

ISSN 2786-6254 (Print)  
ISSN 2786-6262 (Online)

Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет

Заснований  
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію  
друкованого засобу масової інформації  
Серія КВ № 24766-14706Р від 25 березня 2021 р.

## Computer Science and Applied Mathematics

**Адреса редакції:**  
вул. Жуковського 66, корп. 1, ауд. 216,  
м. Запоріжжя, Україна, 69060

**Телефон**  
для довідок:  
+38 066 53 57 687

**№ 2, 2022**



Видавничий дім  
«Гельветика»  
2022

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Internet вченою радою ЗНУ (протокол засідання № 5 від 22.12.2022 р.)

На підставі Наказу Міністерства освіти і науки України № 886 від 02.07.2020 р. (додаток 4) журнал включено до Переліку наукових фахових видань України категорії «Б» у галузях знань 11 Математика та статистика і 12 Інформаційні технології (113 – Прикладна математика, 121 – Інженерія програмного забезпечення, 122 – Комп’ютерні науки).

До 25 березня 2021 р. журнал виходив під назвою «Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки».

У зв’язку зі зміною назви журналу було внесено відповідні зміни до Переліку наукових фахових видань України на підставі Наказу Міністерства освіти та науки України № 735 від 29.06.2021 р. (додаток 3).

Журнал індексується в міжнародній наукометричній базі даних Index Copernicus

Статті у виданні перевірені на наявність плагіату за допомогою програмного забезпечення StrikePlagiarism.com від польської компанії Plagiat.pl.

#### **РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

Гоменюк С. І.	–	доктор технічних наук, професор, головний редактор (Україна)
Гребенюк С. М.	–	доктор технічних наук, професор (Україна)
Гришак В. З.	–	доктор технічних наук, професор (Україна)
Єрмолаєв В. А.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Кеберле Н. Г.	–	кандидат технічних наук, доцент (Україна)
Клименко М. І.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Козін І. В.	–	доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
Кудін О. В.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Панасенко Є. В.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Стеганцев Є. В.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
Чопоров С. В.	–	доктор технічних наук, професор (Україна)
Шило Г. М.	–	доктор технічних наук, доцент (Україна)
Breslavsky I.	–	PhD in Mechanics, Docent (Канада)
Djakon R.	–	Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician (Латвія)
Gerasimov T.	–	PhD in Mathematics, Docent (Німеччина)
Kolakowski Z.	–	Doctor of Science in Engineering, Professor (Польща)
Нарзуллаєв У. Х.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Узбекистан)
Швидка С. П.	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Словаччина)

# ЗМІСТ

## РОЗДІЛ I. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

- Леонт'єва В. В., Кондрат'єва Н. О., Єременко А. О.**  
ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРНОЇ ВЛАСТИВОСТІ КЕРОВАНОСТІ ЗА ВИХОДОМ  
ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ У РАЗІ ДІЇ  
ДИСИПАТИВНИХ СИЛ ТА СИЛ РАДІАЛЬНОЇ КОРЕКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ  
ПЕВНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЗМІШАНОГО ВИДУ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ.....5
- Нечипоренко Н. О., Коротунова О. В.**  
ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ МАЮТЬ НЕ БІЛЬШЕ  $m$   
ВНУТРІШНІХ ЕКСТРЕМУМІВ.....18
- Пожусь В. І., Плечун В. В., Спиця О. Г., Кончинська Є. О.**  
ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ СТАЛІ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТУ ІЗ ПОРИСТОЮ  
МАТРИЦЕЮ ПРИ ПОВЗДОВЖНЬОМУ РОЗТЯГНЕННІ.....27
- Пожусь В. І., Артеменко А. О., Клименко М. І., Скрипник К. В.**  
ГОМОГЕНІЗАЦІЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО КОМПОЗИТА  
У РАЗІ ПОВЗДОВЖНЬОГО РОЗТЯГУ.....35

## РОЗДІЛ II. ІНЖЕНЕРІЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

- Лимаренко Ю. О., Попівший В. І., Новак В. В., Михайлуца О. М., Скрипник І. А.**  
ПОРІВНЯЛЬНЕ ТЕСТУВАННЯ ЗАСТОСУНКІВ, РОЗРОБЛЕНИХ  
НА ОСНОВІ МОНОЛІТНОЇ ТА МІКРОСЕРВІСНОЇ АРХІТЕКТУР.....43
- Лобода П. П., Старовіт І. С.**  
МОДЕЛЬ БАЗИ ДАНИХ ТА ЗНАНЬ ЦИФРОВОГО ДВІЙНИКА  
НОВОГО БЕЗПЕЧНОГО КОНФАЙНМЕНТУ ЧАЕС.....50
- Онуфрієнко Д. М., Тараненко Ю. К.**  
АДАПТИВНА ЧИСЕЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПОРОГОВИХ МЕТОДІВ  
ВЕЙВЛЕТ-ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА КРИТЕРІЄМ МІНІМУМУ  
СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОЇ ПОХИБКИ.....58

## РОЗДІЛ III. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

- Гоменюк С. І., Козуб В. Ю.**  
АЛГОРИТМ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ У МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....65
- Калюжняк А. В., Мильцев О. М.**  
ЗАСТОСУВАННЯ БІБЛІОТЕКИ МРІ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ АЛГОРИТМУ  
«МАРШИРУЮЧИХ КУБІВ».....72

# CONTENTS

## SECTION I. APPLIED MATHEMATICS

<b>Leontieva V. V., Kondratieva N. A., Eremenko A. A.</b> <i>STUDY OF THE STRUCTURAL PROPERTY OF OUTPUT CONTROLABILITY OF A DYNAMICAL SYSTEM WITH A GYROSCOPIC STRUCTURE UNDER THE ACTION OF DISSIPATIVE FORCES AND FORCES OF RADIAL CORRECTION WITH A CERTAIN NONLINEAR EXTERNAL DISTURBANCES OF MIXED TYPE</i> .....	5
<b>Nechyporenko N. O., Korotunova O. V.</b> <i>ON ONE PROBLEM OF RECOVERING FUNCTIONS WHICH HAVE NO MORE THAN <math>m</math> INTERNAL EXTREMUMS</i> .....	18
<b>Pozhuev V. I., Plechun V. V., Spytzia O. G., Konchynska E. O.</b> <i>EFFECTIVE ELASTIC CONSTANTS OF A FIBER COMPOSITE WITH POROUS MATRIX IN LONGITUDINAL STRETCH</i> .....	27
<b>Pozhuev V. I., Artemenko A. O., Klymenko M. I., Scrypnyk K. V.</b> <i>HOMOGENIZATION OF VISCOELASTIC COMPOSITE DURING LONGITUDINAL STRETCHING</i> .....	35

## SECTION II. SOFTWARE ENGINEERING

<b>Lymarenko Y. O., Popivshchy V. I., Novak V. V., Mikhailutsa O. M., Skrypnyk I. A.</b> <i>COMPARATIVE TESTING OF APPLICATIONS DEVELOPED BASED ON MONOLITHIC AND MICROSERVICES ARCHITECTURES</i> .....	43
<b>Loboda P. P., Starovit I. S.</b> <i>DATABASE AND KNOWLEDGE MODEL OF THE DIGITAL TWIN OF THE NEW SAFE CONFINEMENT OF THE CHNPP</i> .....	50
<b>Onufrienko D. M., Taranenko Yu. K.</b> <i>ADAPTIVE NUMERICAL OPTIMIZATION OF WAVELET FILTERING METHODS BASED ON THE CRITERION OF THE MINIMUM MEAN SQUARE ERROR</i> .....	58

## SECTION III. COMPUTER SCIENCES

<b>Homeniuk S. I., Kozub V. Yu.</b> <i>ALGORITHM OF PARALLEL CALCULATIONS IN THE FINITE ELEMENT METHOD</i> .....	65
<b>Kaliuzhniak A. V., Myltsev O. M.</b> <i>APPLICATION OF THE MPI LIBRARY FOR COMPUTATION OF THE “MARCHING CUBES” ALGORITHM</i> .....	72

## РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 531.383

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2022-2-01>

### ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРНОЇ ВЛАСТИВОСТІ КЕРОВАНОСТІ ЗА ВИХОДОМ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ У РАЗІ ДІЇ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ ТА СИЛ РАДІАЛЬНОЇ КОРЕКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ПЕВНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЗМІШАНОГО ВИДУ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

**Леонтєва В. В.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-9863-9712](https://orcid.org/0000-0002-9863-9712)  
[vleonteva15@gmail.com](mailto:vleonteva15@gmail.com)*

**Кондрат'єва Н. О.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-6994-2536](https://orcid.org/0000-0002-6994-2536)  
[nkondr100@gmail.com](mailto:nkondr100@gmail.com)*

**Єременко А. О.**

*аспірант кафедри фундаментальної та прикладної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0001-5965-0196](https://orcid.org/0000-0001-5965-0196)  
[artem.eremenko.9797@gmail.com](mailto:artem.eremenko.9797@gmail.com)*

**Ключові слова:** динамічна система, гіроскопічна система, зовнішні збурення, модель у змінних стану, керованість за виходом, матриця керованості за виходом.

Дослідження присвячене питанню аналізу керованості за виходом динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, динаміка руху якої описується за допомогою побудованих за вихідними математичними моделями «вхід – вихід» математичних моделей «вхід – стан – вихід» для  $n$ - та  $2n$ -мірної розмірності простору стану, які являють собою системи лінійних неоднорідних диференціальних та алгебраїчних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною, та кожна з яких подається у двох формах залежно від існування та відсутності можливості об'єднання зовнішніх збурень, що діють на досліджувану систему. За кожною з одержаних форм моделей «вхід – стан – вихід» проведено аналіз керованості за виходом системи, на основі якого встановлено, що для аналізованої системи виконуються умови повної керованості відносно вихідних змінних, що означає, що область керованості за виходом системи співпадає зі всім простором виходу системи, у який може бути переведено вихід системи за кінцевий час, причому на результати аналізу керованості за виходом

досліджуваної системи впливають тільки результати дослідження однієї з отриманих матриць керованості, складеної для випадку наявної можливості об'єднання збурюючих сил у моделі в  $n$ - або  $2n$ -мірному просторі стану системи. Використання інших форм подання моделей системи виявилось менш затребуваним у зв'язку з ускладненням відповідної матриці керованості за виходом поряд зі співпадінням отриманих результатів для зазначених моделей. Отримані результати є справедливими для систем будь-якої розмірності і можуть бути використані для розширення використання досліджуваних математичних моделей та підвищення динамічних властивостей досліджуваного об'єкта.

---

**STUDY OF THE STRUCTURAL PROPERTY OF OUTPUT CONTROLLABILITY OF A DYNAMICAL SYSTEM WITH A GYROSCOPIC STRUCTURE UNDER THE ACTION OF DISSIPATIVE FORCES AND FORCES OF RADIAL CORRECTION WITH A CERTAIN NONLINEAR EXTERNAL DISTURBANCES OF MIXED TYPE**

**Leontieva V. V.**

*PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor;  
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics  
Zaporizhzhya National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-9863-9712  
vleonteva15@gmail.com*

**Kondratieva N. A.**

*PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor;  
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics  
Zaporizhzhya National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-6994-2536  
nkondr100@gmail.com*

**Eremenko A. A.**

*Postgraduate Student at the Department of Fundamental and Applied Mathematics  
Zaporizhzhya National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-5965-0196  
artem.eremenko.9797@gmail.com*

**Key words:** *dynamical system, gyroscopic system, external disturbances, state variable model, output controllability of the system, output controllability matrix.*

The research refers to the issue of analyzing the output controllability of a dynamical system with a gyroscopic structure under the influence of dissipative and radial correction forces with a certain nonlinear external disturbances of mixed type, movement dynamics of which is described with the refined mathematical “input-output” models that are accepted for work as initial ones. For each of such models are constructed the “input-state-output” models in an  $n$ - and  $2n$ -dimensional state space that are presented in the form of linear non-homogeneous differential and algebraic equations with a compound nonlinear right-hand side and, depending from the certain physical limitations of the object, has two different forms of presentation – with the existing possibility (impossibility) of union of disturbing forces acting on the system. For each of obtained «input-state-output» models an analysis of the system’s output

controllability is carried out, according to which it is established that for the studied system the conditions of complete controllability in terms of output variables are satisfied, that means that the systems' output controllability subspace coincides with the entire systems' output space, into which the output of the system can be transferred in a finite time interval. Besides, it was observed that the results of the analysis of the output controllability are affected only by the results of the study of one of the obtained output controllability matrices compiled for the case of the existing possibility of combining disturbing forces in the  $n$ - and  $2n$ -dimensional state-space models. The use of another form of representation of the models is turned out to be less popular due to the complication of the corresponding output controllability matrix along with the coincidence of the results obtained for the specified models.

## ВСТУП

Одним із найбільш актуальних напрямів розвитку сучасної науки та техніки виступає застосування методів теорії автоматичного керування й регулювання у розробці нових, удосконалення наявних математичних моделей гіроскопічних систем та аналіз стану їх основних характеристик під дією зовнішніх збурень [1–5]. Доцільність керування й регулювання таких систем аргументується тим, що за їх використанням стає можливим змінити досліджувану систему (процес) таким чином, щоб характеризовувані нею показники відповідали певним встановленим відповідно до досліджуваної системи вимогам, наприклад, у випадках, коли є потреба у стабілізації нестійкої системи, покращенні динамічних її властивостей, а також немає можливості корегувати вхідні параметри моделі руху й поведінки досліджуваної складної системи і т. ін. [1; 6–8]. При цьому задачі керування й регулювання складними системами є розв'язуваними у разі виконання певних умов, які можуть бути знайдено безпосередньо під час здійснення додаткових проміжних обчислень для розв'язання задач, що своєю чергою є часто досить трудомістким та не завжди зручним процесом [6; 9]. На практиці часто для окреслених цілей використовують так звані критерії існування розв'язків задач керування й регулювання, за якими судження про існування відповідних розв'язків можна отримати, спираючись лише на вихідні дані задач. Для розв'язання саме задач керування й регулювання основними з таких критеріїв виступають критерії керованості системи – ефективні умови, що дозволяють судити про існування розв'язків досліджуваних проблем керування й регулювання за елементами вхідних матриць математичних моделей, що описують динаміку руху досліджуваних систем. При цьому для дослідження гіроскопічних систем практичний інтерес являє окремий вид структурної властивості системи – керованість за вихідним вектором змінних математичної моделі її руху. Важливість аналізу такої властивості пояснюється тим, що в умовах, коли

досліджувані об'єкти та процеси, що функціонують особливо в умовах параметричної невизначеності, характеризуються властивістю повної або часткової (неповної) керованості відносно вихідних (регульованих та вимірюваних) змінних, застосування до досліджуваних об'єктів (процесів) окремих видів керування та/або регулювання вихідними змінними стають можливими, а отже, значно збільшується можливість побудови працездатних систем автоматичного керування (регулювання) із мінімальним ризиком отримання помилкових результатів [8; 10–14]. Крім того, володіння властивістю керованості за виходом стає й передумовою декомпозиційного синтезу задач стабілізації, стеження та спостереження відносно вихідних змінних, що в умовах сьогодення є особливо актуальним. Проведення ж аналізу керованості за вихідними змінними гіроскопічних систем, яким присвячене дослідження цієї роботи, має також визначальне значення у розв'язанні задач спостереження, ідентифікації, модального, програмного, оптимального, адаптивного та інших видів керування й регулювання [4; 15–18]. Результати аналізу володіння зазначеною властивістю в повному, частковому або нульовому обсязі (у разі некерованості системи) для функціонуючого під дією зовнішніх збурень такого об'єкта, дадуть можливість визначення й оцінки основних напрямів побудови таких коригуючих пристроїв, які за рахунок коригування структури або параметрів (наприклад, коефіцієнтів посилення, сталих часу в моделях динаміки і т.ін.) досліджуваної системи, забезпечили б приведення її динамічних властивостей та структурних особливостей до рівня бажаних з метою зняття значних обмежень на застосовувані методи й підходи керування й регулювання, а також зниження ймовірності погіршення техніко-економічних показників роботи системи. Саме з такою метою в цій роботі дослідження проблеми керованості за виходом проводиться для багатозв'язної динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного

нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, описуваних за допомогою лінеаризованих диференціальних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною.

### **МЕТА, ОБ'ЄКТ ТА ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ**

*Метою роботи* є дослідження виконання властивості керованості за виходом динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного змішаного виду зовнішніх збурень; визначення умов, за якими система є повністю та/або частково керованою й некерованою відносно вихідних змінних моделей системи.

*Об'єктом дослідження* в роботі виступають побудовані математичні моделі у змінних стану динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, які описуються системами лінійних неоднорідних векторно-матричних диференціальних та алгебраїчних рівнянь та які одержуються за побудованими моделями «вхід – вихід», що базуються на уточнених лінеаризованих неперервних математичних моделях досліджуваної динамічної системи.

*Предметом дослідження* є структурна властивість керованості динамічної системи з гіроскопічною структурою відносно вихідних змінних.

Для реалізації сформульованої мети були поставлені такі завдання:

- представлення уточнених лінеаризованих математичних моделей досліджуваної динамічної системи з гіроскопічною структурою у вигляді лінійних моделей «вхід – вихід» для випадків, коли враховується об'єднання зовнішніх збурень та їх відокремленість;

- виділення фазових змінних стану системи (описують або фізичні, або фізичні та додаткові, проміжні змінні системи) та функцій керування (описують нелінійного змішаного виду збурюючі сили, які діють на систему та можуть діяти за окремим відповідним законом збурення залежно від значень своїх коефіцієнтів) для різних розмірностей простору стану системи та випадків, коли враховується об'єднання зовнішніх збурень та їх відокремленість;

- зведення побудованих лінійних моделей «вхід – вихід» динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного змішаного виду зовнішніх збурень до математичних моделей «вхід – стан – вихід» (моделей у змінних стану), які дозволяють виробити підхід для розв'язання різних класів задач теорії керування з єдиних позицій, з урахуванням виділе-

них фазових змінних стану системи та функцій керування для вибраних розмірностей простору стану системи та окреслених випадків можливості об'єднання та відокремленості виділених зовнішніх збурень;

- побудова матриць керованості за виходом досліджуваної системи, поведінка якої описується отриманими математичними моделями «вхід – стан – вихід» у  $2n$ - та  $n$ -мірному просторах стану системи для випадків об'єднання й відокремленості зовнішніх збурень;

- проведення поелементного аналізу побудованих матриць керованості за виходом на відповідність алгебраїчному критерію повної керованості відносно вихідних змінних лінійної стаціонарної системи керування, описуваної отриманими в роботі векторно-матричними диференціальними й алгебраїчними рівняннями з матрицями сталих коефіцієнтів;

- визначення умов повної та/або часткової керованості й некерованості за виходом досліджуваної системи з гіроскопічною структурою за результатами проведеного аналізу матриць керованості відносно вихідних вимірюваних змінних моделей системи;

- формулювання загальних висновків за результатами проведеного в роботі дослідження та надання загальних рекомендацій у тому чи іншому випадку повної та/або часткової керованості та некерованості за виходом досліджуваної системи, а також за використанням побудованих моделей з урахуванням можливості об'єднання та відокремленості виділених зовнішніх збурень.

### **ПРОБЛЕМНО-ОРІЄНТОВАНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ ДОСЛІДЖУВАНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ**

Вихідними математичними моделями для проведення дослідження керованості за виходом у роботі виступають математичні моделі «вхід – вихід» динамічної системи з гіроскопічною структурою з урахуванням дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, які в загальному вигляді представляються у формі векторного співвідношення (змінна  $v$  має сутність неперервного часу)

$$y(v) = \delta(u(v)), \quad (1)$$

а для аналізованої системи з гіроскопічною структурою будуються за представленими в роботі [17] уточненими лінеаризованими неперервними математичними моделями досліджуваної динамічної системи та описуються системами лінійних неоднорідних векторно-матричних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами з урахуванням об'єднання зовнішніх збурень або їх відокремленості, відповідно видів



$$\begin{cases} Ay_1^{(iv)} + 2b\ddot{y}_1 + \frac{b^2 + H^2}{A}\ddot{y}_1 + 2\frac{kH}{A}\dot{y}_1 + \frac{k^2}{A}y_1 = \\ = \ddot{u}_1 - \ddot{u}_2 \sin \beta_{cep} + \frac{b}{A}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \sin \beta_{cep}) + \frac{H}{A}\dot{u}_3 + \frac{k}{A}u_3, \\ Ay_2^{(iv)} + 2b\ddot{y}_2 + \frac{b^2 + H^2}{A}\ddot{y}_2 + 2\frac{kH}{A}\dot{y}_2 + \frac{k^2}{A}y_2 = \\ = \ddot{u}_3 - \frac{H}{A}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \sin \beta_{cep}) + \frac{b}{A}\dot{u}_3 - \frac{k}{A}(u_1 - u_2 \sin \beta_{cep}), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} A\tilde{y}_1^{(iv)} + 2b\ddot{\tilde{y}}_1 + \frac{b^2 + H^2}{A}\ddot{\tilde{y}}_1 + 2\frac{kH}{A}\dot{\tilde{y}}_1 + \frac{k^2}{A}\tilde{y}_1 = \ddot{\tilde{u}}_1 + \frac{b}{A}\dot{\tilde{u}}_1 + \frac{H}{A}\dot{\tilde{u}}_3 + \frac{k}{A}u_3, \\ A\tilde{y}_2^{(iv)} + 2b\ddot{\tilde{y}}_2 + \frac{b^2 + H^2}{A}\ddot{\tilde{y}}_2 + 2\frac{kH}{A}\dot{\tilde{y}}_2 + \frac{k^2}{A}\tilde{y}_2 = \ddot{\tilde{u}}_3 - \frac{H}{A}\dot{\tilde{u}}_1 + \frac{b}{A}\dot{\tilde{u}}_3 - \frac{k}{A}\tilde{u}_1, \end{cases} \quad (3)$$

де  $A$  – екваторіальний момент інерції гіроскопічної системи;  $H$  – власний кінетичний момент;  $b$  – коефіцієнт сил опору;  $k$  – крутизна характеристики моментних датчиків;  $u_i = u_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ),  $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(t)$  – вхідні сигнали системи:

$$u_i(t) = g_i^0 + g_i^1 t + g_i^2 t^2 + g_i^3 \sin(\omega_i t + \varepsilon_i), \quad i = \overline{1,3},$$

$$\tilde{u}_i(t) = \tilde{g}_i^0 + \tilde{g}_i^1 t + \tilde{g}_i^2 t^2 + g_i^3 \sin(\omega_i t + \varepsilon_i) + \tilde{g}_2^3 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2);$$

$g_i^j, \omega_i, \varepsilon_i$  ( $i = \overline{1,3}, j = \overline{0,3}$ ),  $\tilde{g}_1^j = g_1^j - g_2^j \sin \beta_{cep}$  ( $j = \overline{0,2}$ ),  $\tilde{g}_2^3 = -g_2^3 \sin \beta_{cep}$  – відомі сталі;  $\sin \beta_{cep} = const$  – усереднене значення кута повороту  $\beta$ , отримане у разі здійснення лінеаризації вихідних рівнянь динамічної системи за умови припущення про його мале змінювання в часі у тригонометричних виразах моделі [3];  $y_i = y_i(t)$ ,  $\tilde{y}_i = \tilde{y}_i(t)$  ( $i = \overline{1,2}$ ) – вихідні сигнали гіроскопічної системи.

Представлені моделі «вхід – вихід», описувані диференціальними рівняннями (2), (3) (або в загальному поданні за співвідношенням (1)), являють собою моделі, що зв'язують відповідно відокремлені вхідні сигнали  $u_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$  досліджуваної системи та їх відповідні похідні  $u_i^{(j)}(t)$ ,  $i = \overline{1,3}, j = 1, 2$  (у системі (1)) або об'єднані вхідні сигнали  $\tilde{u}_i(t)$ ,  $u_3(t)$  та їх похідні  $\tilde{u}_i^{(j)}(t)$ ,  $u_3^{(j)}(t)$ ,  $j = 1, 2$  (у системі (2)) з вихідними сигналами відповідно  $y_i(t)$ ,  $i = \overline{1,2}$  (у системі (1)) або  $\tilde{y}_i(t)$ ,  $i = \overline{1,2}$  (у системі (2)) та їх відповідними похідними  $y_i^{(k)}(t)$ ,  $i = \overline{1,2}, k = \overline{1,4}$  (у системі (1)) або  $\tilde{y}_i^{(k)}(t)$ ,  $i = \overline{1,2}, k = \overline{1,4}$  (у системі (2)) на деякому часовому інтервалі  $t \in [t_0, t_k]$ , де  $t_0, t_k$  – початковий та кінцевий моменти часу аналізу досліджуваної системи. Такі моделі повністю визначають статичні та динамічні властивості системи керування, але поряд з цим під час здійснення синтезу та проведення аналізу систем керування, в тому числі й аналізу володіння системою властивості керованості (в будь-якому її тлумаченні), можуть не відображати деяких динамічних особливостей

системи. Це особливо помітно під час розгляду саме структурних властивостей динамічних систем. У такому випадку може виникнути необхідність розгляду функціонування досліджуваних систем у нових, можливо, більш зручних для аналізу координатах. Крім того, зазначені моделі «вхід – вихід» на системному рівні мають суттєвий недолік, що виявляється у неоднозначності відповідності виходу одному й тому самому входу [7; 9]. Зазначений недолік усувається шляхом проведення процедури параметризації співвідношення (1) або для досліджуваної системи відповідних рівнянь (2), (3) таким чином, щоб з'явилася можливість отримання представлення моделей у загальному вигляді у формі векторного співвідношення

$$y(v) = \delta(x(v), u(v)), \quad (4)$$

у якому вектор параметрів  $x$  виступає як вектор стану динамічної системи, який своєю чергою повністю знімає окреслену невизначеність відносин «вхід – вихід» динамічної системи та за допомогою якого можна зробити поведінку динамічної системи незалежною від передісторії в такий спосіб, що за відомого стану  $x(v_p)$  досліджуваної системи в деякий момент  $v = v_p$  рух системи при  $v - v_p \geq 0$  буде однозначно визначено заданим станом  $x(v_p)$  та вибраним сигналом керування  $u(v)$ . З урахуванням усіх окреслених вище особливостей та невраховувань моделей «вхід – вихід» насамперед у роботі ставиться задача переходу від зазначених моделей до моделей у змінних стану (моделей «вхід – стан – вихід»), для яких дослідження структурних властивостей системи, в тому числі й властивості керованості об'єкта за вихідними змінними, стає можливим. При цьому для здійснення переходу до математичних моделей досліджуваної системи у змінних стану слід зазначити, що в загальному випадку як такі математичні моделі досліджуваної динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень (для випадків об'єднання та відокремленості збурюючих сил) виступають шестикомпонентні макровектори відповідно видів

$$\Sigma = \{ U, X, Y, T, \lambda, \delta \}, \quad (4)$$

$$\tilde{\Sigma} = \{ \tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{T}, \tilde{\lambda}, \tilde{\delta} \}, \quad (5)$$

де  $U, \tilde{U}$  – множини миттєвих значень  $r$ -мірних вхідних керуючих впливів відповідно  $U \subset R^r$  та  $\tilde{U} \subset R^r$  системи;  $X, \tilde{X}$  – мно-

жини  $n$ -мірних станів відповідно  $X \subset R^n$  та  $\tilde{X} \subset R^n$  системи;  $Y, \tilde{Y}$  – множини миттєвих значень  $m$ -мірних виходів відповідно  $Y \subset R^m$  та  $\tilde{Y} \subset R^m$  системи;  $T$  – множина моментів часу, що утворюють інтервал керування та спостереження у системі;  $\lambda: X \times T \times U \times T \Rightarrow X$ ,  $\tilde{\lambda}: \tilde{X} \times T \times \tilde{U} \times T \Rightarrow \tilde{X}$  – функції переходу системи з деякого попереднього стану  $x$  (або  $\tilde{x}$ ) в момент  $\tau \in T$  у наступний стан  $x$  (або  $\tilde{x}$ ) у момент  $t$  за допомогою вхідного керуючого впливу відповідно  $U \times (\tau, t), (\tau, t) \in T$  та  $\tilde{U} \times (\tau, t), (\tau, t) \in T$ ;  $\delta: X \times T \times U \times T \Rightarrow Y$ ,  $\tilde{\delta}: \tilde{X} \times T \times \tilde{U} \times T \Rightarrow \tilde{Y}$  – функції виходу системи, які визначають правила отримання миттєвого значення виходу  $Y$  (або  $\tilde{Y}$ ) в момент  $t \in T$  у разі переходу системи з деякого попереднього стану  $x$  (або  $\tilde{x}$ ) у момент  $\tau \in T$  під впливом виділеного вхідного керуючого впливу  $U \times (\tau, t)$  (або  $\tilde{U} \times (\tau, t)$ ) за умови, що  $(\tau, t) \in T$ . При цьому для моделей досліджуваної системи, описуваними співвідношеннями (4) або (5), характерними є нескінченність множин  $U, \tilde{U}, X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}$ , континуальність множини  $T$  ( $T = \{t: t_0 \leq t \leq t_k\}$ ), подання функцій переходу  $\lambda, \tilde{\lambda}$  відповідно у виглядах  $\lambda: \dot{x}(t) = \lambda[x(t), u(t)]$ ,  $\tilde{\lambda}: \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{\lambda}[\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)]$  при  $x \in X \subset R^n$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X} \subset R^n$ ,  $u \in U \subset R^r$ ,  $\tilde{u} \in \tilde{U} \subset R^r$ , подання функцій виходу  $\delta, \tilde{\delta}$  відповідно у виглядах  $\delta: y(t) = \delta[x(t), u(t)]$ ,  $\tilde{\delta}: \tilde{y}(t) = \tilde{\delta}[\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)]$  при  $x \in X \subset R^n$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X} \subset R^n$ ,  $u \in U \subset R^r$ ,  $\tilde{u} \in \tilde{U} \subset R^r$ ,  $y \in Y \subset R^m$ ,  $\tilde{y} \in \tilde{Y} \subset R^m$ .

За вихідними неперервними моделями досліджуваної гіроскопічної системи, описуваними системами (1), (2) диференціальних рівнянь  $2n$ -го порядку, залежно від використовуваних підходів до обрання виду функцій  $\lambda, \delta$  (або  $\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}$ ) переходу від моделей «вхід – вихід» до моделей «вхід – стан – вихід», отримано моделі динамічної системи у змінних стану для різних випадків урахування представлення збуджуючих сил та різних розмірностей простору стану:

а) моделі в  $n$ -мірному просторі станів з урахуванням об'єднання зовнішніх збурень або їх відокремленості, описувані у векторно-матричній формі відповідними диференціальними та алгебраїчними рівняннями [17; 19]

$$\begin{cases} \lambda: \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t), \\ \delta: y(t) = \tilde{C}x(t), \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}: \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t), \\ \tilde{\delta}: \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), \end{cases} \quad (7)$$

де  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ ,  $\tilde{x}(t) = [\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t)]^T$  –  $n$ -мірні вектори стану системи;  $n$  – розмірність простору станів системи:  $n = 4$ ;  $u(t) = [N(t), R(t), L(t)]^T = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T$  –  $m$ -мірний вектор керування,  $m = 3$ ;  $\tilde{u}(t) = [N(t) - \sin \beta_{cep} R(t), L(t)]^T = [\tilde{u}_1(t), u_3(t)]^T$  –  $\tilde{m}$ -мірний вектор керування,  $\tilde{m} = 2$ ;  $N = N(t)$ ,  $L = L(t)$ ,  $R = R(t)$  – моменти зовнішніх сил, які діють на гіроскопічну систему відповідно вздовж зовнішньої, внутрішньої та головної осей системи та змінюються у часі відповідно до певного закону, зазвичай гармонійного [1; 3; 5; 17];  $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$ ,  $\tilde{y}(t) = [\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t)]^T$  –  $r$ -мірні вектори виходу системи,  $r = 2$ ;  $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}$  – матриця стану системи – основна матриця системи, структура якої визначає характер перехідної матриці стану та від якої залежить характер як вимушеного, так і вільного розв'язків систем;  $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}]_{n \times m}$ ,  $\tilde{\tilde{B}} = [\tilde{\tilde{b}}_{ij}]_{n \times \tilde{m}}$  – матриці керуючих впливів (передавання керування) системи, структура яких визначає характер зв'язку входу системи зі змінними стану;  $\tilde{C} = [\tilde{c}_{ij}]_{r \times n}$  – матриця виходу системи, структура якої визначає характер зв'язку між змінними стану та виходом системи; матриці  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{\tilde{B}}$ ,  $\tilde{C}$  визначаються таким чином:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{A} & -\frac{b}{A} & \frac{H}{A} \\ -\frac{k}{A} & 0 & -\frac{H}{A} & -\frac{b}{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & -\frac{\sin \beta_{cep}}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

б) моделі в  $2n$ -мірному просторі станів з урахуванням об'єднання зовнішніх збурень або їх відокремленості, описувані відповідними диференціальними й алгебраїчними векторно-матричними рівняннями:

$$\begin{cases} \bar{\lambda} : \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \\ \bar{\delta} : \bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t), \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \tilde{\lambda} : \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t), \\ \tilde{\delta} : \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), \end{cases} \quad (9)$$

де  $\bar{x}(t) = [\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_{2n}(t)]^T$ ,  $\tilde{x}(t) = [\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_{2n}(t)]^T$  –  $2n$ -мірні вектори стану системи;  $2n$  – розмірність простору стану:  $2n = 8$ ;  $u(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T$ ,  $\tilde{u}(t) = [\tilde{u}_1(t), u_3(t)]^T$  – відповідно  $m$ ,  $\tilde{m}$ -мірні вектори керування, аналогічні попереднім моделям,  $m = 3$ ,  $\tilde{m} = 2$ ;  $\bar{y}(t) = [\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)]^T$ ,  $\tilde{y}(t) = [\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t)]^T$  –  $r$ -мірні вектори виходу системи,  $r = 2$ ;  $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{2n \times 2n}$  – матриця стану;  $\bar{B} = [\bar{b}_{ij}]_{2n \times m}$ ,  $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}]_{2n \times \tilde{m}}$  – матриці вхідних керуючих впливів;  $\bar{C} = [\bar{c}_{ij}]_{r \times 2n}$  – матриця виходу; матриці  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\bar{C}$  визначаються у вигляді

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix};$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & -\frac{1}{A} \sin \beta_{\text{ср}} & 0 \\ \frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A} & -\left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) \sin \beta_{\text{ср}} & \frac{H}{A^2} \\ a_3 \left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) - \frac{a_2}{A} & \left(a_3 \left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) + \frac{a_2}{A}\right) \sin \beta_{\text{ср}} & \frac{k}{A^2} - a_3 \frac{H}{A^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \\ -\frac{H}{A^2} & \frac{H}{A^2} \sin \beta_{\text{ср}} & \frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A} \\ -\left(\frac{k}{A^2} - a_3 \frac{H}{A^2}\right) & \left(\frac{k}{A^2} - a_3 \frac{H}{A^2}\right) \sin \beta_{\text{ср}} & -a_3 \left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) - \frac{a_2}{A} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \\ \frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A} & \frac{H}{A^2} \\ -a_3 \left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) - \frac{a_2}{A} & \frac{k}{A^2} - a_3 \frac{H}{A^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \\ -\frac{H}{A^2} & \frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A} \\ -\left(\frac{k}{A^2} - a_3 \frac{H}{A^2}\right) & -a_3 \left(\frac{b}{A^2} - \frac{a_3}{A}\right) - \frac{a_2}{A} \end{bmatrix};$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$a_i$ ,  $i = \overline{0,3}$  – коефіцієнти характеристичного поліному матриці  $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}$ :  $a_0 = \frac{k^2}{A^2}$ ,  $a_1 = 2 \frac{kH}{A^2}$ ,  $a_2 = \frac{b^2 + H^2}{A^2}$ ,  $a_3 = 2 \frac{b}{A}$ .

Слід зазначити, що досліджувана система, динаміка руху якої описується поданими системами векторно-матричних рівнянь (6), (7), (8) або (9), характеризується тим, що керування системи є енергетично найслабшою змінною, тоді як вихід системи зазвичай вимагає досить помітних енергетичних витрат. За цією особливістю у моделях «вхід – стан – вихід», описуваних зазначеними системами, відсутні матриці «керування – вихід» [5; 6; 7; 9], які безпосередньо зв'язують вектор керування системи з вектором виходу та структурно визначають, яким чином змушуючі функції на вході впливають на різні виходи, а отже, й прямі зв'язки зі входу на вихід, представлені такими матрицями, в досліджуваній системі є відсутніми. Зазначені матриці надалі можуть бути визначені з метою коригування структури моделей для покращення динамічних властивостей досліджуваної системи.

Отримані моделі «вхід – стан – вихід», описувані системами векторно-матричних рівнянь (6), (7) (у разі розгляду  $n$ -мірного простору станів системи) та (8), (9) (у разі розгляді  $2n$ -мірного простору станів) пов'язують відповідні вхідні сигнали  $u_i(t)$ ,  $i = \overline{1, m}$  (у випадку відокремленості на фізичному рівні діючих на систему збурюючих сил) або  $\tilde{u}_i(t)$ ,  $i = \overline{1, \tilde{m}}$  (у випадку об'єд-

нання збурюючих сил) з відповідними вихідними сигналами  $y_i(t)$ ,  $\bar{y}_i(t)$  або  $\tilde{y}_i(t)$ ,  $\tilde{\tilde{y}}_i(t)$ ,  $i = \overline{1, r}$  через відповідні проміжні змінні  $x_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $\bar{x}_i(t)$  ( $i = \overline{1, 2n}$ ) або  $\tilde{x}_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $\tilde{\tilde{x}}_i(t)$  ( $i = \overline{1, 2n}$ ) стану досліджуваної динамічної системи. Для такої форми представлення моделей досліджуваної системи є можливим та зручним, порівняно з моделями «вхід – вихід», проведення аналізу структурних властивостей систем керування, до яких належить і керованість системи відносно вихідних (регульованих та вимірюваних) змінних моделей руху, аналіз якої виступає предметом дослідження в роботі.

### ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРНОЇ ВЛАСТИВОСТІ КЕРОВАНІСТІ ЗА ВИХОДОМ ГІРОСКОПІЧНОЇ СИСТЕМИ

Перш ніж перейти до проведення безпосереднього аналізу керованості досліджуваної динамічної системи відносно вихідних (регульованих та вимірюваних) змінних моделей руху, розкриємо поняття керованості системи керування за виходом, пов'язане з існуванням та єдиністю розв'язків основних задач керування за виходом, та визначимо основні критерії повної (часткової) керованості та некерованості відносно вихідних змінних для лінійних стаціонарних систем, представлених моделями у змінних стану.

Вивчення питання керованості за виходом (вихідної керованості) в задачах дослідження систем керування, які зазвичай містять певний комплекс окремих об'єктів або елементів, поведінка яких у часі може змінюватися під впливом вибраних цілеспрямованих зовнішніх збурень, відіграє досить важливу роль. Пов'язано це з тим, що виконуваність такої властивості вказує на те, що досліджуваній системі керування притаманна здатність її зовнішнього входу, вибраного належним чином, переміщувати вихід з будь-якого початкового положення в будь-яке кінцеве положення за кінцевий інтервал часу. Крім того, на результати дослідження такої керованості спираються й дослідження інших структурних властивостей відносно вихідних змінних моделей динамічних систем, які відображають принципи можливості здійснення процесів керування, спостереження, ідентифікації, стеження й адаптації для заданої системи керування.

Спираючись на фундаментальні постулати теорії керованості автоматичного керування, які виступають основою для здійснюваних у роботі досліджень, вихідна керованість (керованість за виходом) системи керування, математична модель у змінних стану якої представлена системою у векторно-матричній формі виду

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}\mathbf{U}(t), \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{P}\mathbf{X}(t) + \mathbf{S}\mathbf{U}(t) \end{cases} \quad (10)$$

при  $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ ,  $\mathbf{U}(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$ ,

$$\mathbf{Y}(t) = [y_1(t), \dots, y_r(t)]^T, \quad \mathbf{F} = [f_{ij}]_{n \times n},$$

$$\mathbf{G} = [g_{ij}]_{n \times m}, \quad \mathbf{P} = [p_{ij}]_{r \times n}, \quad \mathbf{S} = [s_{ij}]_{r \times m},$$

визначає, що вихід системи може бути переведений з будь-якого визначеного початкового

$\mathbf{Y}(t_0) = [y_1(t_0), \dots, y_r(t_0)]^T$  в будь-який заданий

кінцевий  $\mathbf{Y}(T) = [y_1(T), \dots, y_r(T)]^T$  за кінцевий

час  $t \in [t_0, T]$  шляхом застосування допустимого

керування  $\tilde{\mathbf{U}}(t) = [\tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_m(t)]^T$  [10–12; 18].

