілами. При цьому тверде тіло – це область тривимірного простору, що складається з однорідного матеріалу і обмежена замкнутою поверхнею. Вона може бути сформована з однієї або декількох граней, що стикаються (рис.1). Але даний метод має свої переваги і недоліки.

Тривимірна твердотільна модель складається з окремих об'ємних елементів, які утворюють в ній грані, ребра і вершини. Процес побудови твердотільної моделі складається з послідовного додавання і (або) видалення матеріалу деталі.

За допомогою тривимірної моделі може бути отримана не тільки інформація про координати будь-якої точки на поверхні, але і інші характеристики: диференціальні (нормалі, кривизни і т. д.) або інтегральні (об'єм, площа поверхні, моменти інерції). На її основі завжди можна отримати плоскі моделі: площини і розрізи.



**Рис. 1. Геометрична модель куба при твердотільному моделюванні**

Таким чином, під час реалізації всіх видів тривимірного проектування в сучасних САПР має місце використання параметричного підходу на основі історії побудови та наявність лише обмежених можливостей варіаційного проектування.

Твердотільне 3D-моделювання на основі ієрархічного дерева побудови дозволяє значно полегшити та прискорити створення САД-моделі. Тривимірне моделювання набуло широкого поширення в наукомістких галузях (автомобільної, авіаційної, космічної, суднобудівної та ін.), воно підвищує ефективність проектування. Проте недолік твердотільного моделювання в тому, що вхідні в модель примітиви дуже прості – складні поверхні або створити дизайн з його використанням важко.

Твердотільна модель має таку ієрархію зверху вниз: тіло – грані – ребра – вершини. Існують методи, які використовуються в прикладних системах, їх поділять на такі класи:

- 1) метод граничного представлення (B-Rep);
- 2) метод функціонального представлення (F-Rep).

Метод граничного представлення геометрії B-Rep (Boundary representation) дозволяє створювати точне, а не наближене уявлення геометричного твердого тіла. Всі поверхні і вершини присутні в B-Rep моделі явно [3]. Проте необхідно більше пам'яті, але не потрібно майже ніяких обчислень для створення зображення. Цей метод вимагає, щоб користувач задав контури або грані об'єкта, а також ескізи різних видів об'єкта, вка-

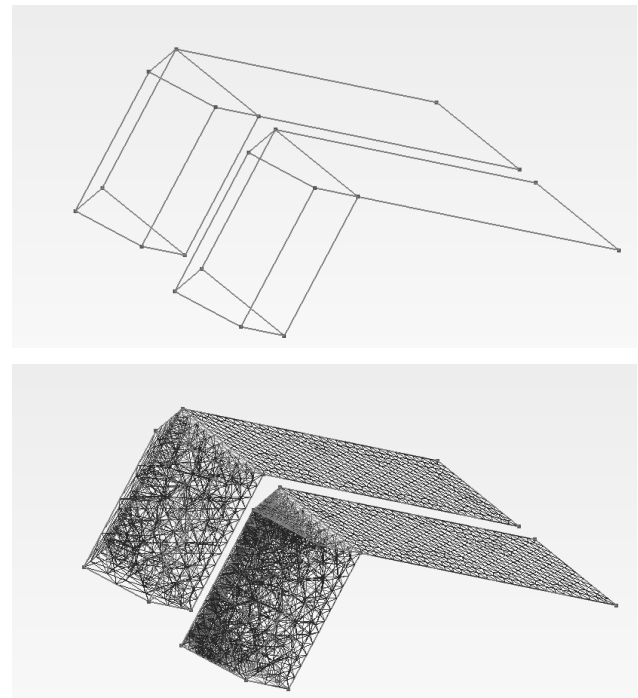
завши лінії зв'язку між ними, щоб можна було встановити однозначну відповідність. Розглянемо приклад побудови куба в програмі геометричного моделювання Gmsh. Для того, щоб створити будь-яку геометричну модель, необхідно спочатку задати координати точок простору, ліній, замкнуті контури ліній, поверхню, замкнуті контури поверхні, об'єм та фізичну сутність.

Для побудови двовимірної або тривимірної сітки використовують алгоритми, які задаються в гео файлі (рис.2). 2D: Mesh.Algorithm = 1 (Адаптивний – за замовчуванням), 5 (Делоне), 6 (Фронтальний) 3D: Mesh.Algorithm3D = 1 (Делоне – за замовчуванням), 4 (Фронтальний).

Також можлива оптимізація сітки для підвищення якості елементів:

Mesh.Optimize = 1 (за замовчуванням - 0)

Mesh.OptimizeNetgen = 1 (за замовчуванням - 0).



**Рис. 2. Побудова тривимірної моделі та сітки в програмі Gmsh**

**2. Опис моделі за допомогою функціонального моделювання.** Функціональне представлення (F-Rep) представляє геометричний об'єкт як єдине ціле за допомогою однієї дійсної неперервної функції декількох змінних у вигляді  $F(x) > 0$ . Традиційне використання неявних функцій в комп'ютерній графіці охоплює: скелетон (skeletons), що генерують скалярні поля або так звані «краплинні об'єкти» (blobby objects); примітиви конструктивної геометрії твердих тіл (CSG); алгебраїчні відсіки поверхонь в граничному поданні[4].



