

Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого
засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

Адреса редакції:
Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

В і с н и к

Запорізького національного університету

Телефон
для довідок:
(061) 289-12-52

Факс:
(061) 764-45-46

- **Фізико-математичні науки**

№ 1, 2018

Запоріжжя 2018

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2018. – 172 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Наказ Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Вісник індексується під назвою «Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences» у таких наукометричних базах:

- INDEX COPERNICUS, ICV 2017: **80.00** (<https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=43958>);
- CiteFactor (<http://www.citefactor.org/>);
- ResearchBib (<http://paper.researchbib.com/>);
- Journal Factor (<http://www.journalfactor.org/>).

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 3 від «27» листопада 2018 р.)

РЕДАКЦІЙНА РАДА

- | | |
|--------------------------|--|
| <i>Грицак В. З.</i> | – доктор технічних наук, професор, головний редактор |
| <i>Гребенюк С. М.</i> | – доктор технічних наук, доцент, заступник головного редактора |
| <i>Гоменюк С. І.</i> | – доктор технічних наук, професор, відповідальний редактор |
| <i>Приварников А. К.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор, відповідальний редактор |
| <i>Клименко М. І.</i> | – кандидат фізико-математичних наук, доцент, відповідальний редактор |
| <i>Чопоров С. В.</i> | – кандидат технічних наук, доцент, відповідальний редактор |

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

- | | |
|----------------------------|--|
| <i>Андріанов І. В.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина) |
| <i>Ванько В. І.</i> | – доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія) |
| <i>Гіржон В. В.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Гоман О. Г.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Гудрамович В. С.</i> | – доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України |
| <i>Козін І. В.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Колаковські З.</i> | – доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща) |
| <i>Кондрат'єва Н. О.</i> | – кандидат фізико-математичних наук, доцент |
| <i>Кузьменко В. І.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Маневич Л. І.</i> | – доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія) |
| <i>Морачковський О. К.</i> | – доктор технічних наук, професор |
| <i>Ольшанецький В. Ю.</i> | – доктор технічних наук, професор |
| <i>Перепелиця В. О.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Пожусєв В. І.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор |
| <i>Толок О. В.</i> | – доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкин», Росія) |
| <i>Швидка С. П.</i> | – кандидат фізико-математичних наук, доцент |

ЗМІСТ

ЄМЕЦЬ О. О., ЄМЕЦЬ ОЛ-РА О., ПОЛЯКОВ І. М. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ НА ПОЛПРОЗМІЩЕННЯХ ПРИ СТАЛОСТІ СУМ КООРДИНАТ У РОЗМІЩЕННЯХ	4
ЗЕЛЕНСЬКИЙ А. Г. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ВИЗНАЧАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН	13
КОЗІН І. В., САРДАК В. І., ТЕРЕШКО Я. В. АЛГОРИТМИ НА ФРАГМЕНТАРНИХ СТРУКТУРАХ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ НА ДВІ ЧАСТИНИ	29
КОНСТАНТИНОВ О. В., НОВИЦЬКИЙ В. В., СВЯТОВЕЦЬ І. Ф. КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ «РЕЗЕРВУАР – РІДИНА» ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ НА ОСНОВІ ЕТАЛОННОЇ МОДЕЛІ	35
КРИВОХАТА А. Г., КУДІН О. В., ДАВИДОВСЬКИЙ М. В., ЛІСНЯК А. О. ЗАСТОСУВАННЯ АНСАМБЛЕВОГО НАВЧАННЯ В ЗАДАЧАХ КЛАСИФІКАЦІЇ АКУСТИЧНИХ ДАНИХ	48
КУРАПОВ С. В., СГАДОВ С. А. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА НЕПЛАНАРНОГО ГРАФА	60
ЛАТИФОВ Ф. С., ГАНИЕВ Д. С. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБЛЕГЧЕННЫХ ПОДПОРНЫХ СТЕН, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ГРУНТОМ	71
ЛЕВАДА В. С., ЛЕВИЦКАЯ Т. И., ПОЖУЕВА И. С., ХИЖНЯК В. К. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ	78
ЛИТВИН О. М., ДРАГУН В. В. МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗПОДІЛУ КОРИСНИХ КОПАЛИН У ШАХТНІЙ СЕЙСМІЧНІЙ ТОМОГРАФІЇ	84
МИЛЬЦЕВ О. М. АНАЛІЗ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ НА ОСНОВІ ВОКСЕЛЬНИХ СТРУКТУР ОБРАЗІВ-МОДЕЛЕЙ У СИСТЕМІ «РАНОК»	89
ПОЖУЄВ В. І., ПОЖУЄВ А. В., ФАСОЛЯК А. В. ЗАСТОСУВАННЯ БІПОЛЯРНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ДВОХ КОАКСІАЛЬНИХ ОБОЛОНОК У ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ	97
СИДОРОВ М. В. МЕТОД РОТЕ У КОМБІНАЦІЇ З МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ	108
ТАТИЕВСКИЙ Д. Н. К СИНТЕЗУ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХЗВЕННОГО АВТОПОЕЗДА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАДНИМ ХОДОМ	127
ХАЛАНЧУК Л. В., ЧОПОРОВ С. В. ОГЛЯД МЕТОДІВ ГЕНЕРАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ	139
ХОМА Г. П., ХОМА-МОГИЛЬСЬКА С. Г., ЧОРНИЙ В. З. ПРО ОДИН СПОСІБ ПОБУДОВИ Т-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ	153
ЧЕРНЯКОВ Ю. А., ЛАБИБОВ Р. Р. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С ПЛОЩАДКОЙ ТЕКУЧЕСТИ	161
ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»	168
ПРОЦЕС РЕЦЕНЗУВАННЯ	170
PROCESS OF REVIEW	171

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ НА ПОЛІРОЗМІЩЕННЯХ ПРИ СТАЛОСТІ СУМ КООРДИНАТ У РОЗМІЩЕННЯХ

Ємець О. О., д. ф.-м. н., професор, Ємець Ол-ра О., к. ф.-м. н., доцент, Поляков І. М.

*Полтавський університет економіки і торгівлі,
вул. Коваля, 3, м. Полтава, Україна*

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

У статті розглядається одна із задач оптимізації, а саме: лінійна умовна повністю комбінаторна задача евклідової оптимізації на полірозміщеннях, у якій сума координат у розміщеннях константна. Ця задача полягає в мінімізації лінійної цільової функції за лінійних обмежень, які виражають умову, що ті координати допустимої точки, які входять в одне розміщення полірозміщення, в сумі дорівнюють сталій, яку можна вважати одиницею. Комбінаторним обмеженням цієї задачі є те, що допустима точка є полірозміщенням.

Для розв'язування задачі запропоновано та обґрунтовано метод гілок та меж. Для методу висвітлені правила галуження допустимих підмножин, оцінювання підмножин і відсікання. У роботі запропоновано правило оцінювання допустимих множин та доведено теорему, яка встановлює оцінку допустимої підмножини. Принцип оцінювання, який реалізовано в теоремі, полягає в тому, що в якості оцінки беруть суму двох доданків, один з яких є сумою тих елементів цільової функції, які відповідають визначенню у допустимій множині, що оцінюється, а другий – є мінімумом на комбінаторній множині полірозміщень, яка утворюється спеціальним чином, лінійної цільової функції, що є тією частиною вихідної цільової функції, в яку входять невизначені в допустимій множині, що оцінюється, змінні.

Доведені деякі властивості оцінок, а саме: 1) для введеного способу оцінювання та галуження допустимих підмножин оцінка наступної підмножини на гілці дерева галуження від кореня до листа буде не меншого від оцінки попередньої підмножини; 2) на одному рівні глибини від кореня дерева галуження оцінки допустимих підмножин, що є підмножинами однієї і тієї ж допустимої підмножини, при русі від верхніх гілок до нижніх гілок підмножини розташовані нижче підмножини мають більші оцінки.

У статті наведено ілюстративний приклад, який поліпшує сприйняття матеріалу.

Ключові слова: комбінаторні ігрові задачі, метод гілок та меж, полірозміщення, розміщення.

SOLVING OF THE LINEAR OPTIMIZATION PROBLEM ON POLYARRANGEMENTS WITH THE CONSTANT SUM OF COORDINATES IN THE ARRANGEMENTS

Iemets O. O., Yemets` O. O., Polyakov I. M.

*Poltava University of Economics and Trade,
Coval str., 3, Poltava, Ukraine*

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

One of the optimization problems is considered in the article, namely, the linear conditionally complete combinatorial problem of Euclidean optimization on polyarrangements, in which the sum of coordinates in arrangements is constant. This problem is to minimize the linear objective function for linear constraints, which express the condition that those coordinates of the admissible point, which are included in a single arrangement of polyarrangements, in the sum equal to a constant, which can be considered as one. The combinatorial constraint of this problem is that the admissible point is a polyarrangement.

To solve the problem, the branch and bound method is proposed and substantiated. The rules of the branching of admissible subsets, the estimation of subsets and the cutting are proposed for the method. A rule for estimating admissible sets and a theorem that establishes the estimate of an admissible subset are proposed in the work. The principle of estimation, which is realized in the theorem, consists of the fact that the sum of two items is taken as an estimate, one of items is the sum of those elements of the objective function, that correspond to those defined in the admissible estimable set, and the second is the minimum on the combinatorial set of polyarrangement, which is formed in a special way, of linear

objective function, which is the part of the original objective function, which includes variables that are not defined in an admissible set that is evaluated.

Some properties of estimations are proved, namely: 1) for the introduced method of estimation and branching of admissible subsets, the estimation of the next subset on the branch of the tree branch from the root to the leaf will be not less than the estimate of the previous subset; 2) at one level of depth from the root of the branch tree, the estimation of admissible subsets, which are subsets of one and the same admissible subset, when moving from the upper branches to the lower branches of the subset, located below subsets have higher estimates.

The article presents an illustrative example that improves perception of the material.

Key words: combinatorial gaming problems, the method of branches and boundaries, polyarrangements, arrangements.

ВСТУП

Задачі комбінаторної оптимізації [1] є розділом теорії оптимізації, що швидко і бурхливо розвивається і в якому досліджуються моделі, що використовують як допустимі точки – комбінаторні конфігурації, такі як перестановки, розміщення, сполучення та більш складні. Полірозміщення введені в роботах, які узагальнені в [2, 3] (див. також [4]).

Вивчення комбінаторних ігрових задач на розміщеннях (див., наприклад, [5, 6]), в яких розміщення є мішаною стратегією, а отже, сума координат в ньому є одиницею, призвело до необхідності розв'язувати лінійні комбінаторні задачі на розміщеннях, що мають таку властивість [7]. Можна ставити і більш складні ігрові комбінаторні задачі, в яких допустимими є точки-полірозміщення, що мають сталість сум координат у розміщеннях. Методів розв'язування таких задач немає, отже, актуальним та необхідним є предмет цієї публікації.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо множину полірозміщень [2, 3]. Нехай $G = \{g_1, \dots, g_\eta\}$ – мультимножина пронумерованих дійсних чисел, а $S(G)$ – її основа, $[G] = \{\eta_1, \dots, \eta_\nu\}$ – первинна специфікація, де $\eta_1 + \dots + \eta_\nu = \eta$; $1 \leq \eta_i \leq k \quad \forall i \in J_\nu = \{1, 2, \dots, \nu\}$. Нехай N_1, \dots, N_s – упорядковане розбиття множини $J_\eta = \{1, 2, \dots, \eta\}$ на s підмножин, тобто: $N_i \cap N_j = \emptyset$,

$\forall i \neq j; N_i \neq \emptyset, i, j \in J_s; \bigcup_{i=1}^s N_i = J_\eta$. Розглянемо упорядковане розбиття числа k на s доданків k_1, \dots, k_s за умов $1 \leq k_i \leq n_i = |N_i| \quad \forall i \in J_s$. Очевидно, що $k_1 + \dots + k_s = k, n_1 + \dots + n_s = \eta$.

Позначимо $J_n \cup \{0\} = J_n^0$. Утворимо множину k_i -розміщень з множини N_i , яку позначимо

$E_{n_i}^{k_i}(N_i)$. Нехай її елемент – це π^i , тобто $\pi^i = (\pi_{i1}, \dots, \pi_{ik_i}) \in E_{n_i}^{k_i}(N_i), i \in J_s$. Об'єднаємо $\forall i$

упорядковані k_i -вибірки π^i в упорядковану k -вибірку з множини J_η

$\pi = (\pi(1), \dots, \pi(k)) = (\pi_{11}, \dots, \pi_{1k_1}, \dots, \pi_{s1}, \dots, \pi_{sk_s}) = (\pi^1, \dots, \pi^s)$. Нехай H – це множина всіх

таких вибірок, тобто $H = \left\{ \pi = (\pi^1, \dots, \pi^s) \mid \forall \pi^i \in E_{n_i}^{k_i}(N_i) \forall i \in J_s \right\}$. Утворимо k -вибірку g з

мультимножини G , вибираючи до неї ті елементи G і в тому порядку, який задає k -вибірку

$\pi \in H$, а саме: $g = (g_{\pi(1)}, \dots, g_{\pi(k)})$. Множину всіх таких вибірок називають [2, 3] загальною

множиною полірозміщень і позначають $E_{\eta\nu}^{ks}(G, H)$, тобто $E_{\eta\nu}^{ks}(G, H) =$

$= \left\{ (g_{\pi(1)}, \dots, g_{\pi(k)}) \mid \forall \pi \in H \right\}$.

Розглянемо таку лінійну умовну повністю комбінаторну задачу евклідової оптимізації на полірозміщеннях [2, 3]:

$$\sum_{j=1}^k c_j y_j \rightarrow \min \quad (1)$$

за умов

$$y = (y_1, \dots, y_k) = (Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_s) \in E_{\eta^v}^{ks}(G^y); \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} y_{m_i+j} = C_i \quad \forall i \in J_s, \quad (3)$$

де $Y_i = (y_{m_i+1}, y_{m_i+2}, \dots, y_{m_i+k_i})$; $c_j \in R^1 \quad \forall j \in J_k$; G^y – мультимножина $G^y = \{g_1^y, \dots, g_n^y\}$, $g_i^y \in R^1 \quad \forall j \in J_n$; $C_i = \text{const} \in R^1$, $C_i \neq 0 \quad \forall i \in J_s$, а

$$m_0 = 0; \quad k_0 = 0; \quad m_i = m_{i-1} + k_{i-1} \quad \forall i \in J_s. \quad (4)$$

Не порушуючи загальності міркувань, можна розглядати задачу вигляду (1)-(3), яка одержана із задачі (1)-(3) такою трансформацією. Нехай мультимножина G^y представлена як сума мультимножин (див., наприклад, [2-4]) $G^y = \sum_{i=1}^s G_i^y$, де $G_i^y = \{g_{j_1^i}^{y,i}, \dots, g_{j_{n_i}^i}^{y,i}\}$, а $\{j_1^i, \dots, j_{n_i}^i\} = N_i \quad \forall i \in J_s$. Розділимо всі змінні $y_{m_i+j} \quad \forall j \in J_{k_i}$ та всі елементи $g_{j_t}^y \quad \forall t \in J_{n_i}$ мультимножин G_i^y на сталу C_i , $\forall i \in J_s$. Задача (1)-(3) набуде вигляду:

$$\sum_{j=1}^k c_j x_j \rightarrow \min \quad (5)$$

за умов

$$x = (x_1, \dots, x_k) = (X_1, \dots, X_i, \dots, X_s) \in E_{\eta^v}^{ks}(G); \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{m_i+j} = 1 \quad \forall i \in J_s, \quad (7)$$

де виконуються співвідношення (4), а $X_i = (x_{m_i+1}, \dots, x_{m_i+k_i})$, $G = \sum_{i=1}^s G_i$, $G_i = \{g_{j_1^i}^i, \dots, g_{j_{n_i}^i}^i\}$, k_i -розміщення $X_i \in E_{n_i}^{k_i}(G_i)$, $|\{j_1^i, \dots, j_{n_i}^i\}| = n_i$, та зв'язок між еквівалентними задачами (1)-(3) та (5)-(7) встановлюють співвідношення $x_{m_i+j} \cdot C_i = y_{m_i+j} \quad \forall j \in J_{k_i}$, $g_{j_t}^i \cdot C_i = g_{j_t}^{y,i} \quad \forall t \in J_{n_i} \quad \forall i \in J_s$.

Далі розглянемо задачу (5)-(7). Її розв'язування пропонується проводити, використовуючи методологію методу гілок та меж (МГМ).

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОСТАВЛЕНОЇ ЗАДАЧІ

Суттєвим для реалізації алгоритму розв'язування задачі в рамках методологію методу гілок та меж є такі три аспекти. Це, по-перше, оцінювання підмножин допустимих розв'язків. По-друге, це визначення способу галуження множини допустимих розв'язків на підмножини, тобто конкретну реалізацію співвідношення між галуженням «углиб» та «вшир». По-третє, встановлення правил відсікання: констатування, що відсікання відбувається за «класичним» принципом (відсікаються підмножини з не меншою оцінкою, ніж «поточний рекорд» значення цільової функції). Або встановлення й інших правил відсікання підмножин (як таких підмножин, що не мають елементів, які дають кращі значення цільової функції, ніж вже наявні, або таких підмножин, які виявляються порожніми).

Розглянемо **спосіб галуження** множини допустимих розв'язків на підмножини.

Визначимо номери $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ коефіцієнтів цільової функції з нерівностей:
 $c_{\alpha_1} \geq c_{\alpha_2} \geq \dots \geq c_{\alpha_l} \geq 0 > c_{\alpha_{l+1}} \geq \dots \geq c_{\alpha_k}$.

З цих нерівностей відповідно до представлення (6) для точки x можемо записати (виокремити) такі

$$c_{\alpha_1}^i \geq c_{\alpha_2}^i \geq \dots \geq c_{\alpha_l}^i \geq 0 > c_{\alpha_{l+1}}^i \geq \dots \geq c_{\alpha_k}^i \quad \forall i \in J_s, \quad (8)$$

що відповідають упорядкуванню за незростанням коефіцієнтів цільової функції при координатах точки $X_i, l_i \in J_{k_i}^0 = J_{k_i} \cup \{0\}$.

Галуження здійснюватимемо спершу «углиб», потім «ушир», збільшуючи $i \in J_s$, а при фіксованому i в порядку $x_{m_i+j_1}, x_{m_i+j_2}, \dots, x_{m_i+j_l}$, де $j_1 = \alpha_1^i, j_2 = \alpha_2^i, \dots, j_l = \alpha_l^i$ відповідно до (8). При цьому вважаємо, що елементи, які позначимо $g_1^i, \dots, g_{n_i}^i$ мультимножини G_i , пронумеровані згідно з порядком

$$g_1^i \leq g_2^i \leq \dots \leq g_{n_i}^i. \quad (9)$$

При галуженні «вглиб» утворюватимемо ланцюг підмножин

$$D_{t_1} \supset D_{t_2} \supset \dots \supset D_{t_1 t_2 \dots t_l}, \quad (10)$$

де $(t_1, t_2, \dots, t_\tau) \in E_{n_i}^\tau(J_{n_i})$ – це множина τ -розміщень з множини $J_{n_i}, \tau \in J_{l_i}$. Це будемо робити, надаючи:

змінній $x_{m_i+\alpha_1^i}$ для підмножини D_{t_1} послідовно значення $g_1^i, g_2^i, \dots, g_{n_i}^i$ (t_1 – номер в (9) елемента $g_{t_1}^i = x_{m_i+\alpha_1^i}$);

змінній $x_{m_i+\alpha_2^i}$ для підмножини $D_{t_1 t_2}$ послідовно в порядку (9) значення з $G_i \setminus \{g_{t_1}^i\}$ (t_2 – номер в (9) елемента $g_{t_2}^i = x_{m_i+\alpha_2^i}$);

...;

змінній $x_{m_i+\alpha_j^i}$ для підмножини $D_{t_1 \dots t_j}$ послідовно в порядку (9) значення з $G_i \setminus \{g_{t_1}^i, \dots, g_{t_{j-1}}^i\}$
 $\forall j \in J_{n_i}$ (t_j – номер в (9) елемента $g_{t_j}^i = x_{m_i+\alpha_j^i}$);

...;

змінній $x_{m_i+\alpha_{l_i}^i}$ для підмножини $D_{t_1 \dots t_{l_i}}$ послідовно в порядку (9) значення з $G_i \setminus \{g_{t_1}^i, \dots, g_{t_{l_i-1}}^i\}$
 (t_{l_i} – номер в (9) елемента $g_{t_{l_i}}^i = x_{m_i+\alpha_{l_i}^i}$).