Іншими словами, вихідна керованість визначає можливість приведення виходу системи керування у задану точку. При цьому сформульоване поняття керованості досить сильно пов'язане із поняттям керованості системи за станом, за яким система керування, математична модель якої описується рівняннями (10), може бути переведена з будь-якого визначеного початкового стану

$\mathbf{X}(t_0) = [x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)]^T$  в будь-який заданий

кінцевий стан  $\mathbf{X}(T) = [x_1(T), \dots, x_n(T)]^T$  за кін-

цевий час  $t \in [t_0, T]$  шляхом застосування допу-

стимого керування  $\mathbf{U}(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$  з

використанням інформації про всі змінні стану

$\mathbf{X}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$  системи керування [4; 7;

8; 13–17]. Хоча ці поняття є дуже схожими, слід

зазначити, що керованість за станом, будучи властивістю диференціального рівняння стану, характеризує можливість змінювання стану системи за допомогою вхідних сигналів, тоді як керованість за виходом, будучи властивістю як рівняння стану, так і алгебраїчного рівняння виходу системи, характеризує вже можливість змінювання виходу системи за допомогою аналогічних вхідних сигналів. Поряд з цим потрібно зауважити, що система, керована за станом, буде не обов'язково керованою за виходом, та навпаки: система, керована за виходом, буде не обов'язково керованою за станом. Отже, для отримання повної інформації про керованість (у наведених формулюваннях) досліджуваної системи, потрібно дослідити обидві зазначені структурні властивості.

Як критерій, за яким система керування, описувана рівняннями типу (10), буде визначатися повністю керованою відносно вихідних змінних  $y_1(t), \dots, y_r(t)$ , виступає алгебраїчний критерій

вихідної керованості, згідно з яким має виконуватись рангова умова для відповідної матриці керованості за виходом, представлена за умови, що матриця «керування – вихід»  $S = [s_{ij}]_{r \times m}$  є не нульовою, в формі [18]

$$\text{rank} [W_{kep}^{aux}]_{r \times (n+1)m} = \text{rank} [PG : PFG : PF^2G : \dots : PF^{n-1}G : S]_{r \times (n+1)m} = r \quad (11)$$

або за умови, що матриця  $S = [s_{ij}]_{r \times m}$  є нульовою, в формі [10–12; 18]

$$\text{rank} [W_{kep}^{aux}]_{r \times nm} = \text{rank} [PG : PFG : PF^2G : \dots : PF^{n-1}G]_{r \times nm} = r. \quad (12)$$

Згідно з цим критерієм, у випадку повністю керованої за виходом  $Y(t)$  системи, ранг матриці керованості  $W_{kep}^{aux}$  співпадатиме із розмірністю  $r$  простору виходу системи (10), тобто область керованості системи за виходом, яка складається з усіх точок простору виходу, в які може бути переведено вихід керованої системи допустимим керуванням з початкового виходу за кінцевий час, співпадатиме зі всім простором виходу системи; якщо  $0 < \text{rank} [W_{kep}^{aux}]_{r \times nm} < r$ , то, відповідно, система керування вважатиметься частково (не повністю) керованою відносно вихідних змінних, а отже, область керованості за виходом, який породжується сукупністю незалежних стовпців матриці керованості за виходом; при  $\text{rank} [W_{kep}^{aux}]_{r \times nm} = 0$  система вважатиметься некерованою за виходом, що своєю чергою означатиме, що досліджувана система є недоступною для здійснення керування за виходом, а отже, потрібно застосовувати методи синтезу систем автоматичного керування, за якими структурно змінювати систему, щоб досягти виконання затребуваної властивості керованості за виходом та, таким чином, зробити її придатною для отримання розв'язків задач, які висуває практика.

У такому формулюванні проводиться аналіз керованості за виходом досліджуваної в роботі динамічної системи з гіроскопічною структурою, динаміка руху якої описується математичними моделями «вхід – стан – вихід» для різних випадків розмірностей простору стану системи, які залежно від існування принципової можливості на фізичному рівні об'єднання діючих на систему збуджуючих сил подаються системами векторно-матричних диференціальних рівнянь стану та алгебраїчних рівнянь виходу відповідно видів (6), (7) (у  $n$ -мірному просторі стану) та (8), (9) (в  $2n$ -мірному просторі стану).

Використовуючи представлений у формі рангової умови (12) (матриця  $S = [s_{ij}]_{r \times m}$ , як було сформульовано раніше, у побудованих моделях «вхід – стан – вихід» складається з нульових елементів) критерій керованості за виходом до

досліджуваної динамічної системи, описуваної рівняннями у змінних стану (6), (7) (у  $n$ -мірному просторі стану) та (8), (9) (у  $2n$ -мірному просторі стану), отримано такі матриці керованості за виходом:

– у випадку, коли існує принципова можливість об'єднання збуджуючих сил, що діють на систему, для моделей, описуваних у  $n$ -мірному просторі стану системою (6) та в  $2n$ -мірному просторі стану системою (8):

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{kep}^{aux} &= \tilde{W}_{kep(n)}^{aux} = \tilde{W}_{kep(2n)}^{aux} = \\ &= [\tilde{W}_1 \ \tilde{W}_2 \ \tilde{W}_3 \ \tilde{W}_4 \ \tilde{W}_5 \ \tilde{W}_6 \ \tilde{W}_7 \ \tilde{W}_8 \ \tilde{W}_9 \ \tilde{W}_{10} \ \tilde{W}_{11} \ \tilde{W}_{12}]_{2 \times 12}; \quad (13) \end{aligned}$$

– у випадку, коли об'єднання збуджуючих сил, що діють на систему, є неможливим для моделей, описуваних у  $n$ -мірному просторі стану системою рівнянь (7) та в  $2n$ -мірному просторі стану системою рівнянь (9):

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{W}}_{kep}^{aux} &= \tilde{\tilde{W}}_{kep(n)}^{aux} = \tilde{\tilde{W}}_{kep(2n)}^{aux} = \\ &= [\tilde{\tilde{W}}_1 \ \tilde{\tilde{W}}_3 \ \tilde{\tilde{W}}_4 \ \tilde{\tilde{W}}_6 \ \tilde{\tilde{W}}_7 \ \tilde{\tilde{W}}_9 \ \tilde{\tilde{W}}_{10} \ \tilde{\tilde{W}}_{12}]_{2 \times 8}, \quad (14) \end{aligned}$$

де  $\tilde{W}_{kep(n)}^{aux} = [\tilde{C}\tilde{B} : \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} : \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} : \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{B}]$ ,

$\tilde{W}_{kep(n)}^{aux} = [\tilde{C}\tilde{B} : \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} : \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} : \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{B}]$  – матриці керованості для моделей у  $n$ -мірному просторі стану системи відповідно для випадків об'єднання та відокремлення збуджуючих сил;  $\tilde{W}_{kep(2n)}^{aux} = [\tilde{C}\tilde{B} : \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} : \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} : \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{B}]$ ,

$\tilde{\tilde{W}}_{kep(2n)}^{aux} = [\tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{B}} : \tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{A}}\tilde{\tilde{B}} : \tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{A}}^2\tilde{\tilde{B}} : \tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{A}}^3\tilde{\tilde{B}}]$  – матриці керованості для моделей у  $2n$ -мірному просторі стану системи відповідно для випадків об'єднання та відокремлення збуджуючих сил;  $\tilde{W}_i$  ( $i = \overline{1,12}$ ) – стовпці матриць керованості (13), (14) за виходом системи:

$$\tilde{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{W}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ A \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{W}_5 = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \beta_{cep}}{A} \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{W}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ A \end{bmatrix}; \tilde{W}_7 = \begin{bmatrix} -\frac{b}{A^2} \\ H \\ -\frac{H}{A^2} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{W}_8 = \begin{bmatrix} \frac{b \sin \beta_{cep}}{A^2} \\ H \sin \beta_{cep} \\ A^2 \end{bmatrix}; \tilde{W}_9 = \begin{bmatrix} H \\ A^2 \\ b \\ A^2 \end{bmatrix}; \tilde{W}_{10} = \begin{bmatrix} -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \\ 2bH - Ak \\ A^3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{(H^2 - b^2)\sin\beta_{cep}}{A^3} \\ -\frac{(2bH - Ak)\sin\beta_{cep}}{A^3} \end{bmatrix}; \tilde{W}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{2bH - Ak}{A^3} \\ -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \end{bmatrix}.$$

Аналізуючи отримані в (13) та (14) матриці керованості  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  та  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  за виходом системи, отримуємо такі результати:

а) в матриці керованості  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  за виходом стовпці  $\tilde{W}_2$  й  $\tilde{W}_3$ ,  $\tilde{W}_5$ ,  $\tilde{W}_8$ ,  $\tilde{W}_{11}$  є лінійно залежними від стовпців  $\tilde{W}_1$ ,  $\tilde{W}_4$ ,  $\tilde{W}_7$  та  $\tilde{W}_{10}$  відповідно;

б) в матриці керованості  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  за виходом, порівняно з матрицею  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$ , стовпці  $\tilde{W}_2$ ,  $\tilde{W}_5$ ,  $\tilde{W}_8$  та  $\tilde{W}_{11}$  є відсутніми у зв'язку з тим, що матриця  $\tilde{B}$  (або  $\tilde{B}$ ) не містить другого стовпця (порівняно з матрицею  $\tilde{B}$  або  $\tilde{B}$ ), усі інші стовпці в матрицях  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  та  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  співпадають. У цьому зв'язку можна зробити висновок, що на результати аналізу керованості за виходом досліджуваної системи істотним чином впливають тільки результати дослідження матриці керованості  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  за виходом;

в) якщо порівняти стовпці матриці

$$\tilde{W}_{kep}^{aux} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{A} & 0 & -\frac{b}{A^2} & \frac{H}{A^2} & -\frac{H^2 - b^2}{A^3} & -\frac{2bH - Ak}{A^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A} & \frac{H}{A^2} & -\frac{b}{A^2} & \frac{2bH - Ak}{A^3} & -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \end{bmatrix},$$

можна побачити, що третій її стовець утворює з четвертим стовпцем діагональну матрицю

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix},$$

для якої  $\det(L) = \frac{1}{A^2} = \frac{1}{A^2} \neq 0$ , а отже, вказані третій та четвертий стовпці є лінійно незалежними і ранг матриці керованості  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  за виходом дорівнює числу ненульових строк отриманої діагональної матриці  $L$  (для досліджуваної системи  $\text{rank}[\tilde{W}_{kep}^{aux}]_{2 \times 8} = \text{rank}[L]_{2 \times 2} = 2$ ),

тобто виконується рангова умова  $\text{rank}[\tilde{W}_{kep}^{aux}]_{2 \times 8} = \text{rank}[L]_{2 \times 2} = 2$ ,

тобто виконується рангова умова  $\text{rank}[\tilde{W}_{kep}^{aux}]_{r \times nm} = \text{rank}[L]_{r \times m} = r$ , що означає,

що досліджувана динамічна система з моделлю, описуваною рівняннями (7) або (9), є повністю керованою за виходом. При цьому при  $A \neq 0$  та будь-яких допустимих значеннях сталих  $H, b, k$  лінійна незалежність зазначених стовпців матриці  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  зберігається, що означає, що для досліджу-

ваної системи не існує випадків, коли вона є не повністю керованою або некерованою за виходом.

Порівнюючи інші стовпці матриці  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  керованості за виходом, можна побачити, наприклад, що третій її стовець утворює з п'ятим (аналогічно і з шостим, сьомим та восьмим) стовпцем відповідно матриці

$$L_{3,5} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{b}{A^2} \\ 0 & -\frac{H}{A^2} \end{bmatrix}, L_{3,6} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & \frac{H}{A^2} \\ 0 & -\frac{b}{A^2} \end{bmatrix},$$

$$L_{3,7} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \\ 0 & \frac{2bH - Ak}{A^3} \end{bmatrix}, L_{3,8} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{2bH - Ak}{A^3} \\ 0 & -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \end{bmatrix},$$

для яких, відповідно,  $\det(L_{3,5}) = -\frac{H}{A^3} \neq 0$ ,

$\det(L_{3,6}) = -\frac{b}{A^3} \neq 0$ ,  $\det(L_{3,7}) = \frac{2bH - Ak}{A^4} \neq 0$ ,

$\det(L_{3,8}) = \frac{b^2 - H^2}{A^4} \neq 0$ , оскільки  $A \neq 0$  та вели-

чини  $H, b$  та  $k$  за своїм фізичним тлумаченням одночасно не є нульовими, а отже, вказані стовпці є також лінійно незалежними і ранг матриці  $\tilde{W}_{kep}^{aux}$  у цих випадках дорівнює числу ненульових строк кожної з отриманих матриць  $L_{3,5}, L_{3,6}, L_{3,7}, L_{3,8}$  (для досліджуваної системи  $\text{rank}[\tilde{W}_{kep}^{aux}]_{2 \times 8} = \text{rank}[L_{3,5}]_{2 \times 2} = \dots = \text{rank}[L_{3,8}]_{2 \times 2} = 2$ ),

тобто також виконується рангова умова  $\text{rank}[\tilde{W}_{kep}^{aux}]_{r \times nm} = r$ , що підтверджує, що досліджувана динамічна система з моделями, описуваними системами (6), (7), (8) або (9), є повністю керованою за виходом, а її область керованості за виходом співпадає зі всім простором виходу системи, у який може бути переведено вихід системи за кінцевий час.

Зауважимо, що у разі здійснення аналізу вихідної керованості досліджуваної системи, користуючись ранговою умовою (12), отримано висновки за відсутності впливу керування на вихідні змінні моделей. У випадку визначення ненульової матриці «керування – вихід» за рахунок або виділення зазначених керувань, або за рахунок структурного змінювання моделей досліджуваної системи, отримувані остаточні висновки щодо керованості системи відносно вихідних змінних мають формулюватись на основі проведення досліджень за ранговою умовою (11) критерію повної вихідної керованості системи, враховуючи при цьому, що у разі структурного зміню-

вання моделей досліджуваної системи з одночасним змінюванням вхідних матриць стану, входу та виходу на результати дослідження матриця «керування – вихід» зможе впливати у разі лінійної залежності стовпців матриці вихідної керованості, побудованої за умовою (12), тоді як у разі виділення допустимих керувань у векторі виходу моделі системи, у разі незмінності вхідних матриць стану, входу та виходу, на результати дослідження вихідної керованості матриця «керування – вихід» впливати не буде, оскільки  $n$  перших блокових матриць у матрицях керованості в обох випадках співпадатимуть.

Також, спираючись на результати проведених досліджень керованості системи за її виходом, визначено, що неврахування об'єднання зовнішніх сил у математичних моделях «вхід – вихід» досліджуваної системи, описуваних векторно-матричними рівняннями (1), (2) відповідно, а отже, і в побудованих на їх основі моделях «вхід – стан – вихід», описуваних відповідними рівняннями (6), (7) (у  $n$ -мірному просторі стану) або (8), (9) (в  $2n$ -мірному просторі стану), не тільки не впливає, а й значно ускладнює матрицю керованості  $\tilde{W}_{кер}^{aux}$  за виходом, складену для випадку, коли зазначене об'єднання зовнішніх сил у правій частині перших рівнянь із систем (6) (у  $n$ -мірному випадку) та (8) (у  $2n$ -мірному випадку) не видається можливим. Тому, якщо структурно досліджувана динамічна система дозволяє проводити таке з'єднання зовнішніх збурень, можна рекомендувати використання математичних моделей, описуваних для кожного з розглянутих просторів стану системи відповідними рівняннями (7) та (8).

## ВИСНОВКИ

У роботі проведено дослідження структурної властивості керованості за виходом динамічної системи з гіроскопічною структурою у разі дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, динаміка руху якої описується за допомогою побудованих за вихідними математичними моделями «вхід – вихід» математичних моделей «вхід – стан – вихід» для  $n$ - та  $2n$ -мірної розмірності простору стану, які являють собою системи векторно-матричних лінійних неоднорідних диференціальних та алгебраїчних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною, та кожна з яких подається у двох формах залежно від існування та відсутності можливості об'єднання діючих на досліджувану систему зовнішніх збурень, прийнятих у роботі за допустимі керування.

За результатами проведеного дослідження керованості за виходом для досліджуваної системи визначено, що за будь-яких значень основних параметрів для досліджуваної системи не існує випадків, коли вона є не повністю керованою або некерованою за виходом, тобто досліджувана система є повністю керованою відносно всіх своїх вихідних (вимірюваних та регульованих) змінних, а її область керованості за виходом співпадає зі всім простором виходу системи, у який може бути переведено вихід системи за кінцевий час, а отже, досліджувана система є доступною для проведення аналізу структурних властивостей відносно вихідних змінних динамічних систем, а також для здійснення подальшого керування та регулювання за виходом системи.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Новицкий В.В. Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки. *Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування*. Київ : Інститут математики НАН України. 2008. Т. 78. 124 с.
2. Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т. Оптимальный синтез структур для линейных систем управления. *Проблемы управления и информатики*. 1996. № 1, 2. С. 162–171.
3. Лазарев Ю.Ф., Бондар П.М. Основы теории чувливых элементов систем ориентации. Київ : Політех, 2010. 625 с.
4. Леонтьева В.В., Кондратьева Н.А. Вопросы методологии анализа, управления, регулирования, идентификации и наблюдения гироскопических систем. *Вісник Запорізького національного університету* : збірник наукових статей. *Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ. № 2, 2017. С. 157–169.
5. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. Москва : Наука, 1974. 344 с.
6. Chen C.T. Linear system theory and design. New York : Oxford University press, 1999. 334 p.
7. Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems. New York : Wiley-Interscience, 1972. 575 p.
8. Шэнь К., Неусьпин К. А. Исследование критериев степеней наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости линейных динамических систем. *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. № 17 (11). С. 723–731.
9. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2016. 440 с.

10. Qiu D., Wang Q., Zhou Y. Steady-state output controllability and output controllability of linear systems. *Computational Intelligence and Industrial Applications*. Wuhan, China : IEEEExplore, 2009. P. 147–150.
11. Danhane B., Lohéac J., Jungers M. Contributions to output controllability for Linear Time Varying systems. *IEEE Control Systems Letters*. 2021. No. 6. P. 1064–1069.
12. Lazar M., Lohéac J. Output controllability in a long-time horizon. *Automatica*. 2020. Vol. 113, P. 108762.
13. Dath M., Jouan P. Controllability of linear systems on Heisenberg groups  $H^n$ . *International Journal of Control*. 2021. Vol. 94:4. P. 1010–1019.
14. Moreau C. Local Controllability of a Magnetized Purcell's Swimmer. *IEEE Control Systems Letters*. 2019. Vol. 3:3. P. 637–642.
15. Jafarpour S. On Small-Time Local Controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2019. Vol. 58:1. P. 425–446.
16. Vrabel R. Local null controllability of the control-affine nonlinear systems with time-varying disturbances. *European Journal of Control*. 2018. Vol. 40. P. 80–86.
17. Леонт'єва В.В., Кондрат'єва Н.А. Керваність динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень. *Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ. № 2, 2019. С. 90–100.
18. Domínguez-García J.L., García-Planas M.I. Output controllability and steady-output controllability analysis of fixed speed wind turbine. *5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011)*. Leon, Spain, 5–8 of September of 2011: *proceedings*. St. Petersburg : The Laboratory «Control of Complex Systems», IPME RAS. 2011. P. 1–5.
19. Леонт'єва В.В., Кондрат'єва Н.О., Єлховська Я.А. Ідентифікованість за станом динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень. *Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ. 2020. № 1. С. 46–54.

#### REFERENCES

1. Novitsky, V.V. (2008). Keruvannya hiroskopichnymy systemamy ta inshi zadachi analitychnoyi mekhaniky [Control of gyroscopic systems and other problems of analytical mechanics]. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and its application*. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Vol. 78 [in Ukrainian].
2. Kirichenko, N.F., Matvienko, V.T. (1996). Optimal'nyj sintez struktur dlya linejnyh sistem upravleniya [Optimal synthesis of structures for linear control systems]. *Problemy upravleniya i informatiki* [Problems of control and informatics]. No. 1, 2, pp. 162–171 [in Russian].
3. Lazarev, Yu.F., Bondar, P.M. (2010). Osnovy teorii chutlyvykh elementiv system oriyentatsiyi [Fundamentals of the theory of sensitive elements of orientation systems]. Kyiv: Polytech [in Ukrainian].
4. Leontieva, V.V., Kondratieva, N.A. (2017). Voprosy metodologii analiza, upravleniya, regulirovaniya, identifikatsii i nablyudeniya giroskopicheskikh sistem [Questions about methodology of analysis, control, regulation, identification and observation of gyroscopic systems]. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fyzyko-matematychni nauky*. Zaporizhzhya: ZNU, No. 2, pp. 157–169 [in Russian].
5. Merkin, D.R. (1974). Giroskopicheskiye sistemy [Gyroscopic systems]. Moscow: Nauka [in Russian].
6. Chen, C.T. (1999). Linear system theory and design. New York: Oxford University press.
7. Kvakernaak, H., Siwan, R. (1972). Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley-interscience.
8. Shen, K., Neusypin, K. A. (2016). Issledovanie kriteriev stepenej nablyudaemosti, upravlyaemosti i identifikiruemosti linejnyh dinamicheskikh sistem [Study of the Criteria for the Degrees of Observability, Controllability and Identifiability of the Linear Dynamical Systems]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control]. No. 17 (11), pp. 723–731 [in Russian].
9. Kim, D.P. (2016). Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T. 2. Mnogomernye, nelinejnyye, optimal'nye i adaptivnyye sistemy [The theory of automatic control. T. 2. Multidimensional nonlinear, optimal and adaptive systems]. Moscow: FIZMATLIT [in Russian].
10. Qiu, D., Wang, Q., Zhou, Y. (2009). Steady-state output controllability and output controllability of linear systems. *Computational Intelligence and Industrial Applications*. Wuhan, China: IEEEExplore, pp. 147–150.
11. Danhane, B., Lohéac, J., Jungers, M. (2021). Contributions to output controllability for Linear Time Varying systems. *IEEE Control Systems Letters*, No. 6, pp. 1064–1069.



12. Lazar, M., Lohéac, J. (2020). Output controllability in a long-time horizon. *Automatica*. Vol. 113, pp. 108762.
13. Dath, M., Jouan, P. (2021). Controllability of linear systems on Heisenberg groups  $H^n$ . *International Journal of Control*. Vol. 94:4, pp. 1010–1019.
14. Moreau, C. (2019). Local Controllability of a Magnetized Purcell's Swimmer. *IEEE Control Systems Letters*. Vol. 3:3, pp. 637–642.
15. Jafarpour, S. (2019). On Small-Time Local Controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*. Vol. 58:1, pp. 425–446.
16. Vrabel, R. (2018). Local null controllability of the control-affine nonlinear systems with time-varying disturbances. *European Journal of Control*. Vol. 40, pp. 80–86.
17. Leontieva, V.V., Kondratieva, N.A. (2019). Kerovanist' dynamichnoyi systemy z hiroskopichnoyu strukturoyu pry diyi dysypatyvnykh syl ta syl radial'noyi korektsiyi z urakhuvannyam pevnoho neliniynoho zmishanoho vydu zovnishnikh zburen' [Controllability of a dynamical system with a gyroscopic structure under the action of dissipative forces and forces of radial correction with a certain nonlinear external disturbances of mixed type]. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fyzyko-matematychni nauky*. Zaporizhzhya: ZNU, No. 2, pp. 90–100 [in Ukrainian].
18. Domínguez-García, J.L., García-Planas, M.I. (2011). Output controllability and steady-output controllability analysis of fixed speed wind turbine. *5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011)*. Leon, Spain, 5–8 of September of 2011: proceedings. St. Petersburg: The Laboratory «Control of Complex Systems», IPME RAS, pp. 1–5.
19. Leontieva, V.V., Kondratieva, N.A., Yelkhovska, Ya.A. (2020). Identifikovanist' za stanom dynamichnoyi sistemi z giroskopichnoyu strukturoyu pri diyi disipativnih sil ta sil radial'noyi korektsiyi z urakhuvannyam pevnogo neliniynogo zmishanogo vydu zovnishnikh zburen' [State identifiability of a dynamical system with a gyroscopic structure under the action of dissipative forces and forces of radial correction with a certain nonlinear external disturbances of mixed type]. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fyzyko-matematychni nauky*. Zaporizhzhya: ZNU. No. 1, pp. 46–54 [in Ukrainian].

## ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ МАЮТЬ НЕ БІЛЬШЕ $m$ ВНУТРІШНІХ ЕКСТРЕМУМІВ

**Нечипоренко Н. О.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри прикладної математики  
Національний університет «Запорізька політехніка»  
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0003-3708-9777](https://orcid.org/0000-0003-3708-9777)  
[ninanechi@gmail.com](mailto:ninanechi@gmail.com)*

**Коротунова О. В.**

*кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри прикладної математики  
Національний університет «Запорізька політехніка»  
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-0883-5550](https://orcid.org/0000-0002-0883-5550)  
[evkor@zp.edu.ua](mailto:evkor@zp.edu.ua)*

**Ключові слова:** *функція однієї змінної, відновлення, ізогеометричні властивості, оптимальність за точністю.*

Відновлення функції за її експериментальними значеннями, які задані у вузлах регулярної сітки, є класичною задачею теорії апроксимації. Проблемі побудови інтерполяційних сплайнів присвячено велику кількість робіт. Область застосування таких сплайнів обмежена таблицями, що містять точні значення функції, яка інтерполюється. Однак в результаті експериментів, як правило, отримують наближені значення, які можуть не відповідати наявній апріорній інформації про ті чи інші властивості функції. В той же час на практиці часто виникає необхідність у збереженні функцією, що відновлюється, певних властивостей, які можуть бути отримані з апріорних уявлень про перебіг тих чи інших фізичних, економічних, соціальних процесів або явищ, описуваних шуканими функціями. У таких випадках стандартні методи апроксимації сплайнами не завжди дають задовільний розв'язок задачі відновлення функції. Так, наприклад, збереження монотонності та опуклості для інтерполяційних сплайнів вдається досягти лише за додаткових, досить жорстких обмежень на вихідні дані та вузли сітки. Табличні значення повинні відповідати геометричним властивостям функції. В експерименті ж, як правило, реструються «зашумлені» значення функції, які найчастіше не відповідають наявній апріорній інформації. Це означає, що у багатьох випадках необхідним етапом процесу обробки інформації є згладжування.

Таким чином, побудова оптимальних алгоритмів відновлення сіткових функцій, які враховують апріорну інформацію про геометрію відновлюваної функції, є актуальною задачею.

Метою даної роботи є побудова алгоритмів відновлення функцій, що задані своїми наближеними значеннями у вузлах довільної фіксованої сітки і мають задану кількість екстремумів в області визначення. Відновлювальні функції будуються на основі методу квазірішень. Наводяться покрокові алгоритми побудови відновлювальних функцій для вказаного класу функцій. Ці алгоритми дозволяють не тільки зберегти геометричні властивості відновлюваної функції, а й, як свідчать

результати чисельних експериментів, досягти достатньої точності відновлення. Якщо задана точність вхідних даних і відповідний клас функцій обмежений, то наведені алгоритми є оптимальними по порядку точності з константою порядку, що не перевищує 2.

---

## ON ONE PROBLEM OF RECOVERING FUNCTIONS WHICH HAVE NO MORE THAN $m$ INTERNAL EXTREMUMS

**Nechyporenko N. O.**

*Ph.D., Associate Professor,*

*Associate Professor at the Department of Applied Mathematics*

*National University "Zaporizhzhia Polytechnic"*

*Zhukovskogo str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine*

*orcid.org/0000-0003-3708-9777*

*ninanechi@gmail.com*

**Korotunova O. V.**

*Ph.D., Associate Professor,*

*Associate Professor at the Department of Applied Mathematics*

*National University "Zaporizhzhia Polytechnic"*

*Zhukovskogo str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine*

*orcid.org/0000-0002-0883-5550*

*evkor@zp.edu.ua*

**Key words:** *function of one variable, recovery, isogeometric properties, optimality by accuracy.*

Restoring the function according to its experimental values, which are set at the nodes of a regular grid, is a classic problem of approximation theory. A large number of publications are devoted to the problem of constructing interpolation splines. The scope of such splines is limited to tables containing exact values of the function being interpolated. However, as a result of experiments, as a rule, approximate values are obtained, which may not correspond to the available a priori information about certain properties of the function. At the same time, in practice, there is often a need for the restored function to preserve certain properties that can be obtained from a priori ideas about the course of certain physical, economic, social processes or phenomena described by the sought functions. In such cases, standard spline approximation methods do not always provide a satisfactory solution to the function recovery problem. So, for example, preservation of monotonicity and convexity for interpolation splines can be achieved only with additional, fairly strict restrictions on the initial data and grid nodes. Tabular values must correspond to the geometric properties of the function. In the experiment, as a rule, "noisy" values of the function are registered, which most often do not correspond to the available a priori information. This means that in many cases, smoothing is a necessary step in the information processing process.

Thus, the construction of optimal algorithms for the restoration of grid functions, which take into account a priori information about the geometry of the restored function, is an urgent task.

The purpose of this work is to build algorithms for restoring functions that are given by their approximate values at the nodes of an arbitrary fixed grid and have a given number of extrema in the domain of definition. Restorative functions are built on the basis of the method of quasi-solutions. Step-by-step algorithms for constructing restorative functions for the specified class of functions are presented. These algorithms allow not only to preserve the

geometric properties of the restored function, but also, as evidenced by the results of numerical experiments, to achieve sufficient restoration accuracy. If the specified accuracy of the input data and the corresponding class of functions is limited, then the given algorithms are optimal in order of accuracy with an order constant not exceeding 2.

**Вступ.** Під час обробки різних експериментальних даних однією з основних задач є задача відновлення функцій, які задані таблицями своїх наближених значень. При цьому часто виникає необхідність у збереженні відновлюваною функцією певних властивостей, таких як додатність, монотонність, опуклість, наявність прямолінійних ділянок і т.д. Ці властивості можуть бути отримані з апріорних уявлень про поведінку тих чи інших фізичних, економічних процесів або явищ, які описуються шуканими функціями. Стандартні методи апроксимації сплайнами не завжди дають задовільний розв'язок цієї задачі ізогометричної апроксимації. В даний час є значна кількість робіт (див., наприклад, [1–7]), які присвячені чисельним аспектам апроксимації поліноміальними сплайнами функцій одного невідомого, що пов'язані з локальним успадкуванням сплайном властивостей монотонності та опуклості (узагальненої опуклості, ковипуклості, комонотонності тощо) вихідних даних. Однак збереження монотонності та опуклості для інтерполяційних сплайнів вдається досягти лише при додаткових, досить жорстких обмеженнях на вихідні дані та сітки вузлів (див., наприклад, [2; 5; 7]), табличні значення повинні відповідати геометричним властивостям функції. На жаль, в експерименті реєструються, як правило, «зашумлені» значення функції, які найчастіше не відповідають наявній апріорній інформації. Згладжування, таким чином, у багатьох випадках постає як необхідний етап у процесі обробки інформації. Роботи [8; 9] присвячені побудові ізогометричного сплайну, що згладжує, який враховує апріорну інформацію у вигляді обмежень на значення функції та її похідних на заданих інтервалах. У запропонованій роботі в якості апріорної інформації про геометрію відновлюваної за наближеними даними функції є інформація про кількість внутрішніх екстремумів функції. Таким чином, задача побудови оптимальних алгоритмів відновлення сіткових функцій, які враховують апріорну інформацію про геометрію функції, є актуальною.

**Методи.** Нехай  $K_m[a, b]$ ,  $m \geq 0$ , – множина функцій  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , які мають на  $[a, b]$  не більше  $m$  внутрішніх екстремумів.

Уточнимо поняття внутрішнього екстремуму. Нехай  $I$  – деякий інтервал (замкнутий, напіввідкритий, відкритий) відрізка  $[a, b]$ .

Нехай також  $\varphi(x) = C = \text{const} \quad \forall x \in I$  та існують такі  $\alpha, \beta \in [a, b] \setminus I$  (причому,  $\alpha \leq \min_{x \in I} x$ ,  $\beta \geq \max_{x \in I} x$ ), що  $\varphi(x) < C$  або  $\varphi(x) > C \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \setminus I$ . Будемо говорити, що число внутрішніх екстремумів функції  $\varphi(x)$  дорівнює мінімальному на  $[a, b]$  числу інтервалів з описаною вище властивістю.

Очевидно, якщо функція  $f(x)$  має  $m$  внутрішніх екстремумів на  $[a, b]$ , то мінімальна кількість інтервалів її монотонності (монотонність може бути несуворою) на  $[a, b]$  дорівнює  $m + 1$ .

Розглянемо задачу відновлення функції  $f(x) \in K_m[a, b]$  за її наближеними значеннями  $f_j$ ,  $j = 1, N$ , у вузлах  $x_j$  довільної фіксованої сітки  $\Delta: \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b\}$ .

Як відновлюючи будемо приймати одну з таких функцій:

1) функцію  $S_m(x)$ , яка побудована на основі методу квазірішень, тобто задовольняє умові:

$$\delta_m = \delta(S_m) = \inf_{\varphi \in K_m[a, b]} \max_{1 \leq i \leq N} |\varphi(x_i) - f_i| \quad (1)$$

2) функцію  $\bar{S}_m(x)$ , яка має мінімальну кількість внутрішніх екстремумів на  $[a, b]$  і задовольняє умові

$$\bar{\delta}_m = \max_{1 \leq i \leq N} |\bar{S}_m(x_i) - f_i| \leq \bar{\varepsilon} \quad (2)$$

де  $\bar{\varepsilon}$  – задане дійсне число.

Величини  $\delta_m$  і  $\bar{\delta}_m$  будемо називати відхиленнями відповідно функцій  $S_m(x)$  і  $\bar{S}_m(x)$  від точок  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 1, N$ .

З подальших розглядів стане ясно, що вирішення кожної з поставлених задач існує і, власне кажучи, визначається не єдиним чином. Ми збудуємо одне з можливих рішень.

#### Алгоритми відновлення функцій.

Якщо  $S_0(x)$  – неспадна функція, то можна вказати такий покроковий алгоритм її побудови.

#### Алгоритм А.

Крок 1. Покласти  $k = 1$ ,  $p_0 = 0$ .

Крок 2. Знайти  $f_{p_k} = \min_{p_{k-1} + 1 \leq i \leq N} f_i$  та зафіксувати  $p_k$ .

Крок 3. Знайти  $f_{n_k} = \max_{p_{k-1} + 1 \leq i \leq p_k} f_i$ .

Крок 4. Перевірити  $p_k = N$ ? Якщо так, то перейти до кроку 5, інакше збільшити  $k$  на одиницю та перейти до кроку 2.

Крок 5. Покласти  $S_0(x) = \frac{f_{n_i} + f_{p_i}}{2}$ ,  $x \in [x_1, x_{p_i}]$ ,  
 $S_0(x) = \max_{1 \leq i \leq j} \frac{f_{n_i} + f_{p_i}}{2}$ ,  $x \in (x_{p_{j-1}}, x_{p_j}]$ ,  $j = 2, 3, \dots, k$  та  
 закінчити обчислення.

Якщо функція  $S_0(x)$  незростаюча, вона буде-  
 ється аналогічно, лише операції *min* і *max* у наведе-  
 ному алгоритмі слід замінити на операції *max* і  
*min* відповідно.

З'ясувати, чи не зростає чи не спадає шукана  
 функція  $S_0(x)$ , можна таким чином.

Нехай  $f_v = \max_{1 \leq i \leq N} f_i$  і  $f_\mu = \min_{1 \leq i \leq N} f_i$ . Якщо  $x_v < x_\mu$ ,  
 то  $S_0(x)$  – незростаюча функція, в іншому  
 випадку – неспадна. У цьому легко переконатися  
 безпосередньо, обчисливши і порівнявши відхи-  
 лення відповідних функцій, що не зростають і не  
 зменшуються, від точок  $(x_i, f_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$  при при-  
 йнятих припущеннях.

Відповідно до наведеного алгоритму  $A$  відрізок  
 $[a, b]$  можна розбити на інтервали  $I_1 = [x_1, x_{p_1}]$ ,  
 $I_2 = [x_{p_1}, x_{p_2}]$ , ...,  $I_k = [x_{p_{k-1}}, x_N]$ , на кожному з  
 яких функція  $S_0(x)$  є сталою. Максимальне відхи-  
 лення функції  $S_0(x)$  від точок  $(x_i, f_i)$ , де  $x_i \in I_v$ ,  
 $v = \overline{1, k}$ , будемо позначати через  $\delta^v$ .

Отже,  $\delta_0 = \max_{1 \leq v \leq k} \delta^v$ . На кожному з інтервалів  
 $I_v$  існують принаймні два вузли  $x_v^+$ ,  $x_v^-$  сітки  
 $\Delta$ , в яких наближені задані значення шуканої  
 функції рівні відповідно значенням  $S_0(x_v^+) + \delta^v$   
 і  $S_0(x_v^-) - \delta^v$ . При цьому  $x_v^+ < x_v^-$ , якщо  $S_0(x)$   
 неспадна і  $x_v^- < x_v^+$ , якщо  $S_0(x)$  – незростаюча  
 функція.

**Лема 1.** Нехай  $I_{l_1}, I_{l_2}, \dots, I_{l_v}; l_1 < l_2 < \dots < l_v$  – інтер-  
 вали сталості функції  $S_0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , для яких  
 справедлива умова:  $\delta^{l_i} = \delta_0$ ,  $i = \overline{1, v}$ .

І нехай  $x_{l_r} \in \Delta \cap I_{l_i}$ ,  $r = \overline{1, \mu_i}$ ,  $i = \overline{1, v}$  такі, що

$$x_{l_1} < x_{l_2} < \dots < x_{l_{\mu_i}} \text{ і } f_{l_r} = S_0(x_{l_r}) + (-1)^{\alpha+r} \delta_0, \quad (3)$$

де  $\alpha = -1$ , якщо  $S_0(x)$  неспадна і  $\alpha = 0$ , якщо  
 $S_0(x)$  – незростаюча функція.

Нехай також функція  $\varphi(x) \in K_m [a, b]$  і задо-  
 вольняє умові

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\varphi(x_i) - f_i| \leq \delta_0. \quad (4)$$

Тоді функція  $\varphi(x)$  має на  $[a, b]$  не менше

$M = \sum_{i=1}^v \mu_i$  внутрішніх екстремумів, якщо

$l_1 > 1$ ,  $l_v < k$  і виконується умова

$$\max_{i | x_i \in I_j, j | l_v} f_i \geq S_0(x) + \delta_0, \quad \forall x \in I_v \text{ (при } \alpha = -1) \quad (5)$$

або

$$\min_{i | x_i \in I_j, j | l_v} f_i \leq S_0(x) - \delta_0, \quad \forall x \in I_v \text{ (при } \alpha = 0) \quad (6)$$

Вказана кількість  $M$  внутрішніх екстремумів  
 функції  $\varphi(x)$  зменшується щоразу на одиницю, як  
 тільки  $l_1 = 1$  або  $l_v = k$  або не виконується умова  
 (5) чи (6).

**Доведення.** Нехай для визначеності  $S_0(x)$  –  
 неспадна функція і  $\varphi(x)$  така, що має місце (4).  
 Тоді в силу умов (3) для інтервалу  $I_{l_i}$ ,  $1 \leq i < v$ ,  
 при  $l_1 > 1$  маємо:

$$\begin{aligned} \varphi(x_{l_1}) &> S_0(x_{l_1}) = S_i, \\ \varphi(x_{l_2}) &< S_0(x_{l_2}) = S_i, \\ \varphi(x_{l_3}) &> S_0(x_{l_3}) = S_i, \\ &\dots \\ \varphi(x_{l_{\mu_i}}) &< S_0(x_{l_{\mu_i}}) = S_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Структура побудованої функції  $S_0(x)$  така, що

$$f_j = \min_{s | x_s \in I_{j-1}} f_s \leq \min_{s | x_s \in I_j} f_s,$$

отже,

$$\varphi(x_j) < S_i. \quad (8)$$

Враховуючи, що  $S_0(x)$  – неспадна функція та  
 $i < v$  маємо:

$$\varphi(x_{l_{i+1}}) > S_0(x_{l_{i+1}}) > S_i. \quad (9)$$

Зі співвідношень (7)-(9) випливає, що на інтер-  
 валі  $[x_j, x_{l_{i+1}}]$  функція  $\varphi(x)$  має щонайменше  $\mu_i$   
 екстремумів.