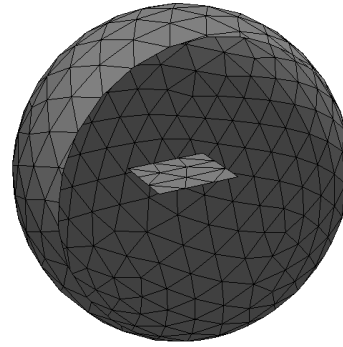
F-гер є спробою створити більш загальну схему моделювання з використанням дійсних функцій. F-гер об'єднує багато різних за своєю природою моделей, зокрема класичні неявно задані примітиви, об'єкти на базі скелетон, геометрико-множинні тверді тіла, воксельні об'єкти, параметричні і процедурні моделі. Кожна операція повинна бути замкнута на представленні, генеруючи в якості результату безперервну дійсну функцію [5].

Розглянемо геометричні об'єкти як замкнуті підмножини евклідового простору  $E_n$ , яка визначена і описується функцією  $F(x) > 0$ , де  $F$  – безперервна дійсна функція, і  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – задається координатними змінними в  $E_n$ . Також  $F(x) > 0$  задає точки всередині об'єкта,  $F(x) = 0$  – точки на кордоні і  $F(x) < 0$  – точки, що лежать зовні і не належать об'єкту. Функції можуть бути визначені формулами або за допомогою обчислювальних процедур. Таким чином, певні геометричні об'єкти не представляють регуляризовані конструктивні тверді тіла. Вони можуть мати границі з ділянками, які не суміжними з внутрішньою частиною об'єкта. Загальне визначення об'єкта задається в багатовимірному просторі, що дозволяє вибирати простір потрібної розмірності в кожному конкретному випадку.

Під час проектування конкретної системи моделювання може бути визначена деяка кінцева множина об'єктів-примітивів.

Проте концептуально це не обов'язково, адже це дозволяє мати порожню множину об'єктів в припущенні, що користувач визначить їх сам або в символічному вигляді за допомогою формул або за допомогою обчислювальних процедур. Даний підхід дозволяє уніфікувати дуже різні види моделей твердих тіл за умови, що вдається знайти функціональні уявлення для них або конвертувати вже наявні об'єкти в бажану форму. Таким чином, можливо спільно використовувати в одній моделі примітиви конструктивної геометрії, неявно задані об'єкти вільної форми, тверді тіла і воксельні об'єкти.

Теоретико-множинні операції визначаються в аналітичному вигляді за допомогою розробленої В.Л. Рвачевим теорії R-функцій [2]. При цьому результуючий об'єкт включає граничні точки, що відповідає операціям трізначної логіки над предикатом приналежності точки. Існує кілька систем R-функцій, кожна з яких має властивість замкнутості. Найбільш часто використовується система  $f_1$  і  $f_2$  – функції, що визначають вихідні геометричні об'єкти (рис. 3):



Netgen 6.2-dev

**Рис. 3. Побудований геометричний об'єкт за допомогою теоретико-множинних операцій в програмі Netgen**

1) об'єднання:

$$f_1 | f_2 = \frac{1}{1+a} \cdot (f_1 + f_2 + \sqrt{f_{12} + f_{22} - 2 \cdot a \cdot f_1 \cdot f_2});$$

2) перетин:

$$f_1 \& f_2 = \frac{1}{1+a} \cdot (f_1 + f_2 - \sqrt{f_{12} + f_{22} - 2 \cdot a \cdot f_1 \cdot f_2});$$

3) логічне доповнення:

$$\sim f = -f;$$

4) віднімання:

$$f_1 f_2 = f_1 \& (-f_2).$$

Тут,  $a = a(f_1, f_2)$  – деяка неперервна функція, така що:

$$-1 < a(f_1, f_2) \leq 1,$$

$$a(f_1, f_2) = a(f_2, f_1) = a(-f_1, f_2) = a(f_1, -f_2).$$

5) декартовий добуток (дана операція збільшує розмірність) за допомогою R-функцій виражається:

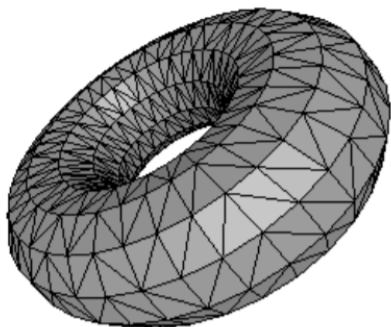
$$f_3(x, y, z) = f_1(x, y) \& f_2(z),$$

де  $f_1(x, y)$  описує твердотільне тіло і  $f_2(z) = (z - z_1) \& (z_2 - z)$  описує відрізок.