Після утворення підмножини $D_{t_1 t_2 \dots t_{l_i}}$ при подальшому галуженні «углиб» утворюється ланцюг

$$D_{t_1 t_2 \dots t_{l_i}} \supset D_{t_1 t_2 \dots t_{l_i} t_{l_i+1}} \supset D_{t_1 t_2 \dots t_{l_i} t_{l_i+1} t_{l_i+2}} \supset \dots \supset D_{t_1 \dots t_{k_i}}, \quad (11)$$

де $(\tau - l_i)$ -розміщення $(t_{l_i+1}, \dots, t_\tau) \in E_{n_i}^{\tau-l_i}(J_{n_i})$, $\tau \in J_{k_i}^{l_i+1} = \{l_i+1, l_i+2, \dots, k_i\}$. При цьому для утворення підмножини $D_{t_1 t_2 \dots t_{l_i+1}}$ змінній $x_{m_i + \alpha_{k_i}^i}$ надаватимемо послідовно значень

$$g_{n_i}^i, g_{n_i-1}^i, \dots, g_2^i, g_1^i, \quad (12)$$

з мультимножини $G_i \setminus \{g_{t_1}^i, \dots, g_{t_{l_i}}^i\}$, де номер t_{l_i+1} в (11) – індекс у номері підмножини – означає номер елемента $g_{t_{l_i+1}}^i = x_{m_i + \alpha_{k_i}^i}$.

Для утворення підмножини $D_{t_1 \dots t_{l_i+2}}$ змінній $x_{m_i + \alpha_{k_i-1}^i}$ послідовно в порядку (12) надаватимемо значень з $G_i \setminus \{g_{t_1}^i, \dots, g_{t_{l_i+1}}^i\}$, де номер у послідовності (11) t_{l_i+2} означає номер елемента $g_{t_{l_i+2}}^i = x_{m_i + \alpha_{k_i-1}^i}$;

...;

а для утворення підмножини $D_{t_1 \dots t_{l_i+j}}$ змінній $x_{m_i + \alpha_{k_i-j+1}^i}$ послідовно в порядку (12) надаватимемо значень з $G_i \setminus \{g_{t_1}^i, \dots, g_{t_{l_i+j-1}}^i\}$, де номер у послідовності (11) t_{l_i+j} означає номер елемента $g_{t_{l_i+j}}^i = x_{m_i + \alpha_{k_i-j+1}^i}$; $\forall j \in J_{k_i-l_i}$.

Будемо надавати змінній $x_{m_i + \alpha_{k_i-j}^i}$ для утворення множини $D_{t_1 \dots t_{l_i+j+1}}$ послідовно в порядку (12) значень з $G_i \setminus \{g_{t_1}^i, \dots, g_{t_{l_i+j}}^i\}$, де номер в послідовності (11) t_{l_i+j+1} означає номер елемента $g_{t_{l_i+j+1}}^i = x_{m_i + \alpha_{k_i-j}^i}$ $\forall j \in J_{k_i-l_i-1}^0$;

...;

також надаючи змінній $x_{m_i + \alpha_{k_i-(k_i-l_i-1)}^i} = x_{m_i + \alpha_{l_i+1}^i}$ для утворення підмножини $D_{t_1 \dots t_{k_i}}$ послідовно в порядку (12) значень з $G_i \setminus \{g_{t_1}^i, \dots, g_{t_{k_i-1}}^i\}$, де номер в послідовності (11) t_{k_i} означає номер елемента $g_{t_{k_i}}^i = x_{m_i + \alpha_{l_i+1}^i}$.

При збільшенні $i \in J_s$ утворюються множини з k_i першими індексами, що відповідають $i=1$, при k_2 – з наступними індексами, що відповідають $i=2$, і т.д., аж до множини $D_{i_1 \dots i_k}$ при $i=s$. При виборі наступного значення елемента з G на одному рівні галуження відбувається галуження «вшир».

Розглянемо правила побудови оцінок допустимих підмножин.

При утворенні підмножини $D_{t_1 t_2 \dots t_{\tau_i}}$ маємо два випадки: 1) $\tau_i \leq l_i$; 2) $\tau_i = l_i + j$ ($\tau_i > l_i$). В обох випадках використані елементи мультимножини G_i утворюють мультимножину $G_B^i = \{g_{t_1}^i, \dots, g_{t_{\tau_i}}^i\}$, а не використані – різницю мультимножин $\tilde{G}_i = G_i \setminus G_B^i = \{g_1^i, \dots, g_{n_i-\tau_i}^i\}$, $\tilde{g}_1^i \leq \dots \leq \tilde{g}_{n_i-\tau_i}^i$. Позначимо мультимножину коефіцієнтів цільової функції при визначених у множині $D_{t_1 t_2 \dots t_{\tau_i}}$ змінних $C_B^i = \{c_{t_1}^i, \dots, c_{t_{\tau_i}}^i\}$ (причому c_l^i – коефіцієнт при змінній, що дорівнює g_l^i , $l = t_1, \dots, t_{\tau_i}$). Позначимо C_i мультимножину всіх коефіцієнтів у цільовій функції при

невідомих з X_i , а різницю C_i та C_B^i так: $\tilde{C}_i = C_i \setminus C_B^i = \{\tilde{c}_1^i, \dots, \tilde{c}_{k_i - \tau_i}^i\}$, де $\tilde{c}_1^i \geq \dots \geq \tilde{c}_{\lambda_i}^i \geq 0 > \tilde{c}_{\lambda_i + 1}^i \geq \dots \geq \tilde{c}_{k_i - \tau_i}^i$.

Розглянемо величину

$$v_i = v_{t_1 t_2 \dots t_{\tau_i}}^i = \sum_{j=1}^{\tau_i} c_{t_j}^i g_{t_j}^i. \tag{13}$$

Введемо в розгляд величину

$$c_i^* = c_{t_1 t_2 \dots t_{\tau_i}}^{*i} = \min_{(\tilde{x}_{\tau_i+1}, \dots, \tilde{x}_{k_i}) \in E_{n_i}^{k_i - \tau_i}(\tilde{G}_i)} \sum_{j=1}^{k_i - \tau_i} \tilde{c}_j^i \tilde{x}_{t_{\tau_i+j}}^i. \tag{14}$$

Цей мінімум знаходиться за теоремою 3.1 з [2, стор. 79].

Застосувавши її, маємо:

$$c_i^* = \sum_{j=1}^{\lambda_i} \tilde{c}_j^i g_j^i + \sum_{j=\lambda_i+1}^{k_i - \tau_i} \tilde{c}_j^i g_{n_i - k_i + j}^i. \tag{15}$$

Теорема. Оцінкою ξ множини $D_{t_1 t_2 \dots t_{\tau_i}}$ є величина

$$\xi = v_i + c_i^* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s c_j^{*0}, \tag{16}$$

де

$$c_j^{*0} = \min_{X_i \in E_{n_i}^{k_i}(G_i)} \sum_{t=1}^{k_i} c_t^i x_{n_i+t}. \tag{17}$$

Зауваження. Величина c_j^{*0} – це частковий випадок c_j^* , коли $\tau_j = 0$, тобто: $c_j^{*0} = c_j^* = c_{t_0}^{*j}$, при цьому $\tilde{G}_j = G_j$; $\tilde{C}_j = C_j$. З урахуванням цього величину ξ з позначенням

$$c^* = c_i^* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s c_j^{*0} = \sum_{j=1}^s c_j^* \tag{18}$$

можна записати так:

$$\xi = v_i + c^*. \tag{19}$$

Доведення теореми. Як відомо, величина ξ є оцінкою в методі гілок та меж допустимої підмножини Q_i в задачі мінімізації функції $F(x)$, якщо

$$\xi \leq F(x) \quad \forall x \in Q_i. \tag{20}$$

У силу властивості мінімуму та представлень (13)-(19) для величини (19) виконується умова (20) при $F(x) = \sum_{j=1}^k c_j x_j$ з (5) та $Q_i = D_{t_1 t_2 \dots t_{\tau_i}}$.

Зауваження. При галуженні «вшир» із задіянням декількох підмножин G_i одночасно оцінкою допустимої підмножини, як не важко бачити, буде величина

$$\xi = v + c^*,$$

де

$$v = \sum_{i=1}^s v_i.$$

Відсікання відбуваються за класичним правилом: коли для підмножини Q оцінки $\xi \geq F_0 = F(x_0)$, де F_0 – поточний рекорд мінімального значення цільової функції $F(x)$, обчислений на одноелементній множині $Q = \{x_0\}$, то відповідна підмножина Q відсікається. При цьому, коли утворюється нова одноелементна множина $\{x_i\}$, $i=1, 2, \dots$, то за умови $F_i = F(x_i) < F_0$ рекорд F_0 оновлюється: далі за нього мають F_i .

ІЛЮСТРАТИВНИЙ ПРИКЛАД

Нехай $G_1 = \{0; 0, 2; 0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8\}$; $G_2 = \{0; 0, 1; 0, 5; 0, 5; 0, 9\}$; $s = 2$; $k = 5$; $k_1 = 3$; $k_2 = 2$.
Нехай цільова функція така:

$$x_1 + 5x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \min.$$

Маємо обмеження вигляду (6)

$$x = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in E_{11,8}^{5,2}(G),$$

де $X_1 = (x_1; x_2; x_3)$; $X_2 = (x_4; x_5)$; $G = \{0^2; 0, 1; 0, 2^2; 0, 4; 0, 5^2; 0, 6; 0, 8; 0, 9\}$, $v = 8$, $\eta = 11$; та обмеження вигляду (7)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1;$$

$$x_4 + x_5 = 1.$$

Отже, $n_1 = 6$; $n_2 = 5$ і можна обмеження вигляду (6) представити так: $X_1 \in E_6^3(G_1)$, $X_2 \in E_5^2(G_2)$.

Визначаємо за (8) α_1^1 , α_2^1 , α_3^1 . У цільовій функції при зміні порядку додавання, маємо для X_1 : $5x_3 + x_1 + 0x_2$. Отже, $c_3^1 = 5$; $\alpha_1^1 = 3$; $c_1^1 = 1$; $\alpha_2^1 = 1$; $c_2^1 = 0$; $\alpha_3^1 = 2$ (тобто (8) має вигляд $c_3^1 = 5 \geq c_1^1 = 1 \geq c_2^1 = 0$).

Для X_2 у цільовій функції маємо: $x_5 - x_4$, тобто $c_1^2 = 1$; $\alpha_1^2 = 5$; $c_2^2 = -1$; $\alpha_2^2 = 4$.

Галуження здійснюється «вглиб». При цьому визначаються одна за одною змінні в порядку x_3 ; x_1 ; x_2 ; далі x_5 ; x_4 . Причому для X_1 порядок використання елементів G_1 такий: $g_1^1 \leq g_2^1 \leq \dots \leq g_6^1$, а для X_2 , оскільки $c_1^2 > 0$, а $c_2^2 < 0$, порядок використання елементів з G_2 для x_5 (як і в X_1) по не спаданню, а для x_4 – по не зростанню. Тобто, x_3 , x_1 , x_2 послідовно надаються значення: $0; 0, 2; 0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8$; для x_5 – значення $0; 0, 1; 0, 5; 0, 9$; а для x_4 – значення $0, 9; 0, 5; 0, 1; 0$.

Твердження 1. Для задачі (5)-(7) у методі гілок та меж, за розглянутого способу галуження та оцінювання допустимих підмножин за формулою (16), оцінка наступної підмножини $D_{t_1 \dots t_{\alpha+1}}$ на гілці дерева галуження від кореня (множина $E_{\eta v}^{ks}(G)$) до листа (одноелементна множина) буде не меншою від оцінки попередньої підмножини $D_{t_1 \dots t_{\alpha}}$, $\alpha \in J_{k-1}$.

Доведення. Оскільки оцінка множини $D_{t_1 \dots t_{\alpha}}$ здійснюється за (16), де c_j^{*0} – це мінімум (17), а оцінка множини $D_{t_1 \dots t_{\alpha+1}}$ одержується як значення тієї ж функції при набутті нею нового

значення заданням ще однієї змінної та знаходженням її мінімуму по комбінаторній множині можливих значень невизначених ще змінних, то з означення мінімуму і випливає справедливість твердження.

Ілюстрацією реалізації цього твердження є оцінка ξ для D_{1263} ; $\xi = -0,2$ та для D_{12634} $\xi = F_1 = 0,2$ (див. рис. 1).

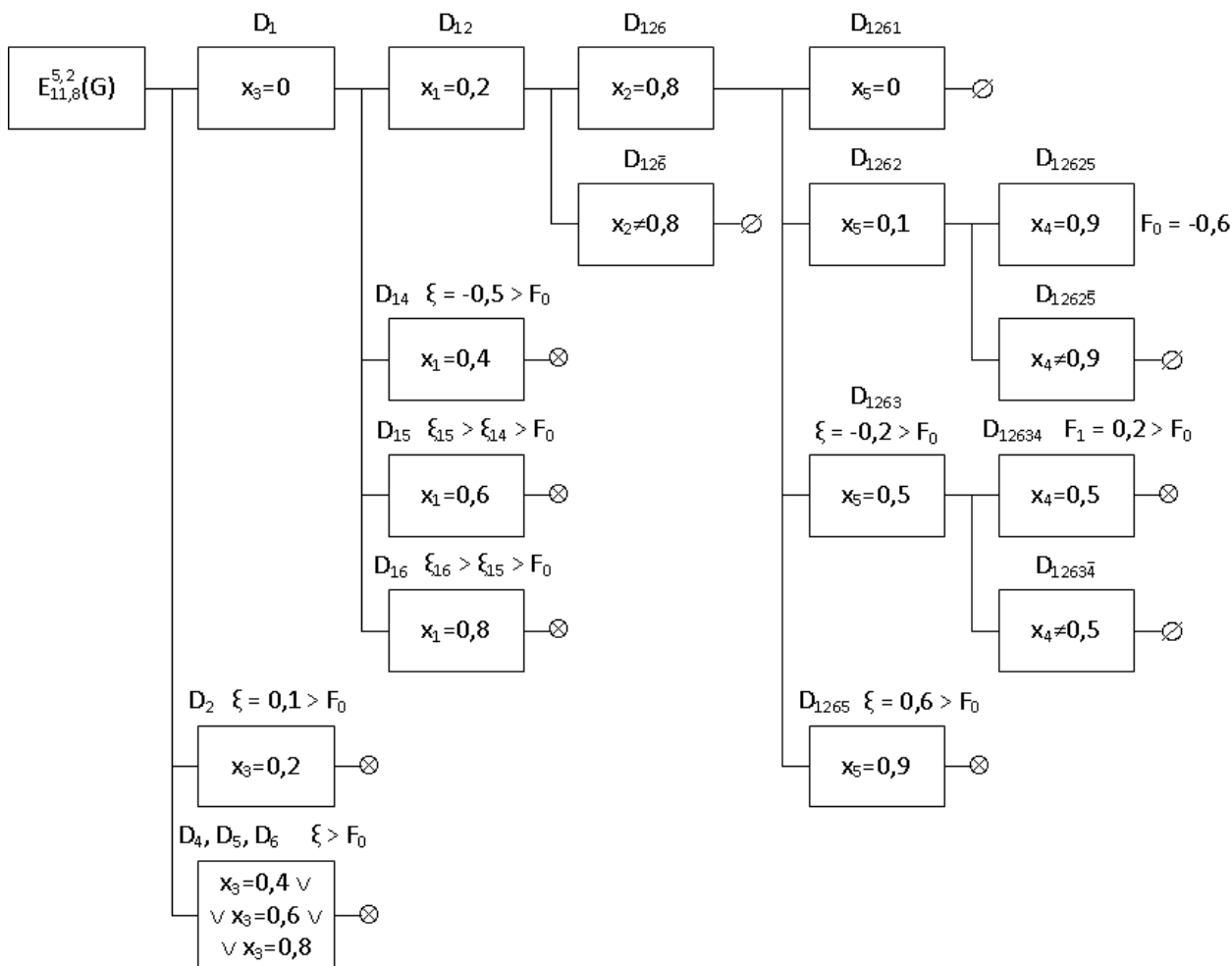


Рис. 1. Ілюстрація галуження та відсікання в прикладі (знак ∅ означає порожню множину, а ⊗ – відсікання)

Продовжимо розгляд прикладу.

Зауважимо, що рахувати оцінку раніше ніж знайдено F_0 немає сенсу.

Підмножина D_{12625} – одноелементна: $x_3 = 0; x_1 = 0,2; x_2 = 0,8; x_5 = 0,1; x_4 = 0,9$. Рахуємо $F_0 = 5 \cdot 0 + 0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0 + 0,1 \cdot 1 + 0,9 \cdot (-1) = 0,2 + 0,1 - 0,9 = -0,6$.

Тому множина D_{1263} може бути відсічена як безперспективна.

$$D_{1264} = D_{1263} (g_3^2 = g_4^2 = 0,5).$$

Підмножина D_{12634} також одноелементна, x_1, x_2, x_3 – ті ж, а $x_4 = x_5 = 0,5$. Отже, $F_1 = 5 \cdot 0 + 0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot (-1) = 0,2$. $F_1 > F_0$, отже, F_0 не поліпшується.

$$\xi = \xi_{1263} = 0,2 + 0,5 \cdot 1 - 0,9 = -0,2 > F_0 = -0,6.$$

$$\xi = \xi_{1265} = 0,2 + 0,9 + 0,5 \cdot (-1) = 0,6 > F_0, \text{ отже, тут теж відсікання.}$$

$$v_{14} = 0,5 + 0,4 \cdot 1 = 0,4; \quad \tilde{G}_1^1 = \{0,2; 0,2; 0,6; 0,8\}; \quad \tilde{G}^2 = G^2 = \{0; 0,1; 0,5; 0,5; 0,9\}; \quad \tilde{C}^1 = \{0\}; \\ \tilde{C}^2 = \{1; -1\}.$$

$$c_{14}^* = 0 + (1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0,9) = -0,9.$$

$$\xi_{14} = v_{14} + c_{14}^* = 0,4 - 0,9 = -0,5 > F_0.$$

Зауважимо справедливість такого твердження.

Твердження 2. На одному рівні глибини від кореня дерева галуження оцінки допустимих підмножин $D_{t_1 \dots t_{\alpha-1} t_\alpha}, D_{t_1 \dots t_{\alpha-1} (t_{\alpha+1})}, \dots, D_{t_1 \dots t_{\alpha+1} (t_{\alpha+j})}, \dots, D_{t_1 \dots t_{\alpha-1} n_i} \quad \forall i \in J_s, \quad \forall \alpha \in J_{n_i}, \quad \forall j \in J_{n_i - t_\alpha}^0$ що є підмножинами однієї і тієї ж допустимої підмножини $D_{t_1 \dots t_{\alpha-1}}$ (у випадку $\alpha = 1$ множини $E_{\eta\nu}^{ks}$) при русі від верхніх гілок до нижніх гілок, тобто від $D_{t_1 \dots t_\alpha (t_{\alpha+j_1})}$ до $D_{t_1 \dots t_\alpha (t_{\alpha+j_2})}$, де $j_1 < j_2$, $t_\alpha + j_1 \in J_{n_i-1}^0, t_\alpha + j_2 \in J_{n_i}$.

Доведення. Справедливість впливає з безпосереднього способу обчислення оцінок за формулами (16), (17) та описаним способом галуження. Оцінки множин $D_{t_1 \dots t_\alpha (t_{\alpha+j_1})}$ та $D_{t_1 \dots t_\alpha (t_{\alpha+j_2})}$, як видно, відрізняються одним доданком, а в силу способу галуження і оцінювання для множин $D_{t_1 \dots t_\alpha (t_{\alpha+j_2})}$ він більше ніж для $D_{t_1 \dots t_\alpha (t_{\alpha+j_1})}$, що і доводить твердження.

Ілюстрацією можуть виступати (рис. 1) підмножини D_{1236} з оцінкою $\xi = -0,2$ та D_{1265} з оцінкою $\xi = 0,6$. Користуючись цією властивістю, оскільки для першої множини оцінки $\xi > F_0$, то другу множину вже можна не розглядати.