Якщо  $l_1 = 1$ , то вказати нерівність типу (8)  
 неможливо і з (7) та (9) випливає, що на інтервалі  
 $[x_1, x_{l_2}]$  функція  $\varphi(x)$  має не менше  $\mu_1 - 1$  вну-  
 трішніх екстремумів.

Розглянемо тепер інтервал  $I_{l_v}$ . Якщо  $l_v < k$  і  
 має місце (5), то, як і у випадку  $I_{l_i}$ ,  $1 \leq i < v$ , легко  
 встановити співвідношення типу (9) і інтервал  
 $I_{l_v}$  в сенсі екстремумів функції  $\varphi(x)$  не відрізня-  
 ється від інтервалів  $I_{l_i}$ ,  $1 < i < v$ . Якщо  $l_v = k$  або  
 не виконується умова (5), то встановити умову  
 типу (9) неможливо і з (7), (8) слід, що функція  
 $\varphi(x)$  на  $(x_j, x_N]$  має не менше  $\mu_v - 1$  внутрішніх  
 екстремумів.

Підсумувавши кількість внутрішніх екстрему-  
 мів за всіма інтервалами  $I_{l_i}$ ,  $i = \overline{1, v}$ , отримаємо  
 необхідне.

Аналогічно доводиться випадок незростаючої  
 функції  $S_0(x)$ .

Лема доведена.

Надалі через  $x_s$ ,  $s = \overline{1, M}$ ,  $\bar{x}_i < \bar{x}_{i+1}$ , позначати-  
 мемо точки  $x_{l_j}$ , які задовольняють умовам леми 1  
 і нерівностям типу (7) – (9).

**Лема 2.** Існує така функція  $\varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , для якої справедлива умова (4) і кількість внутрішніх екстремумів дорівнює значенню  $M$ , яке визначається лемою 1.

**Доведення.** Нехай  $I_1 = [x_1, x_1]$ ,  $I_2 = [x_1, x_2]$ , ...,  $I_{M+1} = [x_M, x_N]$  і  $\bar{f}_v$  – задане наближене значення функції у вузлі  $x_v \in \Delta$ .

(Зазначимо, що це позначення будемо використовувати і надалі).

Нехай  $\psi(x) = \psi_s(x)$ ,  $x \in I_s$ ,  $s = \overline{1, M+1}$ , (10)

де  $\psi_s(x)$  – неспадна функція, якщо  $\bar{x}_s$  задовольняє умову

$$\begin{aligned} \bar{f}_s &= S_0(\bar{x}_s) + \delta_0, \text{ при } 1 \leq s \leq M, \\ \bar{f}_{s-1} &= S_0(\bar{x}_{s-1}) - \delta_0, \text{ при } s = M+1 \end{aligned}$$

і незростаюча в іншому випадку; причому  $\psi_s(x)$  така, що

$$\max_{i|x_i \in I_s} |\psi_s(x_i) - f_i| = \inf_{\alpha_s(x) | x_i \in I_s} \max |\alpha_s(x_i) - f_i|.$$

У цій рівності нижня грань береться за усіма неспадними або незростаючими функціями. Очевидно,  $\psi_{s-1}(\bar{x}_{s-1}) = \psi_s(\bar{x}_{s-1})$ ,  $s = \overline{2, M+1}$ .

Згідно з визначенням, функція  $\psi(x)$  має не більше  $M$  внутрішніх екстремумів.

Покажемо, що

$$\delta(\psi) = \max_{1 \leq i \leq N} |\psi(x_i) - f_i| < \delta_0. \quad (11)$$

Розглянемо довільний інтервал  $I_k = [x_{k-1}, x_k] \equiv [x_{k_1}, x_{k_2}]$ . Нехай у цьому інтервалі  $\psi(x) = \psi_k(x)$  – незростаюча функція. Тоді в силу умови (3)

$$f_{k_1} = \max_{k_1 \leq i \leq k_2} f_i \text{ та } f_{k_2} = \min_{k_1 \leq i \leq k_2} f_i.$$

Враховуючи (3), неважко встановити, що інтервал  $I_k$  можна розбити деякою точкою  $x$  на дві частини так, що  $x_i < x$  і  $x_j > x$ , як тільки  $f_i = f_{k_1}$  і  $f_j = f_{k_2}$  відповідно. Звідси і зі способу побудови  $\psi_k(x)$  безпосередньо випливає (11) для  $x_i \in I_k$ .

Аналогічно можна розглянути випадок неспадної функції  $\psi_k(x)$  і цим встановити справедливість (11).

Відповідно до леми 1 та визначення функції  $\psi(x)$  ця функція має рівно  $M$  екстремумів.

Лема доведена.

Якщо  $S_0(x)$  має у точці  $x_j \in \Delta$  максимальне відхилення, яке дорівнює  $\delta_0$ , то, очевидно,  $\psi(x)$  у цій точці набуває екстремального значення, яке дорівнює  $f_j$ . Це впливає безпосередньо із способу побудови  $\psi(x)$ .

**Теорема 1.** Функція  $\psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , яка визначається формулою (10), задовольняє співвідношенню

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\psi(x_i) - f_i| = \inf_{\beta \in K_m [a, b]} \max_{1 \leq i \leq N} |\beta(x_i) - f_i|.$$

**Доведення.** Нехай існує функція  $\varphi(x) \in K_m [a, b]$ , така що

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\varphi(x_i) - f_i| < \max_{1 \leq i \leq N} |\psi(x_i) - f_i|, \quad (12)$$

і нехай максимальне відхилення  $\delta_M = \max_{1 \leq i \leq N} |\psi(x_i) - f_i|$  досягається на інтервалах  $I_{k_1}, I_{k_2}, \dots, I_{k_p}$ .

Розглянемо довільний інтервал  $I_{k_i} = [x_{s_1}, x_{s_2}]$ , на якому функція  $\psi(x)$  не спадає. З визначення  $\psi(x)$  безпосередньо випливає, що неспадна функція з мінімальним відхиленням на  $[x_{k_{i-1}}, x_{k_i}]$  збігається з  $\psi(x)$  на цьому відрізку.

Функція  $\psi(x)$ ,  $x \in I_{k_i}$  – кусково-постійна і існує, принаймні дві точки  $x_{v_1}$  і  $x_{v_2}$ , які належать  $I_{k_i} \cap \Delta$  такі, що

$$f_{v_1} - \psi(x_{v_1}) = \psi(x_{v_2}) - f_{v_2} = \delta_M.$$

Звідси з урахуванням (12)

$$\varphi(x_{v_1}) > \psi(x_{v_1}) \text{ та } \varphi(x_{v_2}) < \psi(x_{v_2}) = \psi(x_{v_1}).$$

Оскільки  $f_{v_1} \leq f_{s_2}$  і  $f_{v_2} \geq f_{s_1}$ , то

$$\varphi(x_{s_1}) < \psi(x_{v_1}) \text{ і } \varphi(x_{s_2}) > \psi(x_{v_1}).$$

Отже, функція  $\varphi(x)$  повинна мати на  $I_{k_i}$  принаймні два внутрішні екстремуми. Аналогічне твердження можна отримати, якщо  $\psi(x)$ ,  $x \in I_{k_i}$ , не зростає.

Із способу побудови  $\psi(x)$  випливають співвідношення:

$$\begin{aligned} \left| \bar{f}_k - \bar{f}_{k-1} \right| &\geq 2\delta_0, \quad k = \overline{2, M}, \\ \left| \bar{f}_1 - \bar{f}_1 \right| &\geq 2\delta_0, \quad \left| \bar{f}_M - \bar{f}_N \right| \geq 2\delta_0. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи (11) і (12), приходимо до висновку, що функція  $\varphi(x)$  повинна мати в околі точки  $x_k$  екстремум (максимум, якщо  $\psi(x)$  не спадає на  $I_{k-1}$ , і мінімум, якщо  $\psi(x)$  не зростає на  $I_{k-1}$ ). Таким чином, кількість внутрішніх екстремумів функції  $\varphi(x)$  виявляється більшою, ніж  $M$ . Отримане протиріччя доводить теорему.

Нехай побудовано функцію  $S_p(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Відповідно до визначення (1) ця функція має в області визначення не більше  $p$  внутрішніх екстремумів. Як і раніше, нехай

$$I_1 = [x_1, x_1], \quad I_2 = [x_1, x_2], \quad \dots, \quad I_{s+1} = [x_s, x_N],$$

$x_i \in \Delta$ ,  $s \leq p$ , – мінімальна кількість інтервалів на

відрізку  $[a, b]$ , на кожному з яких функція  $S_p(x)$  не спадає або не зростає.

Припустимо, що структура функції  $S_p(x)$  така, що

$$\max_{i|x_i \in I_r} f_i = \bar{f}_r, 1 \leq r \leq s, \min_{i|x_i \in I_r} f_i = \bar{f}_{r-1}, 1 < r \leq s+1, \quad (13)$$

якщо функція  $S_p(x)$ ,  $x \in I_r$ , неспадна, і

$$\min_{i|x_i \in I_r} f_i = \bar{f}_r, 1 \leq r \leq s, \max_{i|x_i \in I_r} f_i = \bar{f}_{r-1}, 1 < r \leq s+1, \quad (14)$$

якщо функція  $S_p(x)$ ,  $x \in I_r$ , незростаюча.

Припустимо також, що  $s = p$ .

Очевидно, зазначені припущення мають місце для функцій  $S_0(x)$  та  $\psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$  (10).

Нехай  $\varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$  – деяка функція, для якої справедлива умова

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\varphi(x_i) - f_i| < \max_{1 \leq i \leq N} |S_p(x_i) - f_i| = \delta_p \quad (15)$$

і  $I_r$  – один із інтервалів монотонності функції  $S_p(x)$ , на якому досягається відхилення, що дорівнює  $\delta_p$ . Очевидно, для такого інтервалу справедливі твердження наведених лем 1 і 2 та теореми 1. Для визначеності вважатимемо, що  $S_p(x)$  на інтервалі  $I_r$  не спадає. Тоді існує принаймні дві точки  $x^+, x^- \in I_r \cap \Delta$ ,  $x^+ < x^-$ , такі, що

$$S_p(x^+) = S_p(x^-), f^+ - S_p(x^+) = S_p(x^-) - f^- = \delta_p,$$

де  $f^+$  і  $f^-$  – задані наближені значення шуканої функції в точках  $x^+$  і  $x^-$  відповідно. Отже, з огляду на (15) отримаємо

$$\varphi(x^+) > S_p(x^+), \varphi(x^-) < S_p(x^-) = S_p(x^+). \quad (16)$$

Крім того, відповідно до припущення про структуру функції  $S_p(x)$

$$\varphi(\bar{x}_r) > S_p(x^-). \quad (17)$$

Розглянемо тепер інтервал  $I_{r+1}$ , на якому  $S_p(x)$  не зростає. Якщо  $\bar{f}_{r+1} \leq \bar{f}_{r-1}$ , то із (15) випливає

$$\varphi(\bar{x}_r) > \varphi(\bar{x}_{r+1}). \quad (18)$$

Якщо  $\bar{f}_{r+1} > \bar{f}_{r-1}$ , то через припущення  $s = p$  маємо  $\bar{f}_r - \bar{f}_{r+1} > 2\delta_p$  і тому (18) також справедливо. З нерівностей (17) і (18) випливає, що в околі точки  $x_r$  має бути внутрішній екстремум (максимум) функції  $\varphi(x)$ .

У такий же спосіб можна розглянути випадок, коли  $S_p(x)$  не зростає на інтервалі  $I_r$ .

З вищезазначеного випливає, що кількість внутрішніх екстремумів функції  $\varphi(x)$  обмежена величиною  $s + t$ , де  $t$  – кількість внутрішніх екстремумів на тих інтервалах монотонності функції

$S_p(x)$ , на яких досягається відхилення, що дорівнює  $\delta_p$ .

Аналогічно доведенню леми 2 можна показати, що існує функція, яка має вказану кількість  $s + t$  внутрішніх екстремумів і відхилення менше, ніж  $\delta_p$ .

Крім того, зафіксувавши точки  $\bar{x}_i$ ,  $i = \overline{1, s}$ , і точки  $x_j \in \Delta$ , в яких відхилення  $|S_p(x_j) - f_j| = \delta_p$  і розташувавши їх у зростаючому порядку, можна розбити відрізок  $[a, b]$  на інтервали  $I_1, I_2, \dots, I_{s+t+1}$ , які аналогічні зазначеним у доказі леми 2 і аналогічно функції  $\psi(x)$  (10) може бути побудована функція  $\gamma(x)$ , інтервали незростання та неспадання якої чергуються і

$$\max_{i|x_i \in \Delta \cap I_j} |f_i - \gamma(x_i)| = \inf_{\alpha_j(x)} \max_{i|x_i \in \Delta \cap I_j} |f_i - \alpha_j(x_i)|, \quad j = \overline{1, s+t+1},$$

де нижня грань береться за всіма неспадними або незростаючими функціями.

Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що на такій функції досягається мінімальне відхилення при обраному числі екстремумів, тобто  $S_{s+t}(x) = \gamma(x)$ . Структура функції  $S_{s+t}(x)$  така сама, як і функції  $\psi(x)$  (10) і вона задовольняє умовам типу (13) і (14).

Ці результати дають можливість вказати такі покрокові алгоритми  $B$  та  $C$  побудови функцій  $S_m(x)$  та  $S_n(x)$  відповідно.

**Алгоритм B.**

Крок 1. Покласти  $k = 0$ ,  $X_k = \{x_1, x_N\}$ .

Крок 2. Побудувати функцію  $S_0(x)$ , покласти  $\psi(x) = S_0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Крок 3. Визначити  $\delta_k = \max_{1 \leq i \leq N} |f_i - S_k(x_i)|$  та зафіксувати  $L_1, L_2, \dots, L_n$  – інтервали сталості  $S_k(x)$ .

Крок 4. Визначити множину  $R = \{x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_s}\}$ ,  $r_1 < r_2 < \dots < r_s$ , де

$x_{r_i}$  – вузли сітки  $\Delta$ , для яких виконуються умови:

$$|f_{r_i} - S_k(x_{r_i})| = \delta_k, i = \overline{1, s},$$

$$f_{r_i} - S_k(x_{r_i}) = S_k(x_{r_{i+1}}) - f_{r_{i+1}}, i = \overline{1, s-1}.$$

Крок 5. Покласти  $M = k + s$ .

Крок 6. Покласти  $M = M - 1$  та зафіксувати множину  $R = R \setminus x_1$ , якщо  $x_{r_1} \in L_1$ .

Крок 7. Покласти  $M = M - 1$  та зафіксувати множину  $R = R \setminus x_{r_s}$ , якщо  $x_{r_s} \in L_n$  або не виконуються умова

$$\max_{i > r_s} f_i \geq S_k(x_{r_s}) + \delta_k \quad (\text{якщо } S_k(x) \text{ не спадає на } [x_{r_{s-1}}, x_{r_s}])$$

або умова  $\min_{i>r_s} f_i \leq S_k(x_{r_s}) - \delta_k$  (якщо  $S_k(x)$  не зростає на  $[x_{r_{s-1}}, x_{r_s}]$ ).

Крок 8. Перевірити  $M > m$ ? Якщо так, то покласти  $S_m(x) \equiv \psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$  та закінчити обчислення.

Крок 9. Визначити множину  $X_M = X_k \cup R$  та розташувати її елементи в порядку зростання:

$$X_M = \{x_1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M, x_N\}.$$

Крок 10. Зафіксувати множини

$$I_1 = [x_1, \bar{x}_1], I_2 = [\bar{x}_1, \bar{x}_2], \dots, I_{M+1} = [\bar{x}_M, x_N].$$

Крок 11. Покласти  $\psi(x) \equiv \psi_s(x)$ ,  $x \in I_s$ ,  $s = \overline{1, M+1}$ , де  $\psi_s(x)$  – неспадна функція, якщо

$$\bar{f}_s = S_k(\bar{x}_s) + \delta_k \text{ при } 1 \leq s \leq M,$$

$$\bar{f}_{s-1} = S_k(\bar{x}_{s-1}) - \delta_k \text{ при } s = M+1,$$

незростаюча в іншому випадку і для якої

$$\max_{i|x_i \in I_s} |\psi_s(x_i) - f_i| = \inf_{\alpha_s(x) | i|x_i \in I_s} \max |\alpha_s(x_i) - f_i|,$$

нижня грань береться по всіх функціях, що не спадають або не зростають.

Крок 12. Покласти  $k = M$ ,  $S_k(x) \equiv \psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$  та перейти до кроку 3.

**Алгоритм С.**

Крок 1. Виконати кроки 1,2 алгоритму В.

Крок 2. Перевірити:  $\max_{1 \leq i \leq N} |S_k(x_i) - f_i| \leq \varepsilon$ ?

Якщо так, покласти  $\bar{S}_m(x) \equiv S_k(x)$ ,  $x \in [a, b]$  та закінчити обчислення.

Крок 3. Виконати кроки 3-7 та 9-11 алгоритму В.

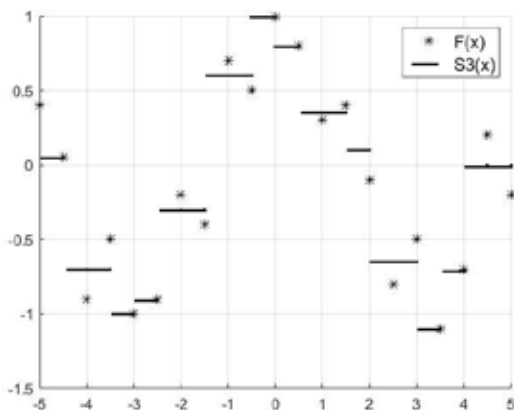
Крок 4. Покласти  $k = M$ ,  $S_k(x) \equiv \psi(x)$  та перейти до кроку 2.

Іноді на практиці може виникнути необхідність у тому, щоб відновлююча функція, яка є розв’язанням задачі (1) або (2), мала неперервну першу похідну. По точкам  $(x_i, S_m(x_i))$  або  $(x_i, \bar{S}_m(x_i))$ ,  $i = \overline{1, N}$  шукану відновлючу функцію можна отримати за допомогою інтерполяційних сплайнів, що зберігають монотоність [1;2;7]. Очевидно, що у цій функції збережеться величина відхилення  $\delta_m$  або  $\bar{\delta}_m$ .

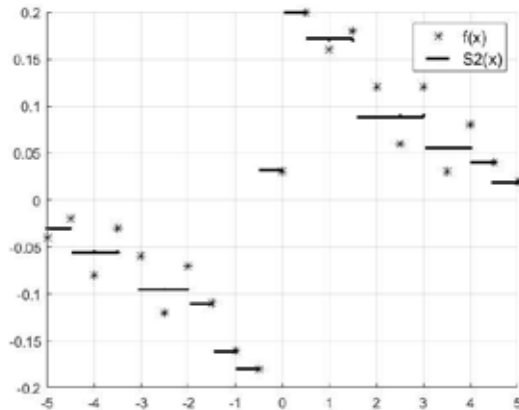
**Результати.** Опишемо деякі з проведених чисельних експериментів відновлення функцій. Нехай функція  $f(x)$  належить класу функцій  $K_m[a, b]$ . Вхідна інформація для розв’язання задачі відновлення формувалася в такий спосіб. На відрізку  $[a, b]$  вибиралася рівномірна з кроком  $h$  сітка  $x_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . На цій сітці обчислювалися значення функції  $f(x_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , на які потім накладався деякий вектор помилок  $\delta_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  і в якості вихідних даних використовувалися  $y_i = f(x_i) + \delta_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . При цьому величини  $\delta_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  є рівномірно розподіленими випадковими величинами.

В якості прикладів розглядалися, наприклад, такі:

$$f_1(x) = \cos x, \quad x \in [-5; 5], \quad h = 0,5 \text{ і } f_2(x) = \frac{x}{1+5x^2}, \quad x \in [-5; 5], \quad h = 0,5.$$



а)



б)

**Рис. 1. Відновлення функцій: а)  $f_1(x) = \cos x$ ; б)  $f_2(x) = \frac{x}{1+5x^2}$**



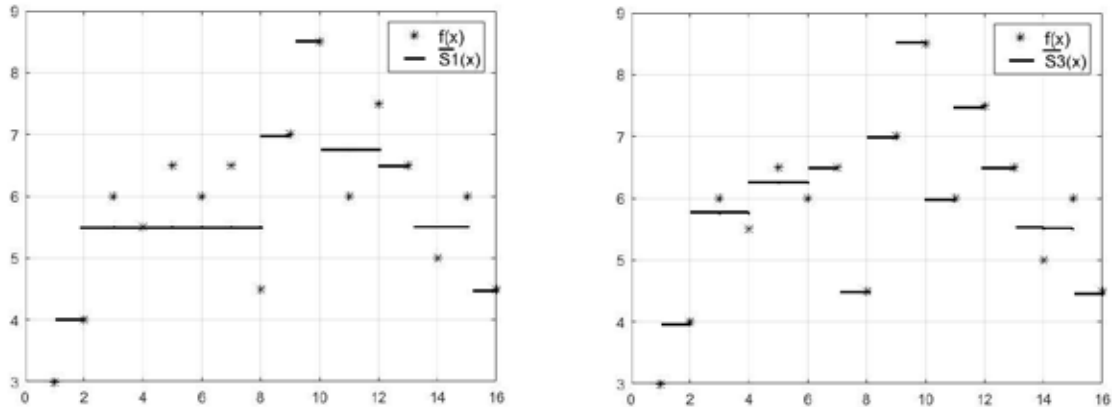


Рис. 2. Відновлення функції  $f_3(x)$  на класах: а)  $K_1 [0,16]$ ; б)  $K_3 [0,16]$

При цьому  $\delta = \max_{1 \leq i \leq N} \delta_i$  для функції  $f_1(x)$  становило  $0,49 \cdot \max_{1 \leq i \leq N} |f_1(x_i)|$ , а для функції  $f_2(x) - 0,27 \cdot \max_{1 \leq i \leq N} |f_2(x_i)|$ . З використанням алгоритму В функція  $f_1(x)$  відновлювалась на класі  $K_3 [-5,5]$ , а функція  $f_2(x)$  на класі  $K_2 [-5,5]$ .

На рис. 1 наведені графіки відновлюваних функцій  $S_3(x)$  і  $S_2(x)$  відповідно.

Аналіз результатів показує, що відновлення функції  $f_1(x)$  за допомогою функції  $S_3(x)$  дозволяє зменшити відносну похибку в вузлах з 49% до 26%, а відновлення функції  $f_2(x)$  за допомогою функції  $S_2(x)$  – з 27% до 16%. При цьому зберігається апріорна інформація про кількість внутрішніх екстремумів кожної функції.

Розглядалась також задача відновлення функції  $f_3(x)$ , яка задана таблицею своїх наближених значень:

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$y_i$	3	4	6	5.5	6.5	6	6.5	4.5	7	8.5	6	7.5	6.5	5	6	4.5

Передбачалося відомим, що максимальна абсолютна похибка вихідних даних у вузлах не перевищує  $\varepsilon = 1$ . Згідно з алгоритмом С визначено мінімальну кількість екстремумів відновлюючої функції, при якій похибка відновлення у вузлах не перевищує заданого  $\varepsilon$ .

На рис. 2 наведені графіки відновлюваних функцій  $S_1(x)$  і  $S_3(x)$ , що мають один і три екстремуми відповідно.

Відновлення функцією  $S_1(x)$  (з одним екстремумом) не забезпечує задану точність. Необхідна точність  $\varepsilon$  досягається при відновленні функцією  $S_3(x)$  (з трьома екстремумами) і тому немає потреби у подальших побудовах.

Відновлені функції є кусково-постійними. Даний етап відновлення можна розглядати як попередній етап для подальшого застосування інтерполяційних ізогеометричних сплайнів, що володіють необхідною гладкістю.

**Висновки.** У статті наведено алгоритми відновлення функції  $f(x)$ , що задана своїми наближеними значеннями у вузлах довільної фіксованої сітки і має задану кількість екстремумів в області визначення. В якості відновлюючої приймається функція, яка побудована на основі методу квазірішень. Ці алгоритми дозволяють не тільки зберегти ізогеометричні властивості відновлюваної функції  $f(x)$ , а й, як свідчать результати чисельних експериментів, досягти достатньої точності відновлення. Таке згладжування може бути використане для обробки експериментальних даних як препроцесор для подальшого застосування інтерполяційних ізогеометричних сплайнів. Зауважимо також, якщо задана точність  $\varepsilon$  вхідних даних  $f(x_i)$ ,  $i = 1, N$  і відповідний клас функцій обмежений, то наведені алгоритми є оптимальними по порядку точності з константою порядку, що не перевищує 2.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Kvasov, V. I. Methods of Shape-Preserving Spline Approximation. World Scientific. Singapore., 2000.
2. Kvasov, V. I. Monotone and convex interpolation bay weighted cubic splines. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013.
3. Нечипоренко Н.А. О равномерном восстановлении функций, имеющих не более двух точек перегиба. *Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 165–173.

4. N. C. Gabrielides, N. S. Sapidis. «C sign, monotonicity and convexity preserving Hermite polynomial splines of variable degree» *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 343 (2018). P. 662–707.
5. Yu. S. Volkov, V. V. Bogdanov, V. L. Miroshnichenko, V. T. Shevaldin, “Shape-Preserving Interpolation by Cubic Splines”, *Math. Notes*. 88:6 (2010). P. 798–805.
6. V. V. Bogdanov, Yu. S. Volkov, “Shape-preservation conditions for cubic spline interpolation”. *Siberian Adv. Math.* 29:4 (2019). P. 231–262.
7. Yu. N. Subbotin, “Inheritance of monotonicity and convexity in local approximations”. *Comput. Math. Math. Phys.* 33:7 (1993). P. 879–884.
8. Березовский М.В., Воскобойников Ю.Е. Изометрические сглаживающие сплайны. *Научный вестник НГТУ*. 1999. № 2(7). С. 3–13.
9. Березовский М.В. Построение сплайнов с заданной геометрией. *Труды НГАСУ*. 2003. Т. 6. № 6 (27). С. 27–31.

#### REFERENCES

1. Kvasov, V. I. (2000). *Methods of Shape-Preserving Spline Approximation*. World Scientific. Singapore.
2. Kvasov, V. I. (2013). Monotone and convex interpolation by weighted cubic splines. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 53. № 10, pp. 1428-1439.
3. Nechyporenko, N.A. & Korotunova, E.V. (2016). O ravnomernom vosstanovlenii funktsiy, imeyushchikh ne boleye dvukh toчек peregiba [On uniform restoration of functions which have no more than two points of inflection]. *Visnyk ZNU. Fyzyko-matematychni nauky*, vol. 1, pp. 165-173.
4. Gabrielides, N.C. & Sapidis, N.S. (2018). C sign, monotonicity and convexity preserving Hermite polynomial splines of variable degree. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 343, pp. 662-707.
5. Volkov, Yu. S., Bogdanov, V. V., Miroshnichenko, V. L. & Shevaldin, V. T. (2010). Shape-Preserving Interpolation by Cubic Splines. *Math. Notes*, 88:6, pp.798-805.
6. Bogdanov, V. V. & Volkov, Yu. S. (2019). Shape-preservation conditions for cubic spline interpolation. *Siberian Adv. Math*, 29:4, pp.231-262.
7. Subbotin, Yu. N. (1993). Inheritance of monotonicity and convexity in local approximations. *Comput. Math. Math. Phys.* 33:7, pp. 879-884.
8. Berezovsky, M.V. & Voskoboinikov, Yu. E. (1999). Izometricheskiye sglazhivayushchiye splayny [Isogeometric smoothing splines]. *Nauchnyy vestnik NGTU*, vol. 2 (7), pp. 3-13.
9. Berezovsky, M.V. (2003). Postroyeniye splaynov s zadannoy geometriyey [Construction of splines with given geometry]. *Trudy NGASU*, tom 6, vol. 6(27), pp. 27-31.

УДК 539.3  
DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2022-2-03>

## ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ СТАЛІ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТУ ІЗ ПОРИСТОЮ МАТРИЦЕЮ ПРИ ПОВЗДОВЖНЬОМУ РОЗТЯГНЕННІ

**Пожуєв В. І.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри механіки  
Національний університет «Запорізька політехніка»  
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-9163-7888](https://orcid.org/0000-0002-9163-7888)  
[pozhuevvi@gmail.com](mailto:pozhuevvi@gmail.com)*

**Плечун В. В.**

*аспірант математичного факультету  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-3810-3916](https://orcid.org/0000-0002-3810-3916)  
[valeria.gashenko@gmail.com](mailto:valeria.gashenko@gmail.com)*

**Спиця О. Г.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри загальної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-7150-7736](https://orcid.org/0000-0002-7150-7736)  
[spytso.o.g@gmail.com](mailto:spytso.o.g@gmail.com)*

**Кончинська Є. О.**

*магістр математичного факультету  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0003-2883-013X](https://orcid.org/0000-0003-2883-013X)  
[liza.zajtseva@gmail.com](mailto:liza.zajtseva@gmail.com)*

**Ключові слова:** *волокнистий композит, пориста матриця, ефективні характеристики, трансропний матеріал, гомогенізація, напруження, деформації.*

У статті розглядається проблема математичного моделювання механічних характеристик неоднорідного матеріалу. На основі методу представницького об'ємного елемента знайдено аналітичні співвідношення для ефективних поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона волокнистого композиційного матеріалу із пористою матрицею. Передбачалося, що пористий матеріал матриці є ізотропним, а матеріал волокна – трансропним. Схема армування композиційного матеріалу є гексагональною. Згідно з процедурою гомогенізації неоднорідний матеріал моделюється однорідним, механічні характеристики якого залежать від властивостей складових. Із масиву композиційного матеріалу виокремлюється представницький об'ємний елемент – волокно із оточуючою його матрицею гексагональної форми. Гексагональна комірка апроксимується циліндричною. Отримана циліндрична комірка складається із двох коаксialних циліндрів – суцільного, що моделює волокна, та порожнистого, що моделює

матрицю. Для отримання ефективного поєздовжнього модуля пружності розглядається дві вісесиметричні задачі для циліндричної комірки. Перша про сумісне поєздовжнє деформування пористої ізотропної матриці та трансропного волокна. Для моделювання пористих властивостей використано відомі моделі пористого матеріалу, отримані методом самоузгодження для пор сферичної форми. На межі розділу матриці та волокна передбачається ідеальне зчеплення, відсутність стрибка радіальних переміщень та напружень. В результаті маємо усі характеристики напружено-деформованого стану для такої складеної циліндричної комірки. Розв'язуємо аналогічну крайову задачу для суцільної циліндричної комірки, що моделює гомогенізований трансропний матеріал, з невідомими пружними характеристиками. Порівняння осьових переміщень точок обох циліндричних комірок дозволяє отримати аналітичні співвідношення для ефективних поєздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона волокнистого композиту як функцію пружних характеристик матеріалу матриці, матеріалу волокна, пористості матриці та об'ємного вмісту волокна у композиті. За допомогою отриманих аналітичних співвідношень проаналізовано вплив пористості на ефективні пружні характеристики композиційного матеріалу.

---

## EFFECTIVE ELASTIC CONSTANTS OF A FIBER COMPOSITE WITH POROUS MATRIX IN LONGITUDINAL STRETCH

**Pozhuev V. I.**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Professor at the Department of Mechanics  
Zaporizhzhia Polytechnic National University  
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-5284-4502  
pzhuevvi@gmail.com*

**Plechun V. V.**

*Postgraduate Student of the Faculty of Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-3810-3916  
valeria.gashenko@gmail.com*

**Spytsia O. G.**

*PhD, Associate Professor,  
Associate Professor at thr Department of General Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-7150-7736  
spytsa.o.g@gmail.com*

**Konchynska E. O.**

*Master's Student of the Faculty of Mathematics*

*Zaporizhzhia National University*

*Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine*

*orcid.org/0000-0003-2883-013X*

*liza.zajtseva@gmail.com*

**Key words:** *fiber composite, porous matrix, effective characteristics, transtropic material, homogenization, stresses, deformations.*

The problem of mathematical modeling of mechanics characteristics inhomogeneous material's have been considered in the article. On based of the representative method of volumetric element has been found the analytical relations for the effective longitudinal modulus of elasticity and Poisson's ratio of a fibrous composite material with a porous matrix. Has been assumed that the porous material matrix's is isotropic and the fiber material is transtropic.

The scheme of reinforcement of the composite material is hexagonal. According to the homogenization procedure, the inhomogeneous material is modeled homogeneous, the mechanical characteristics of which depend on the properties of the components. From the array of composite material stands out a representative volumetric element – a fiber with a surrounding matrix of hexagonal shape. The hexagonal cell is approximated by a cylindrical one. The resulting cylindrical cell consists of two coaxial cylinders – solid, which modeling the fibers, and hollow, which modeling the matrix.

To obtain an effective longitudinal modulus of elasticity, two axisymmetric problems for a cylindrical cell have been considered. The first one is about the compatible longitudinal deformation of the porous isotropic matrix and the transtropic fiber. To model the porous properties has been used the known models of porous material, which have been obtained by the method of self-matching for pores of spherical shape.

At the interface between the matrix and the fiber has been assumed perfect adhesion, no leaps of radial displacements and stresses. As a result, has been had all the characteristics of the stress-strain state for such a folded cylindrical cell. Has been solved a similar boundary value problem for a solid cylindrical cell modeling a homogenized transtropic material with unknown elastic characteristics.

Comparing the axial displacements of the points of both cylindrical cells allows to obtain analytical relations for the effective elastic longitudinal modulus and Poisson's ratio of fibrous composite as a function of elastic characteristics of matrix material, material of fiber, matrix porosity and volumetric fiber content in a composite. The influence of porosity on the effective elastic characteristics of the composite material has been analyzed with the help of the obtained analytical relations.

**Вступ.** Посилення вимог до конструкційних матеріалів приводить до необхідності створення нових видів матеріалів. Однією із сучасних тенденцій є розробка композиційних матеріалів. Основними напрямками удосконалення матеріалів є такі властивості, як міцність, теплопровідність, електромагнітні характеристики тощо. Завдяки комбінації різних матеріалів у композиті можна отримати матеріал із задалегідь визначеними характеристиками. Так, для збільшення міцності доцільно використовувати високомодульні армуючі матеріали, для зменшення теплопровідності перспективним є застосування пористих матриць. На стадії проектування значну економію як матеріальних, так і людських ресурсів забезпечує

використання математичних моделей створюваних матеріалів. Враховуючи велику кількість пор у матриці та волокон у композиті, створити математичну модель, яка б описувала кожен пору та волокно у композиті, практично дуже складно, як і використовувати її у подальшому. Тому перспективним є представлення неоднорідних матеріалів однорідними, властивості яких залежать від властивостей складових частин неоднорідного матеріалу. Така процедура називається гомогенізацією, а механічні характеристики гомогенізованого однорідного матеріалу – ефективними характеристиками. При розробці волокнистих композитів із пористими матрицями виникає необхідність у моделюванні пористого матері-

алу, а саме врахуванні форми, розмірів та розташування пор у матеріалі. Так само математична модель взаємодії матриці та волокна потребує врахування розмірів та форми волокон, їх розташування у композиті, умовах контактної взаємодії на межі «матриця-волокно».

Одними із найпоширеніших методів отримання ефективних механічних характеристик пористого матеріалу є метод самоузгодження [1], який було використано для ізотропного матеріалу із порами сферичної, голкоподібної та дискової форм, та варіаційний метод Хашина-Штрікмана [1] для ізотропних матеріалів із порами довільної форми.

На теперішній час основною тенденцією при гомогенізації композитів є врахування як можна більшої кількості властивостей складових у гомогенізованій моделі. Однією із суттєвих властивостей, що впливає на механічні характеристики композита, є анізотропія властивостей компонентів композиту, особливо армуючих волокон. У монографії [2] наведено отримані на основі дослідження представницького об'ємного елемента ефективні пружні характеристики для волокнистого композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними компонентами. Для таких матеріалів, як гумокорд, актуальним є врахування в'язкопружних властивостей матеріалів при гомогенізації. У роботі [3] методом представницького об'ємного елемента отримано ефективні механічні характеристики композиційного матеріалу із трансверсально-ізотропними пружними волокнами та в'язкопружною матрицею, що моделюється на основі спадкової теорії Больцмана-Вольтерра. Вплив трансверсально-ізотропних порожнистих волокон на ефективні механічні характеристики композиційного матеріалу розглянуто у монографії [4]. У роботі [5] на основі аналітичної методики визначено ефективні пружні константи односпрямованих епоксидних вуглепластиків. На основі моделі кусково-однорідного тіла із використанням дворівневої каркасної теорії проведено дослідження односпрямовано-, перехресно- та триортогонально-армованих волокнистих композитів [6]. З використанням програмного комплексу ANSYS на основі методу скінченних елементів визначено напружено-деформований стан односпрямованого склопластику із урахуванням міжфазного шару та при його відсутності [7]. В роботі [8] запропоновано дворівневу гомогенізацію трикомпонентного матеріалу, згідно із яким волокно із міжфазним шаром замінюється на ефективні композитні волокна, які характеризуються еквівалентними модулями пружності.

Ціллю статті є отримання ефективних пружних сталих композиційного матеріалу із порожнистою пружною матрицею та трансверсально-ізотроп-

ним пружним волокном методом представницького об'ємного елемента.

**Постановка задачі.** Для математичного моделювання пористості матеріалу матриці скористаємося залежностями, що виражають залежність модуля зсуву  $G(p)$  та об'ємного модуля  $K(p)$  ізотропного пористого матеріалу від відповідних модулів пружності  $G(0)$  і  $K(0)$  непористого матеріалу та відносної щільності пористого матеріалу:  $\rho = 1 - p$ , де  $p$  – пористість. Метод самоузгодження для пор сферичної форми дає такі залежності:

$$\frac{G(p)}{G(0)} = 1 - \frac{1-p}{1 - \frac{2}{15} \frac{4-5\nu(0)}{1-\nu(0)} \rho}, \quad \frac{K(p)}{K(0)} = 1 - \frac{1-p}{1 - \frac{1+\nu(0)}{3(1-\nu(0))} \rho}. \quad (1)$$

де  $\nu(0)$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу непористої матриці.

За допомогою формул

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (2)$$

знайдемо модуль Юнга  $E^*(p)$  та коефіцієнт Пуассона  $\nu^*(p)$  для пористої матриці (тут і далі символом \* будемо позначати величини, що відносяться до матеріалу матриці):

$$E^*(p) = \left( 3E^*(0) - \frac{E^*(0)(3-\nu^*(0))(1-p)}{3(1+\nu^*(0)-(1+\nu^*(0))p)} \right) / \left( (1-2\nu^*(0)) \left( 1 - \frac{(3+\nu^*(0))(1-p)}{3(1-\nu^*(0)-p(1+\nu^*(0)))} + \frac{2(1+\nu^*(0))(15(1-\nu^*(0))-2(4-5\nu^*(0))p)}{(1-2\nu^*(0))(15(1-\nu^*(0))(2-p)-2p(4-5\nu^*(0)))} \right) \right), \quad (3)$$

$$\nu^*(p) = \frac{E^*(p)(1+\nu^*(0))(15(1-\nu^*(0))-2p(4-5\nu^*(0)))}{E^*(0)(15(1-\nu^*(0))(2-p)-2p(4-5\nu^*(0)))} - 1. \quad (4)$$

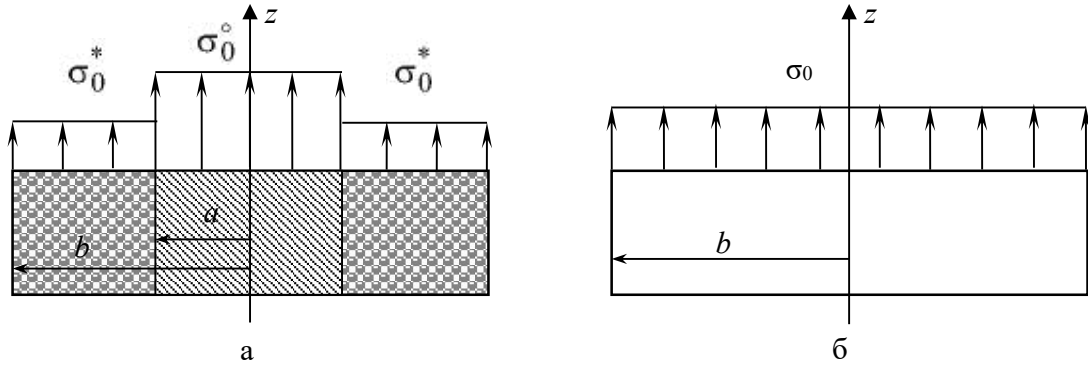
**Методи.** Сумісне поздовжнє розтягнення матриці та волокна. Розглянемо сумісне поздовжнє розтягнення (рис. 1а) суцільного циліндра ( $0 \leq r \leq a$ ), що описує матеріал волокна, і порожнистого циліндра ( $a \leq r \leq b$ ), що описує матеріал матриці.