Одним із альтернативних способів опису геометричних моделей складними областями є використання серединної поверхні (medial surfaces) [3].  $[z_1, z_2]$  вздовж осі  $z$ . Серединною поверхнею об'єкта називається геометричне місце точок, що є центрами всіх вписаних усередину об'єкта сфер максимального радіусу. Така сфера має стосуватися, як мінімум, двох точок межі області, інакше має існувати інша вписана сфера (рис. 4):

$$\omega = R^2 - \left[ \left( \sqrt{x^2 + y^2} - r \right) \cdot \cos \left( r \cdot \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) + z \cdot \sin \left( r \cdot \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) \right]^2 + \left[ \left( \sqrt{x^2 - y^2} - r \right) \cdot \sin \left( r \cdot \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) + z \cdot \cos \left( r \cdot \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) \right]^2$$

Але хоч даний метод є більш універсальним порівняно з іншими, він має похибку створення форми об'єкта залежно від заданої функції. Тому сьогодні постає завдання покращити роботу даного геометричного моделювання, щоб похибка



**Рис. 4.** Дискретна модель геометричної форми

була найменшою. Необхідність розробити універсальний інструмент побудови геометричних моделей з найменшою похибкою та затратами часу показує актуальність проблеми.

Отже, на підставі виконаного аналізу можна зробити висновок про те, що застосування відомих підходів геометричного моделювання не

завжди дозволяє ефективно й зручно описувати топологію геометричних областей складних форм саме в тривимірному моделюванні. Одним із перспективних варіантів є використання R-функцій, але його застосування на практиці викликає певні складності саме в неявно заданій функції, що потребує великої затрати часу.

Застосування математичного апарату R-функцій дозволяє суттєво спростити процес опису топологічних моделей геометричних областей практично будь-якої складності.

При цьому такий підхід позбавлений більшої частини недоліків вищеписаних стандартних методів геометричного моделювання. Крім того, за рахунок спрощення пошуку опорних вузлів на поверхні вихідного об'єкта стає простішою процедура автоматичної генерації кінцево-елементного розбиття вихідної конструкції. Тому необхідно розробити алгоритм, який буде пришвидшувати роботу геометричного моделювання за допомогою функціонального підходу.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Голованов М.М. Геометричне моделювання. Київ : Наук. думка, 2019. 272 с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев : Наук. думка, 1982. 106 с.
3. Lorenzen W. E., Cline H. E. Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/37402.37422>.
4. Agoston M. K. Computer Graphics and Geometric Modelling. London, Springer-Verlag, 2005. 400 p.
5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Sixth edition. Butterworth-Heinemann, 2016. 753 p.
6. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. URL: <https://gmsh.info/>.
7. Healy K. Data Visualization : A Practical Introduction. New Jersey : Princeton University Press, 2018. 296 p.
8. Curcic M. Modern Fortran: Building efficient parallel applications. USA : Manning Publications, 2020. 416 p.

#### REFERENCES

1. Golovanov M.M. (2019) *Geometric modeling*. Kyiv. Nayk. Dymka.
2. Rvachev V.L. (1982) *R-function theory and some of its applications*. Kyiv: Nayk. Dymka.
3. Lorenzen W. E., Cline H. E. (2017) *Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm*. URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/37402.37422>
4. Agoston M. K. (2005) *Computer Graphics and Geometric Modelling*. London, Springer-Verlag.
5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. (2016) *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Sixth edition*. Butterworth-Heinemann.
6. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. URL: <https://gmsh.info/>
7. Healy K. (2018) *Data Visualization : A Practical Introduction*. New Jersey: Princeton University Press.
8. Curcic M. (2020) *Modern Fortran: Building efficient parallel applications*. USA: Manning Publications.

UDC 519.6  
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-2-06>

## USING BLOCKCHAIN TECHNOLOGY IN VOTING

**Kolesnikov V. A.**

*Ph.D., Professor at the Department of Computer Science*

*Sumy State University*

*Rymaskogo-Korsakova str., 2, Sumy, Ukraine*

*orcid.org/0000-0002-1991-3614*

*v.kolesnikov@cs.sumdu.edu.ua*

**Key words:** *blockchain, Smart Contracts, election, Web application.*

This paper discusses blockchain technology and its associated tools, considers the application of this technology, presents a Web application for voting in elections as an example of the application and discusses advantages and disadvantages of blockchain technology in general and in regard to voting in particular. Blockchain technology was developed for first cryptocurrency known as Bitcoin as its transaction mechanism. It is decentralized in nature and nowadays found its place in many areas including financial and insurance markets. The technology allows to validate user entries, safeguard them preventing the possibility of a change, preserve them for historic purposes and secure against unauthorized access due to its decentralized nature. Users have full access to their records at all times. Information is reliable and up-to-date. When a transaction record is created, all necessary information about the transaction is created and placed in there and public key – private key mechanism is employed. The transaction record is then broadcast to every party in the network, verified and recorded in the public ledger. Blockchain technology can be utilized in voting. Conventional voting systems are usually centralized. That poses security and efficiency limitations. Electoral fraud is another issue in elections and results in lower voter turnout that in turn makes it easier to commit fraud. Fairness is a big aspect in elections in many countries. The characteristics of blockchain technology mentioned above nicely fit for this purpose. We developed a voting Web application as a proof of concept. Instead of money as in the case with cryptocurrency we use a single vote as a digital asset transaction. Validation, safeguarding and preservation of entries are all needed in voting and will be guaranteed by the blockchain technology. Our application is designed as a decentralized Web voting system, which provides a public and transparent voting process while protecting the anonymity of voter's identity, the privacy of data transmission and verifiability of ballots. We also consider current limitations of the technology related to voting. Some major disadvantages of using a blockchain technology are access to a computing device and required technological maturity. These problems might exclude some population from voting. A natural solution is to use a mixed approach wherein paper ballots are provided as a backup on a few polling stations. Nevertheless, blockchain technology is appropriate for using as an election mechanism, which was showcased as a proof of concept in this paper.