Продовжимо розгляд прикладу.

$$v_{15} = 0,5 + 0,6 \cdot 1 = 0,6; \quad \tilde{G}_1^1 = \{0,2; 0,2; 0,4; 0,8\}; \quad \tilde{G}^2 = G^2; \quad \tilde{C}^1 = \{0\}; \quad \tilde{C}^2 = \{1; -1\}. \\ c_{15}^* = 0 + (1 \cdot 0,1 + (-1) \cdot 0,9) = -0,9. \quad \xi_{15} = 0,6 - 0,9 = -0,3 > \xi_{16}. \quad \xi_{15} = -0,5 > F_0.$$

Розглянемо D_2 , підрахуємо ξ_2 . Визначимо $v_2 = 5 \cdot 0,2 = 1$. $\tilde{G}_1^1 = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}; \quad \tilde{C}^1 = \{1; 0\}; \quad \tilde{G}^2 = \tilde{G}; \quad \tilde{C}^2 = C^2 = \{1; -1\}; \quad c_2^* = 0 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0 + (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0,9) = -0,9$. Отже, $\xi_2 = v_2 + c_2^* = 1 - 0,9 = 0,1 > F_0$. Отже, D_2 відсікається. Для $D_4, D_5, D_6, \xi_6 > \xi_5 > \xi_4 > \xi_2 > F_0$.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянута задача оптимізації лінійної функції на полірозміщеннях зі сталою сумою координат у розміщеннях, що виникає в ігрових задачах комбінаторного типу.

Запропоновано і обґрунтовано застосування методу гілок та меж до цієї задачі, а саме: способів галуження, оцінювання та відсікання. Наведено ілюстративний приклад та доведено деякі властивості оцінок.

Як подальший напрямок досліджень вбачається проведення числових експериментів для цього підходу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 288 с.
2. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487>.

3. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376>.
4. Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Дискретна математика: навч. посіб. Полтава: РВВ ПУСКУ, 2009. 287 с. URL: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552>.
5. Emets O. A., Ustian N. Yu. Studies of Problems of Combinatorial Optimization of Game Type on Arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2007. Vol. 39, № 1. P. 24–35.
6. Iemets O. A., Olkhovskaja E. V. Iterative Method for Solving Combinatorial Optimization Problems of the Game-type on Arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2011. Vol. 43, № 5. P. 52–63.
7. Iemets O. O., Yemets O. O. Solving a linear problem of Euclidean combinatorial optimization on arrangements with the constant sum of the elements. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. V. 48, № 4. P. 547–557.

REFERENCES

1. Sergienko, I. V. & Kaspshitskaya, M. F. (1981). Models for computer solution of combinatorial optimization. Kiev: Naukova dumka.
2. Stoyan, Yu. G & Iemets, O. O. (1993). Theory and methods of euclidian combinatorial optimization. Kyiv: Insytut systemnyh doslidzhen' osvity. Retrieved from: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487>.
3. Stoyan, Yu. G., Iemets, O. O. & Yemets, E. M. (2005). Optimization on polypermutations: theory and methods, RVTs PUSKU, Poltava. Retrieved from: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376>.
4. Iemets, O. O. & Parfyonova, T. O. (2009). Discrete mathematics, RVV PUSKU, Poltava. Retrieved from: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552>.
5. Emets, O. A. & Ustian, N. Yu. (2007) Studies of Problems of Combinatorial Optimization of Game Type on Arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*, Vol. 39, No 1, pp. 24–35.
6. Iemets, O. A. & Olkhovskaja, E. V. (2011), Iterative Method for Solving Combinatorial Optimization Problems of the Game-type on Arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*, Vol. 43, No. 5, pp. 52–63.
7. Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2012). Solving a linear problem of Euclidean combinatorial optimization on arrangements with the constant sum of the elements. *Cybernetics and Systems Analysis*, Vol. 48, No. 4, pp. 547-557.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-02

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ВИЗНАЧАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН

Зеленський А. Г., к. ф.-м. н., доцент

*ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури»,
вул. Чернишевського, 24а, Дніпро, 49600, Україна*

a.zelensky@ukr.net

Дослідження локального навантаження тонкостінних елементів проводились рядом авторів. Фундаментальні розв'язки крайових задач будувались за допомогою методу інтегрального перетворення Фур'є, яке було застосовано безпосередньо до системи диференціальних рівнянь граничної зони або до системи, що враховувала деформації поперечного зсуву. Такий підхід, з одного боку, призводив до складних математичних викладок, а з іншого боку, як відомо, в області дії локальних навантажень виникає суттєво просторовий напружений стан, і фізичні теорії в принципі не можуть його описувати достатньо точно.

У нашому дослідженні визначаються частинні розв'язки задач згину нетонких трансверсально-ізотропних пластин з кососиметричним локальним навантаженням відносно серединної площини. Для цього був використаний варіант математичної теорії, який базується на позиції використання тривимірної теорії пружності. Згідно з цією теорією усі компоненти переміщень (як функції трьох незалежних змінних x, y, z) апроксимуються розкладаннями Фур'є-Лежандра за поперечною координатою z . Інші компоненти напружено-деформованого стану і граничні умови на бічній поверхні пластини також залежать від трьох координат і теж зображуються у вигляді розкладань за допомогою поліномів Лежандра. Перехід від тривимірних крайових задач до двовимірних здійснюється за допомогою варіаційного принципу Рейснера. На відміну від інших варіантів математичної теорії спосіб отримання основних рівнянь побудовано таким чином, що умови на граничних площинах у будь-яких наближеннях виконуються абсолютно точно. Це суттєва перевага перед іншими теоріями; яка підвищує точність розв'язування граничних задач.

Розроблено метод, який дозволяє побудувати фундаментальні розв'язки визначальної системи неоднорідних диференціальних рівнянь (перетвореної системи диференціальних рівнянь рівноваги) варіанта математичної теорії трансверсально-ізотропних пластин довільної сталої товщини.

Напружено-деформований стан при локальному навантаженні описується саме системами неоднорідних диференціальних рівнянь.

В роботі розглянуто визначальні системи рівнянь у другому і третьому наближеннях у рядах для переміщень при кососиметричному навантаженні відносно серединної площини. В другому (третьому) наближенні система диференціальних рівнянь має восьмий (дванадцятий) порядок відносно двох (трьох) функцій (складових поперечних переміщень). Методом операторних перетворень вони зводяться до зручних розв'язувальних неоднорідних диференціальних рівнянь восьмого (дванадцятого) порядку стосовно нових функцій. В цих рівняннях ліві частини однакові, а праві дорівнюють $a_{k0}(\nabla^2 - s_{k0})F\delta(x, y)$, де a_{k0}, s_{k0} – механіко-геометричні параметри пластини, ∇^2 – оператор Лапласа, F – локальна поперечна сила, що діє в початку координат, $\delta(x, y)$ – двовимірний функція Дірака.

Знаходження фундаментального розв'язку кожного отриманого неоднорідного диференціального рівняння високого порядку з частинними похідними зведено до визначення операторів $a_{k0}(\nabla^2 - s_{k0})$ від лінійної комбінації фундаментальних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь низького порядку, а саме: рівняння Пуассона, неоднорідного бігармонічного рівняння, двох неоднорідних рівнянь Гельмгольца (рівняння Пуассона, неоднорідного бігармонічного рівняння і чотирьох неоднорідних рівнянь Гельмгольца). Праві частини цих рівнянь однакові і дорівнюють $F\delta(x, y)$.

Фундаментальні розв'язки кожного диференціального рівняння невисокого порядку отримуються з частинних розв'язків аналогічних рівнянь, праві частини яких дорівнюють $q_0\delta(r - r_0)$, де q_0 – рівномірно розподілене навантаження, r_0 – радіус кола навантаження. Частинні розв'язки шукаються методом інтегрального перетворення Ханкеля.

Побудовані фундаментальні розв'язки визначальної системи рівнянь, які узагальнені для полюса в довільній точці.

Запропонований метод пошуку фундаментальних розв'язків може бути використаний для інших систем диференціальних рівнянь з частинними похідними розглянутого класу.

Отримані фундаментальні розв'язки визначальних рівнянь математичної теорії пластин дають можливість визначити частинні розв'язки диференціальних рівнянь у граничних задачах згину пластин довільної сталої товщини при будь-яких поперечних навантаженнях.

Ключові слова: пластина довільної сталої товщини, математична теорія, неоднорідне диференціальне рівняння, фундаментальні розв'язки, операторний метод, інтегральне перетворення Ханкеля.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE DEFINING SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PLATES

Zelenskiy A. G., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

*Department of Structural Engineering and Strength of Materials,
Prydniprovskaya State Academy of Civil Engineering and Architecture,
Chernyshevsky Street, 24-a, Dnepr, 49600, Ukraine*

a.zelenskiy@ukr.net

Studies of the local load of thin-walled elements were carried out by a number of authors. Fundamental solutions of boundary value problems were constructed using the Fourier transform integral transform method, which was applied directly to the system of differential equations of equilibrium. This approach led to complex mathematical calculations. In these works, differential equations for boundary domains, the equation with allowance for the deformation of the transverse shear were used. But in the area of

local load there is, in essence, a spatial deformed state, and physical theories in principle can not describe it sufficiently accurately.

In our study, fundamental solutions to the problems of bending of non-thin trans-versal-isotropic plates with skew-symmetric loading relative to the median plane are obtained. For this purpose, a variant of the mathematical theory was used, which is based on the position of the use of the three-dimensional theory of elasticity. In accordance with this theory, all components of the displacement (as functions of three independent variables) are approximated by Fourier-Legendre decompositions in a transverse coordinate. Other components of the stress-strain state and boundary conditions on the lateral surface of the plate are also dependent on three coordinates and are also presented in the form of series with the aid of Legendre polynomials.

The transition from three-dimensional boundary value problems to two-dimensional ones is carried out by means of the Reissner variational principle. Unlike other variants of mathematical theory, the method of obtaining the basic equations is constructed in such a way that the conditions on boundary planes in any approximations are perfectly accurate. This is a significant advantage over other theories; which increases the accuracy of the solution of boundary problems. The distribution of stresses and displacements along the thickness of the plate depends on the Legendre polynomials. With an increase in the order of the polynomials, the accuracy of determining the stresses and displacements increases.

A method is developed that enables to construct fundamental solutions of the defining system of inhomogeneous differential equations (the transformed system of differential equations of equilibrium) of a variant of the mathematical theory of transversally isotropic plates of arbitrary constant thickness. The stress-strain state of a local load is described by systems of non-uniform differential equations.

In this paper we consider the defining systems of equations in the second and third approximations in rows for displacements in the case of skew-symmetric loading relative to the median plane. In the second (third) approximation, the system of differential equations has an eighth (twelfth) order in relation to two (three) displacement functions. By the method of operator transformations, they are reduced to convenient solvable inhomogeneous equations of the eighth (twelfth) order in relation to new functions. In these equations, the left-hand sides are the same, and the right-hand ones have the following form: $a_{k_0}(\nabla^2 - s_{k_0})F\delta(x, y)$, where a_{k_0} , s_{k_0} – mechanical and geometric parameters plates, ∇^2 – Laplace operator, F – local transverse force acting at the origin of coordinates, $\delta(x, y)$ – two-dimensional Dirac function.

The search for the fundamental solution of each obtained inhomogeneous equation of high order is reduced to the definition of operators $a_{k_0}(\nabla^2 - s_{k_0})$ from a linear combination of fundamental solutions of nonhomogeneous differential equations of low order, namely: Poisson equation, inhomogeneous biharmonic equation and two inhomogeneous Helmholtz equations (Poisson equation, inhomogeneous biharmonic equation and four inhomogeneous Helmholtz equations). The right-hand sides of these equations are the same and equal to $F\delta(x, y)$.

Fundamental solutions to each equation of low order are obtained from partial solutions of similar equations, the right-hand side of which is $q_0\delta(r - r_0)$, where q_0 is a uniformly distributed load, r_0 – the circle load radius.

Partial solutions are sought by Hankel's integral transformation method. The fundamental solutions of the defining system of equations, which are generalized for a pole at an arbitrary point, are constructed.

The proposed method for the search for fundamental solutions can be used for other systems of differential equations with partial derivatives of the considered class.

The obtained fundamental solutions of the defining equations of the mathematical theory of the plates allow us to determine partial solutions of the equations in bending problems of plates of arbitrary thickness at any transverse loads.

Key words: plate of arbitrary constant thickness, mathematical theory, inhomogeneous differential equation, fundamental solutions, operator method, integral Hankel transform.

ВСТУП

Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тонких пластин і оболонок, в основу яких покладено гіпотези Кірхгофа-Лява, проведено достатньо повно в багаточисленних книгах, монографіях, наукових статтях. Класична теорія коректна для тонких ізотропних та слабоанізотропних пластин і оболонок, з повільно змінювальним НДС. В інших випадках використання класичної теорії для однорідних та шаруватих елементів конструкцій може призвести до значних похибок у визначенні НДС, а саме: у розрахунках товстих пластин і оболонок; якщо є лінії спотворення (лінії різкого змінення зовнішнього навантаження або геометрії пластини чи оболонки), тобто у випадках наявності різного роду концентраторів напруження, в т. ч. і при дії зосереджених навантажень; якщо матеріал характеризується суттєвою анізотропією або ж є фізично нелінійним чи пружно пластичним, та якщо жорсткості шарів відрізняються значним чином (навіть для тонких пластин і оболонок); якщо елемент конструкції зазнає великих переміщень.

Неточні результати, які дає класична теорія пластин та оболонки, призвели до необхідності розроблення теорій розрахунку, які б уточнювали класичну теорію. Уточнюючі теорії базуються на різних фізичних та кінематичних гіпотезах [1–5]. Найбільш використовуваними є теорії типу Тимошенка–Рейснера [1–3]. Ці теорії ураховують у першому наближенні внутрішній НДС і вихровий крайовий ефект. Потенціальний напружений стан вони не враховують. А в областях дії на елементи конструкцій локальних поперечних і розривних навантажень виникає просторовий НДС, який характеризується високим градієнтом змінення як у тангенціальному, так і в поперечному напрямках. І з фізичної точки зору потрібно ураховувати з високою точністю внутрішній і потенціальний напружені стани.

Огляд теорій розрахунку пластин та оболонки і їх аналіз надається в [6, 7].

Дослідження НДС пластин та оболонки на основі рівнянь тривимірної теорії пружності є занадто складною проблемою математичної фізики, яка спряжена з суттєвими математичними труднощами, пов'язаними із знаходженням розв'язків систем диференціальних рівнянь (СДР) із частинними похідними відносно шуканих функцій, що залежать від трьох незалежних змінних i , крім цього, необхідністю задовольнити граничним умовам на всій поверхні розглядуваних елементів. Аналітичні розв'язки вдається отримати тільки для вузького кола розглядуваних задач, а саме для тих випадків граничних умов і форми границі, які дають можливість розділити змінні в СДР [8, 9]. Крім того, на прикінцевих етапах розв'язування задач в більшості випадків необхідно використовувати чисельні методи, що пов'язано не тільки із складністю отриманих СДР, але й із труднощами при задоволенні граничним умовам на лицевих площинах (поверхнях).

Послідовний огляд робіт по просторовим задачам теорії пружності виконано в [10].

Один із напрямків розвитку досліджень по уточненню розрахунків НДС елементів конструкцій полягає у використанні суто математичного підходу до розв'язування граничних задач для пластин та оболонки. Математичні методи відрізняються між собою як певними перевагами, так і певними недоліками. До них можна віднести процес зведення тривимірних задач до двовимірних, точність задоволення граничних умов, складність отримуваних диференціальних рівнянь рівноваги і основних співвідношень задачі і т. п. Вказані факти впливають в кінцевому результаті на точність розв'язку граничних задач. Серед математичних підходів виділяється підхід, який використовує для описання НДС по товщині поліноми Лежандра [11–16].

При цьому тривимірні задачі зводились до двовимірних характерними методами, які відрізнялись між собою точністю і методикою. В основному використовувались проєкційні [11, 12] і різні варіаційні [13–16] методи. В [15, 16] редукція тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної здійснювалась з використанням варіаційного принципу Рейснера [17].

Розвитку теорій розрахунку нетонких пластин і оболонки присвячена робота [6].

Підхід, започаткований у [16], розвинено в [18–20] для пластин довільної сталої товщини, які зазнають дії будь-якого поперечного навантаження. Отримані системи диференціальних рівнянь рівноваги, основні співвідношення, форми загальних розв'язків, в тому числі і у вищих наближеннях [19, 20], розв'язані граничні задачі, з'ясовані межі використання теорій типу Тимошенка–Рейснера. Слід зазначити ефективність варіанта математичної теорії [16, 18–20] нетонких пластин, який полягає у можливості визначати НДС по суті з будь-якою високою точністю, в тому числі і при дії поперечних навантажень з високим градієнтом змінюваності. В [21] тривимірна задача зводиться до одновимірної чисельно-аналітичним способом.

Аналітичному дослідженню НДС тонких оболонки при дії зосереджених навантажень присвячені, зокрема, роботи [22–26].

У [22–24] були отримані фундаментальні розв'язки за допомогою методу інтегрального перетворення Фур'є; воно було застосовано безпосередньо до СДР рівноваги, отриманої на

основі уточнюючих теорій, які базувались на певних припущеннях. Використовувались рівняння пограничної зони [22, 23] і рівняння, які ураховують поперечний зсув [24].

З урахуванням вищесказаного очевидно, що більш точні результати в дослідженні фундаментальних розв'язків для пластин і оболонок дають теорії, які виходять з позиції розглядання НДС як просторового, без будь-яких обмежувальних припущень. І тому надалі для побудови фундаментальних розв'язків для пластин довільної сталої товщини використовуватиметься варіант математичної теорії [19, 20], який ураховує з високою точністю внутрішній і потенціальний НДС з урахуванням перших двох і трьох наближень у рядах Фур'є-Лежандра за поперечною координатою для компонент переміщень.

Зазначимо, що при кососиметричному навантаженні відносно серединної площини в другому (третьому) наближенні тангенціальні переміщення $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$ містять поліноми $P_1, P_3 (P_1, P_3, P_5)$, поперечні $W(x, y, z) - P_0, P_2 (P_0, P_2, P_4)$, напруження σ_{xz} і $\sigma_{yz} - P_0, P_2, P_4 (P_0, P_2, P_4, P_6)$, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z - P_1, P_3, P_5 (P_1, P_3, P_5, P_7)$, $\sigma_{xy} - P_1, P_3 (P_1, P_3, P_5)$. Точність визначення НДС зростає із збільшенням порядку врахованих поліномів Лежандра, які в свою чергу характеризують степінь нелінійності НДС по товщині.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

СДР рівноваги варіанта математичної теорії трансверсально-ізотропних пластин [18–20] послідовними перетвореннями зведена до визначальної СДР, яка складається у другому наближенні з однорідної системи четвертого порядку і неоднорідної системи восьмого порядку відносно складових функцій $w_1(x, y)$ і $w_3(x, y)$ поперечних переміщень $W(x, y, z)$, які зображуються рядом Фур'є-Лежандра

$$W(x, y, z) = \sum_{k=1,3}^{\infty} P_{k-1}(2z/h) w_k(x, y),$$

де P_{k-1} – поліноми Лежандра.

У третьому наближенні визначальна однорідна система має шостий порядок, а неоднорідна – дванадцятий відносно складових функцій $w_1(x, y)$, $w_3(x, y)$ і $w_5(x, y)$ поперечних переміщень.

Наведемо неоднорідні визначальні СДР у другому ($k = 1, 3$) [18, 20] і третьому ($k = 1, 3, 5$) [20] наближеннях для трансверсально-ізотропної пластини.

У наближенні $k = 1, 3$ (другому наближенні):

$$\begin{aligned} \Pi_{11} w_1 + \Pi_{13} w_3 &= \Pi_{1q} q(x, y); \\ \Pi_{31} w_1 + \Pi_{33} w_3 &= \Pi_{3q} q(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

де $\Pi_{11}, \dots, \Pi_{3q}$ – диференціальні оператори:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \mu_{114} \nabla^4; \quad \Pi_{13} = \mu_{114} \nabla^4 + \mu_{132} \nabla^2; \quad \Pi_{1q} = \mu_{12} \nabla^2 - \mu_{10}; \quad \Pi_{31} = \mu_{314} \nabla^4 + \mu_{312} \nabla^2; \\ \Pi_{33} &= \mu_{334} \nabla^4 + \mu_{332} \nabla^2 + \mu_{330}; \quad \Pi_{3q} = \mu_{32} \nabla^2 - \mu_{30}, \end{aligned} \tag{2}$$

$\beta_{112}, \dots, \beta_{333}, \dots, \mu_{114}, \dots, \mu_{30}$ – механіко-геометричні параметри пластини (МГП); $q(x, y)$ – довільне зовнішнє поперечне навантаження, кососиметричне відносно серединної площини, ∇^2 – оператор Лапласа; $w_1(x, y)$, $w_3(x, y)$ – шукані складові поперечних переміщень $W(x, y, z)$.