З експериментальних даних відомо, як ведуть себе при повздовжньому розтягненні компоненти напружено-деформованого стану матриці й волокна на межі розділу та на певній висоті у напрямку розтягнення, тому сформуємо низку умов на цій межі таким чином:

$$\sigma_{rr}^\circ(a) = \sigma_{rr}^*(a), u_r^\circ(a) = u_r^*(a), u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (5)$$

Тут символ  $\circ$  означає приналежність відповідної величини до матеріалу волокна.

На боковій циліндричній поверхні комірки має виконуватися умова:



а – сумісне деформування пористої матриці та волокна;  
 б – деформування гомогенізованого матеріалу;

**Рис. 1. Поздовжнє розтягнення елементарної комірки**

$$\sigma_{rr}^*(b) = 0. \tag{6}$$

Радіальні переміщення трансропного волокна визначаються виразом

$$u_r^\circ(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \tag{7}$$

а з урахуванням того, що при  $r=0$   $u_r^\circ(0) = 0$ , випливає, що  $C_2 = 0$ , тоді вираз (7) прийме вид (позначимо  $C_1$  як  $C$ ):

$$u_r^\circ(r) = Cr. \tag{8}$$

Компоненти напружено-деформованого стану трансропного волокна визначатимуться, окрім (8), такими співвідношеннями:

$$u_z^\circ(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left( \frac{\sigma_0^\circ(1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ \right) z, \tag{9}$$

$$\sigma_{rr}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left( \frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right), \sigma_{\theta\theta}^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left( \frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C \right). \tag{10}$$

Так само для пористої ізотропної матриці можемо записати такі вирази:

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r};$$

$$u_z^*(z) = \frac{1}{(1-\nu^*(p))} \left( \frac{\sigma_0^*(1-\nu^*(p) - 2(\nu^*(p))^2)}{E^*(p)} - 2Av^*(p) \right) z, \tag{11}$$

$$\sigma_{rr}^*(r) = E^*(p) \left( \frac{\sigma_0^*\nu^*(p)}{E^*(p)(1-\nu^*(p))} + \frac{A}{1-\nu^*(p)} - \frac{B}{r^2(1+\nu^*(p))} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r) = E^*(p) \left( \frac{\sigma_0^*\nu^*(p)}{E^*(p)(1-\nu^*(p))} + \frac{A}{1-\nu^*(p)} - \frac{B}{r^2(1+\nu^*(p))} \right). \tag{12}$$

Застосувавши крайові умови (5), (6) знайдемо сталі  $A$ ,  $B$ ,  $C$  та залежність між  $\sigma_0^\circ$  та  $\sigma_0^*$ . Із другого співвідношення умов (5) маємо:

$$C = A + \frac{B}{a^2}. \tag{13}$$

Із рівності (6) маємо:

$$A = \frac{B(1-\nu^*(p))}{b^2(1+\nu^*(p))} - \frac{\sigma_0^*\nu^*(p)}{E^*(p)}. \tag{14}$$

Вираз (13) запишеться так:

$$C = B \left( \frac{f(1-\nu^*(p)) + (1+\nu^*(p))}{a^2(1+\nu^*(p))} \right) - \frac{\sigma_0^*\nu^*(p)}{E^*(p)}. \tag{15}$$

Перша умова у (5) дає:

$$\begin{aligned} & \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)} \left( \frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} - \frac{\sigma_0^*\nu^*(p)}{E^*(p)} \right) = \\ & = \frac{B}{a^2} \left( \frac{E^*(p)(f-1)}{(1+\nu^*(p))} - \frac{E_2^\circ(f(1-\nu^*(p)) + (1+\nu^*(p)))}{(1-\nu_{23}^\circ)(1+\nu^*(p))} \right), \tag{16} \\ & B = \left( \frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} - \frac{\sigma_0^*\nu^*(p)}{E^*(p)} \right) \times \\ & \times \frac{a^2 E_2^\circ (1 - (\nu^*(p))^2)}{E^*(p)(f-1)(1-\nu_{23}^\circ) - E_2^\circ(f(1-\nu^*(p)) + (1+\nu^*(p)))}, \end{aligned}$$

Прийнявши

$$d_1 = E^*(p)(f-1)(1-\nu_{23}^\circ), d_2 = E_2^\circ(f(1-\nu^*(p)) + (1+\nu^*(p))), \tag{17}$$

Будемо мати

$$B = \frac{\nu_{21}^\circ a^2 (1 + \nu^*(p))}{d_1 - d_2} \sigma_0^\circ - \frac{a^2 E_2^\circ (1 + \nu(p)^2)}{d_1 - d_2} \frac{\nu^*(p)}{E^*(p)} \sigma_0^*;$$

$$C = \frac{d_2}{d_1 - d_2} \frac{\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} \sigma_0^\circ - \frac{\nu^*(p)}{E^*(p)} \frac{d_1}{d_1 - d_2} \sigma_0^*;$$

$$A = \frac{fv_{21}^{\circ}(1-v^*(p))}{d_1-d_2} \sigma_0^{\circ} - \frac{v^*(p)}{E^*(p)} \frac{fE_2^{\circ}(1-v^*(p))+d_1-d_2}{d_1-d_2} \sigma_0^{\circ}. \quad (18)$$

Із третьої рівності (5) знаходимо співвідношення між  $\sigma_0^*$  та  $\sigma_0^{\circ}$ :

$$\left( \frac{(1-2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ}-v_{23}^{\circ})(d_1-d_2)}{E_1^{\circ}(1-v_{23}^{\circ})} - \frac{2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ}d_2}{E_1^{\circ}(1-v_{23}^{\circ})} + \frac{2fv_{21}^{\circ}E^*(p)}{1} \right) \sigma_0^{\circ} = \left( \frac{(1-2(v^*(p))^2-v^*(p))(d_1-d_2)}{E^*(p)(1-v^*(p))} + \frac{2(v^*(p))^2(fE_2^{\circ}(1-v^*(p))+d_1-d_2)}{E^*(p)(1-v^*(p))} - \frac{2v^*(p)v_{21}^{\circ}d_1}{E^*(p)(1-v_{23}^{\circ})} \right) \sigma_0^*. \quad (19)$$

Позначивши

$$d^{\circ} = \frac{E^*(p)(f-1)(1-v_{23}^{\circ}-2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ})}{E_1^{\circ}} - \frac{E_2^{\circ}(f(1-v^*(p)-2v_{12}^{\circ}v^*(p))+1+v^*(p))}{E_1^{\circ}}; \quad d^* = \frac{E^*(p)(f-1)(1-v_{23}^{\circ}-2(v^*(p))^2v_{21}^{\circ})}{E^*(p)} - \frac{E_2^{\circ}(f(1-v^*(p)-2(v^*(p))^2)+1+v^*(p))}{E^*(p)}, \quad (20)$$

отримуємо

$$d^{\circ} \sigma_0^{\circ} = d^* \sigma_0^*. \quad (21)$$

Розв'яжемо аналогічну задачу для однорідного трансропного матеріалу, що моделює поведінку гомогенізованого матеріалу (рис. 16). Тоді поле напружень буде визначатися такими співвідношеннями:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \sigma_{rr} = 0, \sigma_{\theta\theta} = 0, \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (22)$$

Щоб обидві задачі були еквівалентними необхідно, щоб збіглися умови рівноваги для обох задач, тобто щоб виконувалися умови:

$$\pi a^2 \sigma_0^{\circ} + \pi(b^2 - a^2) \sigma_0^* = \pi b^2 \sigma_0, \text{ або } \sigma_0^{\circ} f + \sigma_0^*(1-f) = \sigma_0. \quad (23)$$

З урахуванням (21) отримаємо:

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_0 d^{\circ}}{d^{\circ} + f(d^* - d^{\circ})}, \sigma_0^{\circ} = \frac{\sigma_0 d^*}{d^{\circ} + f(d^* - d^{\circ})}. \quad (24)$$

З урахуванням (22) співвідношення для деформацій набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{v_{21}}{E_2} \sigma_0, \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_1} \sigma_0. \quad (25)$$

Тоді переміщення визначатися формулами:

$$u_r(r) = -\frac{v_{21}}{E_2} \sigma_0 r + C_1; u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z + C_2. \quad (26)$$

Сталі  $C_1 = C_2 = 0$  маючи на увазі умови  $u_r(0) = 0$  та  $u_z(0) = 0$ , тобто

$$u_r(r) = -\frac{v_{21}}{E_2} \sigma_0 r, u_z(z) = \frac{1}{E_1} \sigma_0 z. \quad (27)$$

Як умови узгодження для обох задач використаємо рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній поверхні циліндричної комірки:

$$u_r(b) = u_r^*(b), u_z(h) = u_z^{\circ}(h) = u_z^*(h). \quad (28)$$

Тоді друге із умов (28) з використанням (11) та (27) запишеться у вигляді:

$$\frac{\sigma_0^{\circ}(1-v^*(p)-2(v^*(p))^2)}{E^*(p)(1-v^*(p))} - \frac{2Av^*(p)}{(1-v^*(p))} = \frac{1}{E_1} \sigma_0, \quad (29)$$

З урахуванням (18) та (24) після математичних перетворень отримуємо формулу для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з ізотропною пористою матрицею і трансропним волокном:

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2v_{12}^{\circ}\beta)E^*(p)(1-f) + (\alpha - 2v^*(p)\beta)E_1^{\circ}f}{\alpha - 2\beta v_{12}^{\circ} + 2fv^*(p)E_2^{\circ}(v_{12}^{\circ} - v^*(p))}, \quad (30)$$

де

$$\alpha = E^*(p)(1-f)(1-v_{23}^{\circ}) + E_2^{\circ}(f(1-v^*(p)) + (1+v^*(p))); \quad \beta = v_{21}^{\circ}E^*(p)(1-f) + v^*(p)fE_2^{\circ}. \quad (31)$$

Із першої з умов (28) знайдемо співвідношення  $-v_{21}/E_2$  для композиційного матеріалу, а з урахуванням виразів (18), (24) після перетворень матимемо

$$-\frac{v_{21}}{E_2} = \frac{1}{d^{\circ} + f(d^* - d^{\circ})} \left( \frac{2fv_{21}^{\circ}d^*}{d_1-d_2} - \frac{v^*(p)(2fE_2^{\circ} + d_1 - d_2)d^{\circ}}{E^*(p)(d_1-d_2)} \right). \quad (32)$$

Використовуючи співвідношення між коефіцієнтами Пуассона і модулями пружності анізотропного матеріалу, отримуємо співвідношення для коефіцієнта Пуассона  $v_{12}$ :

$$v_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta v_{12}^{\circ})v^*(p) + 2E_2^{\circ}f(v_{12}^{\circ} - v^*(p))}{\alpha - 2\beta v_{12}^{\circ} + 2fv^*(p)E_2^{\circ}(v_{12}^{\circ} - v^*(p))}. \quad (33)$$

**Числові розрахунки.** З'ясуємо вплив пористості та об'ємного вмісту волокна у композиті на значення ефективних механічних характеристик. Розглянемо композиційний матеріал, матрицею для якого є алюмінієвої, а волокна з бору, які будемо



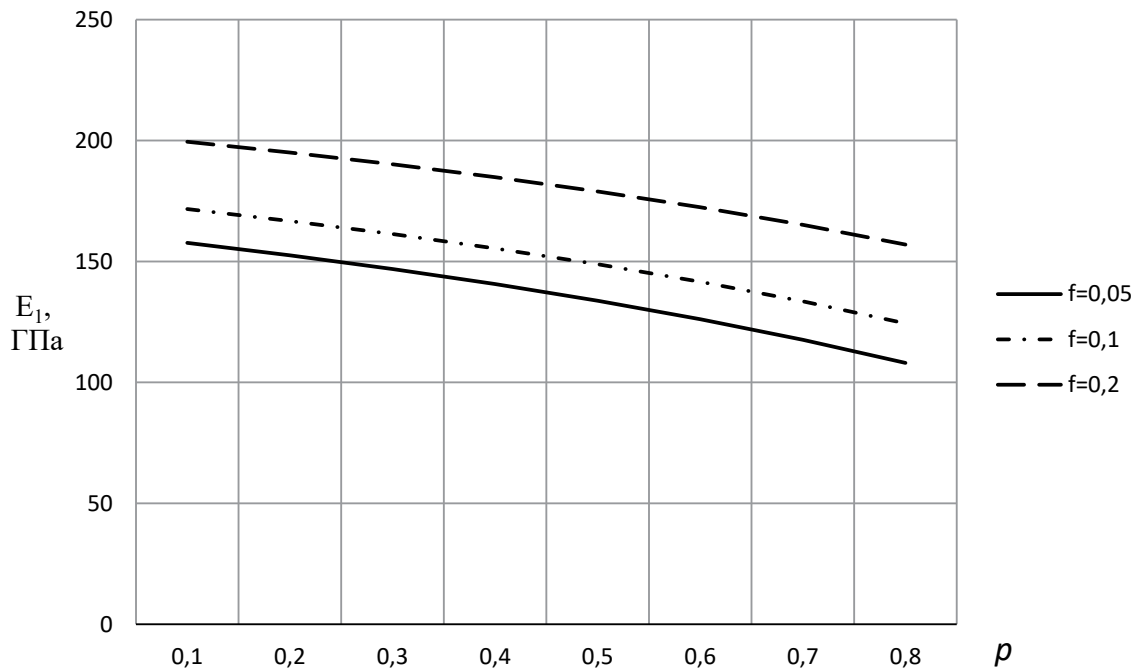


Рис. 2. Залежність ефективного модуля  $E_1$  від пористості  $\rho$

вважати ізотропними. Матеріал матриці має такі механічні характеристики  $E^* = 70 \text{ ГПа}$ ,  $\nu^* = 0,32$ , матеріал волокна –  $E^\circ = 416,5 \text{ ГПа}$ ,  $\nu^\circ = 0,2$  [9]. Побудуємо залежності поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу від пористості матриці, отриманий за формулою (30), для різних значень об'ємного вмісту волокна  $f$  (рис. 2).

Як і очікувалося, зростання об'ємного вмісту високомодульних волокон призводить до збільшення ефективного поздовжнього модуля пружності (при збільшенні  $f$  від 0,05 до 0,2 модуль збільшується приблизно на 30%). Збільшення ж пористості матриці, навпаки, приводить до змен-

шення ефективною характеристики й носить слабо виражений нелінійний характер (див. рис. 2).

**Висновки.** Отже, у роботі за допомогою методу представницького об'ємного елемента вперше отримані аналітичні співвідношення для ефективних поздовжнього модуля пружності  $E_1$  та коефіцієнта Пуассона  $\nu_{12}$  волокнистого композиційного матеріалу із пористою матрицею як функцій механічних характеристик матриці та волокна, об'ємного вмісту волокон у композиті та пористості матриці. Досліджено вплив пористості на ефективний поздовжній модуль пружності  $E_1$  волокнистого композиту із пористою алюмінієвою матрицею.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Ковальченко М.С. Механические свойства изотропных пористых материалов. *Порошковая металлургия*. 2002. № 5/6. С. 105–127.
2. Гребенюк С.Н., Гоменюк С.І., Клименко М.І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 350 с.
3. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Гоменюк С.І. Ефективні механічні характеристики в'язкопружних композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 300 с.
4. Столярова А.В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із трансропними порожнистими волокнами : монографія. Одеса : Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с.
5. Рубашевський В.В., Заразовський М.М., Шукаєв С.М. Аналіз методів визначення констант пружності однонаправленого шару композиційних матеріалів. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2017. № 2(80). С. 107–112. DOI: 10.20535/2521-1943.2017.80.109634.
6. Akhundov V.M., Kostrova M.M., Naumova I.Ju. Graphic visualization of deformed fibre-reinforced materials. *Metallurgical and Mining Industry*. 2017. Vol. 2. P. 52–58.
7. Ашихмин В.А., Мерзлякова Н.А., Шапаєв И.В. Влияние межфазного слоя на упругие характеристики волокнистого материала с гексагональной структурой. *Научно-практический электронный журнал «Аллея Науки»*. 2018. № 4(20). С. 1–11.

8. Хорошун Л.П., Левчук О.И. Эффективные упругие свойства стохастических однонаправленных волокнистых композитов при несовершенной адгезии. *Доповіди Національної академії наук України*. 2018. № 9. С. 51–63. DOI: 10.15407/dopovidi2018.09.051.
9. Композиционные материалы : справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. Киев : Наукова думка, 1985. 592 с.

#### REFERENCES

1. Kovalchenko M. S. Mechanical properties of isotropic porous materials. *Powder metallurgy*. 2002. № 5/6. pp. 105–127 (in Russian).
2. Grebenyuk S.N., Gomenyuk S.I., Klymenko M.I. Stress-strain state of spatial structures based on homogenization of fibrous composites: monograph. Kherson: «Helvetyka» Publishing House, 2019. 350 p (in Ukrainian).
3. Klymenko M. I., Grebenyuk S. M., Gomenyuk S. I. Effective mechanical characteristics of viscoelastic composites: monograph. Kherson: "Helvetyka" Publishing House, 2019. 300 p (in Ukrainian).
4. Stolyarova A.V. Effective mechanical characteristics of composite materials with transtropical hollow fibers: monograph. Odesa: "Helvetika" Publishing House, 2021. 104 p (in Ukrainian).
5. Rubashevskiy V.V., Zarazovskiy M.M., Shukaev S.M. Analysis of methods for determining elasticity constants of a unidirectional layer of composite materials. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2017. № 2 (80). P.107–112. DOI: 10.20535/2521-1943.2017.80.109634.
6. Akhundov V. M., Kostrova M. M., Naumova I. Ju. Graphic visualization of deformed fibre-reinforced materials. *Metallurgical and Mining Industry*. 2017. Vol. 2. P. 52–58.
7. Ashykhmyn V. A., Merzliakova N. A., Shapaev Y. V. Influence of the interfacial layer on the elastic characteristics of a fibrous material with a hexagonal structure. *Scientific and practical electronic journal "Avenue of Science"*. 2018. No. 4 (20). pp. 1–11 (in Russian).
8. Khoroshun L. P., Levchuk O. I. Effective elastic properties of stochastic unidirectional fibrous composites with imperfect adhesion. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2018. № 9. С. 51–63. DOI: 10.15407/dopovidi2018.09.051.
9. Composite materials: reference book / ed. D. M. Karpinos. Kyiv: Scientific opinion, 1985. 592 p (in Russian).

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2022-2-04>

## ГОМОГЕНІЗАЦІЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО КОМПОЗИТА У РАЗІ ПОВЗДОВЖНЬОГО РОЗТЯГУ

**Пожуєв В. І.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри механіки  
Національний університет «Запорізька політехніка»  
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-9163-7888](https://orcid.org/0000-0002-9163-7888)  
[pozhuevvi@gmail.com](mailto:pozhuevvi@gmail.com)*

**Артеменко А. О.**

*аспірант математичного факультету  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-6536-3086](https://orcid.org/0000-0002-6536-3086)  
[krummisvafklettagja@gmail.com](mailto:krummisvafklettagja@gmail.com)*

**Клименко М. І.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0001-5065-0341](https://orcid.org/0000-0001-5065-0341)  
[m1655291@gmail.com](mailto:m1655291@gmail.com)*

**Скрипник К. В.**

*аспірант математичного факультету  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-8266-1093](https://orcid.org/0000-0002-8266-1093)  
[kirillsripnik@gmail.com](mailto:kirillsripnik@gmail.com)*

**Ключові слова:** *в'язкопружна матриця, гомогенізація, ефективні характеристики, пружне волокно, трансстропний композит, ядро релаксації.*

У статті розглядається задача математичного моделювання механічних характеристик в'язкопружного трансстропного волокнистого композита. Об'єкт дослідження – в'язкопружний трансверсально-ізотропний композит з періодичною структурою. Елементи його комірки – трансверсально-ізотропна в'язкопружна матриця та пружне волокно. Розв'язано задачу визначення ефективних характеристик для інтегрального оператора в'язкопружного композита. Цей оператор побудований у відповідності до спадкової теорії Больцмана-Вольтерра. Розв'язана задача для композита, коли складовими його елементами є в'язкопружна ізотропна матриця та трансстропне пружне волокно. Ядро релаксації матриці є ядро Абеля. Із масиву композиційного матеріалу виокремлюється представницький елемент. Його фізико-механічні характеристики є типовими для всього композита. Він містить волокно з оточуючою його матрицею. У роботі отримано параметри ефективного повздовжнього модуля пружності. Для в'язкопружного матеріалу він є інтегральним оператором, у якому

потрібно визначити сталий миттєвий модуль пружності та ядро релаксації. Для визначення цих характеристик розв'язуються дві вісесиметричні задачі для циліндричної представницької комірки композита. Перша задача полягає у визначенні компонент напружено-деформованого стану у разі сумісного поздовжнього деформування ізотропної в'язкопружної матриці та трансропного волокна. На межі розділу матриці та волокна передбачається неперервність радіальних переміщень та напружень. Розв'язавши цю задачу, знаходимо всі компоненти напружено-деформованого стану для цієї складеної циліндричної комірки. Розв'язуємо аналогічну крайову задачу для суцільної циліндричної комірки, що моделює гомогенізований трансропний матеріал, з невідомими в'язкопружними характеристиками. Порівнявши осьові деформації точок обох циліндричних комірок, отримано формули для параметрів ефективного інтегрального оператора, що відображає розтяг в'язкопружного композита.

---

## HOMOGENIZATION OF VISCOELASTIC COMPOSITE DURING LONGITUDINAL STRETCHING

**Pozhuev V. I.**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Professor at the Department of Mechanics  
Zaporizhzhia Polytechnic National University  
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-5284-4502  
pozhuevvi@gmail.com*

**Artemenko A. O.**

*Postgraduate Student of the Faculty of Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-6536-3086  
krummisvafklettagja@gmail.com*

**Klymenko M. I.**

*PhD, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
m1655291@gmail.com*

**Scrypnyk K. V.**

*Postgraduate Student of the Faculty of Mathematics  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-8266-1093  
kirillsripnik@gmail.com*

**Key words:** *effective characteristics, elastic fiber, homogenization, relaxation kernel, transtropic composite, viscoelastic matrix.*

In the article the problem of mathematical modelling of mechanical characteristics of viscoelastic transtropic fibrous composite is considered. The object of the research is viscoelastic transversely isotropic composite with periodic structure. Elements of its cell are transversely isotropic viscoelastic matrix and elastic fiber. The problem of determination of effective characteristics for integral operator of viscoelastic composite. This operator is constructed in accordance to Boltzmann-Volterra's legacy theory. Problem for composite, when its constituent elements are isotropic viscoelastic matrix and elastic transtropic fiber is solved. Abel kernel is matrix relaxation kernel. From array of composite material the representative element is singled out. Its physical-mechanical characteristics are typical for entire composite. It contains fiber with matrix that surrounds it. In the paper parameters of effective longitudinal modulus of elasticity are obtained. For viscoelastic material it is integral operator in which one needs to determine constant momentary modulus of elasticity and relaxation kernel. For determination of these characteristics two axis-symmetrical problems for cylindrical representative cell of composite are being solved. First problem consists of determination of tensely-deformed condition components during compatible longitudinal deformation of isotropic viscoelastic matrix and transtropic fiber. On the edge of separation of matrix and fiber continuity of radial movings and tensions is foreseen. By solving this problem, we find all components of tensely-deformed condition for this composed cylindrical cell. We solve the similar boundary value problem for solid cylindrical cell, that models homogenized transtropic material with unknown viscoelastic characteristics. By comparison of axial deformations of points of both cylindrical cells, formulas for parameters of effective integral operator of viscoelastic composite are obtained.

## ВСТУП

Останнім часом у різних галузях промисловості суттєво розширилось застосування композитних матеріалів. Волокнисті композити широко застосовують у машинобудуванні, зокрема, автомобілебудуванні, судно- та авіабудуванні, а також електро- та радіотехніці. У зв'язку з цим актуальною є проблема раціонального проектування конструкцій, що містять елементи, виготовлені з композитів. Для розрахунку їх напружено-деформованого стану потрібно знати механічні характеристики цих матеріалів як однорідних матеріалів (ефективні характеристики), тобто розв'язати задачу гомогенізації цих композитів. При цьому потрібно врахувати наявність в'язкопружних властивостей у багатьох композитах. Розробка нових і модифікація відомих методів прогнозування в'язкопружних характеристик композиційних матеріалів за відомих механічних характеристик їх складових елементів та відносної частки у структурі композита дозволить обґрунтувати задавання вимоги до їх складових елементів (фаз) та структури композитів.

Композиційні матеріали здебільшого, звичайно, складені з односпрямованості армованих шарів, викладених у певній послідовності. Механічні властивості таких композитів значною мірою залежать від часу. Це зумовлено значною мірою в'язкопружними властивостями з'єднувальних матеріалів та деяких типів волокон.

Для моделювання в'язкопружних властивостей широке застосування знайшла спадкова теорія Больцмана-Вольєрра, яка застосована у цьому дослідженні. Велике значення для побудови таких математичних моделей мають аналітичні форми задання ядра повзучості та релаксації. Досить складно побудувати аналітичні вирази, що добре описують експериментальні дані на великому проміжку часу. Для аналітичного розв'язування задачі гомогенізації застосовують такі основні підходи. Перший підхід називають теорією ефективних модулів. Теорію ефективних модулів складно застосовувати у разі великих деформацій. Інший підхід полягає у застосуванні теорії суміші. У межах цієї теорії розроблюються системи рівнянь, що моделюють взаємодію композитів. Складність визначення коефіцієнтів таких систем визначає обмеженість його застосування. Така робота розвиває підхід у межах теорії ефективних модулів, у напрямі побудови аналітичних залежностей для моделювання в'язкопружних властивостей композитів, що містять фази, в'язкопружну поведінку яких моделюють з використанням ядра релаксації Абеля.

Виконане дослідження сучасних публікацій з проблематики моделювання механічних властивостей композитних матеріалів свідчить про те, що невивченим залишається питання гомогенізації в'язкопружних транструпних волокнистих композитів з в'язкопружними фазами, у яких

моделюються ядра релаксації з особливостями, зокрема, у початковий момент часу, а також такі, що дозволяють більш адекватно описувати механічні властивості у значеннях часу, близьких до початкових. Це й визначило мету цієї роботи.

**Об'єктом дослідження** є трансропний в'язкопружний односпрямований композит.

**Метою** цього дослідження є знаходження ефективного позовжнього модуля пружності композита, складниками якого є матриця, в'язкопружні властивості якої визначаються ядром релаксації Абея, та трансропне пружне волокно.

Використання ядра Абея дозволяє більш точно моделювати в'язкопружні властивості композита на початковому проміжку часу з моменту прикладання навантаження.

Основною гіпотезою, прийнятою у дослідженні, є те, що в'язкопружні властивості композита задовольняють спадковій теорії Больцмана-Вольтерра. Правильність цієї гіпотези експериментально підтверджена для більшості реальних композитних матеріалів.

У монографії [1] висвітлені основні методи знаходження та отримані співвідношення для ефективних механічних характеристик для волокнистих композитів, зокрема, у випадку трансропних властивостей волокна та в'язкопружних властивостей матриці. Для моделювання цих властивостей використовували співвідношення спадкової теорії Больцмана – Вольтерра з ядром релаксації експоненціального типу. Тут запропонована методика гомогенізації, що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження переміщень точок однорідної представницької комірки композита та відповідних точок його елементів. Саме ця методика використана для вирішення задачі гомогенізації у цій роботі.

У роботі [2] здійснюється аналітичне моделювання термопружних та термов'язкопружних характеристик односпрямованого композиту з термореактивної матриці, армованої скловолном. У статті [3] визначено ефективний поперечний модуль пружності для трифазного композита з випадково розташованими односпрямованими круглими волокнами з урахуванням взаємодії між волокнами. Розглянуто випадок композита з нестисливою матрицею та круглими жорсткими волокнами. Пружні сталі трифазного композита (матриця, циліндричне волокно та порожнина циліндричної форми, яка моделює порушення зчеплення волокна з матрицею) визначалися у цій роботі у вигляді комбінації тензорів пружних сталей матеріалу матриці й матеріалів включень. Матеріал матриці та волокна вважався ізотропним.

Для визначення в'язкопружних ефективних сталей волокнистого композита в поперечному щодо волокна напрямі запропонована лінійна

в'язкопружна модель поверхні розділу волокна та матриці у статті [4]. У цій роботі гомогенізація для елементарної комірки здійснювалась методом скінченних елементів, що дала змогу дослідити в'язкопружні властивості волокнистого композита. У дослідженні [5] підхід, що ґрунтується на мікромеханічному моделюванні, використаний для побудови в'язкопружної моделі композиції з урахуванням дії на них температурних полів. У [6] здійснено аналіз сучасних методів чисельного моделювання різних типів композитних матеріалів, але не розглянуті задачі моделювання в'язкопружності композитів.

**Методи.** Для досягнення мети дослідження використано методику, запропоновану в [1], що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодженості переміщень вибраних точок фаз композита та елементарної комірки однорідного композита. Для її реалізації відповідно потрібно розв'язувати дві крайові задачі. Спочатку розв'яжемо задачу про сумісне деформування компонентів представницького елемента композита (матриці та волокна) у разі їх рівномірного позовжнього розтягу. Для розв'язування цієї задачі використаємо операційний метод.

**Задача про сумісне деформування матриці та волокна.** Визначимо компоненти осесиметричного напружено-деформованого стану представницького елемента композита, що є коаксіальним циліндром. Матриця подається у вигляді в'язко-пружного порожнистого циліндру, радіусу якого  $a \leq r \leq b$ , що містить суцільний пружний циліндр радіуса  $a$ , що моделює волокно. Задачу розв'язуємо у циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$ , де вісь  $Oz$  співпадає з напрямом армування композита волокном. Вважаємо, що радіальні переміщення та напруження на границі контакту матриці та волокна при  $r = a$  є неперервними, осьові переміщення матриці та волокна рівні між собою. Переміщення, напруження та деформації далі будемо позначати символом  $^{\circ}$  для матриці, символ  $^{\circ}$  – для волокна. Деформування представницької комірки композита здійснюється під дією сталого навантаження, що діє вздовж його осі. Отримуємо осесиметричну задачу теорії пружності. За такого навантаження осьове напруження волокна:  $\sigma_z^{\circ} = \sigma_0^{\circ}$ . Радіальні та тангенціальні напруження  $\sigma_r^{\circ} = \sigma_r^{\circ}(r, t)$ ,  $\sigma_{\varphi}^{\circ} = \sigma_{\varphi}^{\circ}(r, t)$  залежать від радіальної координати  $r$  та часу  $t$ , дотичні напруження дорівнюють нулю. З рівняння рівноваги, де напруження виражені через переміщення, знаходимо

$$u_r^{\circ}(r, t) = C(t)r. \quad (1)$$

Використовуючи основні рівняння теорії пружності, знаходимо осьове переміщення та радіальне напруження волокна у вигляді:

$$u_z^\circ(z, t) = \frac{1}{1 - \nu_{23}^\circ} \left( \frac{\sigma_0^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C(t) \nu_{21}^\circ \right) z, \quad (2)$$

$$\sigma_r^\circ(t) = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ} \left( \frac{\sigma_0^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C(t) \right). \quad (3)$$

У виразах (2) та (3)  $E_1^\circ$  і  $E_2^\circ$  – модулі пружності,  $\nu_{12}^\circ$ ,  $\nu_{21}^\circ$  та  $\nu_{23}^\circ$  – коефіцієнти Пуассона, у позначеннях індекс 1 відповідає осі  $z$ , що є перпендикулярною площині ізотропії.

Для матриці нормальні напруження:  $\sigma_z^* = \sigma_0^*(t)$ ,  $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r, t)$ ,  $\sigma_\phi^* = \sigma_\phi^*(r, t)$ , дотичні напруження дорівнюють нулю. Радіальні переміщення точок матриці мають вигляд:

$$u_r^*(r, t) = A(t)r + \frac{B(t)}{r}. \quad (4)$$

Для моделювання в'язкопружних властивостей матеріалів будемо використовувати співвідношення спадкової теорії Больцмана – Вольтерра. Для цього застосуємо лінійний інтегральний оператор:

$$\bar{E}[x(t)] = E^* \cdot \left( x(t) - \int_0^t R(t-\tau)x(\tau)d\tau \right). \quad (5)$$

У рівності (5)  $E^* = \text{const}$  – миттєвий модуль пружності, тобто значення модуля пружності в'язко-пружного матеріалу у момент часу  $t=0$ ,  $R(t)$  – ядро релаксації. Оператор, зворотний до оператора (2), має вигляд:

$$\bar{E}^{-1}[y(t)] = \frac{1}{E^*} \cdot \left( y(t) + \int_0^t Q(t-\tau)y(\tau)d\tau \right),$$

де  $Q(t)$  – ядро повзучості. Напруження та переміщення точок матриці знаходимо з використанням операторів  $\bar{E}$  та  $\bar{E}^{-1}$

$$\sigma_z^*(t) = \frac{\bar{E}[(1-\nu^*)\varepsilon_z^* + 2\nu^*A(t)]}{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)}.$$

де  $\nu^*$  – коефіцієнт Пуассона для матриці.

$$u_z^*(r, t) = \left( \frac{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)}{1-\nu^*} \bar{E}^{-1}[\sigma_0^*(t)] - \frac{2\nu^*A(t)}{1-\nu^*} \right) z. \quad (6)$$

$$\sigma_r^* = \frac{1}{1-\nu^*} \bar{E}[A(t)] - \frac{\bar{E}[B(t)]}{(1+\nu^*)r^2} + \frac{\nu^*}{1-\nu^*} \sigma_0^*(t). \quad (7)$$

Для однозначного визначення переміщень та напружень матриць та волокна за їх сумісного деформування використаємо крайові умови. На межі контакту матриці та волокна  $r=a$  крайові умови неперервності радіальні переміщень та напружень:

$$u_r^*(a) = u_r^\circ(a), \quad (8)$$

$$\sigma_r^*(a) = \sigma_r^\circ(a). \quad (9)$$

Для довільного значення  $z=h$  осеві переміщення матриці та волокна співпадають:

$$u_z^*(h) = u_z^\circ(h). \quad (10)$$

На межі  $r=b$  комірки композита радіальні напруження дорівнюють нулю:

$$\sigma_r^*(b) = 0. \quad (11)$$

Введемо позначення:

$$\alpha_1 = \frac{1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)}, \quad \alpha_2 = \frac{2\nu_{21}^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ},$$

$$\beta_1 = \frac{(1 + \nu^*)(1 - 2\nu^*)}{1 - \nu^*}, \quad \beta_2 = \frac{2\nu^*}{1 - \nu^*},$$

$$\gamma_1 = \frac{E_2^\circ \nu_{12}^\circ}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)}, \quad \gamma_2 = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ}, \quad f = \frac{a^2}{b^2},$$

$$m = \frac{1}{(\alpha_2 - \beta_2)(1 - \nu^*)f + \alpha_2(1 + \nu^*)}.$$

$$k_1 = m\alpha_1(1 - \nu^*)f,$$

$$k_2 = m(\alpha_2\nu^*(1 + \nu^*) + \beta_1(1 - \nu^*)f),$$

$$k_3 = m(1 + \nu^*)\alpha_1, \quad k_4 = m(1 + \nu^*)(\nu^*(\alpha_2 - \beta_2) - \beta_1),$$

$$k_5 = \frac{m\alpha_1(f-1)}{\gamma_2}, \quad k_6 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

$$k_7 = \frac{1}{\gamma_2} \left( \frac{\nu^*}{1 - \nu^*} - m \left( \frac{\alpha_2\nu^*(1 + \nu^*)}{1 - \nu^*} + \nu^*(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_1(f-1) \right) \right).$$

Співвідношення між напруженнями  $\sigma_0^*(t)$  і  $\sigma_0^\circ$  знаходимо з крайових умов:

$$(k_5h(t) - k_6 - k_1 - k_3)\sigma_0^\circ + k_7\sigma_0^*(t) = (k_4 - k_2)\bar{E}^{-1}[\sigma_0^*(t)].$$

Після застосування до цієї рівності оператор  $\bar{E}$  отримаємо інтегральне рівняння відносно  $\sigma_0^*(t)$ :

$$k_7\bar{E}[\sigma_0^*(t)] + (k_2 - k_4)\sigma_0^*(t) = \bar{E}[k_1 + k_3 + k_6 - k_5h(t)]\sigma_0^\circ. \quad (12)$$

До цього рівняння застосуємо інтегральне перетворення Лапласа. Для інтегрального оператора типу згортки  $\bar{E}[x(t)]$ , що визначається рівністю (5), перетворення Лапласа має вигляд:

$$\bar{E}[x(t)] \div E(\tilde{X}(p) - \tilde{R}(p)\tilde{X}(p)) = E\tilde{X}(p)(1 - \tilde{R}(p)), \quad (13)$$

де  $\tilde{X}(p) \div x(t)$ ,  $\tilde{R}(p) \div R(t)$  – це відповідні зображення у разі перетворення Лапласа. Знайдемо зображення функції  $h(t)$ , що є результатом дії інтегрального оператора  $\bar{E}$  на одиничну функцію:

$$h(t) = \bar{E}[1] \div \frac{E(1 - \tilde{R}(p))}{p}. \quad (14)$$

Застосувавши до рівняння (12), отримавши рівняння відносно  $\tilde{S}(p)$  – зображення функції  $\sigma_0^*(t)$ :

$$k_7 E \tilde{S}(p)(1 - \tilde{R}(p)) + (k_2 - k_4) \tilde{S}(p) = \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{p} \sigma_0^\circ.$$

Звідси визначаємо:

$$\tilde{S}(p) = \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{p(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)} \sigma_0^\circ \div \div \sigma_0^*(t) = \varphi(t) \sigma_0^\circ.$$

Отже, зв'язок між напруженнями матриці та волокна як функціями часу має вигляд:

$$\sigma_0^*(t) = \varphi(t) \sigma_0^\circ,$$

де  $\varphi(t)$  є оригіналом функції:

$$\tilde{\Phi}(p) = \frac{E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{p(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)}.$$

**Задача про деформування елементарної комірки композита.** Отримавши розв'язок задачі про сумісне деформування матриці та волокна, розв'яжемо задачу про поздовжній розтяг трансропного в'язкопружного матеріалу, що моделює композит. Поле напружень для нього визначається рівностями:

$$\sigma_z = \sigma_0(t), \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0. \quad (15)$$

Його в'язкопружні властивості моделюються лінійно інтегральним оператором, аналогічним за виглядом оператора (5):

$$\bar{E}_1[x(t)] = E_1 \cdot \left( x(t) - \int_0^t R_1(t - \tau)x(\tau) d\tau \right), \quad (16)$$

$E_1 = \text{const}$  – миттєвий модуль пружності,  $R_1(t)$  – ядро релаксації.