---

## ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ BLOCKCHAIN У ГОЛОСУВАННІ

**Колесніков В. А.**

*Ph.D., професор кафедри комп'ютерних наук  
Сумський державний університет  
вул. Римського-Корсакова 2, Суми, Україна  
orcid.org/0000-0002-1991-3614  
v.kolesnikov@cs.sumdu.edu.ua*

**Ключові слова:** *blockchain, Smart Contracts, вибори, веб-додаток.*

У роботі обговорюється технологія blockchain та пов'язані з цією технологією інструменти, розглядається застосування цієї технології, представлено веб-додаток для голосування на виборах як приклад застосування технології та обговорюються переваги та недоліки технології blockchain загалом та стосовно голосування зокрема. Технологія blockchain була розроблена для першої криптовалюти, відомої як Bitcoin, як механізм транзакцій. Ця технологія має децентралізований характер і сьогодні знайшла своє застосування у багатьох сферах, включаючи фінансовий та страховий ринки. Технологія blockchain дозволяє перевіряти записи користувачів, захищати їх, запобігаючи можливості зміни, зберігати їх для історичних рекордів та захищати ці записи від несанкціонованого доступу через її децентралізовану природу. Користувачі завжди мають повний доступ до своїх записів транзакцій. Інформація достовірна та актуальна. Коли створюється запис транзакції, вся необхідна інформація про транзакцію розміщується в рекорді, а також використовується механізм публічного ключа – приватного ключа. Потім запис транзакції передається кожній стороні в мережі, перевіряється та записується в публічну книгу записів. Технологію blockchain можна використовувати при голосуванні. Системи голосування зазвичай є централізованими. Це обмежує безпеку та ефективність. Шахрайство на виборах – це ще одна проблема на виборах, що призводить до зниження явки виборців, що, в свою чергу, полегшує вчинення шахрайства. Прозорість – це важлива і бажана характеристика виборів у багатьох країнах. Згадані вище характеристики технології blockchain добре підходять для цієї мети. Ми розробили веб-додаток для голосування як доказ концепції. Замість грошей, як у випадку з криптовалютою, ми використовуємо один голос як транзакцію цифрового активу. Перевірка та збереження записів, необхідні під час голосування, гарантовані технологією blockchain. Наш додаток розроблений як децентралізована система веб-голосування, яка забезпечує публічний та прозорий процес голосування, захищаючи при цьому анонімність особи виборця, конфіденційність передачі даних та можливість перевірки бюлетенів. Ми також враховуємо поточні обмеження технології, пов'язані з голосуванням. Деякі основні недоліки використання технології blockchain – це доступ до обчислювального пристрою та необхідна технологічна зрілість. Ці проблеми можуть виключити частину населення від голосування. Природним рішенням є використання змішаного підходу, за якого паперові бюлетені надаються як резервні на кількох виборчих дільницях. Тим не менш, технологія blockchain є доцільною у використанні як механізм виборів, що було продемонстровано як доказ концепції в цій роботі.

### 1. Introduction

Blockchain is a decentralized transaction and data management technology that today is revolutionizing many areas [1–3]. It was first developed for Bitcoin cryptocurrency transactions in 2008 and hence cemented its place in the financial sector [1].

Blockchain technology is also used in insurance, notary public and even music industry [1–2]. In this paper we discuss the strong sides of blockchain technology, apply it to voting and present a voting web application based on the technology, and finally consider the current limitations of the technology



in general and those limitations that are specific to voting in particular.

A review of blockchain-based voting systems has been performed in recent years [4–10]. For example, a classification of blockchain voting systems was performed based on the types of blockchain used, the consensus approaches used, and the scale of participants. In our approach, we surveyed existing blockchain technologies and its tools, selected the minimum set of such instruments, and applied them to the problem of voting.

## 2. Blockchain technology

We will briefly describe the blockchain technology using a financial example presented in Fig. 1. At the same time, we note that this technology is applicable to any digital asset transaction. In the scenario shown in Fig. 1 Alice wants to transfer some money to Bob. Alice initiates the transfer. A transaction record known as a “Block” with all necessary information about the transaction is created using public key – private key mechanism. The transaction record is then broadcast to every party in the network, verified and recorded in the public ledger. The verification step ensures that the sender owns the money and that the sender has sufficient amount in his account. The transaction is finalized and the money is transferred.

Next, we list advantages of blockchain technology:

- Validation of entries.
- Safeguarding of entries (transactions cannot be changed).

- Preservation of historic records (transactions cannot be deleted, users have access to the history of transactions).

- Decentralized nature (not connected to a centralized database).

- Users have full access to and control over their data.