У наближенні $k = 1, 3, 5$ (третьому наближенні):

$$\begin{aligned} \Pi_{11}w_1 + \Pi_{13}w_3 + \Pi_{15}w_5 &= \Pi_{1q}q(x, y); \\ \Pi_{31}w_1 + \Pi_{33}w_3 + \Pi_{35}w_5 &= \Pi_{3q}q(x, y); \\ \Pi_{51}w_1 + \Pi_{53}w_3 + \Pi_{55}w_5 &= \Pi_{5q}q(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

де Π_{ij} – диференціальні оператори четвертого порядку, Π_{iq} – другого порядку. Наведемо тут ці оператори:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \mu_{114}\nabla^4 + \mu_{112}\nabla^2; & \Pi_{13} &= \mu_{134}\nabla^4 + \mu_{132}\nabla^2 + \mu_{130}; \\ \Pi_{15} &= \mu_{154}\nabla^4 + \mu_{152}\nabla^2 + \mu_{150}; & \Pi_{1q} &= \mu_{12}\nabla^2 + \mu_{10}; & \Pi_{31} &= \mu_{314}\nabla^4 + \mu_{312}\nabla^2; \\ \Pi_{33} &= \mu_{334}\nabla^4 + \mu_{332}\nabla^2 + \mu_{330}; & \Pi_{35} &= \mu_{354}\nabla^4 + \mu_{352}\nabla^2 + \mu_{350}; & \Pi_{3q} &= \mu_{32}\nabla^2 + \mu_{30}; \\ \Pi_{51} &= \mu_{514}\nabla^4 + \mu_{512}\nabla^2; & \Pi_{53} &= \mu_{534}\nabla^4 + \mu_{532}\nabla^2 + \mu_{530}; \\ \Pi_{55} &= \mu_{554}\nabla^4 + \mu_{552}\nabla^2 + \mu_{550}; & \Pi_{5q} &= \mu_{52}\nabla^2 + \mu_{50}, \end{aligned} \quad (4)$$

де μ з індексами – МГП. СДР (3) має дванадцятий порядок.

Відзначимо, що праві частини неоднорідних визначальних рівнянь згідно з (2) і (4) залежать від поперечного навантаження.

Однорідні СДР [18, 20] описують вихровий НДС, який виникає від дії на бічній поверхні пластини тангенціальних дотичних напружень і нерівномірностей у розподіленні по контуру бічної поверхні поперечних дотичних напружень.

Неоднорідні визначальні СДР (1) і (3) описують НДС, який спричиняється дією на бічній поверхні нормальних і поперечних дотичних напружень. Він складається із внутрішнього НДС (основного (за термінологією [15]) – визначається функцією $w_1(x, y)$ та основного потенціального – визначається повільнозмінювальними складовими функцій $w_k(x, y)$ ($k \geq 3$)) і НДС потенціального пограншару – визначається швидкозмінювальними складовими функцій $w_k(x, y)$ ($k \geq 3$). Внутрішній НДС розповсюджується на всю область, потенціальний пограничний шар має характер крайового ефекту біля країв і в локалізованих областях біля місць прикладення зосереджених навантажень. Вихрові і потенціальні крайові ефекти затихають по мірі віддалення від місця їх виникнення [27].

Приймаючи до уваги, що досліджень по побудові фундаментальних розв'язків диференціальних рівнянь теорії пластин обмежена кількість, особливо для рівнянь високого порядку, і враховуючи важливість дослідження цієї проблеми, приходимо до мети, яка ставиться в даній роботі. Завдання полягає в тому, щоб побудувати фундаментальні розв'язки визначальних СДР високого порядку у другому і третьому наближенні. Оскільки з фізичної точки зору фундаментальні розв'язки рівнянь – це частинні розв'язки диференціальних рівнянь, які описують НДС від дії зосереджених поперечних навантажень, то фундаментальні розв'язки потрібно побудувати для неоднорідних визначальних СДР (восьмого і дванадцятого порядків), тобто для систем (1) і (3).

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ В НАБЛИЖЕННІ $k = 1, 3$

Знаходження фундаментальних розв'язків неоднорідних визначальних СДР восьмого порядку (1) зводиться до знаходження частинних розв'язків цих рівнянь за умови, що поперечне навантаження $q(x, y)$ представляє собою зосереджену поперечну силу F ,

прикладену в точці $(x=0, y=0)$, кососиметрично відносно серединної площини. Отже, задача полягає в тому, щоб знайти частинні розв'язки такої СДР:

$$\begin{aligned} \Pi_{11}w_1 + \Pi_{13}w_3 &= \Pi_{1q}F \delta(x, y); \\ \Pi_{31}w_1 + \Pi_{33}w_3 &= \Pi_{3q}F \delta(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

де (x, y) – координати довільної точки, $\delta(x, y)$ – двовимірний функція Дірака.

Для спрощення розв'язування системи (5) зведемо її операторним методом з урахуванням (2) до знаходження фундаментальних розв'язків $E_k(x, y)$ ($k=1,3$) двох розв'язувальних неоднорідних рівнянь восьмого порядку. Після зображення операторів лівих частин цих рівнянь у вигляді добутку одержимо такі рівняння:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 \Phi_k(x, y) = a_{k0} D_{k0} F \delta(x, y) \quad (k=1,3), \quad (6)$$

де D_0, D_i, D_{k0} – диференціальні оператори:

$$D_0 = \nabla^2, \quad D_i = \nabla^2 - s_i, \quad D_{k0} = \nabla^2 - s_{k0}. \quad (7)$$

В (6) і (7) a і s з індексами залежать від МГП пластини, причому s_i , як показують чисельні дослідження для трансропних пластин (при $E' = E$), приймають додатні значення або ж комплексні значення з додатною дійсною частиною.

Із системи (5) фундаментальні розв'язки $w_{1E}(x, y)$ і $w_{3E}(x, y)$ знайдуться із залежностей:

$$\begin{aligned} w_{1E}(x, y) &= \Pi_{33} E_1(x, y) - \Pi_{13} E_3(x, y), \\ w_{3E}(x, y) &= -\Pi_{31} E_1(x, y) - \Pi_{11} E_3(x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

Використовуючи операторний метод інтегрування [28], який також впливає з методу зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь [29, 30], розв'язування рівнянь (6) восьмого порядку зведеться до інтегрування неоднорідних рівнянь другого і четвертого порядків, а фундаментальні розв'язки (6) зобразяться у вигляді оператора D_{k0} від лінійної комбінації їх фундаментальних розв'язків:

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k0} D_{k0}}{s_1 s_2} \left(\frac{s_2}{s_1 s_{12}} (E_{1r} - E_{0r}) + \frac{s_1}{s_2 s_{21}} (E_{2r} - E_{0r}) + E_{00r} \right) \quad (s_{ij} = s_i - s_j), \quad (9)$$

де $E_{0r}(x, y)$ – фундаментальний розв'язок рівняння Пуассона

$$D_0 f_0(x, y) = F \delta(x, y); \quad (10)$$

$E_{00r}(x, y)$ – фундаментальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння четвертого порядку

$$D_0 D_0 f_{00}(x, y) = F \delta(x, y); \quad (11)$$

$E_{ir}(x, y)$ – фундаментальні розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь Гельмгольца

$$D_i f_i(x, y) = F \delta(x, y) \quad (i=1,2). \quad (12)$$

Зазначимо, що операторний метод інтегрування неоднорідного рівняння вигляду $(\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 + k_2^2)\Phi^0(r) = a(\nabla^2 + q)\theta(r)$ ($k_{1,2}, a, q$ – сталі) використовувався у [31, с. 125].

Фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь (10) і (11) відомі [32, с. 237, 238]:

$$E_{0r}(x, y) = \frac{F}{2\pi} \ln r, \quad E_{00r}(x, y) = \frac{F}{8\pi} r^2 \ln r \quad (r^2 = x^2 + y^2). \quad (13)$$

У [25] доволі складним чином визначався фундаментальний розв'язок \sum_q диференціального рівняння $\nabla^2 \nabla^2 \Sigma + i\mu^2 \Sigma = \delta(\rho)/N$, де $\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, $i = \sqrt{-1}$, (x_0, y_0) – координати полюса (точки прикладення одиничної зосередженої сили), μ , N – сталі. Для знаходження фундаментального розв'язку рівняння $\nabla^2 \Sigma + i\mu^2 \Sigma = \delta(\rho)/N$ застосовувався метод розкладання оператора зсуву $(\nabla^2 + i\mu^2)^{-1}$ за степенями ∇^2 з використанням залежності $\nabla^{-2} \delta(\rho) = \ln \rho^2 / (4\pi)$. У [33, с. 70] наведено елементарний розв'язок диференціальних рівнянь Гельмгольца в інтегральному вигляді.

Ми вчинимо в цій роботі інакше, на наш погляд простіше.

Розглянемо навантаження пластини рівномірно розподіленим навантаженням q_0 по колу радіуса r_0 , тобто навантаження $q(r)$ зобразиться у вигляді:

$$q(r) = q_0 \delta(r - r_0).$$

Знайдемо для такого навантаження частинні розв'язки неоднорідних рівнянь:

$$D_i f_i(x, y) = q_0 \delta(r - r_0) \quad (i = 1, 2). \quad (14)$$

Використаємо метод інтегрального перетворення Ханкеля [34, с. 67]. При оберненому перетворенні потрібно буде визначити інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x J_\nu(ax) J_\nu(bx)}{(x^2 + c^2)} dx,$$

який на основі [35, с. 693] має вигляд:

$$\int_0^{\infty} \frac{x J_\nu(ax) J_\nu(bx)}{(x^2 + c^2)} dx = \begin{cases} I_\nu(bc) K_\nu(ac) & (0 < b < a, \operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} \nu > -1); \\ I_\nu(ac) K_\nu(bc) & (0 < a < b, \operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} \nu > -1), \end{cases}$$

де $I_\nu(bc)$, $K_\nu(ac)$ – модифікована функція Бесселя і функція Макдональда відповідно.

Не зупиняючись на проміжних викладках, наведемо частинні розв'язки $f_{ir}(x, y)$ рівнянь (14) з урахуванням вищесказаного:

$$f_{ir}(x, y) = \begin{cases} -q_0 r_0 I_0(r\sqrt{s_i}) K_0(r_0\sqrt{s_i}) & (0 < r < r_0); \\ -q_0 r_0 I_0(r_0\sqrt{s_i}) K_0(r\sqrt{s_i}) & (r > r_0). \end{cases} \quad (15)$$

Спрямовуючи r_0 до нуля та урахуваючи при цьому, що $I_0(r_0\sqrt{s_i}) \rightarrow 1$, а $2\pi r_0 q_0 \rightarrow F$, де F – зосереджена сила, прикладена на початку координат у точці $O(0,0)$, із (15) (при $r > 0$), отримаємо фундаментальні розв'язки $E_{ir}(x, y)$ рівнянь (12).

$$E_{ir}(x, y) = -\frac{F}{2\pi} K_0(r\sqrt{s_i}). \quad (16)$$

Приймаючи до уваги (9), (13) та (16), одержимо фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь (6) через оператор D_{k_0} :

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k_0} F_0 D_{k_0}}{2\pi s_1 s_2} \left(c_{1r} K_0(r\sqrt{s_1}) + c_{2r} K_0(r\sqrt{s_2}) + c_{0r} \ln r + c_{00r} r^2 \ln r \right), \quad (17)$$

де

$$c_{1r} = -\frac{s_2}{s_1 s_{12}}; \quad c_{2r} = -\frac{s_1}{s_2 s_{21}}; \quad c_{0r} = -\left(\frac{s_2}{s_1 s_{12}} + \frac{s_1}{s_2 s_{21}} \right); \quad c_{00r} = \frac{1}{4}.$$

Ураховуючи (17), співвідношення (7) і залежність

$$\nabla^{2n} K_0(r\sqrt{s_i}) = s_i^n K_0(r\sqrt{s_i}) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

дістанемо фундаментальні розв'язки рівнянь (6) в остаточному вигляді:

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k_0} F}{2\pi s_1 s_2} \left(c_{1r} (s_1 - s_{k_0}) K_0(r\sqrt{s_1}) + c_{2r} (s_2 - s_{k_0}) K_0(r\sqrt{s_2}) - s_{k_0} c_{0r} \ln r + c_{00r} (4 + 4 \ln r - s_{k_0} r^2 \ln r) \right). \quad (18)$$

Приймаючи до уваги (18), вирази (2) для операторів $\Pi_{11}, \dots, \Pi_{33}$ та залежності (8), знайдемо фундаментальні розв'язки w_{1E} і w_{3E} визначальної СДР (5):

$$w_{1E}(x, y) = \frac{F}{2\pi} \left(\gamma_{11} K_0(r\sqrt{s_1}) + \gamma_{12} K_0(r\sqrt{s_2}) + \gamma_{13} (\ln r + 1) - \gamma_{14} \left(c_{0r} \ln r + \frac{1}{4} r^2 \ln r \right) \right);$$

$$w_{3E}(x, y) = \frac{F}{2\pi} \left(\gamma_{31} K_0(r\sqrt{s_1}) + \gamma_{32} K_0(r\sqrt{s_2}) + \gamma_{33} (1 + \ln r) \right), \quad (19)$$

де

$$\gamma_{11} = \frac{1}{s_1 s_2} (-a_{10} \alpha_{11s} + a_{30} \alpha_{13s}); \quad \gamma_{12} = \frac{1}{s_1 s_2} (-a_{10} \alpha_{12s} + a_{30} \alpha_{14s});$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{s_1 s_2} (-a_{10} (\mu_{332} s_{10} - \mu_{330}) + a_{30} \mu_{132} s_{30}); \quad \gamma_{14} = \frac{-1}{s_1 s_2} a_{10} \mu_{330} s_{10};$$

$$\gamma_{31} = \frac{1}{s_1 s_2} (a_{10} \alpha_{31s} - a_{30} \alpha_{33s}); \quad \gamma_{32} = \frac{1}{s_1 s_2} (a_{10} \alpha_{32s} - a_{30} \alpha_{34s}); \quad \gamma_{33} = \frac{1}{s_1 s_2} a_{10} \mu_{312} s_{10};$$

$$\alpha_{11s} = \frac{s_2}{s_1 s_{12}} (s_1 - s_{10}) (\mu_{334} s_1^2 + \mu_{332} s_1 + \mu_{330});$$

$$\alpha_{12s} = \frac{s_1}{s_2 s_{21}} (s_2 - s_{10}) (\mu_{334} s_2^2 + \mu_{332} s_2 + \mu_{330});$$

$$\alpha_{13s} = \frac{s_2}{s_{12}} (s_1 - s_{30}) (\mu_{134} s_1 + \mu_{132}); \quad \alpha_{14s} = \frac{s_1}{s_{21}} (s_2 - s_{30}) (\mu_{134} s_2 + \mu_{132});$$

$$\alpha_{31s} = \frac{s_2}{s_{12}} (s_1 - s_{10}) (\mu_{314} s_1 + \mu_{312}); \quad \alpha_{32s} = \frac{s_1}{s_{21}} (s_2 - s_{10}) (\mu_{314} s_2 + \mu_{312});$$

$$\alpha_{33s} = \frac{s_1 s_2}{s_{12}} \mu_{114} (s_1 - s_{30}); \quad \alpha_{34s} = \frac{s_1 s_2}{s_{21}} \mu_{114} (s_2 - s_{30}).$$

Оскільки при $r \rightarrow 0$ функція Макдональда $K_0(r\sqrt{s_i}) \rightarrow \ln 2 / (r\sqrt{s_i})$, то із (19) випливає, що при $r \rightarrow 0$

$$w_{1E}(x, y) \rightarrow \frac{F}{2\pi} (\gamma_{13} - \gamma_{11} - \gamma_{12} - \gamma_{14} c_{0r}) \ln r; \quad w_{3E}(x, y) \rightarrow \frac{F}{2\pi} (\gamma_{33} - \gamma_{31} - \gamma_{32}) \ln r,$$

тобто обидва фундаментальні розв'язки при $r = 0$ мають логарифмічну особливість.

Зауважимо, що в [26] застосовувався метод інтегрального перетворення Ханкеля безпосередньо до диференціального рівняння вигляду $\nabla^2 \nabla^2 \sigma + i\mu^2 \sigma = q_0 \delta(r - r_0) / D$, (r_0, μ, D – сталі, $\sigma = \sigma(r)$).

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ В НАБЛИЖЕННІ $k = 1, 3, 5$

У цьому наближенні, приймаючи до уваги неоднорідну визначальну СДР (3), фундаментальні розв'язки визначатимуться з наступної системи дванадцятого порядку:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} w_1 + \Pi_{13} w_3 + \Pi_{15} w_5 &= \Pi_{1q} F \delta(x, y); \\ \Pi_{31} w_1 + \Pi_{33} w_3 + \Pi_{35} w_5 &= \Pi_{3q} F \delta(x, y); \\ \Pi_{51} w_1 + \Pi_{53} w_3 + \Pi_{55} w_5 &= \Pi_{5q} F \delta(x, y). \end{aligned} \quad (20)$$

Систему (20) з урахуванням (4) зведемо до трьох неоднорідних рівнянь дванадцятого порядку для знаходження фундаментальних розв'язків:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 \Phi_k(x, y) = a_{k0} D_{k0} F \delta(x, y) \quad (k = 1, 3, 5), \quad (21)$$

де

$$D_i = \nabla^2 - s_i, \quad D_{k0} = \nabla^2 - s_{k0},$$

a і s з індексами – МГП пластини (інші, ніж у (7)).

Із системи (20) фундаментальні розв'язки $w_{1E}(x, y)$, $w_{3E}(x, y)$ і $w_{5E}(x, y)$ знайдуться з залежностей:

$$w_{kE}(x, y) = \Pi_{1k}^0 E_1 + \Pi_{3k}^0 E_3 + \Pi_{5k}^0 E_5, \quad (22)$$

де Π_{ij}^0 – ад'юнкти (восьмого порядку) диференціального визначника системи (20); $E_1(x, y)$, $E_3(x, y)$, $E_5(x, y)$ – фундаментальні розв'язки рівнянь (21), які виражаються через фундаментальні розв'язки E_{0r} , E_{00r} , E_{ir} ($i = 1, 2, 3, 4$) рівнянь (10)–(12) за формулами (13) і (16).

Показано, що $E_k(x, y)$ ($k = 1, 3, 5$) знаходяться із залежностей:

$$\begin{aligned} E_k(x, y) = \frac{a_{k0} D_{k0}}{s_1 s_2 s_3 s_4} & \left(\frac{s_2 s_3 s_4}{s_1 s_{12} s_{13} s_{14}} (E_{1r} - E_{0r}) + \frac{s_1 s_3 s_4}{s_2 s_{21} s_{23} s_{24}} (E_{2r} - E_{0r}) + \right. \\ & \left. + \frac{s_1 s_2 s_4}{s_3 s_{31} s_{32} s_{34}} (E_{3r} - E_{0r}) + \frac{s_1 s_3 s_4}{s_4 s_{41} s_{42} s_{43}} (E_{4r} - E_{0r}) + E_{00r} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

З урахуванням виразів для фундаментальних розв'язків, що входять до (23), дістанемо

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k0} F}{2\pi s_1 s_2 s_3 s_4} \left(\sum_{i=1}^4 b_i K_0(r\sqrt{s_i}) + b_5 \ln r + b_6 r^2 \ln r + b_7 \right), \quad (24)$$

де b з індексами – МГП.

Ураховуючи (22) і (24), знаходимо фундаментальні розв’язки $w_{kE}(x, y)$ системи рівнянь (20) у вигляді:

$$w_{1E}(x, y) = \frac{F}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^4 a_{1i} K_0(r\sqrt{s_i}) + a_{15} + a_{16} \ln r + a_{17} r^2 \ln r \right);$$

$$w_{iE}(x, y) = \frac{F}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^4 a_{ij} K_0(r\sqrt{s_j}) + a_{i5} + a_{i6} \ln r \right) \quad (i = 3, 5), \quad (25)$$

де a з індексами – МГП пластини.

Як бачимо, фундаментальні розв’язки $w_{kE}(x, y)$ при $r=0$ також мають логарифмічну особливість.

Якщо зосереджене навантаження F прикладене не в початку координат – точці $O(0,0)$, а в полюсі $O_1(x_0, y_0)$, то у формулах (18), (19), (24), (25) потрібно замінити r на ρ .