Знаходимо деформацію  $\varepsilon_z$  та переміщення  $u_z(z, t)$ :

$$\varepsilon_z = \bar{E}_1^{-1}[\sigma_0(t)], \quad (17)$$

$$u_z(z, t) = \bar{E}_1^{-1}[\sigma_0(t)] \cdot z. \quad (18)$$

Значення  $\sigma_0^*(t)$ ,  $\sigma_0^\circ$  та  $\sigma_0(t)$  повинні задовольняти умові рівноваги:

$$f \cdot \sigma_0^\circ + (1 - f)\varphi(t) \cdot \sigma_0^\circ = \sigma_0(t). \quad (19)$$

**Розв'язування задачі гомогенізації.** Умовою узгодженості поздовжнього розтягу композита та елементарної комірки «матриця – волокно» вибираємо рівність осьових переміщень точок матриці, волокна та однорідного композита. Це дало можливість отримання лінійного інтегрального рівняння типу згортки відносного невідомого ядра  $R_1(t)$  інтегрального оператора.

$$f + (1 - f)\varphi(t) = \bar{E}_1[\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 h(t) - \alpha_2 k_7 \varphi(t)]. \quad (20)$$

Розв'яжемо це рівняння операційним методом. Нехай зображення ефективного ядра релаксації композита  $R_1(t) \div \tilde{R}_1(p)$ . Оскільки зображення ефективного інтегрального оператора  $\bar{E}_1[x(t)] \div E_1 \tilde{X}(p)(1 - \tilde{R}_1(p))$ , то з урахуванням знайденого зображення функції  $\varphi(t)$  отримуємо зображення останнього рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{f}{p} + \frac{(1 - f)E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{p(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)} &= \\ = E_1 \left[ \frac{\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 E(1 - \tilde{R}(p))}{p} - \right. \\ \left. \frac{\alpha_2 k_7 E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{p(k_7 E(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)} \right] (1 - \tilde{R}_1(p)). \end{aligned}$$

Його розв'язок має вигляд:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 F_2(p) - F_1(p)}{E_1 F_2(p)}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} F_1(p) &= f(k_7 E^*(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4) + \\ &+ (1 - f)E(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E^*(1 - \tilde{R}(p))) \times (1 - \tilde{R}(p)). \\ F_2(p) &= (\alpha_1 + \alpha_2 k_6)(k_7 E^*(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4) - \alpha_2 k_5 (1 - \tilde{R}(p)) \times \\ &\times E(k_7 E^*(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4) - \\ &- \alpha_2 k_7 E^*(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E^*(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p)). \end{aligned}$$

Для знаходження ефективного миттєвого модуля пружності  $E_1$  підставимо у рівняння (20)  $t = 0$  та врахуємо, що  $\bar{E}_1[y(0)] = E_1 y(0)$ . Знаходимо:

$$f + (1 - f) \cdot \varphi(0) = E_1[\alpha_1 + \alpha_2 k_6 - \alpha_2 k_5 h(0) - \alpha_2 k_7 \varphi(0)]. \quad (22)$$

Визначимо миттєвий модуль пружності та ядро релаксації в'язкопружного композита.

Знайдемо значення  $\varphi(0)$ . Для цього використавши, що для оригіналу у разі перетворення Лапласа  $\varphi(t)$  із зображенням  $\Phi(p)$ ,  $\lim_{p \rightarrow \infty} p\Phi(p) = \varphi(0)$  та, враховуючи, що для зображення  $\tilde{R}(p) \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{R}(p) = 0$ , знаходимо  $\varphi(0)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{E^*(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E^*(1 - \tilde{R}(p)))(1 - \tilde{R}(p))}{(k_7 E^*(1 - \tilde{R}(p)) + k_2 - k_4)} = \\ &= \frac{E^*(k_1 + k_3 + k_6 - k_5 E^*)}{k_7 E^* + k_2 - k_4} = k. \end{aligned}$$

Миттєвий модуль пружності  $E_1$  визначаємо з рівності:

$$E_1 = \frac{f + (1 - f) \cdot k}{\alpha_1 + \alpha_2(k_6 - k_5 E^* - k_7 k)}. \quad (23)$$



Знайдемо оригінал  $R_1(t)$  ядра перетворення  $\bar{E}_1$  у ефективного оператора модуля пружності в'язкопружного композита. У [1] ця задача розв'язана, коли в'язкопружні властивості компонент композита моделюються ядрами експоненціального типу. Розв'яжемо таку задачу, коли використовують ядро Абеля. Використання експоненціальних функцій має суттєвий недолік, тому що неадекватно описують процес у початковий період часу у разі значень  $t$ , близьких до нуля. Тут як ядро доцільно використовувати функції, що мали слабкі, тобто інтегровані особливості при  $t = 0$ , наприклад, ядро Абеля.

Використавши такі позначення:

$$x = x(p) = 1 - \tilde{R}(p),$$

$$c_1 = E(\alpha_1 k_7 + \alpha_2 (k_5 (k_4 - k_2) - k_7 (k_1 + k_3))),$$

$$c_2 = (f - 1)E^* k_5, \quad c_3 = E^* (fk_7 + (1 - f)(k_1 + k_3 + k_6)),$$

$$c_4 = f(k_2 - k_4),$$

$$x_0 = \frac{(k_4 - k_2)(\alpha_1 + \alpha_2 k_6)}{c_1}.$$

Тоді зображення  $\tilde{R}_1(p)$  набуває вигляду:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 c_1 (x - x_0) - c_2 x^2 - c_3 x - c_4}{E_1 c_1 (x - x_0)} = \frac{a_1 x^2 + a_2 x + a_3}{a_4 x + a_5}. \quad (24)$$

Тут коефіцієнти  $a_i, i = 1, 2, \dots, 5$  визначаються рівностями:  $a_1 = -c_2, a_2 = E_1 c_1 - c_3, a_3 = -E_1 c_1 x_0 - c_4, a_4 = E_1 c_1, a_5 = -a_4 x_0$ .

Знайдемо ефективний модуль пружності для композита, в'язкопружною матрицею є гума 28Е, для якої  $E^* = E_0^* = 0,0051$  ГПа,  $E_\infty^* = 0,0034$  ГПа,  $\nu^* = 0,5$ . Її в'язкопружні властивості визначаються інтегральним оператором з ядром Абеля:

$$R[\varepsilon] = E^* \left( \varepsilon(t) - \int_0^t \frac{E^* - E_\infty^*}{E^*} \cdot \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \varepsilon(\tau) d\tau \right).$$

Тут  $-1 < \alpha < 0$ ,  $\Gamma(x)$  – гамма-функція. Розглядали ядро, для якого параметр  $\alpha = -\frac{1}{2}$ .

Зображення ядра  $\frac{At^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \in \frac{A}{p^{1+\alpha}}$ . Тут стала  $A = \frac{E^* - E_\infty^*}{E^*} = 0,33$ . При  $\alpha = -\frac{1}{2}$  зображення ядра набуває вигляд  $\tilde{R}(p) = \frac{A}{\sqrt{p}}$ .

**Отримані результати.** Досліджувався композит з вуглеродним пружним транстропним волокном з пружними сталими  $E_1^\circ = 226$  ГПа;  $E_2^\circ = 12,9$  ГПа;  $\nu_{12}^\circ = 0,31$ ;  $\nu_{23}^\circ = 0,2$ .

Тоді  $x = 1 - \frac{A}{\sqrt{p}}$ . Зображення (24) ядра ефективного оператора композита після перетворення набуває вигляду:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{b_1 \sqrt{p} + b_2}{(d_1 \sqrt{p} - d_2) \sqrt{p}}, \quad (25)$$

де  $b_1 = -A(2a_1 + a_2), b_2 = A^2, d_1 = a_4 + a_5, d_2 = a_4 A$ .

Нехай  $y_1 = \frac{b_1}{d_1}, y_2 = \frac{b_2}{d_1}, \lambda = -\frac{d_2}{d_1}$ . Тоді

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{b_1 \sqrt{p} + b_2}{(d_1 \sqrt{p} - d_2) \sqrt{p}} = \frac{y_1}{\sqrt{p} + \lambda} + \frac{y_2}{(\sqrt{p} + \lambda) \sqrt{p}}.$$

Оригінал цього зображення знайдемо, скориставшись таблицями зображень у разі перетворення Лапласа:

$$R(t) = \frac{y_1}{\sqrt{\pi t}} + (y_2 - y_1 \lambda) e^{\lambda^2 t} (1 - \Phi(\lambda \sqrt{t})). \quad (26)$$

Тут функція  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = erf(x)$ .

Отже, для моделювання в'язкопружних властивостей транстропного композита, що має в'язкопружну матрицю, отримали інтегральний оператор:

$$\bar{E} = [x(t)] = E_1 \left[ x(t) - \int_0^t R(t - \tau) x(\tau) d\tau \right]. \quad (27)$$

Внаслідок численного експерименту були отримані такі значення для характеристик інтегрального оператора (27), що моделює в'язкопружні властивості композита з наведеними вище характеристиками його компонентів.

Таблиця 1

**Значення миттєвого модуля розтягу  $E_1$  для значень відносної об'ємної частки  $f$**

волокна у композиті				
$f$	0,2	0,4	0,6	0,8
$E_1$	45.204158	90.403177	135.602157	180.801098

Як свідчать отримані числові значення миттєвого модуля розтягу, ця залежність є близькою до лінійної, у цьому можна пересвідчитись, побудувавши графік. З виразу (23) це не очевидно, враховуючи, що коефіцієнти у чисельнику та знаменнику залежать від  $f$ . Аналіз цих коефіцієнтів свідчить, що з рівності (21) при  $f = 0$  отримаємо значення  $E_1 = E^*$ , при  $f = 1$  маємо  $E_1 = E_1^\circ$ .

З методики отримання  $E_1$  зрозуміло, що формула (23) не залежить від ядра релаксації, що моделює в'язкопружні властивості. Зазначимо, що вона співпадає з формулою, отриманою у [1]

для ядра релаксації експоненціального типу, а також аналогічних формул для пружних композитів, які можна розглядати як випадок з нульовим ядром релаксації.

### ВИСНОВКИ.

1. Основний результат, отриманий у цій роботі, який і визначає її наукову новизну, – це формула (26) для ядра релаксації в'язкопружного трансропного композита. В'язкопружні властивості одного з його компонентів моделюються ядром релаксації Абеля.

2. Отриманий інтегральний оператор (27), що моделює ефективні властивості композита, якщо для описання в'язкопружних властивостей матриці використовують ядро Абеля. Його використання дозволяє більш адекватно з фізичної точки зору, порівняно з використанням ядра експоненціального типу, представити деформування композита за невеликих значень часу, близьких до початкового моменту часу деформування.

3. Виконане дослідження засвідчує, що

гомогенізацію трансропного композита з в'язкопружною матрицею можна отримати шляхом узгодження розв'язків двох крайових задач: задачі про розтяг трансверсально-ізотропного в'язкопружного однорідного циліндра, що моделює композит, та задачі про розтяг системи порожнистого та суцільного циліндрів, що моделюють відповідно матрицю і волокно.

4. Перспективи подальших досліджень пов'язані з визначенням усіх ефективних характеристик для в'язкопружного трансверсального композита. При цьому можна розглянути різні типи ядер для моделювання поведінки в'язкопружних складників композита. Загалом для описання механічних властивостей таких композитів потрібно 5 ефективних характеристик, модулі пружності першого та другого роду є інтегральними операторами, які можна отримувати згідно з описаною у цій роботі методикою.

5. У майбутньому потрібно модифікувати методику узгодженості переміщень для гомогенізації термопружних характеристик в'язкопружного композита.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Гоменюк С.І. Ефективні механічні характеристики в'язкопружних композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика». 2019.
2. Klasztorny M., Nycz D.B. Modelling of linear elasticity and viscoelasticity of thermosets and unidirectional glass fibre reinforced thermoset-matrix composites. Part 2: Homogenization and numerical analysis. *Composites Theory and Practice*. 2022. No. 1, pp. 25–39.
3. Ko Y.-F., Ju J.W. New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223, pp. 2437–2458.
4. Medeiros R. et al. Effective properties evaluation for smart composite materials. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2012. Vol. 34, pp. 362–370.
5. Chen Y., Shi X., Zhao Z., Guo Z., Li Y. A thermo-viscoelastic model for particle-reinforced composites based on micromechanical modeling. *Acta Mechanica Sinica*. 2021. No. 37, pp. 402–413.
6. Behera R.K., Pinisetty D., Luong D. Modeling and Simulation of composite Materials. *JOM*. 2019. Vol. 71. No. 11, pp. 3941–3950.

### REFERENCES

1. Klyimenko, M.I., Grebenjuk, S.M., Gomenjuk, S.I. (2019). *Efektivni mekhanichni kharakterystyky v'iazkopruznykh kompozytiv: monohrafiya* [Effective mechanical characteristics of viscoelastic composites]. Kherson: Vydavnychiy dim «Helvetyka» [in Ukrainian].
2. Klasztorny, M., Nycz, D.B. (2022). Modelling of linear elasticity and viscoelasticity of thermosets and unidirectional glass fibre reinforced thermoset-matrix composites. Part 2: Homogenization and numerical analysis. *Composites Theory and Practice*. No. 1, pp. 25–39.
3. Ko, Y.-F., Ju, J.W. (2012). New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers. *Acta Mechanica*. Vol. 223, pp. 2437–2458.
4. Medeiros, R. et al. (2012). Effective properties evaluation for smart composite materials. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. Vol. 34, pp. 362–370.
5. Chen, Y., Shi, X., Zhao, Z., Guo, Z., Li, Y. (2021). A thermo-viscoelastic model for particle-reinforced composites based on micromechanical modeling. *Acta Mechanica Sinica*. No. 37, pp. 402–413.
6. Behera, R.K., Pinisetty, D., Luong, D. (2019). Modeling and Simulation of composite materials. *JOM*. Vol. 71. No. 11, pp. 3941–3950.

## РОЗДІЛ II. ІНЖЕНЕРІЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

УДК 004.054

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2022-2-05>

### ПОРІВНЯЛЬНЕ ТЕСТУВАННЯ ЗАСТОСУНКІВ, РОЗРОБЛЕНИХ НА ОСНОВІ МОНОЛІТНОЇ ТА МІКРОСЕРВІСНОЇ АРХІТЕКТУР

#### **Лимаренко Ю. О.**

*кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри електроніки, інформаційних систем та програмного забезпечення  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-1643-6939](https://orcid.org/0000-0002-1643-6939)  
[yalytarenko@gmail.com](mailto:yalytarenko@gmail.com)*

#### **Попівщій В. І.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри електроніки, інформаційних систем та програмного забезпечення  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-2673-987X](https://orcid.org/0000-0002-2673-987X)  
[pvi@zsea.edu.ua](mailto:pvi@zsea.edu.ua)*

#### **Новак В. В.**

*магістрант кафедри електроніки, інформаційних систем та програмного забезпечення  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0001-5371-4849](https://orcid.org/0000-0001-5371-4849)  
[vit.nov29@gmail.com](mailto:vit.nov29@gmail.com)*

#### **Міхайлуца О. М.**

*кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри електроніки, інформаційних систем та програмного забезпечення  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0003-2935-7997](https://orcid.org/0000-0003-2935-7997)  
[elenamikhaylutsa7@gmail.com](mailto:elenamikhaylutsa7@gmail.com)*

#### **Скрипник І. А.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри електроніки, інформаційних систем та програмного забезпечення  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-9175-2683](https://orcid.org/0000-0002-9175-2683)  
[sia@zsea.edu.ua](mailto:sia@zsea.edu.ua)*

**Ключові слова:** монолітна архітектура, мікросервісна архітектура, пропускна здатність, час відгуку.

На сьогодні можна виділити два основні підходи до створення вебзастосунків – це використання монолітної та мікросервісної архітектур. Питання, який з цих двох підходів є кращим, залишається відкритим. Відповідь на нього є неоднозначною і залежить від багатьох чинників. Тому проблема порівняння цих двох архітектур на основі тестування за різними показниками є досить актуальною. Метою цієї роботи є порівняння монолітної та мікросервісної архітектур на основі аналізу результатів тестування продуктивності та пропускної здатності розроблених вебзастосунків. Для того щоб мати можливість порівнювати між собою два архітектурні підходи, треба мати два різні застосунки, які б вирішували одні й ті ж самі бізнес-задачі, але один повинен бути реалізований на базі монолітної архітектури, а інший – із застосуванням мікросервісів. Як спільну бізнес-задачу було вибрано здійснення та опрацювання онлайн-замовлень продуктів з метою подальшої адресної доставки цих замовлень кур'єрами. Серверні частини обох застосунків були реалізовані на мові Java за допомогою Java Spring Framework та Java Spring Cloud. Як СУБД було використано PostgreSQL. У застосунку, який побудовано на основі мікросервісної архітектури, взаємодію основних сервісів з базами даних реалізовано у відповідності до принципу «Одна база даних на один сервіс». Для навантажувального тестування та визначення продуктивності обох застосунків було вибрано інструменти JMeter та Gatling. Результати тестування в більшості тестових сценаріїв продемонстрували невелику перевагу монолітної архітектури над мікросервісною. Але для випадку, коли запити стосуються декількох сервісів і, відповідно, декількох баз даних одночасно, можна спостерігати менший час відгуку у застосунку, побудованому за допомогою мікросервісів.

---

## COMPARATIVE TESTING OF APPLICATIONS DEVELOPED BASED ON MONOLITHIC AND MICROSERVICES ARCHITECTURES

**Lymarenko Y. O.**

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Electronics,  
Information Systems and Software Engineering  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-1643-6939  
yalymarenko@gmail.com*

**Popivshchyi V. I.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Electronics,  
Information Systems and Software Engineering  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-2673-987X  
pvi@zsea.edu.ua*

**Novak V. V.**

*Master Student at the Department of Electronics, Information Systems and Software Engineering  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-5371-4849  
vit.nov29@gmail.com*

**Mikhailutsa O. M.**

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Electronics,  
Information Systems and Software Engineering  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0003-2935-7997  
elenamikhaylutsa7@gmail.com*

**Skrypnyk I. A.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Electronics,  
Information Systems and Software Engineering  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-9175-2683  
sia@zsea.edu.ua*

**Key words:** *monolithic architecture, microservices architecture, throughput, response time.*

Nowadays, there are two basic approaches to web application development: monolithic and microservices architectures. The question of which of these two approaches is better remains open. The answer is controversial and depends on many factors. Therefore, the problem of comparing these two architectures based on various indicators testing is quite actual. The aim of the paper is to compare monolithic and microservices architectures. We use analysis of performance and throughput testing of developed web applications. In order to be able to compare two architectural approaches, it is necessary to have two different applications that would solve the same business problems, but one should be implemented on the basis of a monolithic architecture, and the other should be implemented with the use of microservices. Implementation and processing of online product orders with the aim of further address delivery of these orders by couriers was chosen as a business task. The server parts of both applications were developed on Java platform using Java Spring Framework and Java Spring Cloud. PostgreSQL was used as a DBMS. The interaction of main services with databases is implemented in according to the principle "One database for one service" in the microservice application. JMeter and Gatling tools were chosen for load testing and performance determination of both applications. The results in most test scenarios showed a slight advantage of the monolithic architecture over the microservices architecture. But for the case of requests with multi services and multi databases at the same time, it is observed a shorter response time for the microservice application.

## Вступ

Починаючи приблизно з 2014 року в IT-індустрії спостерігається неабиякий інтерес до підходу, який передбачає розробку програмного забезпечення на основі мікросервісної архітектури. Точніше, окремі спроби застосування цього підходу спостерігались і раніше, ще з початку 2000-х років, але з появою Docker-контейнерів у 2013 році стало зрозумілим, що у цього підходу велике майбутнє. Цей факт було зафіксовано, зокрема, і в статті Мартіна Фаулера та Джеймса Льюїса [1], в якій термін «мікросервісна архітектура» визначено як стиль розробки програмних застосунків у вигляді набору сервісів, які розгортаються незалежно.

На сьогодні ми вже спостерігаємо картину, коли великі корпорації успішно використовують мікросервісну архітектуру для організації своїх бізнес-процесів. Це частково або повністю стосується таких компаній, як Netflix, Amazon, eBay, Uber, Tencent, Zalando, Spotify, Airbnb, LinkedIn, Twitter, Groupon, Coca-Cola та ін.

Сфера застосування цього підходу стає дедалі ширшою. Так, у роботах [2; 3] наведено огляд публікацій, присвячених тим можливостям, які дає поєднання мікросервісного підходу та блокчейн-технологій. Цікавою та корисною з практичної точки виглядає синергія Інтернету речей та мікросервісів [4]. Ну і, звичайно, там, де виникає необхідність опрацювати великі обсяги даних, застосування мікросервісів дозволяє вирішити велику кількість проблем, які мали місце у разі застосування монолітної архітектури застосунку [4; 5].

З іншого боку, як і будь-яка інша технологія, мікросервіси мають і свої слабкі місця. Одним з цих слабких місць є безпека. Цій темі присвячено досить багато літератури. Змістовний огляд проблеми безпеки мікросервісних застосунків можна знайти в роботах [6; 7].

Оскільки мікросервіси позиціонуються як альтернатива монолітному підходу, то, звичайно, виникає купа питань на кшталт: чи варто вже працюючу систему переносити на рейки монолітної архітектури, якщо так, то яким чином це робити з мінімальними витратами та ризиками, що очікувати від системи з точки зору швидкості опрацювання запитів та пропускну здатності після такого переносу, і т.п. Частково відповіді на ці питання можна знайти в літературі. Але наявні дослідження демонструють різноманітність в оцінках продуктивності двох різних архітектур. Так, у роботі [8] авторами проведено порівняльний аналіз двох вебзастосунків, реалізованих на основі двох різних архітектур, і висновок щодо більш ефективного використання обчислювальних ресурсів апаратного забезпечення та продуктивності самого застосунку робиться на користь

мікросервісної архітектури. Дослідження, проведене авторами роботи [9], спрямоване як на порівняння монолітної архітектури з мікросервісною, так і на порівняння засобів розробки для серверної частини, а саме Java та C#.Net. Результати тестування, проведеного авторами, свідчать, що у разі розгортання застосунків на одній обчислювальній машині монолітна архітектура з точки зору продуктивності має перевагу над мікросервісною. Аналогічного висновку дійшли й автори роботи [10], в якій описано різні тестові сценарії. І деякі з них продемонстрували невелику перевагу монолітної архітектури над мікросервісною, інші ж суттєвої різниці не виявили.

У зв'язку з такою неоднозначністю в оцінках, наведених у різних роботах, можна фіналізувати, що питання порівняння двох архітектур продовжує залишатись відкритим. Тому будь-які дослідження в цьому напрямі будуть тільки збільшувати експериментальну базу з метою отримання більш надійного підґрунтя для прийняття обґрунтованого рішення у разі вибору того чи іншого архітектурного підходу. Власне, метою цієї роботи як раз і є порівняння монолітної та мікросервісної архітектури на основі аналізу результатів тестування продуктивності та пропускну здатності розроблених застосунків за різними тестовими сценаріями.

## Опис застосунків, що використовувались для порівняння двох архітектур

Для того щоб мати можливість порівнювати між собою два архітектурні підходи, треба мати два різних застосунки, які вирішують одні й ті ж самі бізнес-задачі, але один повинен бути реалізований на базі монолітної архітектури, а інший – із застосуванням мікросервісів. Як бізнес-задачу для реалізації було вибрано розробку вебзастосунку, який би надавав таку актуальну останніми, ковідівськими, роками послугу, як онлайн-замовлення продуктів з метою подальшої адресної доставки цих замовлень кур'єрами.

Основні функціональні вимоги до застосунків були сформульовані таким чином: 1) у системі повинні бути передбачені такі ролі: адміністратора, замовника продуктів, продавця та кур'єра; 2) для замовників повинна бути наявною можливість замовити, оплатити та переглянути історію замовлень; 3) кур'єр повинен мати можливість переглядати замовлення та приймати їх на виконання; 4) продавці повинні мати змогу оновлювати інформацію про наявні продукти.

Серверні частини обох застосунків були реалізовані на мові Java за допомогою Java Spring Framework та Java Spring Cloud. Як СУБД було використано PostgreSQL. Клієнтська частина реалізована за допомогою Angular Framework. Для оновлення міграцій даних використовувався

Flyway Migration. Система захисту була побудована з використанням бібліотеки JWT та вбудованої системи Java Spring Security.

У таблиці 1 представлено мікросервіси, кожен з яких працює на своєму окремому порті. Поряд з мікросервісами вказано також бази даних, які використовуються мікросервісами як власне сховище даних. Як видно з таблиці, основні мікросервіси працюють з власною базою даних, тобто взаємодію майже всіх мікросервісів з базами даних реалізовано у відповідності до принципу «Одна база даних на один сервіс».

Таблиця 1

**Мікросервіси та бази даних, з якими вони взаємодіють**

Мікросервіси	Бази даних
users-service	userdb
products-service	productdb
orders-service	orderdb
payment-service	paymentdb
delivery-service	deliverydb
security-service	userdb
cloud-config	
discovery	
cloud-gateway	
hystrix-dashboard	

Розгортання застосунку, побудованого на основі монолітної архітектури, відбувалось за допомогою Maven. Для розгортання застосунку, побудованого за допомогою мікросервісної архітектури, було використано Docker та Kubernetes.

**Методика та результати порівняння**

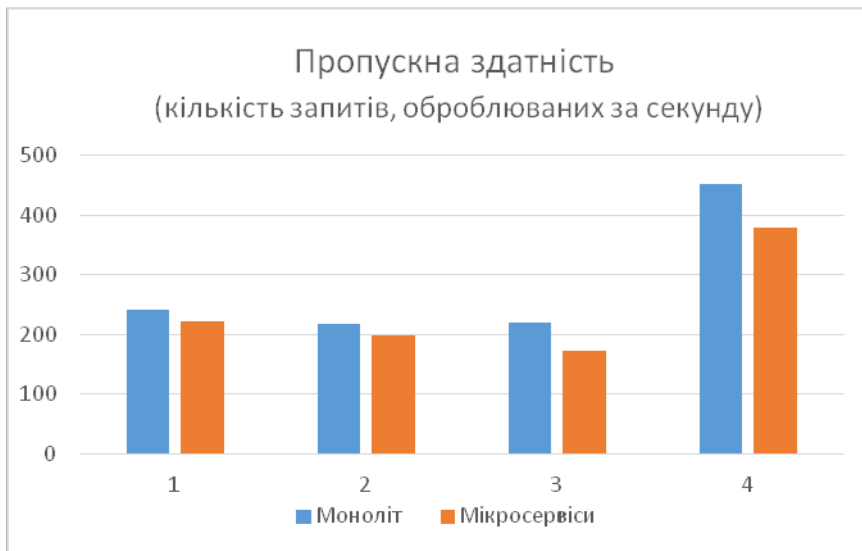
Для порівняти двох тестових застосунків було вибрано такі показники, як: швидкість відповіді

на велику кількість запитів, кількість провалених запитів, середнє значення відповіді, коефіцієнт помилок, пропускну здатність. Для навантажувального тестування та визначення продуктивності обох застосунків було вибрано інструменти JMeter і Gatling. При цьому обидва застосунки було розгорнуто у локальному середовищі.

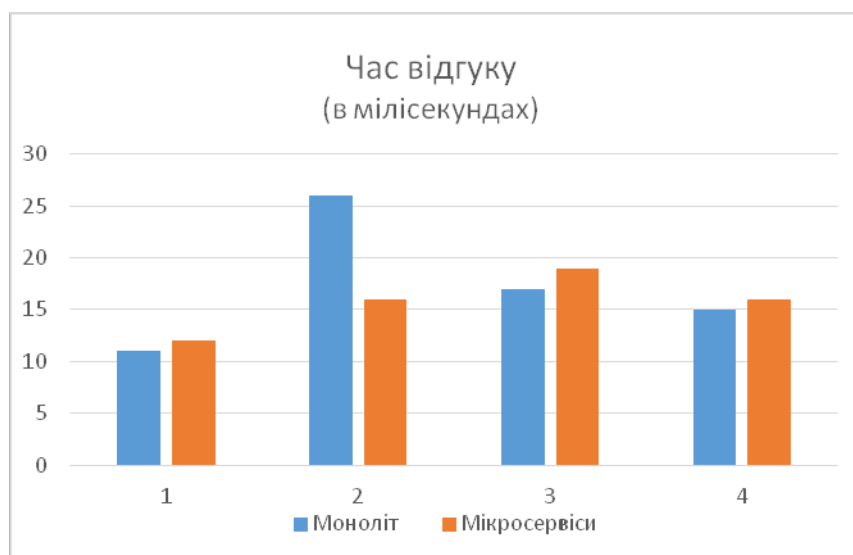
Під час тестування як показник продуктивності було використано пропускну здатність, яка обчислюється JMeter як кількість запитів, оброблених сервером, поділена на загальний час обробки запитів у секундах. Час вимірюється від початку першого запиту до кінця останнього запиту. Сюди входять будь-які інтервали між запитами, оскільки вони мають відображати навантаження на сервер. Оскільки тести призначені виключно для збору інформації про продуктивність ресурсів на стороні сервера, то час, необхідний для обробки інформації на стороні клієнта, не враховується.

Під час тестування генерувались різні типи запитів, які були адресовані різним мікросервісам. Кількість запитів у кожному з тестових сценаріїв становила 1000. Так, на рисунку 1 представлено результати обчислення пропускну здатності монолітного та мікросервісного застосунків для 4 видів запитів. Перший, третій та четвертий види запитів пов'язані з отриманням даних, другий – з додаванням. Але кожен з цих 4 видів запитів оброблювався лише одним конкретним сервісом і, відповідно, ініціював звернення лише до бази даних саме цього сервісу.

Як можна побачити з діаграми, у всіх випадках мікросервісна архітектура демонструє нижчу пропускну здатність ніж монолітна. Мінімальне відхилення становить 8,22%, максимальне – 21,93%. Однією з основних причин такої різниці



**Рис. 1. Порівняння пропускну здатності застосунків з монолітною та мікросервісною архітектурами**



**Рис. 2. Порівняння середнього часу відгуку застосунків з монолітною та мікросервісною архітектурами**

в показниках пропускної здатності є те, що у випадку мікросервісного застосунку запити до сервісу передаються через API Gateway, що створює накладні витрати на зв'язок, що погіршує продуктивність.

За допомогою Gatling проводилось обчислення часу відгуку обох систем, який визначається цим інструментом як проміжок часу з моменту відправки запиту до сервера до моменту, коли буде отримана відповідь, або буде повернуто помилку. На рисунку 2 продемонстровано порівняння середнього часу відгуку обох застосунків також для 4 різних видів запитів. Перший, третій та четвертий види запиту йдуть на обробку до одного сервісу (коже вид запиту до свого сервісу) і, відповідно, ініціюють звернення до однієї бази даних. Другий вид запиту є комплексним і в його обробці беруть участь одночасно два сервіси і, відповідно, дві бази даних.

Як видно з наведеної діаграми, у випадках, коли запити оброблюються одним сервісом, час відгуку менший у застосунку з монолітною архітектурою, причому мінімальна різниця становить 6,67%, а максимальна – 11,76%. Для запитів, які оброблюються двома сервісами, середній час відгуку у застосунку з мікросервісною архітектурою менший порівняно з монолітним застосунком на 38,46%. Такий результат, імовірно, пов'язаний з

тим, що в мікросервісній архітектурі різні сервіси можуть обробляти запити паралельно, тоді як у застосунках з монолітною архітектурою це складніше реалізувати.

#### **Висновки**

Порівняльний аналіз результатів тестування двох застосунків, реалізованих за допомогою мікросервісної та монолітної архітектур, показав, що за такими показниками, як пропускна здатність та час відгуку, монолітна архітектура здебільшого демонструє кращі результати ніж мікросервісна. Перевага, продемонстрована тестовими застосунками, у середньому становить 10–15%. Водночас у тому випадку, коли йдеться про запити, в обробці яких беруть участь декілька сервісів, можемо бачити, що можливість паралельної обробки, яку надають мікросервіси, дозволяє їм швидше обробляти такі запити, ніж це має місце в застосунках з монолітною архітектурою.

Загалом, як це і ставилось за мету у формуванні підходу, що базується на використанні мікросервісів для створення вебзастосунків, головні переваги цієї парадигми полягають не у швидкості роботи, а у швидкості реагування на зміни бізнес-вимог, у можливості незалежного та швидкого розгортання, незалежного масштабування, стійкості до відмов, можливості здійснювати розробку за допомогою різних технічних стеків.

#### **ЛІТЕРАТУРА**

1. Fowler M. and Lewis J. “Microservices”, 2014. URL: <http://martinfowler.com/articles/microservices.html>.
2. Santos R., Soares P., Rodrigues E., Maia P.H.M. and Silveira A. How Blockchain and Microservices are Being Used Together: a Systematic Mapping Study, 2022. *IEEE/ACM 5th International Workshop on Emerging Trends in Software Engineering for Blockchain (WETSEB)*, 2022, pp. 39–46.



3. Oumoussa I., Faieq S., Saidi R. When Microservices Architecture and Blockchain Technology Meet: Challenges and Design Concepts. *International Conference on Advanced Technologies for Humanity (ICATH)*. 2021. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies. Vol. 110, pp. 161–172.
4. Atitallah S.B., Driss M., Ghzela H.B. Microservices for Data Analytics in IoT Applications: Current Solutions, Open Challenges, and Future Research Directions. *Procedia Computer Science*. Volume 207. 2022, pp. 3938–3947.
5. Laigner R. et al. “From a Monolithic Big Data System to a Microservices Event-Driven Architecture”. *46th Euromicro Conference on Software Engineering and Advanced Applications (SEAA)*. 2020, pp. 213–220.
6. Berardi D., Giallorenzo S., Melis A., Prandini M., Mauro J., Montesi F. Microservice Security: A Systematic Literature Review. *Peer J Computer Science*. 2022, 8:e779.
7. Pereira-Vale A., Márquez G., Astudillo H., Fernandez E.B. Security Mechanisms Used in Microservices-Based Systems: A Systematic Mapping. *XLV Latin American Computing Conference (CLEI)*. 2019, pp. 1–10.
8. Tapia F., Mora M.Á., Fuertes W., Aules H., Flores E., Toulkeridis T. From Monolithic Systems to Microservices: A Comparative Study of Performance. *Applied Sciences*. 2020, 10(17): 5797.
9. Blinowski G., Ojdowska A., Przybyłek A. Monolithic vs. Microservice Architecture: A Performance and Scalability Evaluation. *IEEE Access*. 2022, 10, pp. 20357–20374.
10. Al-Debagy O., Martinek P. A Comparative Review of Microservices and Monolithic Architectures. In *Proceedings of the 2018 IEEE 18th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics (CINTI)*, Budapest, Hungary, 21–22 November 2018, pp. 149–154.

#### REFERENCES

1. Fowler, M. and Lewis, J. (2014). “Microservices”. Retrieved from: <http://martinfowler.com/articles/microservices.html>.
2. Santos, R., Soares, P., Rodrigues, E., Maia, P.H.M. and Silveira, A. (2022). How Blockchain and Microservices are Being Used Together: a Systematic Mapping Study. 2022 IEEE/ACM 5th International Workshop on Emerging Trends in Software Engineering for Blockchain (WETSEB), pp. 39–46.
3. Oumoussa I., Faieq S., Saidi R. (2021). When Microservices Architecture and Blockchain Technology Meet: Challenges and Design Concepts. *International Conference on Advanced Technologies for Humanity (ICATH)*. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies. Vol. 110, pp. 161–172.
4. Atitallah, S.B., Driss, M., Ghzela, H.B. (2022). Microservices for Data Analytics in IoT Applications: Current Solutions, Open Challenges, and Future Research Directions. *Procedia Computer Science*. Volume 207, pp. 3938–3947.
5. Laigner, R. et al. (2020). “From a Monolithic Big Data System to a Microservices Event-Driven Architecture”. *46th Euromicro Conference on Software Engineering and Advanced Applications (SEAA)*, pp. 213–220.
6. Berardi, D., Giallorenzo, S., Melis, A., Prandini, M., Mauro, J., Montesi, F. (2022). Microservice Security: A Systematic Literature Review. *Peer J Computer Science*. 8:e779.
7. Pereira-Vale, A., Márquez, G., Astudillo, H., Fernandez, E.B. (2019). Security Mechanisms Used in Microservices-Based Systems: A Systematic Mapping. *XLV Latin American Computing Conference (CLEI)*, pp. 1–10.
8. Tapia, F., Mora, M.Á., Fuertes W., Aules H., Flores E., Toulkeridis T. (2020). From Monolithic Systems to Microservices: A Comparative Study of Performance. *Applied Sciences*, 10(17): 5797.
9. Blinowski, G., Ojdowska, A., Przybyłek, A. (2022). Monolithic vs. Microservice Architecture: A Performance and Scalability Evaluation. *IEEE Access*, 10, pp. 20357–20374.
10. Al-Debagy, O., Martinek, P. (2018). A Comparative Review of Microservices and Monolithic Architectures. In *Proceedings of the IEEE 18th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics (CINTI)*, Budapest, Hungary, 21–22 November 2018, pp. 149–154.

## МОДЕЛЬ БАЗИ ДАНИХ ТА ЗНАНЬ ЦИФРОВОГО ДВІЙНИКА НОВОГО БЕЗПЕЧНОГО КОНФАЙНМЕНТУ ЧАЕС

**Лобода П. П.**

*аспірант*

*Національний технічний університет України*

*«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

*просп. Перемоги, 37, Київ, Україна*

*orcid.org/0000-0002-0808-8014*

*Lobodapetr@gmail.com*

**Старовіт І. С.**

*аспірант*

*Національний технічний університет України*

*«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

*просп. Перемоги, 37, Київ, Україна*

*orcid.org/0000-0002-6511-4610*

*ivanstarovit@gmail.com*

**Ключові слова:** *новий безпечний конфайнмент, цифровий двійник, модель бази даних, програмне забезпечення.*

З метою ліквідації наслідків аварії на Чорнобильській атомній електростанції для захисту від розповсюдження радіаційного забруднення та ізоляції зруйнованого енергоблока була збудована захисна споруда, яку назвали «об'єкт Укриття». Плановий термін використання «об'єкта Укриття» становить лише 30 років, тому було виконане проектування та будівництво нової спеціальної споруди, яка отримала назву «Новий безпечний конфайнмент» (НБК). Особливості функціонування НБК вимагають підтримання заданих характеристик вологості повітря в його основному об'ємі, що потребує реалізації управління термогазодинамічними процесами споруди. Також потребують моніторингу, прогнозування та управління значна кількість інших процесів НБК для дотримання радіаційної безпеки та безпеки довкілля. Одним з варіантів вирішення такої задачі є розробка цифрового двійника НБК ЧАЕС. У цій роботі сформовані підходи до побудови моделі бази даних та знань цифрового двійника НБК ЧАЕС. Аналіз характеристик наявної інтегрованої системи управління НБК показав, що її функціональні можливості не дозволяють повною мірою виконувати візуалізацію даних, прогнозування стану НБК та підтримку прийняття рішень. Тому було запропоновано для вирішення зазначених задач застосувати технологію цифрових двійників. Огляд класів цифрових двійників та сучасних підходів до проектування їх архітектури дозволив визначити основні складники інформації цифрового двійника НБК, серед яких виділено результати вимірювань величин, що характеризують його стан з прив'язкою до 3D-координат, моделі та результати прогнозування й ідентифікації їх параметрів, алгоритми та затвержені рішення ОПР, моделі знань для підтримки прийняття рішень. Виконана формалізація основних інформаційних об'єктів НБК та зв'язків між ними з використанням апарату теорії множин. Множини та відношення моделі використані як основа для побудови структури бази даних та знань цифрового двійника. Результати роботи дають змогу розробити програмне забезпечення цифрового двійника НБК ЧАЕС для вирішення задач візуалізації та прогнозування його стану, підтримки прийняття рішень щодо управління термогазодинамічними процесами з метою належного захисту населення та довкілля й перетворення «об'єкта Укриття» на екологічно безпечну систему.