- Reliable and up-to-date data.

- It can withstand and repel unauthorized access due to its decentralized nature.

- Difficult to hack due to its decentralized nature.

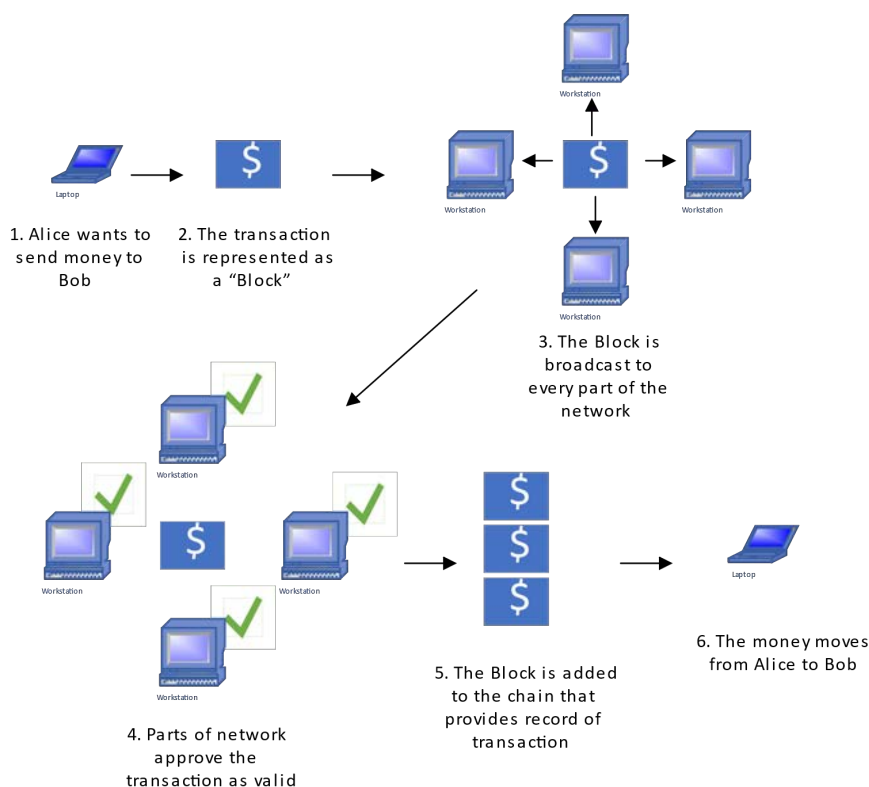
- No central authority is needed to verify transactions.

These advantages make the blockchain technology applicable to and desirable for many areas. We consider next the problem of fair voting and the application of this technology to the area of voting.

## 3. Application of blockchain technology to voting

### 3.1. The problem of voting

People often express their opinion or choice through voting. For example, in many countries presidents are elected by the country’s citizens through voting. Presidents of academic universities or academic department chairs are also often selected according to the results of voting by appropriate constituents. Conventional voting systems are usually centralized. That poses security and efficiency limitations. Electoral fraud is another issue in elections and results in lower voter turnout that in turn makes it easier to



**Fig. 1. Blockchain technology**

commit fraud. Fairness is a big aspect in elections in many countries. Hence, there has been a trend of moving to decentralized voting systems. Blockchain technology seem to fit nicely here as a solution.

### 3.2. Application of blockchain technology – a voting Web application

Our earlier example about a financial transaction can be modified to be used for voting. Instead of money we can use a single vote as a digital asset transaction. Validation, safeguarding and preservation of entries are all needed in voting and will be guaranteed by the blockchain technology.

We aimed at designing a decentralized Web voting system, which provides a public and transparent voting process while protecting the anonymity of voter's identity, the privacy of data transmission and verifiability of ballots.

The proposed solution is divided into a Front End layer and a Back End layer. The Front End layer is used by voters during the election phase to log in and cast their votes on a mobile device or a computer. The Back End layer is connected to Ganache, a personal blockchain for Ethereum development, and to the Truffle framework, a Smart Contracts testing network that uses the Ethereum Virtual Machine (EVM). Smart Contracts are used together with blockchain technology to trigger actions when some preprogrammed conditions are triggered and are automatically enforced by computer protocols. To code the trigger events, we use Solidity, an object-oriented programming language for writing Smart Contracts. Solidity was designed to work with blockchain platforms like Ganache or Ethereum. As a gateway to our blockchain application, we use MetaMask tool. As the development environment, we use Visual Studio along with Node.js as a JavaScript runtime.

The front end was developed for a fictitious national election in Nigeria with two candidates.

Since it is a proof of concept, we decided to show the tally of votes in the application itself for ease of testing.

During the election, those who are legible to vote log on to the website to register with their designated cryptographic addresses (see Fig. 2).

Then, through utilizing MetaMask, the application performs a verification process of those who are participating in the voting to verify that they're indeed eligible to vote (see Fig. 3).

Next, users participate in the electoral process by choosing a candidate (see Fig. 4). This process is guided by Smart Contracts tool.

The result of the voting is recorded and locked until voting is concluded. After the election is over, the number of votes is counted and presented (see Fig. 5).