Тут $\rho = (r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \varphi)^{1/2} = CO_1$, $r_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2} = OO_1$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2} = OC$; (x, y) – координати довільної точки C , $\varphi = \angle COO_1$.

Інші компоненти переміщень і всіх напружень виражаються остаточно через поліноми Лежандра і складові $w_k(x, y)$ поперечного переміщення $W(x, y, z)$ [18–20].

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ’ЯЗКІВ

1. Поперечне навантаження пластини по дузі кола.

Побудуємо частинні розв’язки рівнянь

$$D_0 D_0 D_1 D_2 \Phi_k(x, y) = a_{k0} D_{k0} q(x, y) \quad (k = 1, 3), \quad (26)$$

де $q(x, y)$ рівномірно розподілене навантаження ($q(x, y) = q_0$) діє на пластину по дузі AB кола радіуса r_0 , яка стягує центральний кут α ($\alpha = \angle AOB$). Введемо полярну систему координат r, θ з початком у точці O і віссю Ox , яка співпадає з напрямком OA . У цій системі точки A, B і довільна точка C мають такі координати: $A(r_0, 0)$, $B(r_0, \alpha)$, $C(r, \beta)$. Навантаження по елементарній дузі $q_0 r_0 d\theta$ з серединою в точці $O_1(r_0, \theta)$, де $0 \leq \theta \leq \alpha$, буде $q_0 r_0 d\theta$. Частинні розв’язки рівнянь (26) від елементарного навантаження, які залежать від координат (x, y) (координат довільної точки C), знайдуться на основі (18) при заміні F на $q_0 r_0 d\theta$ і r на ρ :

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k0} q_0 r_0 d\theta}{2\pi s_1 s_2} \left(a_1 K_0(\rho\sqrt{s_1}) + a_2 K_0(\rho\sqrt{s_2}) + a_3 \ln \rho + a_4 \rho^2 \ln \rho + 1 \right),$$

де a_1, \dots, a_4 – відповідні сталі.

Запишемо останню рівність по-іншому, використавши теорему додавання для функції Макдональда [36, с. 42] і проінтегрувавши по θ від 0 до α .

Дістанемо

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k0}q_0r_0}{2\pi s_1s_2} \int_0^\alpha \left(a_1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m(r_0\sqrt{s_1}) I_m(r\sqrt{s_1}) \cos m\varphi + \right. \\ \left. + a_2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m(r_0\sqrt{s_2}) I_m(r\sqrt{s_2}) \cos m\varphi + a_3 \ln \rho + a_4 \rho^2 \ln \rho + 1 \right) d\theta \quad (r < r_0);$$

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k0}q_0r_0}{2\pi s_1s_2} \int_0^\alpha \left(a_1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m(r_0\sqrt{s_1}) I_m(r_0\sqrt{s_1}) \cos m\varphi + \right. \\ \left. + a_2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m(r\sqrt{s_2}) I_m(r_0\sqrt{s_2}) \cos m\varphi + a_3 \ln \rho + a_4 \rho^2 \ln \rho + 1 \right) d\theta \quad (r > r_0),$$

де $\varphi = \angle COO_1$.

Прийнявши до уваги, що $\theta = \beta - \varphi$, матимемо наступні залежності.

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k0}q_0r_0}{2\pi s_1s_2} \left(2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\alpha}{2} \cos \frac{m(2\beta - \alpha)}{2} (a_1 K_m(r_0\sqrt{s_1}) I_m(r\sqrt{s_1}) + \right. \\ \left. + a_2 K_m(r_0\sqrt{s_2}) I_m(r\sqrt{s_2})) + \int_{\beta - \alpha}^{\beta} (a_3 \ln \rho + a_4 \rho^2 \ln \rho) d\varphi + \alpha \right) \quad (r < r_0); \quad (27)$$

$$E_k(x, y) = \frac{a_{k0}q_0r_0}{2\pi s_1s_2} \left(2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\alpha}{2} \cos \frac{m(2\beta - \alpha)}{2} (a_1 K_m(r\sqrt{s_1}) I_m(r_0\sqrt{s_1}) + \right. \\ \left. + a_2 K_m(r\sqrt{s_2}) I_m(r_0\sqrt{s_2})) + \int_{\beta - \alpha}^{\beta} (a_3 \ln \rho + a_4 \rho^2 \ln \rho) d\varphi + \alpha \right) \quad (r > r_0), \quad (28)$$

де в (27) і (28) при $m = 0$ множник $\frac{1}{m} \sin \frac{m\alpha}{2}$ замінюється на $\frac{\alpha}{2}$.

Як бачимо, частинні розв'язки рівнянь (26) при $r = r_0$ співпадають і не мають особливостей. Якщо в (27) і (28) покласти $\alpha = 2\pi$, то отримаємо частинні розв'язки (26) при дії на пластину рівномірно розподіленого навантаження q_0 по колу радіуса r_0 :

$$E_k(x, y) = \frac{-a_{k0}q_0r_0}{s_1s_2} \left(\frac{s_2}{s_1s_{12}} (s_1 - s_{k0}) K_0(r_0\sqrt{s_1}) I_0(r\sqrt{s_1}) + \frac{s_1}{s_1s_{21}} (s_2 - s_{k0}) K_0(r_0\sqrt{s_2}) I_0(r\sqrt{s_2}) - \right. \\ \left. - (1 - s_{k0}c_{0r}) \ln r_0 + \frac{s_{k0}}{4} ((r^2 + r_0^2) \ln r_0 + r^2) - 1 \right) \quad (r < r_0);$$

$$E_k(x, y) = \frac{-a_{k0}q_0r_0}{s_1s_2} \left(\frac{s_2}{s_1s_{12}} (s_1 - s_{k0}) K_0(r\sqrt{s_1}) I_0(r_0\sqrt{s_1}) + \frac{s_1}{s_1s_{21}} (s_2 - s_{k0}) K_0(r\sqrt{s_2}) I_0(r_0\sqrt{s_2}) - \right. \\ \left. - (1 - s_{k0}c_{0r}) \ln r + \frac{s_{k0}}{4} ((r^2 + r_0^2) \ln r + r_0^2) - 1 \right) \quad (r > r_0).$$

Цей результат співпадає з частинними розв'язками рівнянь

$$D_0 D_0 D_1 D_2 \Phi_k(x, y) = a_{k0} D_{k0} F \delta(r - r_0) \quad (k = 1, 3),$$

які отримуються операторним методом інтегрування з подальшим використанням методу інтегрального перетворення Ханкеля до рівнянь (10)–(12) з правими частинами $q_0 \delta(r - r_0)$.

2. Поперечне навантаження пластини по довільній області.

Нехай пластина, яка займає область D ($x, y \in D$), навантажена по довільній своїй підобласті D_0 ($x_0, y_0 \in D_0$, $D_0 \subseteq D$) поперечним навантаженням $q = q_0(x_0, y_0)$. Тоді частинні розв'язки $w_{kr}(x, y)$ системи визначальних рівнянь (1) ($k=1,3$) і (3) ($k=1,3,5$) зобразяться в інтегральному вигляді наступним чином:

$$w_{kr}(x, y) = \iint_{D_0} q_0(x_0, y_0) w_{kE}^0(x, y, x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (29)$$

Тут $w_{kE}^0(x, y, x_0, y_0)$ – фундаментальні розв'язки, які відповідають одиничній зосередженій силі ($F=1$), прикладеній у точці (x_0, y_0) пластини, тобто

$$w_{kE}^0(x, y, x_0, y_0) = w_{kE} \left(F=1, r \rightarrow \rho = \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right)^{1/2} \right),$$

де w_{kE} виражаються за формулами (19), (25).

Якщо ж на пластину у точках (x_i, y_i) діють ще й зосереджені сили F_i , то до розв'язків (29) потрібно додати фундаментальні розв'язки $w_{kE,i}(x, y)$, де

$$w_{kE,i}(x, y) = w_{kE} \left(F=F_i, r \rightarrow \rho_i = \left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \right)^{1/2} \right).$$

ВИСНОВКИ

1. Розроблена методика знаходження фундаментальних розв'язків систем диференціальних рівнянь високого порядку математичної теорії пластин довільної сталої товщини.
2. Побудовані фундаментальні розв'язки визначальних систем рівнянь восьмого і дванадцятого порядків (в другому і третьому наближеннях у рядах Фур'є-Лежандра для переміщень).
3. Фундаментальні розв'язки мають логарифмічну особливість у точках прикладення зосереджених сил.
4. На лініях дії розподіленого навантаження частинні розв'язки особливостей не мають.
5. Отримані аналітичні вирази для фундаментальних розв'язків можна в перспективі використовувати для знаходження частинних розв'язків у граничних задачах для товстих пластин при дії довільних поперечних навантажень на довільних площинках. При цьому рекомендується застосовувати чисельно-аналітичні методи для визначення відповідних інтегралів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. *J. of Math and Phys.* 1944. 33. P. 184–191.
2. Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. Львів: «Інтелект-Захід», 2007. 240 с.
3. Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrow A. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-function method combined with spline-approximation. *Journal of applied mathematics and mechanics.* 2011. Vol. 91, Is. 6. P. 458–467.
4. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. On the use of sampling surfaces method for solution of 3D elasticity problems for thick shells. *Journal of applied mathematics and mechanics.* 2012. Vol. 92, Is. 11-12. P. 910–920.

5. Altenbach H., Eremeyew V. A. On the linear theory of micropolar plates. *Journal of applied mathematics and mechanics*. 2009. Vol. 89, Is. 4. P. 4242–250.
6. Немиш Ю. Н., Хома И. Ю. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория. Обзор. *Прикл. механіка*. 1991. 29, №11. С. 3–27.
7. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. *Прикл. механика*. 2002. 38, № 2. С. 22–57.
8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вища школа, 1985. 190 с.
9. Панкратова Н. Д., Мукоед А. А. К расчету напряженного состояния неоднородных пластин в пространственной постановке. *Прикл. механика*. 1990. 26, № 2. С. 49–56.
10. Немиш Ю. Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел. *Прикл. механіка*. 2000. Т. 36, № 2. С. 3–38.
11. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. *Тр. Тбилисского матем. ин-та*. 1955. Т. 21. С. 191–293.
12. Гуляев В. И., Баженов В. А., Лизунов П. П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1978. 192 с.
13. Cicala P. Sulla teoria elastica della plate sottile. *Giorn genio Civile*. 1959. 97, № 4. P. 238–256.
14. Хома И. Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. Киев: Наукова думка, 1986. 170 с.
15. Плеханов А. В., Прусаков А. П. Об одном асимптотическом методе построения теории изгиба пластин средней толщины. *Механика твердого тела*. 1976. № 3. С. 84–90.
16. Прусаков А. П. О построении уравнений изгиба двенадцатого порядка для трансверсально-изотропной пластины. *Прикл. механика*. 1993. Т. 29, № 12. С. 51–58.
17. Reissner E. On a variational theorem in elasticity. *J. Math. and Phys.* 1950. V. 29, № 2. P. 90–95.
18. Зеленський А. Г. Про розв'язування однієї системи диференціальних рівнянь неklasичної теорії пластин. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Зб. наукових праць. Дніпропетровськ : ДНУ, 2003. Вип. 5. С. 70–79.
19. Зеленський А. Г., Серебрянська П. А. Метод взаємозв'язаних рівнянь в аналітичній теорії трансверсально-ізотропних пластин із урахуванням вищих наближень. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. 2007. № 2/2. С. 84–94.
20. Зеленський А. Г. Моделі аналітичної теорії трансверсально-ізотропних плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Т. 17, № 5. 2009. *Механіка*. В. 13, Т. 2. С. 54–62.
21. Григоренко А. Я., Бергулев А. С., Яремченко С. Н. О напряженно-деформированном состоянии ортотропных толстостенных прямоугольных пластин. *Доп. НАН України*. 2011. № 9. С. 49–55.
22. Величко П. М., Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние пластин и оболочек при сосредоточенных нагрузках. *Труды 7-й Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек* (Днепропетровск, 1969). Москва: Наука, 1969. С. 142–145.
23. Величко П. М., Шевченко В. П. О действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку положительной кривизны. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1969. № 2. С. 147–151.
24. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропных оболочек при сосредоточенных воздействиях. *Прикл. механика*. 1972. Т. 8, Вып. 11. С. 21–27.
25. Ван Фо Фи. До задачі рівноваги пологої сферичної оболонки. *Доповіді АН Української РСР*. 1960. № 5. С. 609–611.
26. Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Розв'язок задачі згину пологих сферичних оболонок. *Прикл. механіка*. 1964. Т. 10, Вип. 4. С. 382–391.

27. Зеленський А. Г. Крайові ефекти в нетонких пластинах. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. 2005. № 10/1. Вип. 9, Т. 2. С. 51–58.
28. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.
29. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Т. 20, № 5. 2012. *Механіка*. В. 16, Т. 2/1. С. 60–66.
30. Зеленський А. Г. Про розв'язування основних рівнянь згину варіанта математичної теорії нетонких пластин. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 2. С. 79–86.
31. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. Москва: Мир, 1970. 256 с.
32. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. Москва: Мир, 1978. 520 с.
33. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Москва–Ленинград: ОГИЗ, Гос. изд-во технико-технической лит., 1948. 296 с.
34. Грантер К. Д. Интегральные преобразования в математической физике. Москва: ОГИЗ, Гос. изд-во технико-технической лит., 1956. 204 с.
35. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с.
36. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. Москва: Наука, 1971. 288 с.

REFERENCES

1. Reissner, E. (1944). On the theory of bending of elastic plates. *J. of Math and Phys*, 33, pp. 184-191.
2. Burak, Ya. Y., Rudavskiy, Yu. K. & Suhorolskiy, M. A. (2007). Analytical mechanics of locally loaded shells. LvIv: “Intelekt–ZahId”.
3. Awrejcewicz, J., Kurpa, L. & Osetrow, A. (2011). Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-function method combined with spline-approximation. *Journal of applied mathematics and mechanics*, Vol. 91, Is. 6, pp. 458-467.
4. Kulikov, G. M. & Plotnikova, S. V. (2012). On the use of sampling surfaces method for solution of 3D elasticity problems for thick shells. *Journal of applied mathematics and mechanics*, Vol. 92, Is. 11-12, pp. 910-920.
5. Altenbach, H. & Eremeyew, V. A. (2009). On the linear theory of micropolar plates. *Journal of applied mathematics and mechanics*, Vol. 89, Is. 4, pp. 4242-250.
6. Nemish, Yu. N. & Homa, I. Yu. (1991). The stressed and deformed state of non-thin plates and shells. Generalized theory. Review. *Prikl. mehanika*, 29, No. 11, pp. 3-27.
7. Piskunov, V. G. & Rasskazov, A. O. (2002). Development of the theory of layered plates and shells. *Prikl. mehanika*, 38, No. 2, pp. 22–57.
8. Grigorenko, Ya. M., Vasilenko, A. T. & Pankratova, N. D. (1985). Static state of anisotropic thick-walled shells. Kiev: Vischa shkola.
9. Pankratova, N. D. & Mukoed, A. A. (1990). To the calculation of the stress state of inhomogeneous plates in the spatial formulation. *Prikl. mehanika*, 26, No. 2, pp. 49-56.
10. Nemish, Yu. N. (2000). Development of analytical methods in three-dimensional static problems of anisotropic bodies. *Prikl. mehanika*, Vol. 36, No. 2, pp. 3-38.
11. Vekua, I. N. (1955). On a method of calculating prismatic shells. *Tr. Tbilisskogo matem. in-ta*, Vol. 21, pp. 191-293.

12. Gulyaev, V. I., Bazhenov, V. A. & Lizunov, P. P. (1978). Non-classical theory of shells and its application to solving engineering problems. Lvov: Izd-vo Lvovskogo un-ta.
13. Cicala, P. (1959). Sulla teoria elastica della plate sottile. *Giorn genio Civile*, 97, No. 4, pp. 238-256.
14. Homa, I. Yu. (1986). *Generalized Theory of Anisotropic Shells*. Kiyv: Naukova dumka.
15. Plehanov, A. V. & Prusakov, A. P. (1976). On an asymptotic method for constructing a theory of bending of plates of average thickness. *Mehanika tverdogo tela*, No. 3, pp. 84-90.
16. Prusakov, A. P. (1993). On the construction of twelve-order bend equations for a transversely isotropic plate. *Prikl. mehanika*, Vol. 29, No. 12, pp. 51-58.
17. Reissner, E. (1950). On a variational theorem in elasticity. *J. Math. and Phys*, Vol. 29, No. 2, pp. 90-95.
18. Zelenskiy, A. G. (2003). On solving a system of differential equations of a nonclassical plate theory. *Metodi rozv'yazuvannya prikladnih za-dach mehaniki deformivnogo tverdogo tlla*. *Zb. naukovih prats. DnIpropevtr. un-tu*, Vol. 5, pp. 70-79.
19. Zelenskiy, A. G. & Serebryanska, P. A. (2007). The method of interrelated equations in the analytical theory of transversally isotropic plates, taking into account higher approximations. *Visnik DnIpropevtr. un-tu. Mehanika*, №2/2, pp. 84-94.
20. Zelenskiy, A. G. (2009). Models of analytical theory of transversally isotropic plates. *Visnik DnIpropevtr. un-tu*, Vol. 17, No. 5. *Mehanika*. Issue 13, Vol. 2, pp. 54-62.
21. Grigorenko, A. Ya., Bergulev, A. S. & Yaremchenko, S. N. (2011). On the stress-strain state of orthotropic thick-walled rectangular plates. *Dop. NAN UkraYini*, No. 9, pp. 49-55.
22. Velichko, P. M., Shevlyakov, Yu. A. & Shevchenko, V. P. (1969). Stresses and deformations of plates and shells under local loads. *Proceeding of the 7th All-Union Conference on the Theory of Plates and Shells*, (pp. 142-145), (Dnepropetrovsk, 1969), Moscow: Nauka.
23. Velichko, P. M. & Shevchenko, V. P. (1969). On the effect of concentrated forces and moments on the shell of positive curvature. *Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela*, No. 2, pp. 147-151.
24. Hizhnyak, V. K. & Shevchenko, V. P. (1972). Stresses and strains in transversely isotropic shells from local loads. *Prikl. Mehanika*, Vol. 8, Issue 11, pp. 21-27.
25. Van Fo, Fi (1960). To the equilibrium problem of a flattened spherical shell. *DopovIdI AN UkraYinskoYi RSR*, No. 5, pp. 609-611.
26. Shevlyakov, Yu. A. & Shevchenko, V. P. (1964). Solving the problem of bending oblate spherical shells. *Prikl. mehanika*, Vol. 10, Issue 4, pp. 382-391.
27. Zelenskiy, A. G. (2005). Edge effects in non-thin plates. *Visnik DnIpropevtr. un-tu. Mehanika*, No. 10/1, Issue 9, Vol. 2, pp. 51-58.
28. Elsgolts, L. E. (1969). *Differential equations and calculus of variations*. Moscow: Nauka.
29. Zelenskiy, A. G. (2012). The method of reducing the order of inhomogeneous differential equations with partial derivatives in the theory of medium thickness plates. *Visnik DnIpropevtr. un-tu*, Vol. 20, No. 5. *Mehanika*, Issue 16, Vol. 2/1, pp. 60-66.
30. Zelenskiy, A. G. (2015). On the solution of the basic equations of flexion of a variant of the mathematical theory of non-thin plates. *Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo unIversi-tetu. Fiziko-matematični nauki*, No. 2, pp. 79-86.
31. Novatskiy, V. (1970). *Dynamic problems of thermoelasticity*. Moscow: Mir.
32. Kech, V. & Teodoresku, P. (1978). *Introduction to the theory of generalized functions with applications in engineering*. Moscow: Mir.
33. Vekua, I. N. (1948). *New methods for solving elliptic equations*. Moscow–Leningrad: Gos. izd-vo tehniko-teoreticheskoy lit.

34. Tranter, K. D. (1956). Integral transformations in mathematical physics. Moscow: Gos. izd-vo tehniko-teoreticheskoy lit.
35. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (1971). Tables of integrals, series, sums. Moscow: Nauka.
36. Korenev, B. G. (1971). Introduction to the theory of Bessel functions. Moscow: Nauka.