## DATABASE AND KNOWLEDGE MODEL OF THE DIGITAL TWIN OF THE NEW SAFE CONFINEMENT OF THE CHNPP

**Loboda P. P.**

*Postgraduate Student*  
*National Technical University of Ukraine*  
*“Ihor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”*  
*Peremohy Ave, 37, Kyiv, Ukraine*  
*orcid.org/0000-0002-0808-8014*  
*Lobodapetr@gmail.com*

**Starovit I. S.**

*Postgraduate Student*  
*National Technical University of Ukraine*  
*“Ihor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”*  
*Peremohy Ave, 37, Kyiv, Ukraine,*  
*orcid.org/0000-0002-6511-4610*  
*ivanstarovit@gmail.com*

**Key words:** *new secure confinement, digital double, database model, software.*

In order to eliminate the consequences of the accident at the Chernobyl nuclear power plant, a protective structure called the “Shelter Object” was built to protect against the spread of radiation pollution and to isolate the destroyed power unit. The planned term of using of the “Shelter facility” is only 30 years, therefore, the design and construction of a new special facility, which was named “New Safe Confinement” (NSC), was completed. The peculiarities of the operation of the NSC require maintenance of the specified characteristics of air humidity in its main volume, which requires the implementation of management of thermogas-dynamic processes of the building. A significant number of other NSC processes also require monitoring, forecasting and management to comply with radiation safety and environmental safety. One of the options for solving this problem is the development of a digital twin of the NSC of the ChNPP. In this work, approaches to building a database and knowledge model of a digital twin of the NSC of the ChNPP are formed. Analysis of the characteristics of the existing integrated management system of the NSC showed that its functionality does not allow to fully perform data visualization, forecasting of the state of the NSC and decision-making support. Therefore, it was proposed to use the technology of digital twin to solve these problems. An overview of the classes of digital twins and modern approaches to the design of their architecture made it possible to determine the main components of the information of the NSC digital twin, among which the results of measurements of quantities characterizing its state with reference to 3D coordinates, models and results of forecasting and identification of their parameters, algorithms and approved user decisions, knowledge models to support decision-making. The formalization of the main information objects of the NSC and the connections between them was carried out using the apparatus of set theory. The sets and relations of the model are used as the basis for building the database and knowledge structure of the digital twin. The results of the work make it possible to develop software for the digital twin of the NSC ChNPP to solve the problems of visualization and forecasting of its condition, supporting decision-making regarding the management of thermogas-dynamic processes in order to properly protect the population and the environment, and to transform the “Shelter Object” into an ecologically safe system.

**Вступ.** Під час ліквідації наслідків аварії на Чорнобильській атомній електростанції (ЧАЕС) для ізоляції зруйнованого енергоблока була збудована захисна споруда, яку назвали «об'єкт Укриття» (ОУ). З огляду на обмежений термін використання ОУ нашою державою за підтримки світової спільноти було виконане проектування та будівництво нової спеціальної споруди, яка отримала назву «Новий безпечний конфайнмент» (НБК). Схематично загальний вид НБК та ОУ в поперечному розрізі представлено на рисунку 1 [1].

Як можна зрозуміти з рисунку 1, НБК має забезпечити захист персоналу ЧАЕС, населення та навколишнього середовища від ядерної та радіоактивної небезпеки шляхом контролю над витокami радіоактивного пилу зі зруйнованого реактора ЧАЕС та ОУ, надавши змогу вилучити з них радіоактивні матеріали та проводити інші заходи для перетворення ОУ на екологічно безпечну систему [2].

Термін використання НБК, який було здано в експлуатацію у 2019 році, становить 100 років за умови підтримання заданих характеристик вологості повітря в його основному об'ємі, що вимагає реалізації управління термогазодинамічними процесами споруди. Також потребують моніторингу, прогнозування та управління значна кількість інших процесів НБК для дотримання радіаційної безпеки та безпеки довкілля. Одним з варіантів вирішення такої задачі є розробка цифрового двійника НБК ЧАЕС.

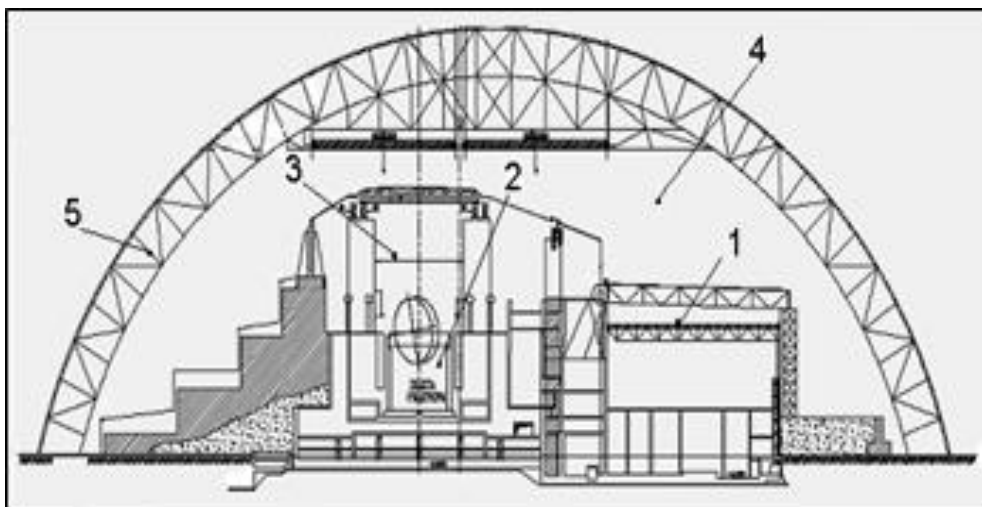
Метою цієї роботи є розробка підходів до побудови моделі бази даних та знань цифрового двійника НБК ЧАЕС для вирішення задач візуалізації та прогнозування його стану, підтримки прийняття рішень щодо управління термогазодинамічними процесами НБК.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

- провести аналіз наявних підходів до управління НБК та наявних інформаційних систем;
- формалізувати основні множини об'єктів НБК та зв'язки між ними для відображення у структурах даних цифрового двійника;
- сформувати структуру основних таблиць бази даних та визначити її узагальнену структуру.

**Огляд літератури.** НБК є складною інженерною спорудою, що містить велику кількість обладнання, під яким знаходиться ОУ зі зруйнованим реактором, в якому перебуває велика кількість радіоактивних матеріалів. Природно, що НБК та ОУ потребують контролю та управління великою кількістю параметрів з метою підвищення радіаційної, ядерної, промислової безпеки та безпеки навколишнього середовища, підвищення аварійної готовності та інтегрування систем контролю в єдину автоматизовану систему. Для контролю та управління цими параметрами була спроектована та використовується так звана інтегрована система управління (ІСУ) НБК.

ІСУ спроектована за ієрархічним принципом та має два рівні. Нижній рівень містить підсистеми контролю (ПСК). Кожна ПСК складається з певної кількості пристроїв зв'язку з об'єктом, які отримують дані від датчиків та пристрою збору даних, що збирає та відображає ці дані. Верхній рівень – це інтегрована система контролю, яка функціонує як інформаційна система. Такий мережевий сегмент структурований для забезпечення зв'язку між робочими станціями ІСУ, інтегрованою базою даних ОУ та сервером ІСУ [2]. Однак накопичені з датчиків дані у системі не мають прив'язки до просторових координат НБК, що не дозволяє повноцінно здійснювати візуалізацію інформації. Недостатній рівень вирішення в



**Рис. 1.** Схема НБК та ОУ у поперечному розрізі: 1 – турбінна зала, 2 – зруйнований реактор, 3 – центральна зала, 4 – основний об'єм та 5 – кільцевий простір НБК [1]

ІСУ задач візуалізації даних, прогнозування стану НБК та підтримки прийняття рішень робить актуальним подальший розвиток інформаційних систем НБК.

Прогнозування процесів та стану НБК можна реалізувати на основі сучасних методів комп'ютерного моделювання з використанням CFD (Computational Fluid Dynamics) моделей. Наприклад, уже існують моделі, що на базі експлуатаційних вимірювань розраховують безперервні неорганізовані витоки повітря з радіоактивними аерозолями за межі споруди НБК за заданих напрямків і швидкостей вітру [1], запропоновано підходи до розробки математичного та програмного забезпечення для реалізації управління вентиляцією НБК [3]. Представлено пропозиції щодо побудови архітектури комп'ютерних систем НБК з включенням підсистеми прогнозування концентрацій радіоактивних аерозолів та підсистеми управління версіями програмного забезпечення [4]. До недоліків представлених вище робіт можна віднести те, що здебільшого вони містять вузькоспрямовані моделі й не враховують загальну 3D-геометрію НБК, розподіл й осідання радіоактивних аерозолів в основному об'ємі НБК.

Потреба в розширенні наявних функцій ІСУ НБК можливостями візуалізації даних та прогнозування основних процесів для управління НБК зумовлює доцільність застосування технології цифрових двійників.

Цифровим двійником називають віртуальний прототип реального фізичного об'єкта, виробу, групи виробів чи процесу, який виконує збір та повторне використання цифрової інформації. Цифрові двійники за призначенням можна розділити на класи цифрових двійників-прототипів, двійників-екземплярів та цифрових двійників-агрегатів, що складаються з кількох двійників-екземплярів [5]. За характером зв'язку між об'єктом та його цифровим двійником можна виділити цифрові моделі (обмін даними між об'єктом та двійником відсутній), цифрові тіні (тільки отримують дані з об'єкта) та, власне, цифрові двійники (реалізований двонаправлений обмін даними) [6]. Відповідно до сучасних підходів до побудови цифрових двійників до їх складу входять засоби вимірювання і обміну даними з об'єктом, база даних і знань, сховище даних та засоби їх аналізу, моделі та алгоритми обробки інформації [7]. На нашу думку, для управління процесами НБК необхідно вибрати цифровий двійник з двонаправленим обміном даними.

**Методи.** Виходячи з наявного рівня автоматизації контролю процесів НБК, ІСУ НБК має входити як система нижнього рівня до його цифрового двійника. З огляду на те, що в ІСУ НБК уже реалізовано збір та первинну обробку даних,

структури даних цифрового двійника мають бути інтегровані з ІСУ для їх отримання, а також мають містити інформацію щодо моделювання, прогнозування та прийнятих рішень. Для розробки структури бази даних та знань цифрового двійника необхідно виконати формалізацію основних множин об'єктів НБК та зв'язків між ними.

База даних та знань цифрового двійника НБК має містити таку основну інформацію:

- результати вимірювань величин, що характеризують стан НБК;
- моделі цифрового двійника та результати прогнозування на їх основі;
- інформацію про алгоритми цифрового двійника та результати їх застосування;
- рішення, затверджені особами, що приймають рішення (ОПР);
- знання, що використовуються для підтримки прийняття рішень.

Результати вимірювань кожної величини  $v$  з множини величин  $V$ , що характеризують стан НБК, мають бути прив'язані до тривимірної сітки координат з метою їх подальшої візуалізації та обробки. Позначимо точки вимірювань як множину  $P$ , де кожний елемент  $p \in P$  являє собою вектор, що складається з координат довготи, широти та висоти над рівнем моря розташування датчика  $d \in D$ , де  $D$  – множина датчиків НБК. З огляду на те, що в межах ІСУ задачі моніторингу та управління НБК розподілені по різних підсистемах, кожен датчик  $d \in D$  і в межах цифрового двійника також має бути прив'язаний до певної системи  $s \in S$ , де  $S$  – множина систем НБК. У базі даних цифрового двійника НБК має зберігатися інформація про тип і поточні налаштування датчика  $d \in D$  (точка розташування  $p \in P$ , установки, дата останньої повірки й т.п.), історія зміни його зазначених характеристик.

Для представлення результатів вимірювання будемо використовувати кортеж:

$$r=(t, p, d, s, v, tr), \quad (1)$$

де  $r$  – кортеж з відношення результатів вимірювань  $R$ ;  $t$  – момент часу з точністю до секунди;  $tr$  – ознака верифікації вимірювання, яка дорівнює 1, якщо вимірювання вважається прийнятним, та 0, коли вимірювання помилкове.

Для кожної величини  $v \in V$  у системі фіксується одиниця вимірювання  $uv \in UV$ , де  $UV$  – множина одиниць виміру. Необхідно також зберігати в базі даних коефіцієнти перерахунку з однієї одиниці вимірювання в іншу (якщо такий перерахунок можливий), що можна представити у вигляді відображення:

$$F_{kuv}: (UV \times UV) \rightarrow K_{uv} \quad (2)$$

де  $K_{uv}$  – множина коефіцієнтів перерахунку одиниць вимірювання.

Дані щодо результатів вимірювань у базу даних цифрового двійника повинні надходити з ІСУ, відповідність структур даних цих систем встановлюється в алгоритмах сервісів інтеграції. Результати вимірювань у цифровому двійнику НБУ можуть використовуватися для візуалізації даних, ідентифікації параметрів моделей та перевірки їх адекватності.

Множину моделей  $M$  цифрового двійника можна представити у вигляді:

$$M = \cup m_i, \quad (3)$$

де  $m_i$  – модель з номером  $i$ .

Оскільки деякі моделі можуть бути використані як підмоделі в інших моделях, цей зв'язок потрібно формалізувати у вигляді бінарного відношення  $RMP(M, M) = \{(m_i, m_j)\}$ , де модель  $m_i$  є підмоделлю моделі  $m_j$ . Інформацію про ієрархічний зв'язок моделей необхідно зберігати в базі даних цифрового двійника НБК для своєчасного попередження користувачів чи блокування використання певної моделі, якщо деяка її підмодель перестала бути адекватною. Для кожної моделі  $m_i$  у цифровому двійнику має зберігатися ознака, чи є вона адекватною.

Для кожної моделі  $m_i$  виділяється множина вхідних змінних  $MVI_i \subseteq V$ , множина вихідних змінних  $MVO_i \subseteq V$  та множина параметрів  $MP_i \subseteq V$ .

Результати прогнозування та розрахунків на основі моделей з множини  $M$  мають зберігатися в базі даних цифрового двійника у вигляді кортежу:

$$mr = (t, nmr, m_i, us, VMVI_i, VMVO_i, VMP_i), \quad (4)$$

де  $mr$  – кортеж з відношення результатів розрахунків по моделях  $MR$ ;  $t$  – момент часу з точністю до секунди;  $nmr$  – унікальний номер застосування моделі;  $m_i$  – модель з множини  $M$ ;  $us$  – користувач, який ініціював розрахунки, з множини користувачів USERS;  $VMVI_i$  – значення вхідних змінних моделі  $MVI_i$ ;  $VMVO_i$  – значення вихідних змінних моделі  $MVO_i$ ;  $VMP_i$  – значення параметрів моделі  $MP_i$ .

Для формування множини значень  $VMVI_i$  можуть бути використані дані з відношення результатів вимірювань  $R$ , представлені формулою (1), якщо вимірювання по цих величинах  $MVI_i \subseteq V$  здійснюється. Порівняння значень вихідних змінних моделі  $VMVO_i$  з фактичними даними цих величин з відношення результатів вимірювань є основою для перевірки адекватності моделі.

Якщо результати перевірки адекватності моделі  $m_i \in M$  є незадовільними, виконується процедура її параметричної ідентифікації, результати якої можуть бути представлені у вигляді кортежу:

$$mp = (t, nmp, m_i, a_j, us, VMVI_i, VMVOF_i, VMVO_i, VMP_i, CA_j), \quad (5)$$

де  $mp$  – кортеж з відношення результатів ідентифікації параметрів моделей  $MPR$ ;  $t$  – момент часу з точністю до секунди;  $nmp$  – унікальний номер застосування процедури ідентифікації моделі;  $m_i$  – модель з множини  $M$ ;  $a_j$  – алгоритм ідентифікації з множини  $A$  алгоритмів цифрового двійника НБК;  $us$  – користувач, який ініціював ідентифікацію моделі, з множини користувачів USERS;  $VMVI_i$  – значення вхідних змінних моделі  $MVI_i$ ;  $VMVOF_i$  – значення фактичних вихідних змінних моделі  $MVO_i$  з відношення результатів вимірювання  $R$ ;  $VMVO_i$  – розраховані по моделі значення вихідних змінних моделі  $MVO_i$ ;  $VMP_i$  – значення параметрів моделі  $MP_i$ ;  $CA_j$  – значення оцінки адекватності моделі для знайдених значень параметрів  $VMP_i$ , яке розраховується у разі виконання алгоритму  $a_j$ .

За аналогією з множиною моделей  $M$  множини алгоритмів  $A$  цифрового двійника можна представити у вигляді:

$$A = \cup a_j, \quad (6)$$

де  $a_j$  – алгоритм з номером  $j$ .

Аналогічно до моделей деякі алгоритми можуть бути використані як допоміжні в інших алгоритмах, тому цей зв'язок потрібно формалізувати у вигляді бінарного відношення  $RAP(A, A) = \{(a_i, a_j)\}$ , де алгоритм  $a_i$  є допоміжним для алгоритму  $a_j$ . Серед алгоритмів цифрового двійника можуть бути алгоритми розрахунків по моделях, ідентифікації моделей, рекомендації оптимальних рішень та інші. Зв'язок моделей з алгоритмами потрібно формалізувати у вигляді бінарного відношення  $RMA(M, A) = \{(m_i, a_j)\}$ , де модель  $m_i$  використовується в алгоритмі  $a_j$ . Цей зв'язок задається для моделей верхнього рівня, не для підмоделей. Інформацію про зв'язок моделей та алгоритмів необхідно зберігати в базі даних цифрового двійника НБК для врахування у системі того, якщо деяка модель алгоритму не є адекватною.

Для кожного алгоритму  $a_j$  виділяється множина вхідних змінних  $AVI_j \subseteq V$  та множина вихідних змінних  $AVO_j \subseteq V$ .

Результати роботи деяких алгоритмів з множини  $A$  мають зберігатися в базі даних цифрового двійника. Для цього можна використати кортеж виду:

$$ar = (t, nar, a_j, us, VAVI_j, VAVO_j), \quad (7)$$

де  $ar$  – кортеж з відношення результатів розрахунків по алгоритмах  $AR$ ;  $t$  – момент часу з точністю до секунди;  $nar$  – унікальний номер застосування алгоритму;  $a_j$  – алгоритм з множини  $A$ ;  $us$  – користувач, який ініціював розрахунки, з множини користувачів USERS;  $VAVI_j$  – значення вхідних змінних моделі  $AVI_j$ ;  $VAVO_j$  – значення вихідних змінних моделі  $AVO_j$ .

Під час управління функціонуванням системами НБК ОПР на основі рекомендації певних алгоритмів чи без них приймають певні керуючі

рішення. Для збереження інформації про них у базі даних цифрового двійника можна використовувати кортежи виду:

$$pr=(t, npr, z_i, s, us, VZV_i), \quad (8)$$

де  $pr$  – кортеж з відношення результатів затверджених рішень  $PR$ ;  $t$  – момент часу з точністю до секунди;  $npr$  – унікальний номер затвердженого рішення;  $z_i$  – задача з множини задач  $Z$ ;  $s$  – система НБК, для якої приймалося рішення;  $us$  – користувач, який прийняв або затвердив рішення, з множини користувачів  $USERS$ ;  $VZV_i$  – значення величин рішення з множини  $ZV_i \subseteq V$  для задачі  $z_i$ .

Для того щоб порівняти затвержене ОПР рішення з тим, що пропонувалося певним алгоритмом цифрового двійника, необхідно задати зв'язок між задачами та алгоритмами. Цей зв'язок може бути представлений у вигляді відношення  $RZA(Z,A) = \{(z_i, a_j)\}$ , де задача  $z_i$  розв'язується за допомогою алгоритму  $a_j$ .

В алгоритмах підтримки прийняття рішень можуть використовуватися знання, представлені у вигляді звичайних або нечітких продукційних правил. Формальне представлення цих знань та їх структури даних можна реалізувати відповідно до методики, наведеної у [8]. Позначимо  $MK$  множини моделей знань цифрового двійника. Зв'язок між моделями знань та алгоритмами можна представити як відношення  $RMKA(MK,A) = \{(mk_n, a_j)\}$ , де модель знань  $mk_n \in MK$  використовується в алгоритмі  $a_j$ .

Спираючись на наведену формалізацію основних об'єктів цифрового двійника НБК та зв'язки між ними, спроектована базова модель його бази даних та знань представлена у вигляді концептуальної ER схеми на рисунку 2.

Як видно на рисунку 2, на основі формалізованих множин та відношень сформовані структури даних та знань цифрового двійника НБК.

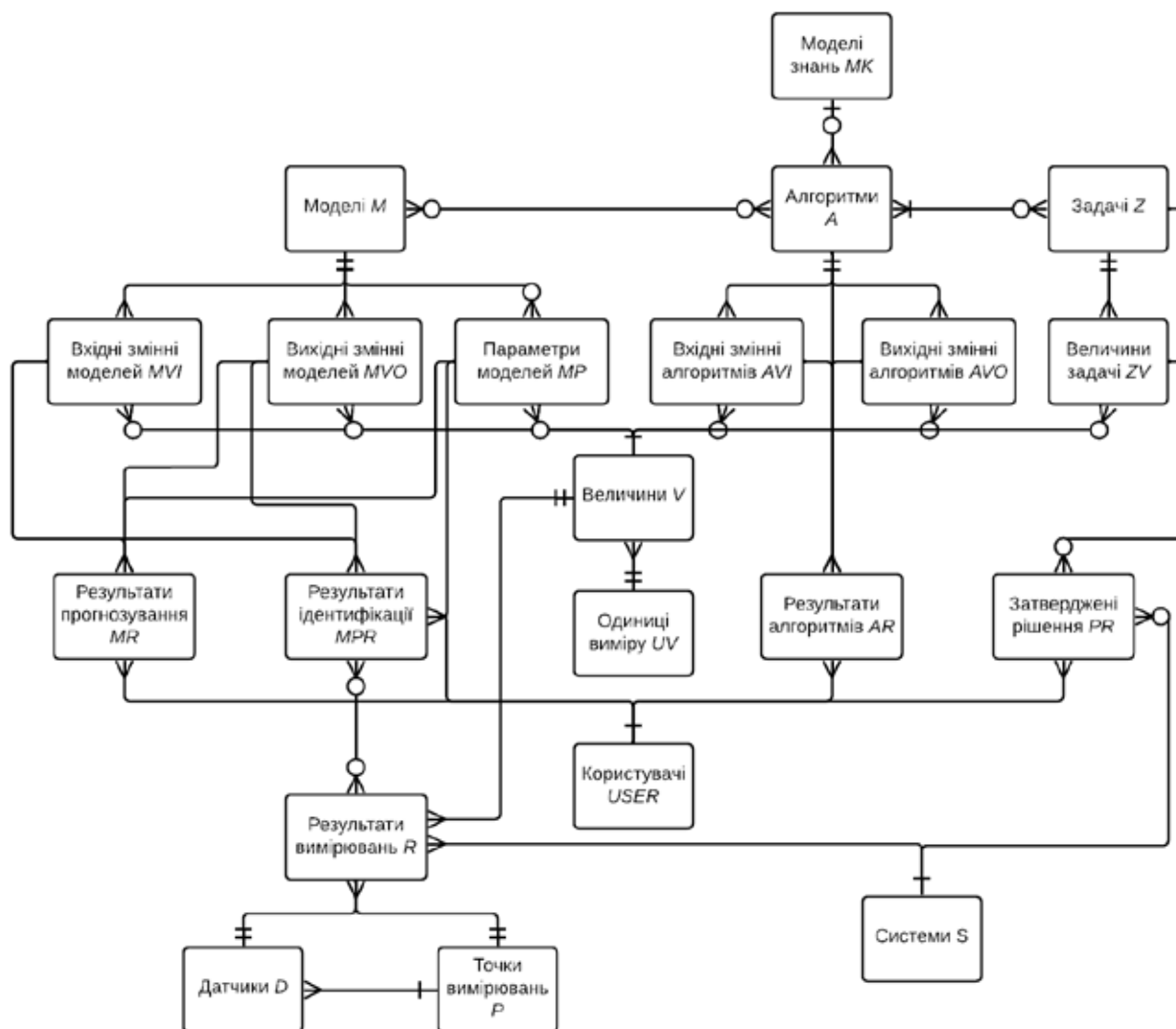


Рис. 2. Концептуальна модель бази даних та знань цифрового двійника НБК

**Висновки.** У цій роботі сформовані підходи до побудови моделі бази даних та знань цифрового двійника НБК ЧАЕС.

Аналіз характеристик наявної інтегрованої системи управління НБК показав, що її функціональні можливості не дозволяють повною мірою виконувати візуалізацію даних, прогнозування стану НБК та підтримку прийняття рішень. Тому було запропоновано для вирішення зазначених задач застосувати технологію цифрових двійників. Огляд класів цифрових двійників та сучасних підходів до проєктування їх архітектури дозволив визначити основні складники інформації цифрового двійника НБК, серед яких виділено результати вимірювань величин, що характеризують його стан з прив'язкою до 3D-координат, моделі та

результати прогнозування й ідентифікації їх параметрів, алгоритми та затверджені рішення ОПР, моделі знань для підтримки прийняття рішень. Виконана формалізація основних інформаційних об'єктів НБК та зв'язків між ними з використанням апарату теорії множин. Множини та відношення моделі використані як основа для побудови структури бази даних та знань цифрового двійника.

Результати роботи дають змогу розробити програмне забезпечення цифрового двійника НБК ЧАЕС для вирішення задач візуалізації та прогнозування його стану, підтримки прийняття рішень щодо управління термогазодинамічними процесами з метою належного захисту населення та довкілля й перетворення «об'єкта Укриття» на екологічно безпечну систему.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Круковський П.Г., Дядюшко Є.В., Скляренко Д.І., Старовіт І.С. Неорганізовані викиди повітря з радіоактивними аерозолями із нового безпечного конфайнменту ЧАЕС у навколишнє середовище. *Питання атомної науки і техніки*. 2021. № 6. С. 181–186. DOI: 10.46813/2021-136-181.
2. Новый безопасный конфайнмент Чернобыльской АЭС (расчетно-экспериментальный анализ при проектировании и эксплуатации) : монография / Круковский П.Г., Метель М.А., Скляренко Д.И. и др. ; под ред. П.Г. Круковского, В.А. Краснова, В.П. Сулимова. Киев : ООО «Франко Пак», 2019. 300 с. ISBN 978-966-97864-7-0.
3. Pysmennyu Y., Havrylko Y., Krukovskiy P., Starovit I., Diadiushko Y. Розробка спеціального програмного математичного забезпечення управління вентиляційними установками нового безпечного конфайнменту ЧАЕС. *Nuclear & radiation safety*. 2022. 2(94). С. 35–43. URL: [https://doi.org/10.32918/nrs.2022.2\(94\).04](https://doi.org/10.32918/nrs.2022.2(94).04).
4. Bernd Kratz, Florian Wieduwilt, Maxim Saveliev. Pillars for Establishing a Durable and Future-Proof IT Architecture Maturing Along with the NSC: Approaches from Continuous Integration to Service Mesh Mathematical Modeling and Simulation of Systems. *Selected Papers of 16th International Scientific and practical Conference, MODS, 2021 June 28–July 01, Chernihiv, Ukraine*, pp. 43–57.
5. Grieves M. Virtually Intelligent Product Systems: Digital and Physical Twins. *Complex Systems Engineering: Theory and Practice*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 2019. P. 175–200. DOI: 10.2514/5.9781624105654.0175.0200.
6. Kritzinger W., Karner M., Traar G., Henjes J., Sihn W. Digital Twin in manufacturing: a categorical literature review and classification. *IFAC Papers OnLine*. 2018. Vol. 51. Issue 11. P. 1016–1022.
7. Lu Y., Liu C., Wang K.I-K., Huang H., Xu X. Digital Twin-driven smart manufacturing: connotation, reference model, applications and research issues. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 2020. Vol. 61. P. 1–14.
8. Шушура О.М. Структури даних інформаційної технології нечіткого управління на основі функцій належності багатьох аргументів. *Зв'язок*. 2018. № 1. С. 21–24.

### REFERENCES

1. Krukovskiy, P.G., Dyadyushko, E.V., Sklyarenko, D.I., Starovit, I.S. (2021). Unorganized emissions of air with radioactive aerosols from the new safe confinement of the Chernobyl Nuclear Power Plant into the surrounding environment. *Issues of atomic science and technology*. No. 6, pp. 181–186.
2. Krukovskiy, P.G., Metel, M.A., Sklyarenko, D.I. (2019). *New safe confinement of the Chernobyl nuclear power plant (calculation-experimental analysis in design and operation)*. Kyiv: LLC “Franko Pak” [in Russian].
3. Pysmennyu, Y., Havrylko, Y., Krukovskiy, P., Starovit, I., Diadiushko, Y. (2022). Development of special mathematical software for controlling the ventilation units of the new safe confinement of the ChNPP. *Nuclear & radiation safety*. Vol. 2. No. 94, pp. 35–43.
4. Bernd Kratz, Florian Wieduwilt, Maxim Saveliev. (2021). Pillars for Establishing a Durable and Future-Proof IT Architecture Maturing Along with the NSC: Approaches from Continuous Integration to Service



Mesh Mathematical Modeling and Simulation of Systems. *Selected Papers of 16th International Scientific and practical Conference (Ukraine, Chernihiv, June 28 – July 01, 2021)*, Chernihiv: MODS, pp. 43–57.

5. Grieves, M. (2019). Virtually Intelligent Product Systems: Digital and Physical Twins. *Complex Systems Engineering: Theory and Practice*. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, pp. 175–200.
6. Kritzinger, W., Karner, M., Traar, G., Henjes, J., Sihn, W. (2018). Digital Twin in manufacturing: a categorical literature review and classification. *IFAC Papers OnLine*. Vol. 51, Issue 11, pp. 1016–1022.
7. Lu Y., Liu C., Wang K.I-K., Huang H., Xu X. (2020). Digital Twin-driven smart manufacturing: connotation, reference model, applications and research issues. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*. Vol. 61, pp. 1–14.
8. Shushura, O.M. (2018). Information technology data structures of fuzzy control based on multi-argument membership functions. *Zvjazok*. No. 1, pp. 21–24.

## АДАПТИВНА ЧИСЕЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПОРОГОВИХ МЕТОДІВ ВЕЙВЛЕТ-ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА КРИТЕРІЄМ МІНІМУМУ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОЇ ПОХИБКИ

**Онуфрієнко Д. М.**

*аспірант кафедри комп'ютерних та радіоелектронних систем контролю  
та діагностики*

*Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»*

*вул. Куртичева, 2, Харків, Україна*

*[orcid.org/0000-0002-1365-798X](https://orcid.org/0000-0002-1365-798X)*

*[OnufrienkoResearcher@gmail.com](mailto:OnufrienkoResearcher@gmail.com)*

**Тараненко Ю. К.**

*доктор технічних наук, професор  
Приватне підприємство «Лікопак»*

*вул. Качалова, 1, Дніпро, Україна*

*[orcid.org/0000-0003-2209-2244](https://orcid.org/0000-0003-2209-2244)*

*[tatanen@ukr.net](mailto:tatanen@ukr.net)*

### **Ключові слова:**

*середньоквадратична похибка,  
чисельна оптимізація,  
модельний сигнал, дискретне  
вейвлет, фільтрація шумів,  
рівень декомпозиції, порогова  
фільтрація.*

Вперше досліджено чисельну оптимізацію методів дискретної вейвлет-фільтрації вимірювальних сигналів. Для цього були обрані такі методи: із загальним порогом для всіх рівнів декомпозиції, без порога з простим обнулінням коефіцієнтів деталізації до досягнення мінімальної середньоквадратичної похибки та з універсальним порогом для коефіцієнтів деталізації на кожному рівні декомпозиції. Оптимізація за критерієм мінімуму похибки виконувалася у два етапи: на першому дискретна вейвлет-фільтрація проводилася багаторазово з різними вейвлетами, порогами та пороговими функціями, залежно від методу фільтрації, до досягнення мінімальної середньоквадратичної похибки. На другому етапі адаптації для вже відфільтрованого сигналу проводилася одноразова фільтрація з параметрами отриманими на першому етапі. Для зазначених методів побудовано математичні моделі, в основу яких покладено фундаментальні рівняння вейвлет-фільтрації. Під час проведення чисельних експериментів контролювалося ставлення сигналу шуму до і після фільтрації. Нормально розподілений білий шум з нульовим математичним очікуванням та середньоквадратичним відхиленням 0,8 адитивно додавався до модельного сигналу. Застосовувалася база з двадцятьма модельних сигналів із різним характером розподілу потужності вейвлет спектра. Дослідження підтвердили високий рівень ефективності дискретної вейвлет-фільтрації вимірювальних сигналів для методу з універсальним порогом. Тільки для чотирьох модельних сигналів зі складним спектром Gabor, Piece-Regular, Ramp і Riemann різниця відношень сигналу до шуму, після і до фільтрації склала відповідно 12, 19, 64, 76 децибелів. У решти шістнадцяти сигналів цей показник понад 258 децибелів. Отримані результати підтверджені розподілом похибки фільтрації рівня декомпозиції та порівнянням графіків відфільтрованих сигналів з модельними сигналами, які для методу з універсальним порогом візуально не відмінні. Для методу із загальним порогом у порівнянні з методом без оптимізації похибка знижується у півтора рази, а без порога знижується не суттєво.

## ADAPTIVE NUMERICAL OPTIMIZATION OF WAVELET FILTERING METHODS BASED ON THE CRITERION OF THE MINIMUM MEAN SQUARE ERROR

**Onufrienko D. M.**

*Postgraduate Student at the Department of Computer and Electronic Control  
and Diagnostic Systems*

*National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"*

*Kirpycheva str., 2, Kharkiv, Ukraine*

*orcid.org/0000-0002-1365-798X*

*OnufrienkoResearcher@gmail.com*

**Taranenko Yu. K.**

*Doctor of Technical Sciences, Professor*

*Private Enterprise "Likopak"*

*Kachalova str., 1, Dnipto, Ukraine*

*orcid.org/0000-0003-2209-2244*

*taranen@rambler.ru*

**Key words:** *root-mean-square error, numerical optimization, model signal, discrete wavelet transform, noise filtering, decomposition level, threshold filtering.*

For the first time, the numerical optimization of methods for discrete wavelet filtering of measuring signals is investigated. For this, the following methods were chosen with a common threshold for all levels of decomposition, without a threshold, with a simple zeroing of the detail ratios until the minimum mean square error is reached, with a universal threshold for the detail ratios at each level. decomposition level. Optimization according to the criterion of the minimum error was carried out in two stages; at the first stage, discrete wavelet filtering was carried out repeatedly with different wavelets, thresholds and threshold functions depending on the filtering method, until the minimum root-mean-square error was reached. reached. At the second stage of adaptation, for the signal already filtered at the first stage, a single filtering was carried out with the parameters obtained at the first stage. For these methods, mathematical models are built based on the fundamental equations of wavelet filtering. When carrying out numerical experiments, the signal-to-noise ratio was controlled before and after filtering. A normally distributed white noise with zero mathematical expectation and a standard deviation of 0.8 was added to the model signal. A base of twenty model signals with different schemes of power distribution in the wavelet spectrum was used. Studies have confirmed the high level of efficiency of discrete wavelet filtering of measuring signals for the method with a universal threshold. Only for four model signals with a complex spectrum Gobor, Piece-Regular, Ramp, and Riemann, the difference in signal-to-noise ratios after and before filtering was 12, 19, 64, 76 decibels, respectively, for the remaining sixteen signals this figure was more than 258 decibels. The results obtained are confirmed by the distribution of the filtering error by the decomposition level and by comparing the graphs of the filtered signals with model signals that are visually indistinguishable for the method with a universal threshold. For the method with communities with a threshold, in comparison with the method without optimization, the error decreases by one and a half times, and without a threshold it does not decrease significantly.

**ВСТУП.** Очищення вимірювальних сигналів від шуму методами дискретного розкладання вейвлет є складним і комплексним завданням. В основі даних методів лежить гранична обробка коефіцієнтів деталізації вейвлет-розкладання (трешолдинг). Розвиток зазначених методів зво-

диться переважно до пошуку порогової функції в обмеженій області вейвлет сімейства Добеши. У публікації [1] на основі всебічного аналізу публікацій запропоновано класифікацію трешолдингу за трьома групами: глобальний, локальний і блоковий з урахуванням їх прямого засто-

сування, що в основному і поєднує всі напрямки досліджень. Незважаючи на суттєві поліпшення, наприклад, застосування локального методу з адаптивним універсальним порогом, його пряме застосування не дозволяє повною мірою реалізувати його можливості.

При практичному використанні дискретного вейвлета фільтрації вимірювальних сигналів розробник стикається з проблемою вибору алгоритму фільтрації за критерієм її якості, а потім вирішує завдання визначення параметрів обраного алгоритму. У цій публікації автор об'єднує обидві завдання в одну.

### АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У публікації [2] наведено методику вибору базового вейвлета зменшення рівня шуму при знятті електрокардіограми. Вплив шуму враховується комплексним критерієм, в який, крім ентропії, входять ставлення сигналів і середньоквадратична помилка. Однак чисельні критерії не дають остаточної відповіді ні на питання виявлення аномалій в сигналі, ні на питання вибору вейвлета. Показано [3], що фазова характеристика комплексного вейвлет спектру, одержувана при безперервному вейвлет перетворенні, краща як при виявленні слабких особливостей сигналу, так і для вибору вейвлета. Безперервне вейвлет перетворення потребує значних обчислювальних витрат та витрат часу, тому цей напрямок має обмежену галузь застосування.

Інший напрямок досліджень, що полягає у пошуку оптимальних порогових функцій, широко освячено у роботах [4–10]. Однак, незважаючи на значні результати зниження похибки дискретної вейвлет-фільтрації, внаслідок прямого одноразового використання методу з універсальним порогом авторам не вдалося кардинально уточнити якість фільтрації.

Під час проведення досліджень у сфері чисельної оптимізації методів вейвлет-фільтрації важливим чинником є вибір системи комп'ютерної математики. Останнім часом дослідники вважають, що краще використовувати бібліотеку Scipy Python, яка вільно розповсюджується [11; 12]. З використанням SciPy та Jupyter Notebook вперше було створено програмний модуль оцінки характеристик серцево-судинної системи на основі визначення характеристик ентропії ЕКГ [13]. Дослідження оптимізації порогових методів вейвлет-фільтрації з повним набором параметрів, що впливають на похибку з використанням бібліотеки PyWavelets, наведено в публікації [14].

Завданням подальших досліджень є адаптивна чисельна оптимізація порогових методів вейвлет-фільтрації вимірювальних сигналів від шуму за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки.

**МЕТА РОБОТИ** – розробка методів адаптивної чисельної оптимізації порогових методів вейвлет-фільтрації вимірювальних сигналів від шуму за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки.

### МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЧИСЕЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ МЕТОДІВ ДИСКРЕТНОЇ ВЕЙВЛЕТ-ФІЛЬТРАЦІЇ

Усі наведені нижче обчислювальні експерименти будуть проводитися лише за умови заданого рівня шуму, що визначається за відомим співвідношенням:

$$U = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\sum f(t_i)^2}{\sum [f_{\eta}(t_i) - f(t_i)]^2} \right)$$

де:  $\sum f(t_i)^2$  – сума квадратів відліків функції  $f(t_i)$  чистого сигналу;  $\sum [f_{\eta}(t_i) - f(t_i)]^2$  – сума квадратів різниці відліків функції  $f_{\eta}(t_i)$  зашумленого сигналу до фільтрації та функції  $f(t_i)$  чистого сигналу.

$$f_{\eta}(t_i) = f(t_i) + \eta$$

де:  $\eta$  – гаусовий шум с нульовим математичним очікуванням.

*Адаптивна чисельна оптимізація методу вейвлет фільтрації із загальним порогом за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки (алгоритм R).*

Масиви коефіцієнтів апроксимації  $a_{j,k}$  та деталізації  $d_{j,k}$  після декомпозиції сигналу  $f(t)$  за усіма рівнями  $j$  визначаються із системи рівнянь [15, с. 66]:

$$\left. \begin{aligned} a_{j,k} &= \int_{\text{int}} f(t) \cdot \varphi_{j,k}(t) dt \\ d_{j,k} &= \int_{\text{int}} f(t) \cdot \psi_{j,k}(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

де: int – інтервал визначення функції  $f(t)$ .

$$f(t) = \sum_k a_{j+j_0,k} \cdot \varphi_{j+j_0,k}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j+j_0,k} \cdot \psi_{j+j_0,k}(t), \quad (2)$$

де:  $a_{j+j_0,k}, d_{j+j_0,k}$  – коефіцієнти апроксимації та деталізації відповідно;  $\varphi_{j+j_0,k}(t), \psi_{j+j_0,k}(t)$  – «материнський» та «батьківський» вейвлети відповідно;  $j_0, j, k$  – початковий та поточний рівень вейвлет декомпозиції та порядковий номер вейвлет-коефіцієнта.