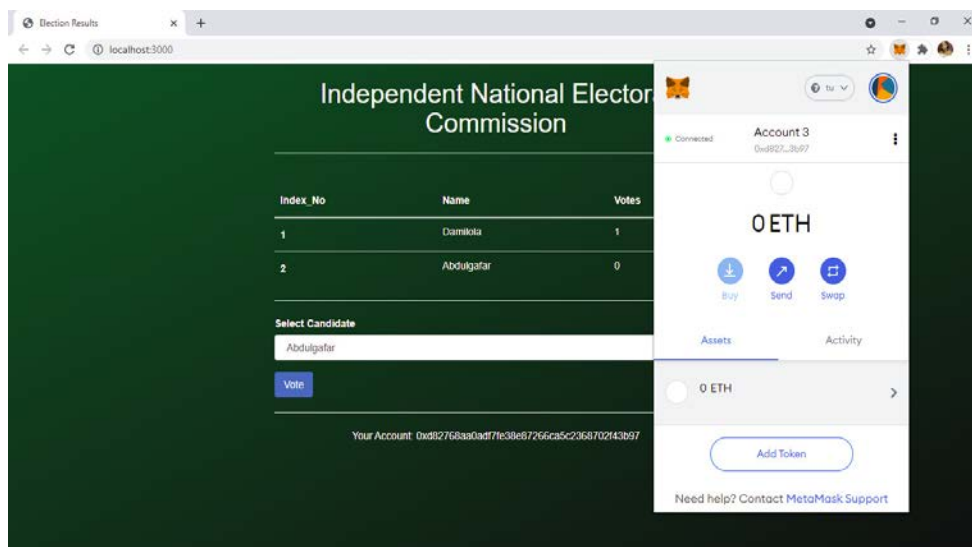
### 4. Discussion

The proposed Web application for elections is based on blockchain technology and Smart Contracts and provides an easily accessible voting system while also verifying the voters eligibility to cast their votes and securely protecting the casted votes. The use of underlying technology can offer multiple benefits in the electoral sphere, some of which are:

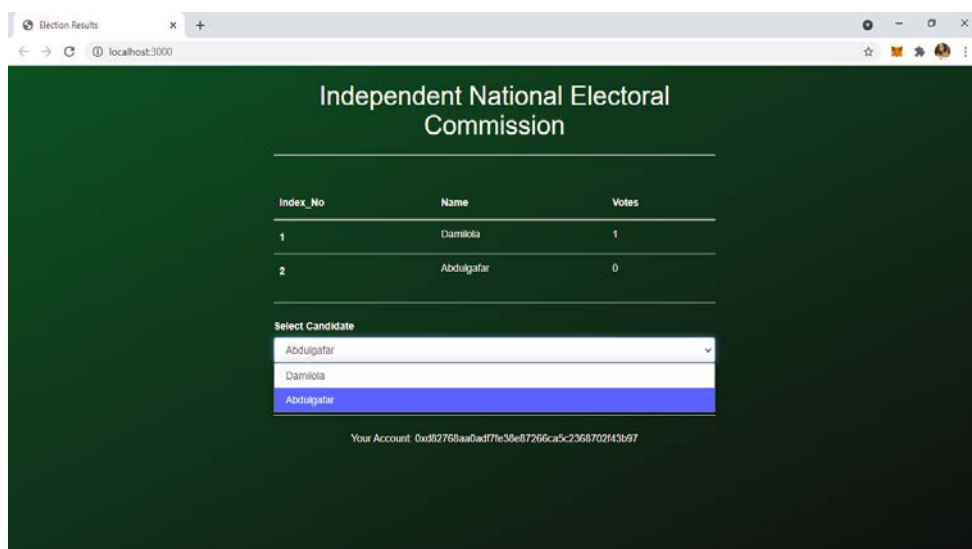
- The casted votes would be safely and securely stored in the blockchain ledger. This eliminates any form of manipulation or tampering, for example, the deletion of legitimate votes or the addition of illegitimate votes.
- The casting of votes and tallying of the votes would be a lot quicker while also providing better transparency and accuracy.
- Not many polling stations need to be set up since the voters can vote on their computers or mobile devices. This helps to reduce the cost associated with setting up and running polling stations.