УДК 519.8

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-03

АЛГОРИТМИ НА ФРАГМЕНТАРНИХ СТРУКТУРАХ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ НА ДВІ ЧАСТИНИ

Козін І. В., д. ф.-м. н., професор, Сардак В. І., аспірант, Терешко Я. В., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

ainc00@gmail.com, vsardak85@gmail.com, nsteronua@gmail.com

Досліджується проблема розбиття мультимножини чисел на дві частини у такий спосіб, щоб різниця між сумою чисел у двох частинах розбиття була мінімальною по модулю. Уже згадана задача належить до класу NP-важких задач, для неї невідомі алгоритми поліноміальної трудомісткості. Отже, для задачі виправдане застосування метаевристик різних типів. Показано, що задача має природну фрагментарну структуру, в якій елементарними фрагментами є одноелементні підмножини. Наявність фрагментарної структури дозволяє звести цю задачу до задачі комбінаторної оптимізації на множині перестановок. Множина перестановок розглядається при цьому як метричний простір з метрикою Кендалла. Причому будь-якому допустимому розв'язку вихідної задачі відповідає одна або кілька перестановок. Такий підхід дає можливість застосувати для пошуку наближених рішень задачі ряд алгоритмів пошуку оптимуму на множині перестановок. Найбільш простим і відомим алгоритмом пошуку оптимуму в метричному просторі є алгоритм локального пошуку в ϵ -околиці випадково обраної точки. Для забезпечення пошуку глобального оптимуму цей алгоритм застосовується кілька разів з різним вибором початкової точки. Фрагментарна структура задачі дозволяє побудувати універсальні алгоритми, що імітують природні процеси. У цій роботі розглянуті два алгоритми подібного виду. Це еволюційний алгоритм на множині перестановок і алгоритм мурашиної колонії. Для оцінки якості запропонованих метаевристик розроблений генератор випадкових задач розглянутого типу. Згенеровано кілька серій задач. Кожна із задач серії розв'язувалася шляхом використання трьох різних алгоритмів. Причому параметри алгоритмів підбрані у такий спосіб, щоб кількість обчислень значення цільової функції була приблизно однаковою в кожному випадку. На основі множини згенерованих задач проведено порівняння локального, еволюційного і мурашиного алгоритмів.

Ключові слова: задача про розбиття множини, фрагментарна структура, еволюційний алгоритм, алгоритм мурашиної колонії.

ALGORITHMS BASED ON FRAGMENTARY STRUCTURES FOR THE PROBLEM OF DIVIDING A SET INTO TWO-PART

Kozin I., Sardak V., Tereshko I.

*Zaporizhzhya State University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

ainc00@gmail.com, vsardak85@gmail.com, nsteronua@gmail.com

The partitioning a multiset of numbers into two parts problem is investigated in article. The partitioning must be such, that the difference of sums of numbers in two parts of the partition is minimal modulo. The problem under consideration belongs to the class of NP-difficult problems, for it algorithms of polynomial complexity are unknown. Thus, the application of metaheuristics of various types is justified for the problem. It is shown that the problem has a natural fragmentary structure, in which the elementary fragments are singleton subsets. The presence of a fragmentary structure allows us to reduce this problem to the problem of combinatorial optimization on the set of permutations. The set of

permutations is considered here as a metric space with the Kendall metric. Moreover, to any admissible solution the original problem corresponds to one or several permutations. This approach makes it possible to apply a number of algorithms for finding the optimum on the set of permutations to find approximate solutions of the problem. The most simple and well-known algorithm for searching for an optimum in a metric space is the local search algorithm in the ε -neighborhood of a randomly chosen point. To ensure the search for a global optimum, this algorithm is applied several times with a different choice of the starting point. The fragmentary structure of the problem makes it possible to construct universal algorithms that mimic natural processes. In this paper we consider two algorithms of this kind. This is an evolutionary algorithm on the set of permutations and the algorithm of an ant colony. To assess the quality of the proposed metaheuristics, a random-type generator of the type considered has been developed. Several series of tasks are generated. Each of the series tasks was solved by using three different algorithms. And the parameters of the algorithms were chosen in such a way that the number of calculations of the value of the objective function was approximately the same in each case. Based on the set of generated tasks, a comparison of local, evolutionary and ant algorithms is made.

Key words: the problem of partitioning a set, a fragmentary structure, an evolutionary algorithm, the algorithm of an ant colony.

ВСТУП. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Найбільш простою серед задач розбиття числових множин є задача розбиття множини чисел на дві частини, що мінімально відрізняються за сумою чисел, які до них входять (задача 2-розбиття). Незважаючи на простоту формулювання, ця задача належить до розряду NP-складних [1] задач і на сьогоднішній день не відомий точний алгоритм поліноміальної трудомісткості для пошуку оптимального розв'язку цієї задачі. Численні застосування цієї задачі вимагають розробки наближених алгоритмів, які дозволяли б досить швидко відшукувати розбиття, близькі до оптимальних. З огляду на важливість задачі для застосувань виправдане використання метаевристик для пошуку наближених рішень.

ОГЛЯД НАЯВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Для задачі про розбиття числових мультимножин на дві підмножини з однаковою сумою елементів доведено властивість NP-повноти [2]. Задача розбиття множини на дві підмножини з максимально близькими сумами елементів може бути розв'язана за псевдополіноміальний час методом динамічного програмування [3]. Тому цю задачу вважають найбільш простою серед NP-важких задач. Для задачі 2-розбиття відомо безліч евристичних алгоритмів [4, 5]. Продемонстровано, що ця задача може бути сформульована як окремий випадок задачі про рюкзак.

Для важких задач хороші результати вдається отримати за допомогою метаевристик, побудованих на аналогіях з процесами в живій природі. Досить часто використовуються генетичні алгоритми [6, 7] і їх узагальнення – еволюційні алгоритми. Перспективним є використання алгоритму мурашиної колонії [8, 9]. Недоліками таких алгоритмів є відсутність загальних механізмів, що дозволяють застосовувати їх у складних задачах. Для кожного типу задач доводиться будувати свої варіанти алгоритмів.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ

Метою цієї роботи є розробка метаевристик для задачі 2-розбиття на основі фрагментарних структур. При цьому буде продемонстровано, що задача 2-розбиття має природну фрагментарну структуру. Будуть запропоновані варіанти універсального еволюційного алгоритму і алгоритму мурашиної колонії для задачі, що аналізується, і запропоновані методи оцінки ефективності й порівняння таких алгоритмів.

ФРАГМЕНТАРНА СТРУКТУРА І ФРАГМЕНТАРНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧІ 2-РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ

Фрагментарною структурою (X, E) на скінченній множині X [10] називається сімейство її підмножин $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ таке, що $\forall E_i \in E, E_i \neq \emptyset \exists e \in E_i : E_i \setminus \{e\} \in E$.

Елементи із множини E називатимемо *допустимими фрагментами*.

Отже, для кожного допустимого фрагменту E_i існує нумерація його елементів $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{is_i}\}$ така, що $\forall k = 1, 2, \dots, s_i \quad \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}\} \in E$. Одноелементні множини, які є допустимими фрагментами, будемо називати *елементарними фрагментами*. Фрагмент називатимемо *максимальним*, якщо він не є підмножиною жодного іншого фрагменту. Максимальний фрагмент може бути побудовано за допомогою наступного «жадібного» алгоритму:

- а) елементи множини X лінійно упорядковуються;
- б) на початковому кроці вибирається порожня множина $X_0 = \emptyset$;
- в) на кроці з номером $k+1$ вибирається перший по порядку елемент $x \in X \setminus X_k$ такий, що $X_k \cup \{x\} \in E$;
- г) алгоритм закінчує роботу, якщо на черговому кроці не вдалося знайти елемент $x \in X \setminus X_k$ з необхідною властивістю.

Алгоритм побудови максимального фрагменту у фрагментарній структурі, який наведений вище, називатимемо фрагментарним алгоритмом. Результат застосування фрагментарного алгоритму визначається заданим лінійним упорядкуванням на множині X . Отже, будь-який максимальний фрагмент може бути описаний деякою перестановкою елементів множини X . Нехай $A \in E$. Умова для елемента $x \in X$, за якої $A \cup \{x\} \in E$ будемо називати *умовою приєднання елемента x* .

Трудомісткість фрагментарного алгоритму визначається такою теоремою:

Теорема. Якщо $A \in E$, $\forall x \in X$ й існує алгоритм поліноміальної трудомісткості за числом елементів множини X для перевірки умови приєднання елемента x , то задача побудови максимального фрагмента є поліноміально розв'язуваною.

Продемонструємо тепер, що завдання 2-розбиття мультимножини має фрагментарну структуру. Нехай задано непорожня мультимножина чисел X . Кожну одноелементну підмножину мультимножини X вважатимемо елементарним фрагментом. Нехай $M = \sum_{x \in X} x$ –

сума всіх елементів мультимножини. Допустимим фрагментом вважається підмножина $A \subseteq X$, сума елементів якої не перевищує $\frac{1}{2}M$. Кожному упорядкуванню елементарних

фрагментів відповідає єдина підмножина $Y \subseteq X$ мультимножини X , яка є максимальним допустимим фрагментом з цього упорядкування (отримана шляхом застосування фрагментарного алгоритму). Дві підмножини Y і $X \setminus Y$ утворюють 2-розбиття мультимножини X . Звичайно, не кожне 2-розбиття мультимножини X відповідає максимальному фрагменту фрагментарної структури. Однак легко показати, що будь-який оптимальний розв'язок задачі 2-розбиття може бути отриманий фрагментарним алгоритмом при деякому упорядкуванні елементарних фрагментів.

Для оптимізаційних задач на фрагментарній структурі можна запропонувати низку метаевристик [10]. Дві з них будуть розглянуті нижче.

ЕВОЛЮЦІЙНА МОДЕЛЬ НА ФРАГМЕНТАРНІЙ СТРУКТУРІ Й ЕВФ-АЛГОРИТМ

Розглянемо тепер задачу пошуку максимального за вагою фрагмента на зваженій фрагментарній структурі. Такий фрагмент надалі називатимемо оптимальним. Як зазначалося вище, будь-який максимальний фрагмент однозначно визначається деякою перестановкою елементів множини X . Отже, будь-яка перестановка елементів X визначає

якийсь максимальний фрагмент. Таким чином, задача пошуку оптимального фрагмента – це оптимізаційна задача на множині перестановок.

Властивості фрагментарних структур дозволяють побудувати особливий клас еволюційних алгоритмів на фрагментарних структурах – ЕВФ-алгоритми.

ЕВФ-алгоритм є комбінацією еволюційного і фрагментарного алгоритму. Наведемо відповідну еволюційну модель і принцип дії такого алгоритму [11].

Як множину допустимих розв'язків розглянемо підмножину максимальних фрагментів на заданій фрагментарній структурі. Кожен фрагмент з цієї множини визначається як результат роботи фрагментарного алгоритму при деякій заданій перестановці елементарних фрагментів. Отже, будь-якому допустимому розв'язку відповідає певна перестановка чисел $1, 2, \dots, N$, де N – кількість елементарних фрагментів. Для кожного допустимого розв'язку визначено значення цільової функції.

Базова множина X еволюційної моделі – це множина $S_N = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ всіх перестановок чисел $1, 2, \dots, N$. Оператор побудови початкової популяції виділяє довільну підмножину заданої потужності Q з множини X .

Правило обчислення критерію селекції влаштовано у такий спосіб: по заданій перестановці фрагментів за допомогою фрагментарного алгоритму будується максимальний допустимий фрагмент і обчислюється значення цільової функції задачі для цього фрагмента.

Наведемо тепер оператор кросоверу. Нехай $U = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ і $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ – дві довільні перестановки. Перестановка-нащадок будується таким чином: послідовності U і V проглядаються в порядку проходження елементів. На k -му кроці вибирається найменший з перших елементів послідовностей і додається в нову перестановку – нащадок. Потім цей елемент буде видалений з двох послідовностей-батьків. Наприклад,

$$K((1,4,2,3,7,8,6,5), (7,6,2,1,3,5,8,4)) = (1,4,2,3, 7,6,5,8).$$

Оператор мутації M виконує випадкову транспозицію в перестановці.

Оператор селекції вибирає випадковим чином набір пар з поточної популяції.

Оператор еволюції впорядковує елементи проміжної популяції в послідовність за спаданням значення критерію селекції. В якості нової поточної популяції вибираються перші Q елементів послідовності.

Звичайне правило зупинки – кількість поколінь досягло граничного значення L . Краща за значенням критерію селекції перестановка з останньої побудованої популяції визначає наблизений розв'язок задачі (за допомогою фрагментарного алгоритму).

Запропонований підхід є універсальним і дозволяє застосовувати один і той же еволюційний алгоритм до будь-яких оптимізаційних задач на скінченних фрагментарних структурах.

АЛГОРИТМ МУРАШИНОЇ КОЛОНІЇ НА ФРАГМЕНТАРНІЙ СТРУКТУРІ

Ідея мурашиного алгоритму – моделювання поведінки мурах, пов'язаної з їх здатністю швидко знаходити найкоротший шлях від мурашника до джерела їжі й адаптуватися до умов, що змінюються, знаходячи новий найкоротший шлях [16, 17]. При своєму русі мураха мітить шлях феромоном, і ця інформація використовується іншими мурахами для вибору шляху. Це елементарне правило поведінки і визначає здатність мурах знаходити шляхи, близькі до оптимальних.

Продемонструємо, як подібний механізм застосувати до пошуку оптимальної перестановки. Процедура обчислення складатиметься з ряду циклів розрахунку. Кожен шлях мурашки між позиціями $1, 2, \dots, n$ визначатиметься перестановкою $s = (i_1, i_2, \dots, i_n)$. Мурахи мають власну

«пам'ять». У кожної мурашки є список уже відвіданих позицій – список заборон. Позначимо $J_{i,k}^t$ список позицій, які на циклі t необхідно відвідати k -му мурашки, що перебуває в позиції i .

Мурахи мають «нюх» – вони можуть вловлювати слід феромона, що підтверджує бажання мурашки пройти з позиції i в позицію j на підставі досвіду інших мурах. Кількість феромона на циклі з номером t при переході з позиції i в позицію j визначається величиною $\tau_{ij}(t)$. На початковому етапі цю кількість можна задавати довільно.

Імовірність переходу k -го мурашки з позиції i в позицію j на циклі з номером t визначається таким співвідношенням:

$$P_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha}{\sum_{l \in J_{i,k}^t} [\tau_{il}(t)]^\alpha}, & j \in J_{i,k}^t, \\ 0, & j \notin J_{i,k}^t, \end{cases}$$

де α – параметр, що визначає вагу сліду феромона. Кількість феромона, що відкладається, становить величину:

$$\Delta \tau_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k(t)}, & (i, j) \in T_k(t), \\ 0, & (i, j) \notin T_k(t), \end{cases}$$

де Q – позитивний параметр, $L_k(t)$ – значення цільової функції на перестановці, яка відповідає маршруту k -го мурашки на циклі з номером t . Зміна кількості феромона визначається таким виразом:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-p) \cdot \tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^m \Delta \tau_{ij,k}(t),$$

де m – кількість мурах, p – коефіцієнт «випаровування» ($0 \leq p \leq 1$).

Алгоритм зупиняє роботу, коли виконано визначене правило зупинки, наприклад, досягнута межа числа циклів. Мінімальна за значенням цільової функції перестановка, яка знайдена на останньому циклі, перетворюється в рішення вихідної задачі.

ОЦІНКИ ЕФЕКТИВНОСТІ ТА ПОРІВНЯННЯ МЕТАЕВРИСТИЧНИХ АЛГОРИТМІВ

Для оцінки ефективності метаевристичних алгоритмів для задачі 2-розбиття розроблено генератор випадкових задач, побудований за таким принципом.

Для заданого розміру (кількості елементів) множини генеруються випадковим чином цілі числа із заданого діапазону. Отже, параметрами генератора виступають потужність N мультимножини і межі A, B цілочисельного діапазону можливих значень чисел. Проводилось кілька серій експериментів з однаковими наборами параметрів алгоритмів. Кожна задача з тестового набору задач розв'язувалася трьома методами: методом локального пошуку (градієнтним методом) з випадковим вибором початкової точки, еволюційно-фрагментарним алгоритмом і алгоритмом мурашиної колонії. Параметри метаевристичних підбиралися у такий спосіб, щоб забезпечити приблизно однакову кількість обчислень цільової функції в кожному з методів. Результати розрахунків порівнювалися для кожної задачі і кожному з методів приписувалася певна кількість балів. Якщо метод займав перше місце для задачі (кращий результат), то йому приписувалося два бали, друге місце – 1 бал, третє – 0. Сума всіх набраних балів для серії задач визначалася як рейтингова оцінка

відповідного алгоритму. Результати розрахунків за серіями тестових завдань представлені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Рейтинг алгоритмів

Серія	К-ть задач	Інтервал значень чисел	Локальний пошук	Алгоритм мурашиної колонії	ЕВФ-алгоритм
1	100	1-1000	200	200	200
2	100	1-10000	41	197	198
3	100	1-100000	172	198	198
4	100	1-1000000	115	113	132
5	100	1-10000000	89	122	125

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто підхід до пошуку наближених розв'язків складної оптимізаційної задачі 2-розбиття мультимножини на основі застосування теорії фрагментарних структур. Показано, що задача 2-розбиття має фрагментарну структуру, причому оптимальні розв'язки цієї задачі досяжні у відповідній фрагментарній структурі. Такий висновок дає обґрунтування для застосування метаевристик на основі фрагментарних структур. Розглянуто дві такі метаевристики, а саме: еволюційно-фрагментарний алгоритм і алгоритм мурашиної колонії. Показано, що при малих значеннях елементів мультимножини алгоритми мають приблизно однакові характеристики за умови однакової трудомісткості. Однак при збільшенні значень елементів мультимножини кращі результати для цієї задачі показує еволюційно-фрагментарний алгоритм.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир, 1982. 416 с.
2. Brian Hayes. The Easiest NP Hard Problem. American Scientist. 2002.
3. Narendra Karmarkar, Richard M. Karp. The Differencing Method of Set Partitioning. Technical Report UCB/CSD 82/113. University of California at Berkeley: Computer Science Division (EECS), 1982.
4. Silvano Martello, Paolo Toth. 4 Subset-sum problem. Knapsack problems: Algorithms and computer interpretations. Wiley-Interscience, 1990.
5. Hans Kellerer, Ulrich Pferschy, David Pisinger. Knapsack problems. Springer, 2004. P. 97.
6. Holland J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. Boston, MA: MIT Press, 1992. 288 p.
7. Курейчик В. М. Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы. *Известия РАН. ТИСУ*. 1999. № 1. С. 144–160.
8. Dorigo M. Optimization, Learning, and Natural Algorithms. PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica, Politecnico Di Milano, Italy. 1992. 140 p.
9. Штовба С. Д. Муравьиные алгоритмы: теория и применение. *Программирование*. 2005. № 4. С. 1–16.
10. Козин И. В., Перепелица В. А., Максишко Н. К. Фрагментарные структуры в задачах дискретной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. № 6. С. 125–131.

REFERENCES

1. Garey, M. & Johnson, D. (1982). Computers and hard-to-solve problems. Moscow: Mir.
2. Brian, Hayes (2002). The Easiest NP Hard Problem. American Scientist.
3. Narendra, Karmarkar & Richard, M. Karp. (1982). The Differencing Method of Set Partitioning. Technical Report UCB/CSD 82/113. University of California at Berkeley: Computer Science Division (EECS).

4. Silvano, Martello & Paolo, Toth. (1990). 4 Subset-sum problem. Knapsack problems: Algorithms and computer interpretations. Wiley-Interscience, 1990.
5. Hans Kellerer, Ulrich Pferschy & David Pisinger (2004). Knapsack problems. Springer. P. 97.
6. Holland, J.H. (1992). Adaptation in Natural and Artificial Systems. Boston, MA: MIT Press.
7. Kureychik, V.M. (1999). Genetic algorithms. Condition. Problems. Prospects. Proceedings RAN. TiSU, No.1, pp. 144-160.
8. Dorigo, M. (1992). Optimization, Learning, and Natural Algorithms. PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica, Politecnico Di Milano, Italy.
9. Shtovba, S.D. (2005). Ant algorithms: theory and application. Programming, No. 4, pp. 1-16.
10. Kozin, I.V., Perepelitsa, V.A. & Maksishko, N.K. (2017). Fragmentary structures in problems of discrete optimization. Cybernetics and systems analysis, No. 6, pp. 125-131.

УДК 517.983.27

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-04

КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ «РЕЗЕРВУАР – РІДИНА» ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ НА ОСНОВІ ЕТАЛОННОЇ МОДЕЛІ

¹Константинов О. В., к. ф.-м. н., ¹Новицький В. В., д. ф.-м. н., ²Святовець І. Ф.