Після адитивного додавання шуму до модельної функції або в реальних умовах зашумлений вимірювальний сигнал визначається за співвідношенням [15, с. 67]:

$$\bar{f}(t) = \sum_k \bar{a}_{j+j_0,k} \cdot \varphi_{j+j_0,k}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_k \bar{d}_{j+j_0,k} \cdot \psi_{j+j_0,k}(t), \quad (3)$$

де:  $\bar{f}(t)$  зашумлений сигнал;  $\bar{a}_{j+j_0,k}, \bar{d}_{j+j_0,k}$  – коефіцієнти апроксимації та деталізації зашумленого сигналу відповідно.

Будемо змінювати значення величини порогу  $\lambda_j$  у діапазоні від 0,01 до 2,5, обирати вейвлет з набору базових вейвлетів, кожний з яких має власну двійку функцій  $\varphi_{J+J_0,k}(t), \psi_{J+J_0,k}(t)$ , обирати порогову функцію з набору порогових функцій  $F(\lambda_j)$  та для кожної сформованій сукупності параметрів  $(\lambda_j, \varphi_{J+J_0,k}(t), \psi_{J+J_0,k}(t), F(\lambda_j))$  обчислювати числові значення відфільтрованого сигналу за співвідношенням:

$$\bar{f}(t) = \sum_k \bar{a}_{j+J_0,k} \varphi_{j+J_0,k}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_k F(\lambda_j) \cdot \bar{d}_{j+J_0,k} \cdot \psi_{j+J_0,k}(t), \quad (4)$$

де:  $\bar{f}(t)$  – отфільтрований сигнал;  $F(\lambda_j)$  – порогова функція для коефіцієнтів деталізації,  $\bar{d}_{j+J_0,k}$  що змінюються під впливом шуму.

Критерієм оптимального обрання отфільтрованої функції, а відповідно і сукупності параметрів фільтрації  $(\lambda_j, \varphi_{J+J_0,k}(t), \psi_{J+J_0,k}(t), F(\lambda_j))$ , є мінімум середньоквадратичної похибки згідно зі співвідношенням:

$$E = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^N (f(t_i) - \hat{f}(t_i))^2, \quad (5)$$

где:  $E$  – середньоквадратична похибка фільтрації.

Враховуючи, що сигнал  $f(t_i)$  є інформаційним сигналом, а сигнал  $\hat{f}(t_i)$  частково утримує флуктуації, тоді у кожний момент часу  $t_i$  оцінюється  $e = f(t_i) - \hat{f}(t_i)$  абсолютна похибка, яка далі усереднюється. Тому важливо наголосити, що величина  $E$  не залежить від взаємозв'язку вибірок сигналу.

Використовуючи три вкладених цикли для співвідношень (4), (5) по наступних змінних: порог  $\lambda_j$ ; вейвлет  $\varphi_{J+J_0,k}(t), \psi_{J+J_0,k}(t)$ ; і порогова функція  $F(\lambda_j)$ , для мінімуму  $E$  отримаємо три значення  $\bar{\lambda}_j$ ,  $\bar{\varphi}_{j+J_0,k}(t), \bar{\psi}_{j+J_0,k}(t), \bar{F}(\lambda_j)$  та співвідношення для отфільтрованого сигналу  $\bar{f}(t_i)$ . Підставивши вказані параметри у співвідношення (6), отримаємо такі нові значення для середньоквадратичної похибки та отфільтрованого сигналу:

$$\bar{f}(t) = \sum_k \bar{a}_{j+J_0,k} \bar{\varphi}_{j+J_0,k}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_k \bar{F}(\bar{\lambda}_j) \cdot \bar{d}_{j+J_0,k} \cdot \bar{\psi}_{j+J_0,k}(t), \quad (6)$$

де:  $\bar{f}(t)$  – отфільтрований сигнал першої рекурсії;  $\bar{a}_{j+J_0,k}, \bar{d}_{j+J_0,k}$  – коефіцієнти апроксимації та деталізації зі співвідношення (1) для отфільтрованого сигналу  $\bar{f}(t_i)$ .

Крім того, співвідношення (6) дозволяє отримати розподіл середньоквадратичної похибки  $E_j$  по рівням вейвлет декомпозиції сигналу, що особливо важливо при порівняльному аналізі методів вейвлет фільтрації.

Мінімальна середньоквадратична похибка для першої рекурсії  $E_{opt}$  визначається зі співвідношення.

$$E_{opt} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^N (f(t_i) - \bar{f}(t_i))^2 \quad (7)$$

При необхідності рекурсію можна продовжити, проте вже при першому перетворенні похибка визначається переважно методом фільтрації і з кожною наступною рекурсією навіть з трьома вкладеними циклами змінюється не значно. Крім того, виникає необхідність візуальної оцінки результатів внаслідок можливої втрати інформації.

**Адаптивна чисельна оптимізація методу вейвлету фільтрації без порога за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки (алгоритм N)**

Такий метод фільтрації використовується дуже ефективно в тих випадках, коли похибки шумів, що вносяться, більшою мірою впливають на коефіцієнти апроксимації перших рівнів вейвлет розкладання. Коефіцієнти деталізації в цих рівнях обнуляється до того часу, поки середньоквадратична похибка досягне мінімуму, іноді це відбувається на першому рівні розкладання. Для математичного опису вейвлет фільтрації без порога в другому доданні співвідношення (4) перше підсумовування  $\sum_k \bar{d}_{j+J_0,k} \cdot \psi_{j+J_0,k}(t)$  потрібно почати

з рівня розкладання  $J = J_{opt}$ , з першого та до рівня  $J = J_{opt}$  усі вейвлет-коефіцієнти деталізації замінюються нулями. В результаті рівень  $J = J_{opt}$  забезпечує мінімальну помилку фільтрації. Подальша декомпозиція (розкладання) до максимально можливого рівня  $J_{max}$ , залежного від типу вейвлета та довжини сигналу, виконується без зміни коефіцієнтів деталізації  $F(\lambda_j) = 1$ . Співвідношення для відфільтрованого сигналу  $\bar{f}(t)$  запишемо в наступному вигляді, враховуючи що  $\sum_{j=1}^{J_{opt}} \sum_k \bar{d}_{j+J_0,k} \cdot \psi_{j+J_0,k}(t) = 0$ :

$$\bar{f}(t) = \sum_k \bar{a}_{j+J_0,k} \bar{\varphi}_{j+J_0,k}(t) + \sum_{j=J_{opt}}^{J_{max}} \sum_k \bar{d}_{j+J_0,k} \cdot \bar{\psi}_{j+J_0,k}(t), \quad (8)$$

Вводимо лише одну змінну  $\varphi_{J+J_0,k}(t), \psi_{J+J_0,k}(t)$ , оскільки в цьому методі немає порога та порогової функції, а співвідношення (8) використовується для визначення рівня декомпозиції  $J = J_{opt}$ . Використовуючи (8) в одному циклі, змінюючи вейвлети за мінімальним значенням помилок, що накопичуються  $E_j$  визначаємо  $J_{opt}$  та вейвлет, котрий його забезпечує. При необхідності (суттєве зменшення похибки) відфільтрований сигнал і вейвлет використовуються для наступного циклу фільтрації.

**Адаптивна чисельна оптимізація методу вейвлет фільтрації з універсальним порогом за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки (алгоритм UNIVER)**

Обробка сигналу за алгоритмом UNIVER відбувається аналогічно алгоритму R. Відмінність полягає в тому, що поріг  $\lambda_j$  не задається, а обчислюється за такими співвідношеннями [15 с. 76]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\text{median}(|d_{1,k}|)}{0,6742} \\ \lambda_j^{univ} &= \sigma \sqrt{2 \ln N_j} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

де:  $\lambda_j^{univ}$  – універсальний поріг;  $N_j$  – кількість коефіцієнтів деталізації  $d_{j,k}$  на  $j$ -м рівні декомпозиції;  $\text{median}(|d_{1,k}|)$  – медіана від масиву  $|d_{1,k}|$  коефіцієнтів деталізації на першому рівні.

Система рівнянь (9) використовується у співвідношенні (4), з яким проводять тільки два вкладені цикли за двома змінними вейвлетами  $\varphi_{J+J_0,k}(t), \psi_{J+J_0,k}(t)$ ; та порогової функції  $F(\lambda_j)$ .

### ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМІЗОВАНИХ АЛГОРИТМІВ ВЕЙВЛЕТ-ФІЛЬТРАЦІЇ НА МОДЕЛЬНИХ СИГНАЛАХ

Основні результати обчислювального експерименту з використанням розроблених моделей для двадцяти модельних функцій, що імітують вимірювальні сигнали, зведені в таблицю. У таблиці прийнято такі позначення:  $SNR_0$  – відношення сигнал шум для вхідного сигналу з адитивно доданим нормально розподіленим білим шумом з нульовим математичним очіку-

ванням та середньоквадратичним відхиленням рівним 0,8;

$SNR_n$  – відношення сигналу шуму після фільтрації за наведеними оптимізованими алгоритмами; Name wavelet – ім'я вейвлета;  $E_{\min}$  – середньоквадратична похибка, зірочка, біля нульових чисельних значень якої означає результат округлення до четвертого знака (безрозмірне значення).

Дані, наведені в таблиці, підтверджують ефективність адаптивної оптимізації методів дискретної вейвлет-фільтрації за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки на основі порівняння рівнів шуму до і після фільтрації. Найкращим алгоритмом є алгоритм UNIVER з використанням біортогонального вейвлету bior1.1. Тільки для чотирьох модельних сигналів зі складним спектром Gabor, Piece-Regular, Ramp і Riemann різниця відношень сигналу до шуму після і до фільтрації склала відповідно 12, 19, 64, 76 децибелів, у решти шістнадцяти сигналів цей показник понад 258 децибелів. Другим за ефективністю є алгоритм R, якому поступається алгоритму N. Однак є винятки, наприклад, для недиференційованої функції сигналу Riemann, алгоритм N ефективніший на порядок, а для Ramp удвоє. У разі низького рівня фільтрації шуму алгоритм N взагалі не застосовується, як це зазначено у таблиці для п'яти модельних функцій.

Таблиця 1

Аналіз алгоритмів фільтрації вимірювальних сигналів

model	$SNR_0$ dB	Algorithm N			Algorithm R			Algorithm UNIVER		
		Name wavelet	$E_{\min}$	$SNR_n$ dB	Name wavelet	$E_{\min}$	$SNR_n$ dB	Name wavelet	$E_{\min}$	$SNR_n$ dB
Blocks	10	sym4	0,1941	15	bior1.1	0,1043	18	bior1.1	0,0000*	293
Bumps	-1	db30	0,1443	6	bior1.5	0,0929.	8	bior1.1	0,0000*	295
HeaviSine	12	bior4.4	0,0399	24	rbio5.5	0,0366	26	bior1.1	0,0000*	293
Doppler	-9	rbio1.5	0,0190	7	sym7	0,0276	7	bior1.1	0,0000*	294
Ramp	-8	bior1.1	0,0111	10	db2	0,0208	9	bior1.1	0,0000*	56
HiSine	-1	bior1.1	0,5003	0	db8	0,3259.	1	bior1.1	0,0000*	308
LoSine	-1	db20	0,2929	2	sym15	0,2829	3	bior1.1	0,0000*	304
LinChirp	-1	bior1.1	0,4893	0	db7	0,3120	1	bior1.1	0,0000*	304
TwoChirp	2	Не застосовується			db13	0,3862	3	bior1.1	0,0000*	303
QuadChirp	-1	sym4	0,3891	1	db16	0,2533	3	bior1.1	0,0000*	300
MishMash	3	Не застосовується			sym6	0,4551	4	bior1.1	0,0000*	301
Werner Sorrows	5	Не застосовується			db22	0,4845	6	bior1.1	0,0000*	300
HypChirps	-2	db24	0,1828	4	db27	0,1101	7	bior1.1	0,0000*	298
LinChirps	-6	bior1.1	0,1662	0	db5	0,1457	1	bior1.1	0,0000*	303
Chirps	1	coif12	0,4309	3	db21	0,3288	4	bior1.1	0,0000*	301
Gabor	-1	db3	0,1870	4	db3	0,0768	9	bior1.1	0,03956	11
Sineone-overx	-1	sym16	0,1152	6	coif5	0,0898	8	bior1.1	0,0000*	:294
Piece-Regular	27	Не застосовується			bior2.4	0,1556	34	bior2.4	0,0126	46
Piece-Polynomial	36	Не застосовується			rbio1.3	0,1442	44	bior1.1	0,0000*	294
Riemann	-57	bior1.1	0,0001	-19	db3	0,0122	-32	bior1.1	0,0000*	19

У порівнянні з іншими методами фільтрації, такими як метод медіанної фільтрації, метод поліноміальної апроксимації та інші, запропоновані алгоритми потребують значно менше витрат машинного часу і мають певну універсальність – результат фільтрації не залежить від закону розподілу шумів і форми сигналу, до якої адаптуються шляхом вибору вейвлет-функції.

#### Висновки:

1. Описано методику та побудовано математичні моделі для адаптивної чисельної оптимізації методів дискретної вейвлет-фільтрації за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки.

2. Розроблено три алгоритми оптимізації методів дискретної вейвлет-фільтрації без порога із загальним порогом та універсальним порогом.

3. Отримані результати чисельного експерименту показали, що істотне зниження похибки методу з універсальним порогом та оптимізація досягається у два етапи. На першому етапі мінімуму середньоквадратичної похибки досягається шляхом варіювання всіма параметрами фільтрації. На другому етапі використовується отриманий на першому етапі відфільтрований сигнал.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Беспалов Д.А. Вейвлет фильтрация сигналов с адаптивными порогами. *Известие вузов Северокавказский регион. Технические науки*. 2007. № 2. С. 13–16. (in Russian).
2. Hong He, Yonghong Tan and Yuexia Wang (2015). Optimal Base Wavelet Selection for ECG Noise Reduction Using a Comprehensive Entropy Criterion// *Entropy*, Vol. 17, No. 9, pp. 6093–6109. URL: <https://doi.org/10.3390/e17096093>.
3. Лазоренко О.В., Лазоренко С.В., Черногор Л.Ф. Вейвлет анализ модельных сигналов с особенностями. 2. Аналитическое и дискретное вейвлет-преобразования. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2007. Т. 12, № 3. С. 278–294 (in Russian).
4. Воскобойников Ю.Е. Вейвлет-фильтрация с двухпараметрическими пороговыми функциями: выбор функции и оценивание оптимальных параметров. *Автоматика и программная инженерия*. 2016. Т. 15, № 1. С. 69–78 (in Russian).
5. Huang, Q., Liu, B., Zhang, W. et al. Application of a novel constrained wavelet threshold denoising method in ensemble-based background-error variance. *Sci. China Technol.* 2018. Sci. 61, pp. 809–818. URL: <https://doi.org/10.1007/s11431-016-9098-3>.
6. Sheng G., Gao G., Zhang B. Application of Improved Wavelet Thresholding Method and an RBF Network in the Error Compensating of an MEMS Gyroscope. *Micromachines*. 2019. Т. 10, №. 9. С. 608. URL: <https://doi.org/10.3390/mi10090608>.
7. Zhang N., Lin P., Xu L. Application of Weak Signal Denoising Based on Improved Wavelet Threshold. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. IOP Publishing. 2020. Т. 751. №. 1. С. 012073. URL: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/751/1/012073>.
8. Shen Y. et al. (2019). Image denoising method and evaluation based on mixed wavelet algorithm. *Eleventh International Conference on Digital Image Processing (ICDIP 2019)*. International Society for Optics and Photonics. Т. 11179. С. 1117910. URL: <https://doi.org/10.1117/12.2540098>.
9. Gao H-Y, Bruce A.G. (1997). Waveshrink with firm shrinkage. *Statistica Sinica*. Vol. 7. pp. 855–874.
10. HaiQiu, Jay Lee, Jing Lin. (2006). Wavelet filter-based weak signature detection method and its application on rolling element bearing prognostics. *Journal of sound and vibration*. Т. 289. №. 4-5. С. 1066–1090. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.03.007>.
11. Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T.E. et al. (2020). SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nat Methods* 17, pp. 261–272. URL: <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>.
12. Дауни Аллен (2017). Цифровая обработка сигналов на языке Python / Пер. с англ под ред А.Э. Брандинского. ДМК-Пресс. С. 162 [Downey A.B. Think DSP – Digital Signal Processing in Python, 2014.]
13. Капкаев Э.Н., Зулкарнеев Р.Х., Насыров Р.В. Программный модуль оценки характеристик сердечно-сосудистой системы на основе определения характеристик энтропии ЭКГ. *VII Всероссийская научная конференция «Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений», Уфа-Ставрополь-Ханты-Мансийск, Россия*. 2019. С. 134–138. (in Russian).
14. Тараненко Ю.К. Эффективность использования вейвлет-преобразований при фильтрации шумов в сигналах измерительных преобразователей. *Измерительная техника*. 2021. № 2. С. 16–21. URL: <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-2-16> (in Russian).
15. Воскобойников Ю.Е. Фильтрация сигналов и изображений: Фурье и вейвлет-алгоритмы (с примерами в Mathcad) : монография / Новосибир. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2010. С. 188 (in Russian).

## REFERENCES

1. D. A. Bespalov (2007). Wavelet filtering of signals with adaptive thresholds // *Izvestiya vuzov North Caucasian region. Technical science.* No. 2, pp. 13-16. (in Russian)
2. Hong He, Yonghong Tan and Yuexia Wang (2015). Optimal Base Wavelet Selection for ECG Noise Reduction Using a Comprehensive Entropy Criterion// *Entropy.* Vol.17, No. 9, pp. 6093-6109. URL: <https://doi.org/10.3390/e17096093>
3. O. V. Lazorenko, S. V. Lazorenko, L. F. Chernogor (2007). Wavelet analysis of model signals with singularities. 2. Analytical and discrete wavelet transforms// *Radiophysics and radio astronomy.* Vol. 12, No3, pp. 278-294 (in Russian)
4. Voskoboynikov Yu.E. (2016). Wavelet Filtering with Two-Parameter Threshold Functions: Function Selection and Optimal Parameter Estimation//*Automation and Software Engineering.* Vol. 15, No. 1, pp. 69-78 (in Russian)
5. Huang, Q., Liu, B., Zhang, W. et al. (2018). Application of a novel constrained wavelet threshold denoising method in ensemble-based background-error variance. *Sci. China Technol. Sci.* 61, pp. 809–818. URL: <https://doi.org/10.1007/s11431-016-9098-3>
6. Sheng G., Gao G., Zhang B. (2019). Application of Improved Wavelet Thresholding Method and an RBF Network in the Error Compensating of an MEMS Gyroscope //*Micromachines.* Vol. 10, No. 9, pp. 608. URL: <https://doi.org/10.3390/mi10090608>
7. Zhang N., Lin P., Xu L. (2020). Application of Weak Signal Denoising Based on Improved Wavelet Threshold //*IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* – IOP Publishing. Vol. 751, No. 1, pp. 012073. URL: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/751/1/012073>
8. Shen Y. et al. (2019). Image denoising method and evaluation based on mixed wavelet algorithm //*Eleventh International Conference on Digital Image Processing (ICDIP 2019).* – International Society for Optics and Photonics. Vol. 11179, pp. 1117910. URL: <https://doi.org/10.1117/12.2540098>
9. Gao H-Y, Bruce A.G. (1997). Waveshrink with firm shrinkage. *Statistica Sinica.* Vol. 7, pp. 855-874.
10. HaiQiu, Jay Lee, Jing Lin. (2006). Wavelet filter-based weak signature detection method and its application on rolling element bearing prognostics //*Journal of sound and vibration.* Vol. 289, No. 4-5, pp. 1066-1090. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.03.007>
11. Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T.E. et al. (2020). SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nat Methods* 17, pp. 261–272. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>
12. Downey A.B. (2014). *Think DSP – Digital Signal Processing in Python*
13. E.N. Kapkaev, R.H. Zulkarneev, R.V. (2019). Nasyrov Software module for assessing the characteristics of the cardiovascular system based on the determination of the characteristics of the ECG entropy // *VII All-Russian Scientific Conference "Information Technologies for Intelligent Decision Support", Ufa-Stavropol-Khanty-Mansiysk, Russia.* pp.134-138. (in Russian)
14. Yu.K. Taranenko (2021). Efficiency of using wavelet transforms when filtering noise in the signals of measuring transducers // *Izmeritel'naya Tekhnika.* No. 2, pp. 16-21. URL: <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-2-16> (in Russian)
15. Voskoboynikov Yu. E. (2010). *Filtering signals and images: Fourier and wavelet algorithms (with examples in Mathcad): monograph / Yu. E. Voskoboinikov, A. V. Gochakov, A. B. Kolker; Novosib. state architecture.-builds. un-t (Sibstrin).* – Novosibirsk: NGASU (Sibstrin). pp.188. (in Russian)



## РОЗДІЛ III. КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

УДК 624.012.25: 539.386

DOI <https://doi.org/10.26661/2786-6254-2022-2-08>

### АЛГОРИТМ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ У МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**Гоменюк С. І.**

*доктор технічних наук, професор,  
професор кафедри програмної інженерії  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0001-7340-5947](https://orcid.org/0000-0001-7340-5947)  
[mf@znu.edu.ua](mailto:mf@znu.edu.ua)*

**Козуб В. Ю.**

*асистент кафедри фізико-технічних систем та інформатики  
Луганський національний університет імені Тараса Шевченка  
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна  
[orcid.org/0000-0003-2710-7206](https://orcid.org/0000-0003-2710-7206)  
[v.y.kozub@gmail.com](mailto:v.y.kozub@gmail.com)*

**Ключові слова:** *метод  
скінченних елементів,  
матриця жорсткості,  
паралельні обчислення,  
OpenMP, напружено-  
деформований стан.*

Розв'язання прикладних задач фізики та механіки конструкцій потребує використання методу скінченних елементів з великою розмірністю розрахункових сіток. Крім того, в таких схемах одночасно використовуються різні типи скінченних елементів. Формування матриць жорсткості в такому випадку потребує значних обчислень за однаковою схемою для кожного скінченного елемента. У традиційному підході ці обчислення виконуються послідовно. Для розрахункових схем досить невеликого розміру, час розв'язування є незначним. У випадку великих розмірів сіток кількість та час розрахунків збільшуються, що потребує оптимізації обчислень з використанням алгоритмів паралельних обчислень. Для паралелізації методу скінченних елементів реалізовано управління роботою досить великої кількості процесів, організовано обмін даними між процесами. Під час виконання обчислень виникає необхідність очікування моменту, коли завершиться виконання деякого етапу всіма процесорами. Час виконання програми визначається найповільнішою задачею з тих, що паралельно виконуються на різних процесорах. Для досягнення збалансування завантаження процесорів реалізовано рівномірний розподіл однаково вимірних задач. У системі із загальною пам'яттю, в яких обмін інформацією між процесорами відбувається за допомогою змінних, що зберігаються у загальній пам'яті, для забезпечення детермінованості виконання програми реалізовано поступове розпаралелювання програми. Для оптимізації обчислювальних процесів скінченних елементів обчислювального комплексу «МІРЕЛА+» розроблено алгоритми паралельного програмування для побудови матриць жорсткості скінченних елементів та розрахунку напружено-деформованого стану. Паралельна обробка даних реалізована за допомогою бібліотеки OpenMP, що забезпечує більшу швидкість розробки через зручність використання. На основі обчислювальних експериментів встановлено перевагу використання алгоритмів паралельних обчислень на початку розв'язування задач перед традиційними скінченно-елементними алгоритмами для великорозмірних розрахункових сіток.

## ALGORITHM OF PARALLEL CALCULATIONS IN THE FINITE ELEMENT METHOD

**Homeniuk S. I.**

*Doctor of Technical Sciences, Professor,  
Professor at the Department of Software Engineering  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-7340-5947  
mf@znu.edu.ua*

**Kozub V. Yu.**

*Assistant at the Department of Physical and Technical Systems and Informatics  
Luhansk Taras Shevchenko National University  
Koval str., 3, Poltava, Ukraine  
orcid.org/0000-0003-2710-7206  
v.y.kozub@gmail.com*

**Key words:** *finite element method, stiffness matrix, parallel computing, OpenMP, stress-strain state.*

The solution of applied problems of physics and mechanics of structures requires the use of the finite element method with a large dimension of calculation grids. In addition, different types of finite elements are used simultaneously in such schemes. The formation of stiffness matrices in this case requires significant calculations using the same scheme for each finite element. In the traditional approach, these calculations are performed sequentially. For computational schemes of sufficiently small size, the solution time is negligible. In the case of large grid sizes, the number and time of calculations increase, which requires optimization of calculations using parallel calculation algorithms. For the parallelization of the finite element method, work management of a sufficiently large number of processes is implemented, and data exchange between processes is organized. When performing calculations, there is a need to wait for the moment when the execution of a certain stage by all processors is completed. The execution time of the program is determined by the slowest task among those executed in parallel on different processors. In order to achieve load balancing of the processors, a separation of equally sized tasks is implemented. In a system with shared memory, in which the exchange of information between processors takes place with the help of variables stored in the shared memory, gradual parallelization of the program is implemented to ensure determinism of program execution. In order to optimize the computing processes of the finite elements of the "MIRELA +" computing complex, parallel programming algorithms have been developed to construct the stiffness matrices of the finite elements and calculate the stress-strain state. Parallel data processing is implemented using the OpenMP library, which provides faster development due to ease of use. On the basis of computational experiments, the advantage of using parallel computing algorithms at the beginning of problem solving over traditional finite element algorithms for large-scale calculation grids has been established.

**Вступ.** Одним з найбільш поширених методів розрахунку конструкцій є метод скінченних елементів (МСЕ). Залежно від виду задачі у разі скінченно-елементного моделювання розрахункові сітки сягають великих розмірів, зокрема, для композитних багат шарових конструкцій, конструкцій з концентраторами напружень, складених конструкцій. В такому випадку обчислення матриці

жорсткості становить значну частину загального часу розв'язування задачі.

Необхідність вирішення складних тривимірних задач з мінімальними витратами призводить до потреби оптимізації обчислювальних процесів.

Використання кількох обчислювальних одиниць для вирішення обчислювальної задачі одночасно значно скорочує час розв'язку. За умови,

що обчислювальна задача може бути розбита на окремі, автономні одна від одної частини, які можна обробити одночасно, тим самим забезпечивши розв'язання задач за менший час за допомогою кількох обчислювальних одиниць, ніж за допомогою однієї обчислювальної одиниці. Обчислювальними одиницями можуть бути: один комп'ютер із кількома процесорами/ядрами, наприклад ноутбуки з двоядерними або чотириядерними процесорами; або суперкомп'ютер, що створюється з великої кількості таких комп'ютерів (або вузлів), з'єднаних мережею, що створюють кластер.

Підходи до паралелізації в МСЕ можна поділити на дві категорії – підходи з розподіленою пам'яттю та зі спільною пам'яттю [1]. У роботі з першою категорією зазвичай використовується високопродуктивна модель паралельного програмування Message Passing Interface (MPI). MPI – це легко масштабований засіб паралельного програмування, але за умови виконання завдання розподілу робочого навантаження, що зазвичай призводить до масштабних змін програми [2–4].

Паралелізація у другій категорії здебільшого здійснюється за допомогою спеціальних директив компілятора. Стандарт OpenMP [5] був розроблений для забезпечення базових конструкцій паралелізму у програмах на Fortran та C/C++. Використання OpenMP дає обмежений контроль над потоками порівняно з більш фундаментальним стандартом Pthreads [3]. Однак OpenMP забезпечує більшу швидкість розробки через зручність використання.

Можливість швидкого створення ефективних паралельних програм є серйозним аргументом у виборі засобів програмування. Технологія спочатку спроектована таким чином, щоб користувач міг працювати з єдиним текстом для паралельної і послідовної програм. Звичайний компілятор на послідовній машині директиви OpenMP просто «не помічає», оскільки вони розташовані в коментарях (за винятком змінних оточення і спеціальних функцій). Додатковою особливістю OpenMP є можливість поступового, «інкрементального» розпаралелювання програми. Взявши за основу послідовний код, дається можливість крок за кроком додавати директиви, що описують паралельні конструкції. За такого підходу немає необхідності відразу писати паралельну програму цілком – її розробка ведеться послідовно. Це спрощує як процес програмування, так і налагодження програми.

Варто зауважити, що програми на MPI можуть не менш ефективно, ніж на OpenMP, виконуватися і на системах із загальною пам'яттю. З цієї точки зору технологія MPI є більш універсальною [6]. Однак програмувати на OpenMP,

по-перше, значно зручніше, ніж з використанням технології MPI, а по-друге, технологія OpenMP значно економніше витрачає оперативну пам'ять на системах із загальною пам'яттю. Для завдань, що вимагають великого обсягу оперативної пам'яті, часто виявляється, що неможливо запустити таку кількість процесів на обчислювальній системі, щоб завантажити роботою всі обчислювальні ядра [7].

Опубліковані підходи до паралелізації МСЕ стосуються процедур розв'язання систем рівнянь. Проте майже відсутні публікації, присвячені застосуванню паралельних обчислень у формуванні матриць розрахункових рівнянь.

Метою роботи є розробка алгоритму паралелізації обчислень матриць жорсткості скінченних елементів для оптимізації розрахунків конструкцій.

**Огляд методів паралельних обчислень.** Використання паралельних програм потребує забезпечення керування роботою досить великої кількості процесів, організації обміну даними між процесами.

При цьому необхідно враховувати такі негативні особливості:

- через асинхронність доступу до даних може втрачатися детермінізм поведінки програми;
- можливість виникнення тупикових ситуацій;
- виникнення проблеми масштабованості програми і балансування завантаження обчислювальних вузлів.

У разі використання багатопроцесорних систем очікується, що швидкість виконання обчислень збільшиться в  $n$  разів, якщо використовується  $n$  процесорів замість одного. Насправді прискорення виявляється значно меншим очікуваного. Зменшення зростання продуктивності у паралельних обчисленнях зумовлене двома факторами: перший пов'язаний з властивостями алгоритму програми [8], а другий – з технічними властивостями обчислювальної системи.

Суть проблеми полягає в тому, що кожна паралельна програма містить якусь частину непаралельного коду. На системах із загальною пам'яттю це та частина коду, яка виконується тільки головним потоком, а на системах з розподіленою пам'яттю це частина коду, яка виконується всіма процесорами. Припустимо, що відношення часу виконання непаралельної частини програми до всього часу виконання дорівнює  $f$  ( $0 < f < 1$ ). Якщо час виконання на одному процесорі дорівнює  $t_s$ , то час виконання паралельної частини –  $(1-f)t_s$ , а час виконання послідовної частини –  $ft_s$ . В ідеальному випадку у разі використання  $n$  процесорів час виконання паралельної частини становитиме  $(1-f)t_s/n$ , а час виконання послідовної частини залишиться  $ft_s$ .

Таким чином, прискорення виконання програми на  $n$  процесорах становитиме:

$$S(n) = \frac{t_s}{ft_s + (1-f)t_s/n} = \frac{n}{1+(n-1)f}. \quad (1)$$

Вираз (1) є формальним визначенням закону Амдала. При  $n$ , що прямує до нескінченності, прискорення становитиме  $1/f$ . З цього закону випливає, що якщо частка непаралельності коду в програмі становить 5%, то неможливо отримати більш ніж 20-кратне прискорення програми, скільки б процесорів не використовувалося.

У разі розбиття великої задачі на більш дрібні підзадачі, які повинні виконуватися паралельно на різних процесорах, часто виникає ситуація, коли потрібно чекати завершення виконання деякого етапу всіма процесорами. У цьому випадку повний час виконання буде визначатися найповільнішою підзадачею. Тому у разі розробки паралельної програми надзвичайно важливо максимально рівномірно розподіляти обчислювальну роботу між процесорами. Досягнення збалансування завантаження є нетривіальним завданням.

У системах із загальною пам'яттю, в яких обмін інформацією між процесорами відбувається за допомогою змінних, що зберігаються у загальній пам'яті, синхронізація процесів особливо важлива. Якщо кілька процесів одночасно намагаються модифікувати одну і ту саму змінну, то необхідний спеціальний механізм синхронізації виконання процесів для забезпечення детермінованості виконання програми.

Ефективність паралельних програм на системах з розподіленою пам'яттю істотно залежить від комунікаційного середовища. Комунікаційне середовище характеризується двома параметрами: пропускну здатністю (bandwidth), яка визначає кількість байт, що передається за одиницю часу, і латентністю (latency), яка визначає час, що витрачається на підготовку до передачі повідомлення. Для великої кількості задач, в яких обміни даними нечасті і невеликі за обсягом, ці параметри є цілком задовільними, однак у випадках, коли в програмі передається багато дрібних повідомлень, такі параметри стають неприйнятними, і масштабованість програми виявляється надзвичайно низькою. У будь-якому випадку комунікаційні операції виконуються значно повільніше, ніж звернення до локальної пам'яті, тому найбільш ефективними будуть ті паралельні програми, в яких обміни зведені до мінімуму.

**Основні співвідношення методу.** Для дослідження ефективності паралелізації обчислень компонентів матриці жорсткості вибрано пакет прикладних програм «MIRELA+», призначений для розв'язування задач механіки деформованого твердого тіла. Для усунення ефекту «хибного

зсуву» в комплексі використовується моментна схема скінченних елементів, сутність якої полягає в апроксимації полів переміщень та деформацій у вигляді розкладання в ряд по ступеневих функціях особливого виду, що дозволяє встановити досить простий зв'язок між компонентами розкладань та уникнути зайвих компонент розкладання деформацій

$$u_i = \sum_{p,q,r=0}^{m,n,l} w_i^{(pqr)} \Psi^{(pqr)} = \sum_{p,q,r=0}^{m,n,l} w_i^{(pqr)} \frac{(x_1)^p}{p!} \frac{(x_2)^q}{q!} \frac{(x_3)^r}{r!},$$

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{s,t,g} e_{ij}^{(stg)} \Psi^{(stg)},$$

$$\varepsilon_{ij} = \mathbf{F}_{ij}^{s'} w_s = \mathbf{F}_{ij}^{s'} \mathbf{A} u_{s'}, \quad (2)$$

де  $\mathbf{A}$  – матриця перетворення, що встановлює зв'язок між функціями форми скінченного елемента та ступеневими базисними функціями.

У разі побудови спрощених моделей гіперпружних тіл використовуються гіпотеза нестисливості [9]. В комплексі «MIRELA+» реалізований підхід, що дозволяє уникнути спрощення. Функція змінення об'єму розкладається по ступеневих функціях і дозволяє врахувати слабку стисливість матеріалів (типу еластомерів) [10]

$$\theta_i = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{m-1,n-1,l-1} \xi^{(\alpha\beta\gamma)} \Psi^{(\alpha\beta\gamma)},$$

$$\xi^{(\alpha\beta\gamma)} = e_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{ij}$$

$$\theta = \mathbf{F}_0^{s'} w_s = \mathbf{F}_0^{s'} \mathbf{A} u_{s'}, \quad (3)$$

Для задач статички конструкцій варіаційне рівняння рівноваги лінійно пружного тіла має вигляд

$$\delta \iiint_V \left( \mu g^{kj} g^{li} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \theta^2 \right) dv = \iiint_V \rho P^i \delta u_i dv + \iint_S F^i \delta u_i ds, \quad (4)$$

де  $\mu, \lambda, \rho$  – механічні характеристики матеріалу,  $P^i, F^i$  – об'ємні та поверхневі сили.

З огляду на використовувані методи апроксимації варіація енергії деформування має вигляд

$$\delta W = \iiint_V \delta \{e_{ij}\}^T \{\psi\} \mu g^{ik} g^{jl} \{e_{kl}\}^T \{\psi\} dv + \iiint_V \{\xi\}^T \{\psi\} \lambda \delta \{\xi_{kl}\}^T \{\psi\} dv$$

$$\mathbf{H}^{ijkl} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi_{ij}\} \{\psi_{kl}\}^T \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\mathbf{H}^0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda \{\psi_\theta\} \{\psi_\theta\}^T \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\delta W = \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{K}^{s't'} \mathbf{u}_t + \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{K}_0^{s't'} \mathbf{u}_t, \quad (5)$$

де  $\mathbf{K}^{s't'} = \mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{A}$ ,

$\mathbf{K}_0^{s't'} = \mathbf{A}^T \mathbf{F}_0^T \mathbf{H}^0 \mathbf{F}_0 \mathbf{A}$  – матриці жорсткості.

Процедура формування матриці жорсткості скінченного елемента містить такі кроки:

– обчислення коефіцієнтів розкладання переміщень та коефіцієнтів матриці  $\mathbf{A}$ ;

– чисельне інтегрування за схемою Гауса.

Для точок інтегрування виконуються такі процедури:

– обчислення матриць переходу від глобальної системи координат до локальної системи координат та матриці зворотного перетворення в точках інтегрування;

– обчислення часткових похідних для формування матриці  $F$ , що пов'язує переміщення та деформації у скінченному елементі.

**Результати досліджень.** Реалізація паралельної обробки в рамках дослідження виконана за допомогою бібліотеки OpenMP.

Спільна обробка великих масивів даних вимагає автономності операцій над ними для кожного циклу формування матриці жорсткості й обчислення параметрів напружено-деформованого стану.

Паралелізм досягається за рахунок розбиття ітерацій циклу обчислень на блоки, які рівномірно і паралельно розподіляються по потоках виконання. В рамках OpenMP для реалізації подібної схеми виконання застосовується директива DO перед циклом. Опція SCHEDULE(STATIC) задає блочно-циклічний розподіл ітерацій блоками розміром, що визначається діленням числа ітерацій на число потоків

```
!$OMP PARALLEL PRIVATE(S, SN)
!$OMP DO SCHEDULE(STATIC) ORDERED
DO 1 I=1,N
<Parallel loop code>
!$OMP ORDERED
WRITE (*) RESULT
!$OMP END ORDERED
1 CONTINUE
!$OMP END DO
!$OMP END PARALLEL
```

Директива PRIVATE дозволяє визначити такі змінні (масиви), які повинні бути локальними для кожного потоку. У разі входу в паралельну область для кожного потоку створюється окремий екземпляр, який не має ніякого зв'язку з оригінальною змінною поза паралельною областю. За замовчуванням компілятор визначає змінні, які були проініціалізовані до паралель-

ної секції як спільні (SHARED) для всіх потоків виконання.

Перед завершенням циклу виконується процедура виводу результатів розрахунку скінченного елемента, що повинна виконатися в тому самому порядку, як і в послідовній версії циклу. Поведінку послідовного доступу за вихідним порядком забезпечує директива ORDERED.

Послідовні області OpenMP програми виконуються тільки основним потоком (рис. 1). Для підтримки паралелізму використовується схема Fork-Join. У разі входу в паралельну область (!\$OMP PARALLEL) потік-майстер породжує додаткові потоки (виконується операція Fork). Після породження кожен потік отримує свій унікальний номер. Усі породжені потоки виконують один і той же код, що відповідає паралельній області. У разі виходу (!\$OMP END PARALLEL) з паралельної області основний потік чекає завершення інших потоків, і подальше виконання програми продовжує тільки master (виконується операція Join).

Як приклад для перевірки та тестування представлено розрахунок квадратної плити затиснутої по контуру під дією згинального навантаження (рис. 2). Для розрахунку використано обчислювальний комплекс «MPELA+» із застосуванням моментної схеми скінчених елементів. Тестування виконувалось на пристрої, оснащеному процесором Intel i7-9750H (6 ядер та 12 потоків) та 16 ГБ RAM.

### Висновки

З появою багатоядерних процесорів, системи із загальною пам'яттю стали самим масовим видом багато процесорних систем, а OpenMP, своєю чергою, надає один з найзручніших програмних інтерфейсів розробки для таких систем. Версія OpenMP програми також може бути скомпільована з використанням параметру компілятора «non-parallel» (директиви OpenMP будуть ігноруватися компілятором), що забезпечує переносимість коду на різні платформи. З ростом популярності комп'ютерів SMP зростає важливість наявності ефективних і кросплатформних паралельних кодів.