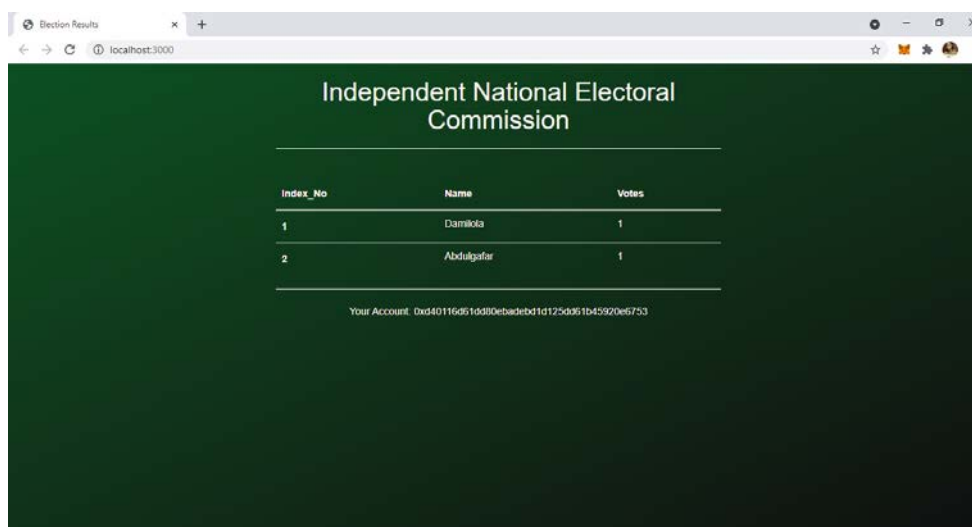
Fig. 2. Voting web application screen



**Fig. 3. User MetaMask verification**



**Fig. 4. Voting choice**



**Fig. 5. The results of voting**

– Voters are not required to leave their homes or place of work to cast their votes. This eliminates the need for declaring a public holiday on the day of elections.

– More younger people might participate in elections as the result of utilizing technology accessible through smart phones and computers.

There are certainly some major disadvantages of such an approach, among which are:

– Access to a computing device is required.

– Technological maturity is necessary.

These problems might and will exclude some population from voting. A natural solution is to use a mixed approach wherein paper ballots are provided as a backup on a few polling stations.

All in all, blockchain technology is appropriate for using as an election mechanism, which was showcased as a proof of concept in this paper.

## REFERENCES

1. Zheng, Z., Xie, S., Dai, H., Chen, X. & Wang, H. (2017). An Overview of Blockchain Technology: Architecture, Consensus, and Future Trends, 2017 IEEE International Congress on Big Data, pp. 557–564. doi: 10.1109/BigDataCongress.2017.85.
2. Ali, M. S., Vecchio, M., Pincheira, M., Dolui, K., Antonelli, F. & Rehmani, M. H. (2018). Applications of blockchains in the Internet of Things: A comprehensive survey. *IEEE Commun. Surv. Tutor.* Vol. 21, Issue 2, pp. 1676–1717.
3. Biryukov, A., Khovratovich, D. & Pustogarov, I. (2014). Deanonymisation of clients in Bitcoin P2P network. 2014 ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security. pp. 15–29.
4. Pawlak, M., Guziur, J. & Poniszewska-Marańda A. (2019). Voting Process with Blockchain Technology: Auditable Blockchain Voting System. *Advances in Intelligent Networking and Collaborative Systems. INCoS 2018. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*, Vol. 23. Springer. doi: 10.1007/978-3-319-98557-2\_21.
5. Khan, K. M., Arshad, J. & Khan, M. M. (2018). Secure Digital Voting System Based on Blockchain Technology. *International Journal of Electronic Government Research (IJEGR)* Vol. 14, Issue 1. doi: 0.4018/IJEGR.2018010103.
6. Hsiao, J. H., Tso, R., Chen, C. M. & Wu, M. E. (2018). Decentralized E-Voting Systems Based on the Blockchain Technology. *Advances in Computer Science and Ubiquitous Computing. CUTE 2017, CSA 2017. Lecture Notes in Electrical Engineering*, Vol. 474. Springer. doi: 10.1007/978-981-10-7605-3\_50.
7. Hjálmarsson, F. Þ., Hreiðarsson, G. K., Hamdaqa, M. & Hjálmtýsson, G. (2018). Blockchain-Based E-Voting System. *IEEE 11th International Conference on Cloud Computing (CLOUD 2018)*, pp. 983–986. doi: 10.1109/CLOUD.2018.00151.
8. Huang, J., Debiao, H., Obaidat, M. S., Vijayakumar, P., Luo, M. & Choo, K.-K. R. (2021). The Application of the Blockchain Technology in Voting Systems. *ACM Computing Surveys*, Vol. 54, Issue 3, pp. 1–28. doi: 10.1145/3439725.
9. Çabuk, U., Adiguzel, E. & Karaarslan, E. (2018). A survey on feasibility and suitability of blockchain techniques for the E-voting systems. *Int. J. Adv. Res. Comput. Commun. Eng.* Vol. 7, Issue 03, pp. 124–134. doi: 10.17148/IJARCCE.2018.7324.
10. Ayed, A. B. (2017). A conceptual secure blockchain-based electronic voting system. *Int. J. Netw. Secur. Appl.* Vol. 9, Issue 3.



## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У ЖУРНАЛІ «COMPUTER SCIENCE AND APPLIED MATHEMATICS»

### Вимоги до оформлення статей:

До друку приймаються статті, що мають наукову і практичну цінність. Автор має право представити тільки одну наукову статтю в один номер, яка раніше не публікувалася. Автор несе відповідальність за оригінальність тексту статті, точність наведених фактів, цитат, статистичних даних, власних назв, географічних назв та інших відомостей, а також за те, що в матеріалах не містяться дані, що не підлягають відкритій публікації. Редакція не несе відповідальності за викладену в статті інформацію. Остаточне рішення про публікацію ухвалюється редакцією, яка також залишає за собою право на додаткове рецензування, редагування і відхилення статей.