¹*Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, м. Київ-4, 01601, Україна*

²*Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, м. Запоріжжя, 69006, Україна*

akonst.im@ukr.net, v.novytskyu@gmail.com, sv.irina0702@gmail.com

Досліджено задачу побудови керування для забезпечення руху за заданим законом механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності постійних збурень – коливань вільної поверхні рідини. Дослідження проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 36 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Дослідження проводилося на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах усіх форм. Програмне керування системою побудовано на основі моделі твердого тіла із «затверділою» рідиною. Керування зі зворотним зв'язком будується аналітично на основі трьох підходів: модального принципу, порівняння з еталонною моделлю та мінімізації квадратичного функціонала. Керування зі зворотним зв'язком побудовано на основі лінійної системи у збуреннях, при цьому фазовими координатами є відхилення від програмного закону руху. Перетворення системи у канонічну відносно фазових координат форму дозволило значно спростити аналітичну процедуру побудови керування на основі модального підходу або співставлення з еталонною системою. Для шуканого класу систем отримані також в аналітичному вигляді формули для коефіцієнтів квадратичного функціоналу якості. Ці коефіцієнти можуть бути обрані у такий спосіб, щоб керування забезпечило одночасно необхідну якість перехідних процесів у системі та мінімум квадратичного функціонала. Для перевірки якості побудованого керування була розв'язана задача розгону резервуара із нерухомого положення за заданий час до необхідної швидкості і забезпечення в подальшому його рівномірного руху з цією швидкістю. Результати чисельних експериментів підтверджують доцільність використання лінійної системи у збуреннях як моделі для побудови керування зі зворотним зв'язком для складної нелінійної системи.

Ключові слова: резервуар з рідиною з вільною поверхнею, зворотний зв'язок, модальне керування, еталонна модель, квадратичний функціонал.

FEEDBACK CONTROL OF SYSTEM «RESERVOIR – LIQUID WITH A FREE SURFACE» BASED ON ETALON MODEL

¹Konstantinov O., ¹Novytsky V., ²Svyatovets I.

¹*Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
Tereschenkivska str., 3, Kiev-4, 301601, Ukraine*

²*Zaporizhzhya State Engineering Academy,
Soborny ave., 226, Zaporizhzhya, 69006, Ukraine*

The problem of the construction of control for the motion of a “reservoir – a free surface liquid” in the presence of constant perturbations, the oscillations of the free surface of the liquid, has been investigated. The research was carried out on the basis of a nonlinear multimode (up to 36 forms of oscillations) of a discrete model, which is based on the variational principle of Hamilton-Ostrogradsky. The research was carried out on the basis of the method of modal decomposition, taking into account the oscillations on the eigenfrequencies of all forms. The system’s software management is based on a solid-state solid-state model with a “hardened” liquid. Feedback management is based analytically on the basis of three approaches: the modal principle, comparison with the reference model and minimization of the quadratic functional. The feedback control is based on the linear system in disturbances, with phase coordinates being a deviation from the software law of motion. The transformation of the system into a canonical form relative to phase coordinates has made it possible to significantly simplify the analytical procedure for constructing control based on the modal approach or comparison with the reference system. For the desired class of systems, formulas for coefficients of a quadratic quality functional are also obtained in an analytic form. These coefficients can be chosen in such a way that the management provides at the same time the necessary quality of transients in the system and the minimum of the quadratic functionality. To verify the quality of the built control, the task of dispersing the tank from a stationary position at a given time to the required speed and ensuring subsequently its uniform motion with this speed was solved. The results of numerical experiments confirm the expediency of using a linear system in disturbances as a model for constructing feedback control for a complex nonlinear system.

Key words: tank with liquid with a free surface, feedback, modal control, reference model, quadratic functional.

ВСТУП

Інженерні конструкції, що містять у своєму складі резервуари, частково заповнені рідиною, широко використовуються у різних галузях техніки. Резервуари з рідиною є невід’ємною складовою частиною космічних апаратів з рідинним ракетним двигуном, літаків, гелікоптерів, нафтохранилищ та реакторів, що використовуються у хімічній та нафтохімічній промисловості. Останнім часом поширюється інтерес до задач динаміки та керування обмеженими об’ємами рідини у зв’язку з проблемами транспортування та збереження у складних умовах дії вібраційних, імпульсних, сейсмічних, вітрових та інших навантажень. З практики відомо, що баки з рідиною у літаках, танкерах, залізничних та автомобільних цистернах суттєво впливають на стійкість та якість керування транспортними засобами.

Проблемам керування рухомими об’єктами, які містять маси рідини з вільною поверхнею, зокрема ракетами-носіями та супутниками, присвячені роботи [1, 3, 4, 7, 12]. У них розглядалися задачі побудови автомату стабілізації на основі лінійної моделі динаміки системи та апарата теорії передавальних функцій. У колективній монографії [13] розглядалися задачі керування обертанням твердого тіла, яке має порожнину, частково заповнену ідеальною або в’язкою рідиною, на основі лінеаризованих моделей.

У роботі розглянуто один з підходів до побудови керування механічною системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» для забезпечення заданого закону руху. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі [6], яка описує сумісний рух резервуара та рідини під впливом керуючих сил. Використана модель побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

Для забезпечення мети керування спочатку будується так зване програмне керування, яке обчислюється для резервуара із «затверділою» рідиною за відсутності будь-яких збурень у

системі [5]. Оскільки збурення у системі – коливання вільної поверхні рідини – присутні, то на другому етапі будується керування зі зворотним зв'язком за збуреннями [2, 5, 8-11]. Керування зі зворотним зв'язком будується на основі лінійної моделі з використанням фазових змінних – переміщення та швидкості резервуару і амплітуди та швидкості вільної поверхні рідини. На основі методу, розробленого у роботах В. В. Новицького [8-11], система у збуреннях трансформується у форму, канонічну відносно фазових координат. Використовуючи канонічну форму, для системи у збуреннях послідовно будується керування зі зворотним зв'язком на основі модального принципу (вибір необхідного спектра системи), еталонної моделі (забезпечення відповідності до характеристик системи із заданими властивостями) та мінімізації квадратичного функціонала (вибір якого обумовлений заданими властивостями перехідних процесів).

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ «РЕЗЕРВУАР – РІДИНА З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ»

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи О. С. Лимарченко [6], математична модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського

$$\delta I = 0, \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при цьому функція Лагранжа задається у класичному вигляді Гамільтона-Остроградського як різниця між кінетичною та потенціальною енергією системи

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla} \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \frac{1}{2} \rho g \int_S (\xi^2 - H^2) dS + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon},$$

де ρ – щільність рідини; τ – область, яку займає рідина; $d\tau = r dr d\theta dz$ – циліндричні координати, при цьому вісь Oz має напрямок, протилежний напрямку вектора прискорення вільного падіння \vec{g} , а система координат пов'язана з нерухомим резервуаром; $\vec{\nabla} = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}$; φ – потенціал швидкостей рідини; ξ – збурення вільної поверхні рідини; S – поперечний переріз циліндричного резервуара; M_T та M_F – маса резервуара та рідини відповідно; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуара в поступальному русі; \vec{F} – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар, відносно точки O .

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуара з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестислової рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [6], розклади шуканих змінних представимо у вигляді

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta), \quad \varphi = \sum_i b_i(t) \varphi_i(r, \theta, z),$$

де $a_i(t)$ – амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ . Системи функцій

ψ_i і $\varphi_i = \psi_i \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}$ є розв'язком лінійної спектральної задачі [6] та мають вигляд

$$\psi_n(r, \theta) = J_n \left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R} r \right) \sin(n\theta) \cos(n\theta), \quad n=0,1,2,\dots; \quad m=1,2,\dots$$

У роботі [6] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики та асимптотичних методів нелінійної механіки у роботі [7] побудована математична модель, яка дозволяє дослідити поступальні та кутові рухи механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель являє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини відносно деякої нерухомої системи відліку:

$$\begin{aligned} & \sum_i \ddot{a}_i \cdot \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{ij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \bar{B}_r^1 + \sum_i a_i \bar{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \bar{B}_{rijk}^4 \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - \gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - \alpha_r^p \dot{a}_r - g N_r a_r + \\ & + \dot{\varepsilon} \cdot \left\{ \bar{B}_r^1 + \sum_i a_i (\bar{B}_{ir}^2 - \bar{B}_{ri}^2) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\bar{B}_{ijr}^3 - \bar{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\bar{B}_{ijk}^4 - \bar{B}_{rijk}^4) \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\bar{B}_i^1 + \sum_{i,j} a_j \bar{B}_{i,j}^2 + \sum_{i,j,k} a_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right] \right\} + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon} = \\ & = \bar{F} - (M_T + M_F) g \bar{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (1)-(2) містить $N+3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуара та рідини при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуара, однак ці рівняння взаємозв'язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1)-(2), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, та особливості прояву в ній внутрішніх лінійних та нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв'язку крайової задачі з визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти β_{ir}^q , γ_{ijr}^q , δ_{ijk}^q , α_r^s , N_r відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти \bar{B}_r^1 , \bar{B}_{ri}^2 , \bar{B}_{rij}^3 , \bar{B}_{rijk}^4 відображають взаємозв'язок коливань рідини та поступального руху резервуара.

ПОБУДОВА КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ НА ОСНОВІ МОДАЛЬНОГО ПРИНЦИПУ

Якщо зовнішня сила $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, яка діє на систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею», має за мету здійснення необхідного закону руху або мінімізацію заданого функціонала, то таку силу прийнято називати керуванням. У даній роботі поставлено задачу побудови керування F_y , яке б забезпечувало програмний рух резервуара з рідиною у напрямку Oy за заданим законом $\dot{\varepsilon}_y = f(t)$, $\varepsilon_y = \int f(t)dt$. При цьому закон руху рідини задається відповідно до моделі «затверділої» рідини, тобто збурення вільної поверхні рідини повинні бути відсутні $\xi(t) = \dot{\xi}(t) = 0$. Тоді програмне керування F_{PR} будуватиметься відповідно до другого закону Ньютона та має вигляд $F_{PR} = (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon}_y$. Однак оскільки у системі присутні збурення – збурення початкових умов параметрів руху ε_y , $\dot{\varepsilon}_y$, ξ , $\dot{\xi}$ та коливання вільної поверхні рідини, введемо у систему лінійне керування із зворотним зв'язком F_{BK} та постійними коефіцієнтами підсилення $l_i, i=1..4$ у вигляді $F_{BK} = \sum_{i=1}^4 l_i x_i$, яке корегуватиме існуючі похибки – відхилення наявних значень параметрів руху від заданих програмних значень

$$x_1 = \xi(t), \quad x_2 = \dot{\xi}(t), \quad x_3 = \varepsilon_y - \int f(t)dt, \quad x_4 = \dot{\varepsilon}_y - f(t).$$

Отже, повне керування, яке діє на систему, має вигляд

$$F_y = F_{PR} + F_{BK} = (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon}_y - \sum_{i=1}^4 l_i x_i,$$

де коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку мають позитивні значення $l_i \geq 0, i=1..4$, а сам зворотний зв'язок є негативним для забезпечення стійкості системи керування.

Керування зі зворотним зв'язком побудуємо на основі лінеаризованої системи рівнянь руху (1)-(2), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини $\xi(t)$ по першій антисиметричній формі a_1 з можливістю горизонтального переміщення резервуара по горизонтальній координаті ε_y . Відповідні рівняння мають вигляд

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0, \quad \rho B_1^{1y} \ddot{a}_1 + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

або, з урахуванням позначень, $\nu_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\nu_2 = \rho B_1^{1y}$, частота першої антисиметричної форми

$$\omega_1^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q},$$

можуть бути представлені як

$$\ddot{a}_1 + \nu_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \quad \nu_2 \ddot{a}_1 + M \ddot{\varepsilon}_y = F_y. \tag{3}$$

Введемо також позначення для фазових змінних $x_1 = a_1(t)$, $x_2 = \dot{a}_1(t)$, $x_3 = \varepsilon_y - \int f(t)dt$, $x_4 = \dot{\varepsilon}_y - f(t)$, $u = F_{BK}$ та приведемо систему диференціальних рівнянь (3) до нормальної форми Коші

$$\dot{x} = Fx + Gu, \tag{4}$$

де x – вектор фазових змінних $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, u – керування, а матриця F та вектор G мають вигляд

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

з позначеннями $\lambda_1 = -\frac{M\omega_1^2}{M - v_1v_2}$, $\lambda_2 = \frac{v_2\omega_1^2}{M - v_1v_2}$, $\beta_1 = -\frac{v_1}{M - v_1v_2}$, $\beta_2 = \frac{1}{M - v_1v_2}$. У системі (4)

фазові змінні $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ мають сенс збурень, тобто відхилень дійсних значень параметрів руху системи від програмних.

Побудоване керування зі зворотним зв'язком повинне забезпечити асимптотичну стійкість руху системи у збуреннях. Для його побудови будемо використовувати метод, розроблений В. В. Новицьким [8-11]: рівняння системи у збуреннях (7) послідовно перетворюються у форму, канонічну за керуванням, потім у канонічну форму Гессенберга і, нарешті, у канонічну форму Фробеніуса.

Оскільки у системі (4) вектор керування має розмірність 1, після перетворення система (4) у формі, канонічній за керуванням, повинна мати вигляд

$$\dot{y} = Ay + Bu, \quad B = [0001]^T. \quad (6)$$

Відповідно до [11] побудуємо неособливе перетворення $y = Tx$, де пряма та обернена матриця перетворення T мають вигляд

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta_2} \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи перетворення T до системи (4), тобто

$$A = TFT^{-1}, \quad B = TG,$$

отримаємо вирази для A та B у системі (6) у формі, канонічній щодо керування

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ \lambda_1 - \frac{\beta_1\lambda_2}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \frac{\lambda_2}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Другим етапом буде зведення системи (6) до канонічної форми Гессенберга. Матриці A та B у канонічній формі Гессенберга матимуть вигляд

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто матриця A матиме нижньотрикутну форму, а вектор B після перетворень залишається незмінним. Відповідно до методу [11], перехід матриці A системи (6) буде виглядати як серія неособливих перетворень $A^{(i)} = R^{(i)} A^{(i-1)} R^{(i-1)-1}$, $i = 1..4$, при цьому $A^{(0)} = A$. Введемо позначення $\gamma_1 = \lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_2}{\beta_2}$, $\gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\beta_2}$ для відповідних елементів матриці A , тоді система (6) у канонічній формі Гессенберга має вигляд

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2 \beta_1 \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \beta_1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Третім етапом буде зведення системи (6) до канонічної форми Фробеніуса. Матриці A та B у канонічній формі Фробеніуса будуть мати вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто у матриці A тільки у нижньому рядку можуть бути довільні значення, а вектор B після перетворень знову залишається незмінним. Як і на другому етапі, відповідно до методу [11], перехід матриці A системи (6) до канонічної форми Фробеніуса буде виглядати як серія неособливих перетворень $A^{(i)} = R^{(i)} A^{(i-1)} R^{(i-1)-1}$, $i = 1..4$. З урахуванням $\gamma_1 = \lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_2}{\beta_2}$, $\gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\beta_2}$

система (6) у канонічній формі Фробеніуса має вигляд

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{7}$$

Перемноження всіх матриць перетворень, які послідовно дозволяють перейти від початкової системи (4) до канонічної відносно фазових координат (тобто канонічної щодо керування та по Фробеніусу) системи (7), дає можливість отримати пряму та обернену матрицю для такої трансформації

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 & \frac{1}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} & 0 & \frac{1}{\beta_1(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)} \\ \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

У систему (7) підключимо зворотний зв'язок $u = -\sum_i k_i y_i$ та отримаємо рівняння замкненої системи

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \lambda_1 - k_3 & -k_4 \end{bmatrix} y. \quad (9)$$

Необхідно знайти значення коефіцієнтів k_i зворотного зв'язку, які б забезпечили асимптотичну стійкість замкненої системи (9). Як відомо [2, 11], коефіцієнтами характеристичного полінома матриці у формі Фробеніуса є елементи нижнього рядка, тому характеристичний поліном системи (9) має вигляд

$$f(z) = z^4 + k_4 z^3 + (k_3 - \lambda_1) z^2 + k_2 z + k_1. \quad (10)$$

Для забезпечення асимптотичної стійкості системи (9) необхідно, щоб корені характеристичного полінома були дійсними негативними числами [2, 11]. Скористаємося для цього модальним принципом керування, тобто будемо задавати властивості замкненої системи через завдання значень коренів характеристичного полінома, а потім знайдемо значення коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку. Задаємо значення коренів характеристичного полінома $\mu_i, i=1..4$, і отримуємо відповідний вигляд характеристичного полінома

$$f(z) = z^4 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) z^3 + (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4) z^2 + (\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4) z + \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4.$$

Порівнюючи значення коефіцієнтів характеристичного полінома шуканої (4) та канонічної (9) систем, отримаємо значення коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку в явному вигляді

$$k_1 = \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4, \quad k_2 = \mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4,$$

$$k_3 = \lambda_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4, \quad k_4 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4.$$

Визначаючи значення коренів характеристичного полінома, а, значить, і коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку, можна завдавати якість перехідних процесів у замкненій системі керування. Якщо задані корені характеристичного полінома є негативними дійсними числами або комплексними числами із негативною дійсною частиною, то система буде асимптотично стійкою [2, 11].

Оскільки координатне перетворення $y = Tx$ є неособливим, воно не змінює спектральні характеристики шуканої системи (4), а, значить, характеристичні поліноми замкненої шуканої системи (4) та канонічної системи (9) співпадають. Звідси можна визначити коефіцієнти підсилення l_i зворотного зв'язку у шуканій системі (4) на основі знання коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку у канонічній системі (9) у вигляді

$$l_1 = k_3 - \frac{\beta_2 k_1}{(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_1}, \quad l_2 = k_4 - \frac{\beta_2 k_2}{(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_1},$$

$$l_3 = \frac{k_1}{\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1}, \quad l_4 = \frac{k_2}{\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1} \quad (11)$$

та отримати замкнену систему керування (4), яка відповідає заданим вимогам, у вигляді

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \beta_1 l_1 & -\beta_1 l_2 & -\beta_1 l_3 & -\beta_1 l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 - \beta_2 l_1 & -\beta_2 l_2 & -\beta_2 l_3 & -\beta_2 l_4 \end{bmatrix} x.$$

ПОБУДОВА КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ НА ОСНОВІ ЕТАЛОННОЇ МОДЕЛІ

Вибір коренів характеристичного полінома (10) повинен забезпечувати не тільки стійкість системи керування (зокрема, асимптотичну), але й підтримувати на необхідному рівні якість перехідних процесів, що відбуваються в системі. Для досягнення цієї мети пропонується спочатку задати параметри еталонного руху (або еталонної системи), тобто рівень перерегулювання, тривалість переходних процесів, декремент згасання, а потім на основі отриманої інформації задати корені (або коефіцієнти) характеристичного полінома шуканої системи та обчислити коефіцієнти зворотного зв'язку [5].

Запишемо рівняння еталонної системи у вигляді

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & \nu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_4 & 0 & \lambda_4 & \nu_4 \end{bmatrix} y, \quad (12)$$

де параметри $\lambda_3, \nu_3, \lambda_4, \nu_4$ будемо завдавати, виходячи з міркувань тривалості та якості перехідного процесу (аперіодичний процес, наявність коливань тощо). Перетворимо еталонну систему в канонічну форму Фробеніуса

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_3 \lambda_4 & -\lambda_3 \nu_4 - \lambda_4 \nu_3 & -\nu_3 \nu_4 + \lambda_3 + \lambda_4 & \nu_3 + \nu_4 \end{bmatrix} Y,$$

тоді характеристичний поліном еталонної системи має вигляд

$$f(z) = z^4 + (-\nu_3 - \nu_4)z^3 + (\nu_3\nu_4 - \lambda_3 - \lambda_4)z^2 + (\lambda_3\nu_4 + \lambda_4\nu_3)z + \lambda_3\lambda_4.$$

Зробимо співставлення коефіцієнтів характеристичних поліномів системи у канонічній формі (10) та еталонної системи (12) та отримаємо такі співвідношення

$$k_1 = -\nu_3 - \nu_4, \quad k_2 = \nu_3\nu_4 - \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_1, \quad k_3 = \lambda_3\nu_4 + \lambda_4\nu_3, \quad k_4 = \lambda_3\lambda_4,$$

а далі, після підстановки у формули (11), обчислюємо коефіцієнти зворотного зв'язку в шуканій системі.