У роботі проведено аналіз наявних технічних засобів паралелізації, переваг і недоліків впро-

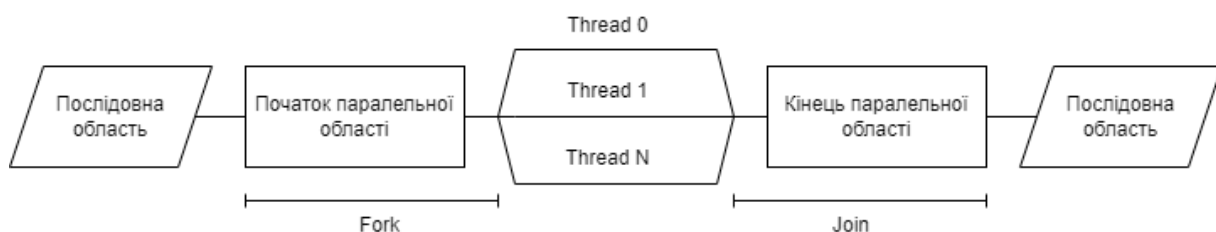
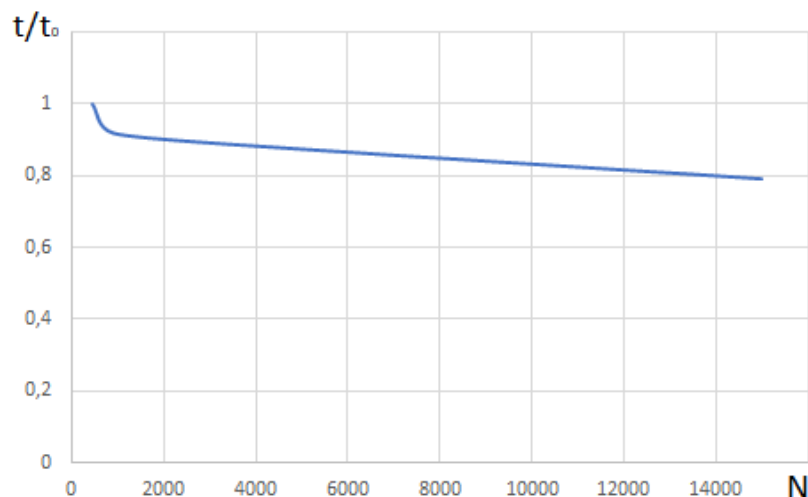


Рис. 1. Процес паралельного виконання програми



**Рис. 2. Порівняння швидкості розв'язку для сіток з різною кількістю скінченних елементів**

вадження паралельних рішень, використовуючи директиви OpenMP розроблено паралельну версію процедури обчислення для виконання цільових розрахунків на базі обчислювального

комплексу «МІРЕЛА+». Тести продуктивності на представленому прикладі продемонстрували задовільне прискорення за допомогою паралельних секцій.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Jarzebski P., Wisniewski K., Taylor R.L. On parallelization of the loop over elements in FEAP. *Computational Mechanics*. 2015. No. 56. Pp. 77–86.
2. Wozniak M., Bukowska A. Comparison of multi-frontal and alternating direction parallel hybrid memory iGR direct solver for non-stationary simulations. *Computer Science*. 2020. No. 21(4). Pp. 419–439.
3. Yamaguchi T., Kawase Y., Nagase A., Ishimura S. Performance Evaluation of 3-D Hybrid Parallel Finite Element Method by MPI/OpenMP *J. Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 2019. Vol. 27. No. 1. Pp. 85–90.
4. Pantalé O. Parallelization of an object-oriented FEM dynamics code: influence of the strategies on the Speedup. *Adv. Eng. Softw*, 2005. 36. Pp. 361–373.
5. OpenMP Application Programming Interface. URL: <https://www.openmp.org/wp-content/uploads/OpenMP-API-Specification-5-1.pdf> (дата звернення: 26.11.2021).
6. Bozhanskii M., Patziak B. Parallelization of assembly operation in finite element method. *Acta Polytechnica*, 2020. No. 60(1), 25–37.
7. Amorim L., Goveia T., Mesquita R., Baratta I. GPU Finite Element Method Computation Strategy Without Mesh Coloring. *J. Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, 2020. Vol. 19. No. 2. Pp. 252–264.
8. Amdahl G.M. Validity of the single-processor approach to achieving large scale computing capabilities *Proc. AFIPS Conference Proceedings*, 1967. Pp. 483–485.
9. Suchocki C., Jemiolo S. On Finite Element Implementation of Polyconvex Incompressible Hyperelasticity: Theory, Coding and Applications. *International Journal of Computational Methods*, 2020. Vol. 17. No 8. 1950049. URL: <https://www.researchgate.net/publication/332969982>.
10. Bazhenov V.A., Kozub Yu.G., Solodei I.I. Thermoelasticity of elastomeric constructions with initial stresses. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 2020. No. 104. Pp. 299–308.

#### REFERENCES

1. Jarzebski, P., Wisniewski, K., Taylor, R. (2015) On parallelization of the loop over elements in FEAP. *Computational Mechanics*. No. 56, pp.77–86.
2. Wozniak, M., Bukowska, A. (2020). Comparison of multi-frontal and alternating direction parallel hybrid memory iGRM direct solver for non-stationary simulations. *Computer Science*. No. 21(4), pp. 419–439.

3. Yamaguchi, T., Kawase, Y, Nagase, A., Ishimura, S. (2019). Performance Evaluation of 3-D Hybrid Parallel Finite Element Method by MPI/OpenMP. *Journal Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*. Vol. 27, No. 1, pp. 85–90.
4. Pantalé, O. (2005). Parallelization of an object-oriented FEM dynamics code: influence of the strategies on the Speedup. *Advances in Engineering Software*. No. 36(6), pp. 361–373.
5. OpenMP Application Programming. Interface. Retrieved from: <https://www.openmp.org/wp-content/uploads/OpenMP-API-Specification-5-1.pdf> (Last accessed: 26.11.2021).
6. Bozhanskii, M., Patziak, B. (2020). Parallelization of assembly operation in finite element method. *Acta Polytechnica*. No. 60(1), pp. 25–37.
7. Amorim, L., Goveia, T., Mesquita, R., Baratta, I. (2020). GPU Finite Element Method Computation Strategy Without Mesh Coloring. *Journal Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*. Vol. 19. No. 2, pp. 252–264.
8. Amdahl, G.M. (1967). Validity of the single-processor approach to achieving large scale computing capabilities *AFIPS. Conference Proceedings*. 30, pp. 483–485.
9. Suchocki, C., Jemiolo, S. (2020). On Finite Element Implementation of Polyconvex Incompressible Hyperelasticity: Theory, Coding and Applications. *International Journal of Computational Methods*. Vol. 17, No. 8, 1950049. Retrieved from: <https://www.researchgate.net/publication/332969982>.
10. Bazhenov, V.A., Kozub, Yu.G., Solodei, I.I. (2020). Thermoelasticity of elastomeric constructions with initial stresses. *Strength of Materials and Theory of Structures*. No. 104, pp. 299–308.

## ЗАСТОСУВАННЯ БІБЛІОТЕКИ MPI ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ АЛГОРИТМУ «МАРШИРУЮЧИХ КУБІВ»

**Калюжняк А. В.**

*аспірантка*

*Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0000-0002-4837-7566](https://orcid.org/0000-0002-4837-7566)  
[anastasia.korgun@gmail.com](mailto:anastasia.korgun@gmail.com)*

**Мильцев О. М.**

*кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри програмної інженерії  
Запорізький національний університет  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна  
[orcid.org/0009-0009-4382-7730](https://orcid.org/0009-0009-4382-7730)  
[alexmyltsev@gmail.com](mailto:alexmyltsev@gmail.com)*

**Ключові слова:** «маршируючі куби», розподілена пам'ять, MPI, OPENMP, R-функції.

Візуалізація об'єктів геометричного моделювання стає невід'ємною складовою частиною багатьох підприємств машинобудування, будівництва та медицини. Використання комп'ютерних технологій допомагають проєктувати складні механізми. Уже існуючі методи геометричного моделювання вирішують проблеми візуалізації складних форм без великих матеріальних та часових затрат. Проте вирішуються не всі проблеми, та інколи застосування того чи іншого підходу неможливе, оскільки реалізація становиться досить складною. Задача побудови моделей є досить популярною. Візуалізація дозволяє автоматизувати процеси на підприємстві без великих матеріальних затрат.

Метою цього дослідження є розробка алгоритму методу моделювання геометричних об'єктів за допомогою функціонального підходу з використанням бібліотеки MPI та порівняння з використанням загальною пам'яттю OpenMP. Моделювання за допомогою функціонального підходу ґрунтується на використанні неявно заданих функцій, які дають можливість побудувати тривимірні моделі. У статті подано формальний опис алгоритму «маршируючих кубів», проаналізовано властивості і практичне застосування при побудові об'єктів з використанням паралельного програмування бібліотеки MPI та OpenMP. Подані приклади візуалізації об'єктів з використанням середовища Qt Creator.

Отримані результати будуть корисними для подальших теоретичних досліджень, а також для практичного використання візуального представлення моделей з розподіленою та загальною пам'яттю. Моделі, побудовані за допомогою алгоритму «маршируючих кубів», дають можливість розв'язання задач геометричного моделювання без можливих часових втрат і прийняття належних рішень стосовно представлення об'єктів.

Таким чином, задача побудови тривимірних об'єктів за допомогою функціонального підходу може бути успішно розв'язана завдяки використанню бібліотеки підходу MPI.



## APPLICATION OF THE MPI LIBRARY FOR COMPUTATION OF THE “MARCHING CUBES” ALGORITHM

**Kaliuzhniak A. V.**

*Postgraduate Student  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-4837-7566  
anastasia.korgun@gmail.com*

**Myltsev O. M.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor at the Department of Software Engineering  
Zaporizhzhia National University  
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine  
orcid.org/0009-0009-4382-7730  
alexmyltsev@gmail.com*

**Key words:** “marching cubes”,  
distributed memory, MPI,  
OPENMP, R-function.

Visualization of geometric modeling objects is becoming an integral part of numerous engineering, construction and medical enterprises. The use of computer technologies enables to design complex mechanisms. Already existing methods of geometric modeling solve the problems of visualization of complex forms without involving large material and time costs.

However, not all problems can be solved and sometimes the application of a particular approach is impossible, as the implementation becomes relatively complicated. The task of building models is fairly common. Visualization enables to automate processes at the enterprise without large material costs.

The purpose of this study is to develop an algorithm for the method of modeling geometric objects using a functional approach with the MPI library implementation and its further comparison with Open MP shared memory.

Modeling by means of the functional approach is based on the use of implicitly specified functions that enables to build three-dimensional models.

The article presents a formal description of the “marching cubes” algorithm, analyzes its properties and practical application in the construction of objects using the MPI and OpenMP library parallel programming. Examples of visualization of objects with the Qt Creator environment usage are provided as well.

The obtained results will be advantageous for further theoretical research, as well as for the practical use of the visual representation of models with distributed memory.

Models built by means of the “marching cubes” algorithm facilitates to solving geometric modeling problems without possible time losses and making appropriate decisions regarding the representation of objects.

Thus, the task of constructing three-dimensional objects using a functional approach can be successfully solved by applying the MPI approach library.

---

**Вступ.** Дослідження, пов’язане з використанням геометричних моделей, застосовується сьогодні майже у всіх областях життєдіяльності. Представлення моделей без великих фізичних та матеріальних затрат, а також мінімізація можливих втрат дає можливість автоматизувати процеси, проєктувати складні механізми, споруди.

Функціональні можливості кожного методу геометричного моделювання реалізуються за допомогою програмного забезпечення, яке в процесі роботи взаємодіє з графічними пристроями вводу/виводу. При практичній реалізації виникає одна з основних проблем – це автоматизація процесів побудови складних об’єктів з найменшою похибкою. Для того щоб візуалізувати будь-яку

геометричну модель, необхідно враховувати її групову приналежність: мікрогеометрія чи мікрогеометрія.

Розробка додатків, які одночасно інтегрують весь конвеєр наукового моделювання та є масштабованими, залишається технічно складною задачею. Збільшення паралельних архітектур ускладнило досягнення масштабованості та портативності. Навіть з новими інструментами алгоритми можуть не масштабуватися в різних паралельних парадигмах. Перед розробкою необхідно зрозуміти вплив вибору інструменту на продуктивність у реальних програмах.

**1 Постановка проблеми.** Широке застосування паралельних архітектур обчислювальних систем викликає підвищену зацікавленість до засобів розробки програмного забезпечення, яке здатне повністю використовувати апаратні засоби даних типів.

Застосування багатопроцесорних комп'ютерів та відповідних технологій розпаралелювання алгоритмів дозволяє суттєво зменшувати час обчислень за рахунок паралельної обробки даних. Основні критерії якості паралельної реалізації алгоритму: прискорення розрахунків із зростанням числа процесорів, ефективність та адекватність відтворення явищ, що моделюються.

Прискорення визначають як відношення часу рахунку послідовного алгоритму до часу рахунку паралельного алгоритму, а ефективність – як відношення прискорення до кількості процесорів, в якому досягнуто у відсотках. Насправді, зазвичай відбувається зниження ефективності зі зростанням числа процесорів. Це пов'язано з такими чинниками: програми можуть мати послідовні фрагменти, що може послугувати розбалансуванню обчислень в паралельних процесах, тому деякий час може витрачатися на міжпроцесорні обміни. Для збалансування обчислень та мінімізації обмінів ключова роль відводиться вибору способу розподілу даних та обчислень за процесорами [1].

Проблема адаптації математичних моделей до багатопроцесорних обчислювальних комплексів – це проблема найбільш ефективної реалізації алгоритмів зі збереженням точності результатів моделювання. Найбільш універсальним та зручним методом побудови геометричного об'єкта є функціональний підхід. За його допомогою можна побудувати модель будь-якої складності. R-функції складаються з математичних відношень в неявному вигляді, які допоможуть візуалізувати складні моделі.

Найбільш ефективним для виконання багатовимірних завдань на багатопроцесорних обчислювальних системах з розподіленою пам'яттю вважається принцип геометричного паралелізму, який передбачає декомпозицію розрахункової

області на підобласті відповідно до кількості процесорів. Технологія цього принципу заснована на розподілі області за процесорам, з вимогою рівномірного завантаження. При цьому розбиття області відбувається по блоках. Якщо розмірність сітки в блоці більша за середню розмірність у розрахунку на один процесор, то цей блок обслуговується кількома процесорами, і навпаки, один процесор обслуговує кілька сусідніх блоків, якщо їх сумарна розмірність не перевищує середньої.

**2 Огляд бібліотек паралельного програмування.** Для реалізації алгоритму геометричного паралелізму розроблено бібліотеки обміну повідомленнями MPI (Message Passing Interface). В ній кожен процесор кластера виконує одні й самі обчислення частини розрахункової області, розподіленої цьому процесору. Обчислення зводяться до взаємно узгодженої поетапної реалізації методу розщеплення за просторовими змінними. Винятки становлять процесори, які додатково виконують склеювання рішень на внутрішніх кордонах [2]. Умови склеювання виконуються на кожному кроці за часом. Процесори, що обслуговують сусідні блоки, передають необхідну інформацію одному з таких процесорів, який здійснює автономний розрахунок усієї межі в цілому та розсилає результати у зворотному напрямку. Це відбувається паралельно з усіх блоків, незначна затримка може виникнути тільки через необхідність передачі даних виконуючим процесорам для склеювання рішень на протилежній межі свого блоку. При цьому всі процесори, крім тих, що виконуються (тобто активних в даний момент часу), знаходяться в стані очікування (рис. 1).

Розробка паралельних програм ускладнюється також через такі проблеми: ресурси (кількість вузлів, їх архітектура, продуктивність) визначаються тільки в момент обробки мережею замовлення виконання завдання.

Незважаючи на те, що використання бібліотеки MPI показують високий рівень продуктивності, сама технологія має низку недоліків:

- низький рівень (програмування з використанням MPI часто порівнюють із програмуванням на асемблері), необхідність детального управління розподілом масивів та витків циклів між процесами, а також обміном повідомленнями між процесами – все це призводить до високої трудомісткості розробки програм;

- необхідність надмірної специфікації типів даних у переданих повідомленнях, а також наявність жорстких обмежень на типи даних, що передаються;

- складність написання програм, здатних виконуватися при довільних розмірах масивів та довільній кількості процесів, – унеможливило повторне використання наявних MPI-програм;

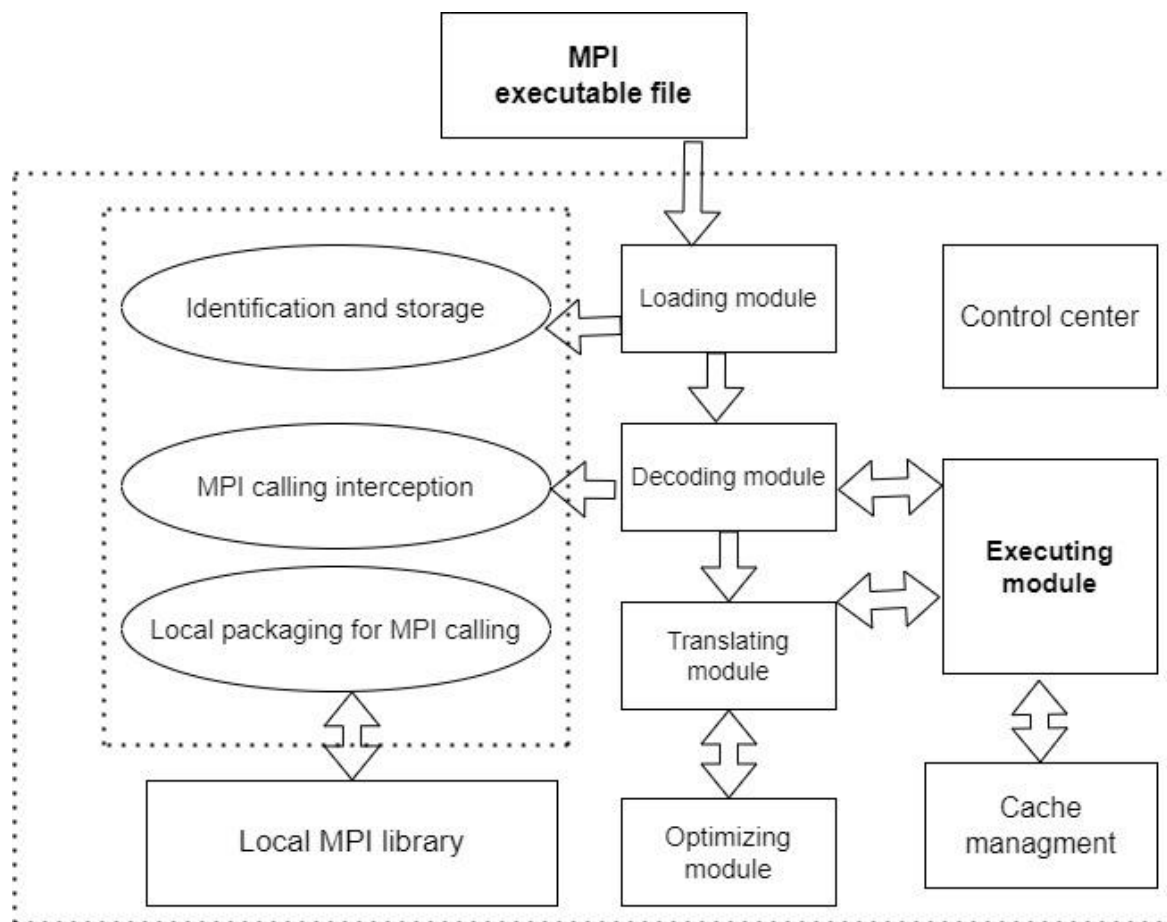


Рис. 1. Етапи роботи бібліотеки MPI

– відсутність підтримки об'єктно-орієнтованого підходу [3].

Але існує ще одна технологія, яка дозволяє візуалізувати модель за допомогою паралельного програмування багатопочних додатків із загальною пам'яттю – OpenMP.

Технологія OpenMP реалізує паралельні обчислення з допомогою багатопоточності, у якій «головний» (master) потік створює набір «підлеглих» (slave) потоків і з-поміж них розподіляються обчислення. Потім за допомогою директив препроцесора OpenMP породжується паралельна область із заданою кількістю потоків CPU рівним кількості GPU, і для кожного потоку призначається device-пристрій за допомогою функції `cudaSetDevice(ndevice)`, де `ndevice` – номер пристрою. Після цього на кожному GPU розміщується відповідна частина даних, наприклад частина матриці необхідного розміру і паралельна область закривається. Далі, наприклад, при множенні матриці на вектор відкривається паралельна область, при цьому кожен потік використовує пристрій, який йому призначено. Це можливо завдяки тому, що OpenMP використовує безліч потоків, які не знижуються між паралельними і послідовними

областями, а управління передається або заданій кількості потоків для паралельної області, або головному потоку для послідовної області. Постійна підтримка безлічі потоків дає вигоду у продуктивності, оскільки створення потоків у кожній паралельній області є повільною операцією [4].

При вивченні аспектів процесу розпаралелювання алгоритмів для наукових досліджень не можна залишити без уваги питання впливу на продуктивність подання даних з різною точністю, оскільки дуже часто реальні розрахунки необхідно вести з більш високою точністю (стандартною подвійною – `real*8`, максимально можливою – `real*16`). Відповідно до технічних характеристик продуктивність процесорів-вузлів кластера залежить від використовуваної точності обчислень. Найбільша продуктивність досягається при обчисленнях з одинарною точністю подання даних. При обчисленнях з подвійною точністю продуктивність знижується теоретично на порядок (порівняно з піковою продуктивністю, заявленою виробником) і приблизно вдвічі на практиці.

Число потоків у групі, що виконуються паралельно, можна контролювати кількома спо-

собами. Один із них – використання змінної оточення OMP\_NUM\_THREADS [5]. Інший спосіб – виклик процедури `omp_set_num_threads()`. Ще один спосіб – використання виразу `num_threads` у поєднанні з директивою `parallel`. (приклад з програми).

Розглянемо приклад використання даної бібліотеки для задачі підрахунку суми  $\sum_{i=n} \frac{1}{1+i^2}$ :

```
double sum_series(int begin, int end)
{
    auto sum = 0.0;

    for (auto i = begin; i < end; i++)
        sum += 1.0 / (1.0 + double(i * i));
    return sum;
}

int main()
{
    int num_thread = omp_get_max_threads() - 1, //
    Максимальна кількість потоків
    n = 100000, // Кількість членів ряду
    step = n / num_thread;
    double sum = 0;

    cout << "Sum of series (without threads): " <<
    sum_series(0, n) << '\n';

    cout << "Num of threads: " << num_thread <<
    '\n';
    #pragma omp parallel num_threads(num_thread)
    {
        int i = omp_get_thread_num();
        double thread_sum = sum_series(i * step, (i ==
        num_thread - 1) ? n : (i + 1) * step);
```

Скомпільована програма показує, що використання бібліотеки OpenMP пришвидшує обчислення даної суми. Тут ми використовували директиву `#pragma omp parallel`, яка розділяє цикл генерації геометрії між кількома потоками виконання. Кожен потік виконує ітерацію циклу окремо, що збільшує швидкість виконання програми (рис. 2):

```
Sum of series (without threads): 3.0767
Num of threads: 7
Sum of series (with threads): 2.0766
```

**Рис. 2. Результат роботи обчислення суми**

Алгоритм «маршируючих кубів» можна реалізувати паралельно за допомогою OpenMP шляхом поділу тривимірного скалярного зображення прямокутні секції. Вхідні параметри керують розміром кожної секції за координатами  $x$ ,  $y$  та  $z$ . Потім кожна секція опрацьовується незалежно.

Вихідні дані кожного розділу потім об'єднуються в один масив. Реалізація MPI аналогічна формою. Кожен потік OpenMP заповнює локальні вихідні змінні точками, нормаллями та трикутниками. Точки та нормалі містять вектор точок сітки. Трикутник містить вектор трійки індексів, де індекси відносяться до значень у точках та нормаллях. Кожен потік обробляє розділи, призначені OpenMP. Після обробки всіх розділів локальний висновок необхідно з'єднати з глобальним висновком. Для зручності читання був обраний простий, але ефективний спосіб зробити це. Коли кожен потік завершує заповнення локального висновку, цей висновок додається до глобальних точок, нормалів і трикутників, де тільки один потік може додавати до глобального висновку.

На діаграмі показано зміну часу побудови геометричного об'єкта зі зміною потоків. Очевидно, що програма реалізована за допомогою MPI працює краще, ніж код OpenMP. Оскільки кожна реалізація однаково працює з окремими частинами алгоритму паралельно, очікується, що результати продуктивності не дуже відрізнятимуться.

Однак після зчитування даних код MPI копіює дані розділу на кожен процесор. Це швидка операція, яка може мати додаткові переваги. Використання алгоритму «маршируючих кубів» з технологією MPI дозволяє значно пришвидшити побудову складних геометричних моделей за рахунок розбиття на вокселі. Дане дослідження проводилося на AMD EPYC 7502P 32-Core Processor 32 ядра, 64 потоків, 256 GB RAM.

Алгоритм визначає, як поверхня перетинає цей куб, потім переміщується до наступного кубу. Щоб знайти поверхневий перетин в кубі, необхідно присвоїти 1 до вершини куба, якщо значення даних в цій вершині перевищує (або дорівнює) значенням поверхні, яку будуємо [6]. Ці вершини знаходяться всередині (або на) поверхні (рис. 4).

```
// Scalar field data
// Function to classify a cube as either inside
or outside
int classify_cube(int i, int j, int k) {
    int cube_index = 0;
    if (scalar_field[i][j][k] < ISO_VALUE) cube_
    index |= 1;
    if (scalar_field[i+1][j][k] < ISO_VALUE) cube_
    index |= 2;
    if (scalar_field[i+1][j+1][k] < ISO_VALUE)
    cube_index |= 4;
    if (scalar_field[i][j+1][k] < ISO_VALUE) cube_
    index |= 8;
    if (scalar_field[i][j][k+1] < ISO_VALUE) cube_
    index |= 16;
    if (scalar_field[i+1][j][k+1] < ISO_VALUE)
    cube_index |= 32;
    if (scalar_field[i+1][j+1][k+1] < ISO_VALUE)
    cube_index |= 64;
```

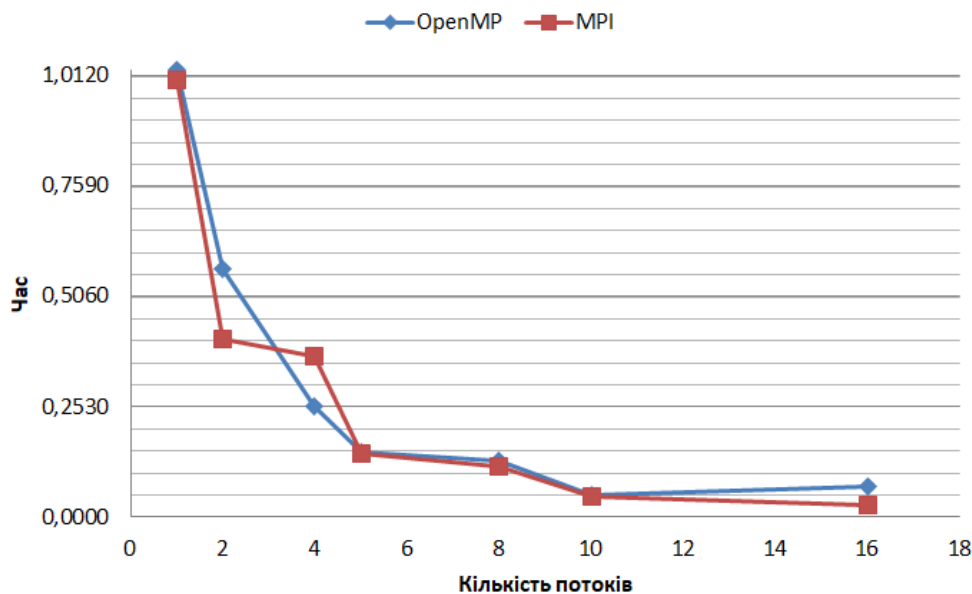


Рис. 3. Порівняння часу роботи алгоритмів

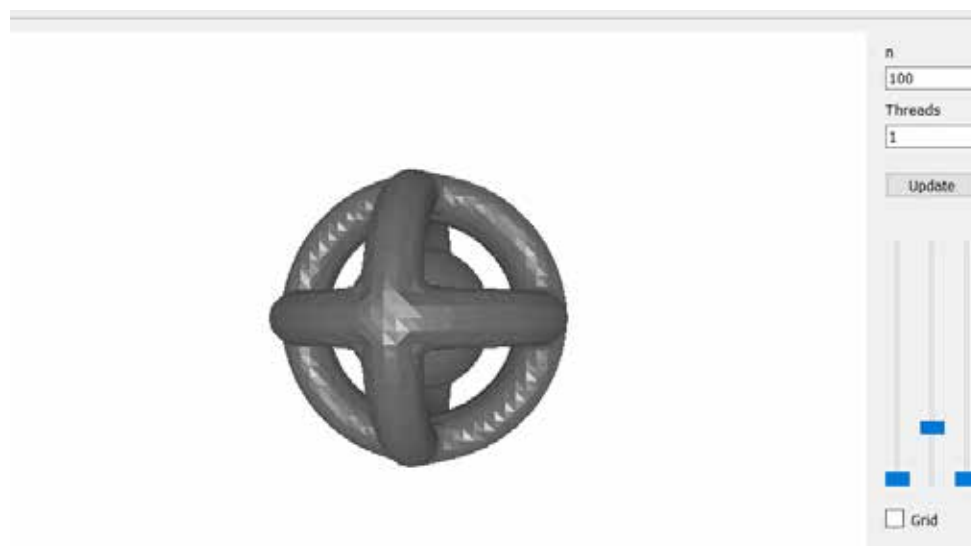


Рис. 4. Візуалізація геометричного об'єкта за допомогою «маршируючих кубів»

```

if (scalar_field[i][j+1][k+1] < ISO_VALUE)
cube_index |= 128;
return cube_index;}
// Function to construct the final polygonal mesh
void construct_mesh(){
// the Marching Cubes algorithm to construct
the mesh}
int main(int argc, char** argv){
MPI_Init(&argc, &argv);
int num_procs, rank;
MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &num_procs);
MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &rank);
// Load scalar field data, the grid into
subgrids
int start_i = rank * N / num_procs;

```

```

int end_i = (rank + 1) * N / num_procs;
int subgrid_size = end_i - start_i;
float subgrid[subgrid_size][N][N];
MPI_Scatter((void*)scalar_field[start_i],
subgrid_size*N*N, MPI_FLOAT,
(void*)subgrid, subgrid_size*N*N, MPI_FLOAT,
0, MPI_COMM_WORLD);
// Classify each cube in the subgrid as either
inside or outside } } }
// Exchange information about cube faces on
boundaries

```

При такому допущенні ми визначаємо топологію поверхні всередині куба, знаходження перетину визначається пізніше.

Застосування алгоритму «маршируючих кубів» в такому обсязі дозволяє повторно створити сітку оригіналу з рівномірним розподілом вершин.

Отже, використання бібліотеки з розподіленою пам'яттю дозволяє візуалізувати складні структури, для яких, за необхідності, можна створити свій тип, на основі вже існуючих, надає можливість паралельного вводу-виводу в різні частини файлу, створення та зупинку нових процесів, синхронізації та доступу до пам'яті на віддаленій машині. MPI використовує обмін повідомленнями для обміну даними між процесами. Вона зазвичай використовується для розподілених задач, які не можуть бути розбиті на незалежні частини, напри-

клад, коли потрібно вирішити задачу на великій кількості незалежних вузлів. А використовувати OpenMP можна, коли завдання може бути розбито на незалежні частини та оброблено паралельно на спільній пам'яті.

Використання директив MPI дозволяє розробнику на будь-якому етапі створення паралельної частини повернутись до послідовного варіанту програмного продукту. Це забезпечує гнучкість при роботі з розпаралеленням програми і надає можливість розробнику почати створювати програму послідовно і лише в потрібний момент здійснити процедуру розбиття виконання задачі на окремі потоки.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Alexandrov A, Ionescu M.F., Schauer K,E, Scheiman C. Incorporating long messages into the LogP model – one step closer towards a realistic model for parallel computation, USA: Tech. Rep, 1995, p. 206.
2. Fagg G.E., Pjesivac-Grbovic J., Bosilca G., Angskun T., Dongarra J., Jeannot E. Flexible collective communication tuning architecture applied to Open MPI, PVM/MPI, USA : Manning Publications, 2006, p. 14.
3. Guo T., Yu K., Aloqaily M., Wan S. Constructing a prior-dependent graph for data clustering and dimension reduction in the edge of AIoT, *Future Gener. Comput. Syst.* 128, Kobe, 2022, p. 381.
4. Hunold S., Bhatele A., Bosilca G., Knees P. Predicting MPI collective communication performance using machine learning, in: 2020 IEEE International Conference on Cluster Computing (CLUSTER), Kobe, 2020, p. 259.
5. Kristiani E., Yang C.-T., Huang C.-Y., Ko P.-C., Fathoni H. On construction of sensors, edge, and cloud (iSEC) framework for smart system integration and applications, *IEEE Int. Things J.* 8(1), USA, 2020 p. 309.
6. Rico-Gallego J., Lastovetsky A.L., Martín J.C.D. Model-based estimation of the communication cost of hybrid data-parallel applications on heterogeneous clusters. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.* 28(11), USA, 2017 p. 217.

#### REFERENCES

1. Alexandrov A, Ionescu M.F., Schauer K,E, Scheiman C. (1995) *Incorporating long messages into the LogP model – one step closer towards a realistic model for parallel computation*, USA: Tech. Rep.
2. Fagg G.E., Pjesivac-Grbovic J., Bosilca G., Angskun T., Dongarra J., Jeannot E. (2006) *Flexible collective communication tuning architecture applied to Open MPI, PVM/MPI*. USA: Manning Publications.
3. Guo T., Yu K., Aloqaily M., Wan S. (2022) *Constructing a prior-dependent graph for data clustering and dimension reduction in the edge of AIoT*, *Future Gener. Comput. Syst.* 128, Kobe.
4. Hunold S., Bhatele A., Bosilca G., Knees P. (2020) *Predicting MPI collective communication performance using machine learning*, in: *2020 IEEE International Conference on Cluster Computing (CLUSTER)*, Kobe.
5. Kristiani E., Yang C.-T., Huang C.-Y., Ko P.-C., Fathoni H.(2020) *On construction of sensors, edge, and cloud (iSEC) framework for smart system integration and applications*, *IEEE Int. Things J.* 8 (1), USA.
6. Rico-Gallego J., Lastovetsky A.L., Martín J.C.D. (2017) *Model-based estimation of the communication cost of hybrid data-parallel applications on heterogeneous clusters*. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.* 28 (11), USA.

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У ЖУРНАЛІ «COMPUTER SCIENCE AND APPLIED MATHEMATICS»

### Вимоги до оформлення статей:

До друку приймаються статті, що мають наукову і практичну цінність. Автор має право представити тільки одну наукову статтю в один номер, яка раніше не публікувалася. Автор несе відповідальність за оригінальність тексту статті, точність наведених фактів, цитат, статистичних даних, власних назв, географічних назв та інших відомостей, а також за те, що в матеріалах не містяться дані, що не підлягають відкритій публікації. Редакція не несе відповідальності за викладену в статті інформацію. Остаточне рішення про публікацію ухвалюється редакцією, яка також залишає за собою право на додаткове рецензування, редагування і відхилення статей.

### Технічні вимоги:

- до друку приймаються статті українською, російською та англійською мовами;
- електронний варіант статті у форматі \*.doc, \*.docx або \*.rtf, підготовлений у текстовому редакторі Microsoft Word;
- формат А4 через 1,5 інтервал;
- шрифт Times New Roman, розмір 14;
- поля: ліве – 3 см, праве – 1,5 см, верхнє, нижнє – 2 см.

### Структура статті:

- рядок 1** – УДК (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 2** – назва тематичного розділу (вирівнювання по лівому краю);
- рядок 3** – назва статті (вирівнювання по центру, напівжирний шрифт, великі літери);
- рядок 4** – прізвище та ініціали автора статті; науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри (вирівнювання по центру);
- рядок 5** – місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора (вирівнювання по центру).

Якщо автор не має orcid-коду, його можна отримати за посиланням <https://orcid.org/>

**абзац 1** – розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані мовою, як і уся стаття;

**абзац 2** – назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, **розширена** анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані **англійською мовою**. Переклад англійською мовою повинен бути достовірним (не машинним).

У випадку, якщо стаття не українською мовою, обов'язково подаються назва статті (напівжирний шрифт, усі літери великі), прізвище, ініціали автора, науковий ступінь, вчене звання, посада із зазначенням кафедри, місце роботи (навчання), адреса роботи (навчання), orcid-код, електронна адреса автора, розширена анотація (1800 знаків без пробілів) та ключові слова (мінімум 5 слів), написані українською мовою.

Основний текст статті повинен відповідати структурі IMRAD (Introduction, Methods, Results, and Discussion) + Literature Review:

Вступ – короткий вступ (1-2 сторінки), який повинен дати відповіді на запитання «чому проведено дослідження?», «які об'єкт, мета й основні гіпотези дослідження?»; Огляд літератури - розділ, що містить аналіз останніх публікацій за темою дослідження (переважна більшість публікацій повинна бути за останні 5 років, самоцитовування не більше 30% від кількості літературних джерел), з огляду літератури читачі повинні мати змогу оцінити стан проблеми у світі, аналіз літературних джерел повинен мати критичний характер;

Методи – розділ, який може включати 2-3 рівнозначних за обсягом параграфи, що висвітлюють основні методи, підходи, алгоритми дослідження;

Результати – розділ, який містить аналіз основних результатів дослідження (графіки, таблиці з чисельними даними, загалом, результати обчислювальних експериментів); Дискусія – розділ (до 1 сторінки), який також можна назвати Висновок або Висновки, що містить порівняння отриманих результатів з результатами інших досліджень (як власних так інших авторів), а також дає відповідь на запитання «які перспективи дослідження?», формулює наукову новизну результатів.

Література розміщується після статті у порядку згадування; друкується через 1,5 інтервал, 14 розміром, шрифтом Times New Roman і оформляється у відповідності вимог міждержавного стандарту ДСТУ 8302:2015.

Посилання на літературу в тексті слід давати в квадратних дужках, наприклад, [2, с. 25; 5, с. 33], в яких перша цифра вказує порядковий номер джерела в списку літератури, а друга – відповідну сторінку в цьому джерелі; одне джерело (без сторінок) відокремлюється від іншого крапкою з комою [3; 4; 6; 8; 12; 15].

Наприкінці статті розміщується транслітерована і перекладена англійською версія літератури (References), оформлена згідно з вимогами APA (American Psychological Association).

**Порядок подання матеріалів:**

Для публікації статті у фаховому науковому виданні необхідно надіслати на електронну адресу редакції editor@physmath.journalsofznu.zp.ua наступні матеріали:

**добре вчитану наукову статтю**, обов'язково оформлену відповідно до вказаних вимог;  
**інформаційну довідку про автора**;  
відскановане **підтвердження сплати коштів** (реквізити для сплати надаються автору після вдалого проходження рецензування).

*Зразок оформлення назви електронних файлів:* Іваненко\_І.І.\_стаття, Іваненко\_І.І.\_оплата.

**Адреса та контактні дані:**

Редакція журналу «Computer Science and Applied Mathematics»  
вул. Жуковського 66, корп. 1, ауд. 216, м. Запоріжжя, Україна, 69060

**Телефон:** +38 (066) 53 57 687

**Електронна пошта:** editor@physmath.journalsofznu.zp.ua

**Офіційний сайт:** www.journalsofznu.zp.ua/index.php/comp-science



## НОТАТКИ

Науковий журнал

**Computer Science and Applied Mathematics**

№ 2, 2022

Комп'ютерна верстка – Н.С. Кузнєцова  
Коректура – В.В. Ізак

Підписано до друку: 26.12.2022.  
Формат 60x84/8. Гарнітура Times New Roman.  
Папір офсет. Цифровий друк. Ум. друк. арк. 11,86.  
Замов. № 0323/135. Наклад 100 прим.

Видавництво і друкарня – Видавничий дім «Гельветика»  
65101, м. Одеса, вул. Інглєзі, 6/1  
Телефони: +38 (095) 934 48 28, +38 (097) 723 06 08  
E-mail: mailbox@helvetica.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 7623 від 22.06.2022 р.