### Технічні вимоги:

- до друку приймаються статті українською, російською та англійською мовами;
- електронний варіант статті у форматі \*.doc, \*.docx або \*.rtf, підготовлений у текстовому редакторі Microsoft Word;
- формат А4 через 1,5 інтервал;
- шрифт Times New Roman, розмір 14;
- поля: ліве – 3 см, праве – 1,5 см, верхнє, нижнє – 2 см.

### Структура статті:

- рядок 1** – УДК (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 2** – назва тематичного розділу (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 3** – назва статті (вирівнювання по центру, напівжирний шрифт, великі літери);
- рядок 4** – прізвище та ініціали автора статті; науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри (вирівнювання по центру);
- рядок 5** – місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора (вирівнювання по центру).

Якщо автор не має orcid-коду, його можна отримати за посиланням <https://orcid.org/>

**абзац 1** – розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані мовою, як і уся стаття;

**абзац 2** – назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, **розширена** анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані **англійською мовою**. Переклад англійською мовою повинен бути достовірним (не машинним).

У випадку, якщо стаття не українською мовою, обов'язково подаються назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані українською мовою.

Основний текст статті повинен відповідати структурі IMRAD (Introduction, Methods, Results, and Discussion) + Literature Review:

Вступ – короткий вступ (1-2 сторінки), який повинен дати відповіді на запитання «чому проведено дослідження?», «які об'єкт, мета й основні гіпотези дослідження?»; Огляд літератури - розділ, що містить аналіз останніх публікацій за темою дослідження (переважна більшість публікацій повинна бути за останні 5 років, самоцитовання не більше 30% від кількості літературних джерел), з огляду літератури читачі повинні мати змогу оцінити стан проблеми у світі, аналіз літературних джерел повинен мати критичний характер;

Методи – розділ, який може включати 2-3 рівнозначних за обсягом параграфи, що висвітлюють основні методи, підходи, алгоритми дослідження;

Результати – розділ, який містить аналіз основних результатів дослідження (графіки, таблиці з чисельними даними, загалом, результати обчислювальних експериментів); Дискусія – розділ (до 1 сторінки), який також можна назвати Висновок або Висновки, що містить порівняння отриманих результатів з результатами інших досліджень (як власних так інших авторів), а також дає відповідь на запитання «які перспективи дослідження?», формулює наукову новизну результатів.

Література розміщується після статті у порядку згадування; друкується через 1,5 інтервал, 14 розміром, шрифтом Times New Roman і оформляється у відповідності вимог міждержавного стандарту ДСТУ 8302:2015.

Посилання на літературу в тексті слід давати в квадратних дужках, наприклад, [2, с. 25; 5, с. 33], в яких перша цифра вказує порядковий номер джерела в списку літератури, а друга – відповідну сторінку в цьому джерелі; одне джерело (без сторінок) відокремлюється від іншого крапкою з комою [3; 4; 6; 8; 12; 15].

Наприкінці статті розміщується транслітерована і перекладена англійською версія літератури (References), оформлена згідно з вимогами APA (American Psychological Association).

**Порядок подання матеріалів:**

Для публікації статті у фаховому науковому виданні необхідно надіслати на електронну адресу редакції [editor@physmath.journalsofznu.zp.ua](mailto:editor@physmath.journalsofznu.zp.ua) наступні матеріали:

**добре вчитану наукову статтю**, обов'язково оформлену відповідно до вказаних вимог;  
**інформаційну довідку про автора**;  
відскановане **підтвердження сплати коштів** (реквізити для сплати надаються автору після вдалого проходження рецензування).

*Зразок оформлення назви електронних файлів:* Іванов\_І.І.\_стаття, Іванов\_І.І.\_оплата.

**Адреса та контактні дані:**

Редакція журналу «Computer Science and Applied Mathematics»  
вул. Жуковського 66, корп. 1, ауд. 216, м. Запоріжжя, Україна, 69060

**Телефон:** +38 (066) 53 57 687

**Електронна пошта:** [editor@physmath.journalsofznu.zp.ua](mailto:editor@physmath.journalsofznu.zp.ua)

**Офіційний сайт:** [www.journalsofznu.zp.ua/index.php/phys-math](http://www.journalsofznu.zp.ua/index.php/phys-math)

## НОТАТКИ

Науковий журнал

**Computer Science and Applied Mathematics**

№ 2, 2021

Комп'ютерна верстка – Н.С. Кузнєцова  
Коректура – В.В. Ізак

Підписано до друку: 23.02.2022.  
Формат 60x84/8. Гарнітура Times New Roman.  
Папір офсет. Цифровий друк. Ум. друк. арк. 6,98.  
Замов. № 0322/116. Наклад 100 прим.

Видавництво і друкарня – Видавничий дім «Гельветика»  
69063, Україна, м. Запоріжжя, вул. Олександрівська, 84, оф. 414  
Телефони: +38 (048) 709 38 69, +38 (095) 934 48 28, +38 (097) 723 06 08  
E-mail: [mailbox@helvetica.ua](mailto:mailbox@helvetica.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 6424 від 04.10.2018 р.