ПОБУДОВА КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦІОНАЛА ЯКОСТІ

Розглянемо задачу визначення оптимального керування системи в збуреннях (4)-(5), коли критерій оптимальності заданий у вигляді квадратичного функціонала якості

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + \nu u^2) dt, \quad (13)$$

де $\nu > 0$, Q – діагональна матриця, а квадратична форма $x^T Q x = \sum_{i=1}^4 q_i x_i^2 \geq 0$ при будь-якому x , тобто є невід'ємно визначеною. Як відомо з робіт [2, 11], оптимальне керування є лінійною функцією фазових координат

$$u = -\left(\frac{1}{\nu}\right) G^T P x,$$

де симетрична постійна матриця P є розв'язком нелінійного алгебраїчного рівняння Ріккати

$$-PF - F^T P + \left(\frac{1}{\nu}\right) P G G^T P = Q,$$

а оптимальному керуванню відповідає рішення, що задовольняє критерію Сільвестра, тобто головні мінори матриці P повинні бути більше нуля або дорівнювати нулю. Отже, для довільно заданих параметрів q_i в матриці Q оптимальне керування може не існувати, оскільки розв'язок P нелінійного алгебраїчного рівняння Ріккати може не задовольняти критерію Сильвестра.

Розглянемо обернену задачу синтезу квадратичного критерію якості (13) для побудови оптимального керування в системі у збуреннях (4)-(5). Для цього побудуємо таку матрицю Q в критерії (13), що оптимальне керування завжди буде існувати і задовольняти необхідним додатковим критеріям.

Систему у збуреннях (4)-(5) будемо використовувати у канонічній відносно фазових змінних формі (6)-(7), тоді функціонал якості (13) за допомогою перетворення $x = \tilde{T}y$,

$y = \tilde{T}^{-1}x$ буде мати вигляд $J = \int_0^{\infty} (y^T C y + \nu u^2) dt$, де

$$C = (\tilde{T}^{-1})^T Q \tilde{T}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)^2 q_3 & 0 & (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)\beta_2 q_3 & 0 \\ 0 & (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)^2 q_4 & 0 & (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)\beta_2 q_4 \\ (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)^2 q_3 & 0 & \beta_1^2 q_1 + \beta_2^2 q_3 & 0 \\ 0 & (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)^2 q_4 & 0 & \beta_1^2 q_2 + \beta_2^2 q_4 \end{bmatrix}.$$

Рівняння Ріккати для трансформованої системи та функціонала якості бути виглядати як

$$-SA - A^T S + \left(\frac{1}{\nu}\right) SBB^T S = C, \tag{14}$$

де S – розв’язок рівняння – симетрична матриця такої структури

$$S = \begin{bmatrix} s_5 & s_8 & s_9 & s_1 \\ s_8 & s_6 & s_{10} & s_2 \\ s_9 & s_{10} & s_7 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix}.$$

Оптимальне керування, побудоване на основі розв’язку рівняння Ріккати S , має вигляд

$$u = -\sum_i k_i y_i = -\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^4 s_i y_i,$$

тобто залежить тільки від компонентів $s_i, i=1..4$. Компоненти $s_i, i=1..4$ будемо знаходити на основі співставлення з еталонною моделлю, а всі інші повинні мати такі значення, щоб матриця Q у функціоналі (13) була невід’ємно-визначеною. У розгорнутому вигляді матричне рівняння (14) має вигляд

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_3 = \frac{s_1^2}{\nu}, \quad \beta_1^2 q_1 + \beta_2^2 q_3 = -2\lambda_1 s_3 - 2s_{10} + \frac{s_3^2}{\nu}, \quad (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_3 = -s_1 \lambda_1 - s_8 - \frac{s_1 s_3}{\nu},$$

$$(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)^2 q_4 = -2s_8 + \frac{s_2^2}{\nu}, \quad \beta_1^2 q_2 + \beta_2^2 q_4 = -2s_3 + \frac{s_4^2}{\nu}, \quad (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \beta_2 q_4 = -s_1 - s_{10} - \frac{s_2 s_4}{\nu},$$

$$\frac{s_1 s_2}{\nu} - s_5 = 0, \quad \frac{s_1 s_4}{\nu} - s_9 = 0, \quad \frac{s_2 s_3}{\nu} - \lambda_1 s_2 - s_6 - s_9 = 0, \quad \frac{s_3 s_4}{\nu} - \lambda_1 s_4 - s_2 - s_7 = 0,$$

тобто розпадається на три незалежні системи, із розв’язку останньої знаходимо компоненти s_5, s_6, s_7, s_9

$$s_5 = \frac{s_1 s_2}{\nu}, \quad s_6 = \frac{s_2 s_3 - s_1 s_4 - \nu \lambda_1 s_2}{\nu}, \quad s_7 = \frac{s_3 s_4 - \nu s_2 - \nu \lambda_1 s_4}{\nu}, \quad s_9 = \frac{s_1 s_4}{\nu},$$

а розв’язок перших двох дає залежність компонентів матриці функціонала Q від параметрів s_8, s_{10} у вигляді $q_i = f(s_8, s_{10})$ (символьні формули не наведені через їхню громіздкість).

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Розглядається круговий циліндричний резервуар з вертикальною поздовжньою віссю Oz , який здійснює поступальний рух у горизонтальній площині вздовж осі Oy за рахунок дії керуючої сили (керування). Резервуар радіуса $R = 1$ м та маси M_T частково заповнений водою з масою M_F до глибини $H = R$. Система рівнянь (1)-(2) зводиться чисельно до нормальної форми Коші, а потім чисельно інтегрується за допомогою стандартного методу Рунге-Кутта. При дослідженні динаміки системи резервуар – рідина у розкладах утримувалося $n_1 = n_2 = 12$ координатних функцій з точністю до квадратів амплітуд і $n_3 = 6$ з точністю до кубічних членів. Координатні функції розміщено у порядку зростання відповідних їм власних частот за винятком ψ_6 – другої осесиметричної форми. Крок чисельного інтегрування обирався $\Delta t = 0,1\pi\omega_{12}$ с, де ω_{12} – найвища власна частота у системі.

Розглянемо випадок, коли необхідно за допомогою керування $u = F_y$ забезпечити резервуару з рідиною спочатку набір швидкості від 0 до 5 м/с за 10 сек, а потім рівномірний рух з досягнутою швидкістю 5 м/с («комфортний» рух). Для набору швидкості на резервуар діє

програмне керування F_{PR} – прямокутний імпульс сили тривалістю 10 сек, який забезпечує рух резервуара з прискоренням 2 м/с^2 . Значення параметрів $\lambda_3 = -30$, $\nu_3 = -13$, $\lambda_4 = -2$, $\nu_4 = -3$ в еталонній системі (12) повинні забезпечити дисипацію перехідних процесів за аперіодичним законом на інтервалі часу до 5 сек. Відповідно до наведеної вище методики обчислюємо коефіцієнти підсилення у системі зворотного зв'язку $l_1 = -56156,3$, $l_2 = -13240,3$, $l_3 = 7329,2$, $l_4 = 14169,9$.

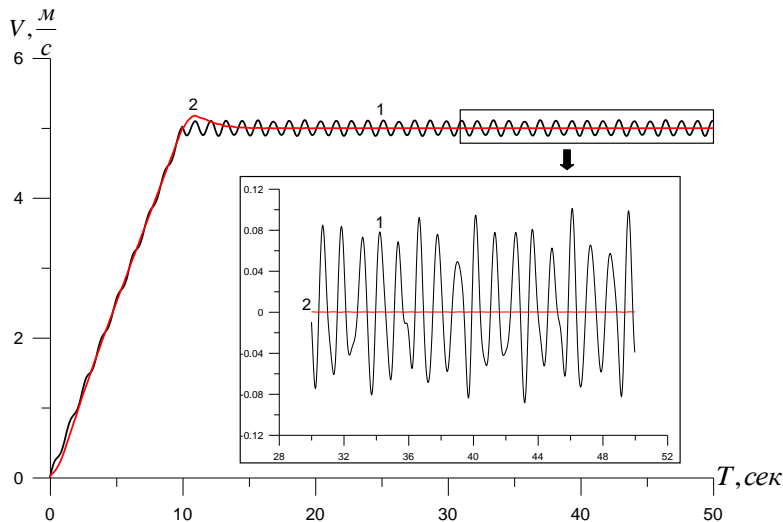


Рис. 1. Графік швидкості резервуара

На рис. 1 показані результати моделювання: 1) система з рідиною рухається за відсутності зворотного зв'язку (крива 1); 2) система з рідиною рухається за наявності зворотного зв'язку (крива 2). Прямокутним на основному графіку відмічений інтервал часу від 30 до 50 секунд і окремо показаний у збільшеному масштабі. Як видно з графіків, підключення до системи зворотного зв'язку забезпечує прийнятне наближення до шуканого програмного руху.

ВИСНОВКИ

Досліджено задачу побудови керування для забезпечення руху за заданим законом механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності постійних збурень – коливань вільної поверхні рідини. Програмне керування системою побудовано на основі моделі твердого тіла із «затверділою» рідиною. Керування зі зворотним зв'язком будується аналітично на основі трьох підходів: модального принципу, порівняння з еталонною моделлю та мінімізації квадратичного функціонала. Результати чисельних експериментів підтверджують доцільність використання лінійної системи у збуреннях як моделі для побудови керування зі зворотним зв'язком для складної нелінійної системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А., Рапопорт И. М. Динамика ракет. Москва: Машиностроение, 1969. 378 с.
2. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. Москва: Наука, 1976. 424 с.
3. Колесников К. С. Жидкостная ракета как объект регулирования. Москва: Машиностроение, 1969. 298 с.
4. Колесников К. С. Динамика ракет. Москва: Машиностроение, 1980. 376 с.
5. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. Москва: Наука, 1988. 328 с.
6. Лимарченко О. С., Ясинский В. В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. Киев: НТТУ КПИ, 1997. 338 с.

7. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Москва: Машиностроение, 1968. 532 с.
8. Новицкий В. В. Модальное управление механическими системами. *Вопросы устойчивости и управления навигационных систем*. Киев: Институт математики АН УССР, 1988. С. 70–75.
9. Новицкий В. В. Декомпозиция линейных систем и модальное управление. Киев: Институт математики АН УССР, 1990. 27 с. (Препринт Инст-т математики АН УССР).
10. Новицкий В. В. Обобщение метода модальной декомпозиции на нестационарные системы. *Устойчивость и управление в механических системах*. Киев: Институт математики НАН Украины, 1988. С. 36–42.
11. Новицкий В. В. Декомпозиція та керування в лінійних системах. Київ: Інститут математики НАН України, 2008. 252 с.
12. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. Москва: Машиностроение, 1975. 416 с.
13. Gurchenkov A., Nosov M., Tsurkov V. Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies. CRC Press, 2013. 160 p.

REFERENCES

1. Abgaryan, K.A. & Rapoport, I.M. (1969). Rocket dynamics. Moscow: Mashinostroenie.
2. Andreev, Yu.N. (1976). Finite-dimensional objects control. Moscow: Nauka.
3. Kolesnikov, K.S. (1969). Liquid rocket as control object. Moscow: Mashinostroenie.
4. Kolesnikov, K.S. (1980). Rocket dynamics. Moscow: Mashinostroenie.
5. Krut'ko, P.D. (1988). Inverse problems of the dynamics of controllable systems. Nonlinear models. Moscow: Nauka.
6. Limarchenko, O.S. & Yasinskiy, V.V. (1997). Nonlinear dynamics of structures with liquid with free surface. Kiev: KPI.
7. Mikishev, G.N. & Rabinovich, B.I. (1968). Dynamics of a solid body with cavities partially filled with a liquid. Moscow: Mashinostroenie.
8. Novytskyy, V.V. (1988). Modal control of mechanic systems. Pratsi In-tu matematyki NAN Uktainy, pp. 70-75.
9. Novytskyy, V.V. (1990). Linear systems decomposition and modal control. Pratsi In-tu matematyki NAN Uktainy, 27 p. (Preprint).
10. Novytskyy, V.V. (1988). A generalization of the modal decomposition method for non-stationary systems. Pratsi In-tu matematyki NAN Uktainy, pp. 36-42.
11. Novytskyy, V.V. (2008). Decomposition and control in the linear systems. Kiev: Institute of mathematics of NAS of Ukraine.
12. Rabinovich, B.I. (1975). Introduction to the dynamics of rocket carriers of space vehicles. Moscow: Mashinostroenie.
13. Gurchenkov, A., Nosov, M. & Tsurkov, V. (2013). Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies. CRC Press.

ЗАСТОСУВАННЯ АНСАМБЛЕВОГО НАВЧАННЯ В ЗАДАЧАХ КЛАСИФІКАЦІЇ АКУСТИЧНИХ ДАНИХ

Кривохата А. Г., Кудін О. В., к. ф.-м. н., Давидовський М. В., Лісняк А. О., к. ф.-м. н.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

avk256@gmail.com

Сьогодні розробка машин з чуттєвими можливостями, такими як зір та слух, є однією з визнаних складних проблем у техніці та інформатиці. Системи, які мають можливість визначати сенс з аудіовізуальної інформації, усе частіше використовуються як в науковій галузі, так і в промисловості. Отже, безумовно, є необхідність у ефективних підходах для автоматичного розпізнавання звукових, графічних та відеоданих. На думку авторів, методи машинного навчання мають бути висвітлені насамперед в цьому контексті як найбільш популярні та перспективні засоби розробки подібних проблем. У запропонованій статті розглядаються моделі та методи машинного навчання, що використовуються для вирішення проблеми класифікації акустичних даних різного походження, таких як мова, музика, звуки природи тощо. Одним з практично важливих напрямів у рамках даного сімейства проблем є розробка систем машинного слуху. Іншим, особливо важливим напрямом є розробка автоматизованих систем призначення міток звукозаписам (оцінка схожості треків, системи рекомендацій музичних записів тощо), де під «міткою» розуміється коротке ім'я, яке певним чином характеризує звуковий файл. Важливо зазначити, що для вирішення вищезгаданих проблем не існує єдиного підходу. Отже, необхідно проводити більш детальний аналіз різних методів машинного навчання. В основному процес автоматизованого класифікування звуку можна розділити на чотири етапи: обробку аудіоданих, вилучення характеристик, застосування алгоритмів машинного навчання та оцінку точності. На етапі аудіопредставлення вихідний акустичний сигнал піддається сегментації на короткі фрагменти за допомогою деякої віконної функції. Загальний підхід тут полягає в тому, щоб перетворити акустичний сигнал на кадри певної довжини. Отримання компактного зображення акустичних характеристик сигналу є метою стадії вилучення характеристик. На цьому етапі використовуються спеціальні коефіцієнти, такі як швидкість нульового переходу, форма спектра, короткочасні перетворення Фур'є, мел-частотні кепстральні коефіцієнти тощо. Аудіокласифікація традиційно включає такі методи машинного навчання, як метод К-середніх, SVM, KNN, дерева рішень та інші. Протягом останніх двох десятиліть методика глибокого навчання також отримала популярність для задач класифікації. У цьому контексті слід звернути увагу на методи, засновані на згорткових та рекурентних нейронних мережах. Глибокі нейронні мережі можуть мати достатню точність при роботі як з вихідним акустичним сигналом, так і з набором вилучених характеристик. Своєю чергою етап оцінки точності використовує методи оцінки якості побудованої моделі. У роботі пропонується короткий огляд сучасних методів машинного навчання та методів, що використовуються для автоматичної класифікації акустичних даних. Наведено математичні основи методів машинного навчання та проаналізовано їх сильні та слабкі сторони. Розроблено модель та її програмну реалізацію для класифікації акустичних даних на основі згорткових нейронних мереж та побудови ансамблю нейронних мереж.

Ключові слова: акустичні дані, класифікація, машинний слух, машинне навчання.

APPLYING OF ENSEMBLE METHODS IN ACOUSTIC DATA CLASSIFICATION

Kryvokhata A. G., Kudin O. V., Davidovsky M. V., Lisnyak A. O.

*Zaporizhzhya National University,
Zhykovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

avk256@gmail.com

Today, developing machines with sensing capabilities, such as vision and hearing is one of the acknowledged challenging problems in engineering and computer science. The systems which have the ability to extract meaning from audiovisual information are increasingly used both in academia and industry. Thus, more effective approaches for automatic recognition of sound, image, and video data are definitely needed. To the authors' opinion, the machine learning methods should primarily be

highlighted in this context as the most popular and promising means for solving this sort of problems. The proposed article discusses the models and methods of machine learning used to solve the problem of classifying acoustic data of various origins, such as speech, music, sounds of nature, etc. One of the practically important directions within the scope of this family of problems is the development of machine hearing systems. Another particularly important direction is the development of automated audio tagging systems (estimating song similarity, music recommendation systems, etc.), where “tag” is understood as a short name for a label applied to some audio by an automatic tagging algorithm. It is important to notice that there is no “one-fits-all” approach to address the abovementioned sort of problems. Thus, a finer-grained look at various machine learning techniques is needed. Basically, automated audio tagging systems can be roughly decomposed into four parts: audio representation, features extraction, machine learning algorithm, and accuracy estimation. Audio representation stage implies that a raw signal is subject to segmentation into shorter signal chunks by some windowing process. A common approach here is to convert the original acoustic signal to the frames of a certain length. Receiving a compact representation of the acoustic characteristics of a signal is the aim of the feature extraction stage. This stage exploits special coefficients such as Zero-crossing rate, Spectrum shape, Short-Time Fourier Transform and Mel-frequency cepstral coefficients. Audio classification traditionally involves such machine learning methods as K-means, SVM, KNN, decision trees to name a few. During the last two decades, the deep learning based methods have also gained popularity for audio tagging. The methods based on convolutional neural networks or recurrent neural networks should be referenced in this context. Deep neural networks can benefit from operating on both raw acoustic signal and features extracted from it. In turn, accuracy estimation stage deploys quality assessment methods. In this paper, we propose a brief survey of the state-of-the-art machine learning approaches and methods used for automated classification of acoustic data. We study the mathematical foundations of the overviewed methods and analyze their strengths and weaknesses. Further we build a proof-of-concept system for the classification of acoustic data on the basis of convolutional neural networks and construct a neural network ensemble. In addition, we outline a direction for further development of machine hearing systems based on our analysis and experimental model. The approach which follows this direction can use different types of ensemble learning methods with classifiers based on feature extraction and deep neural networks.

Key words: acoustic data, classification, machine hearing, machine learning.

ВСТУП

Сучасний розвиток засобів телекомунікації та поширеність інструментів для редагування вмісту інтернет-сайтів призводить до того, що в глобальній мережі Інтернет поряд з текстовою інформацією великого поширення набувають мультимедійні дані різного вмісту, зокрема акустичні дані. Прикладом акустичних даних можуть бути музичні записи, записи лекцій, доповідей, записи звуків різного походження тощо. Для можливості пошуку серед таких даних зазвичай використовуються метадані, які описують у текстовому вигляді вміст відповідного аудіофайлу. Формування таких метаданих виконується вручну, що не завжди зручно при обробці великих об'ємів даних. Тому актуальною задачею є розробка автоматизованих систем класифікації акустичних даних.

Прикладом автоматизованих систем обробки мультимедійних даних є рекомендаційні системи, які пропонують користувачам певний контент залежно від даних, указаних у профілі користувача та історії попередніх запитів. Також актуальним напрямом в останні роки є машинний слух [17]. Однією із задач цього напрямку є розробка ефективних методів класифікації звуків різного походження, наприклад мови, музики, природних звуків тощо. При цьому, найбільш досліджуваними є саме задачі аналізу музики та мови [4]. Іншою задачею яка досить часто розглядається авторами, є виявлення звукових подій. Ця задача спрямована на обробку неперервного акустичного сигналу та перетворення його в символічні описи відповідних звукових подій, присутніх на слуховій сцені [17].

У загальному вигляді процес аналізу цифрових акустичних даних зазвичай складається з декількох етапів. На початковому етапі виконується попередня обробка неперервного акустичного сигналу з метою представлення його у дискретному цифровому вигляді. При цьому зазвичай використовується ряд стандартних підходів [8, 20]. Далі виділяються ознаки акустичного сигналу, суттєві для розв'язання поставленої задачі аналізу. Серед найбільш широко вживаних ознак використовуються коефіцієнти перетворення Фур'є та автокореляції, мел-кепстральні коефіцієнти, хромограми. Після цього отримані ознаки

використовуються як вхідні параметри математичної моделі (наприклад алгоритму класифікації, кластеризації або нейронної мережі). На заключному етапі виконується верифікація отриманих результатів та впровадження розробленої системи акустичного аналізу.

Серед великої кількості оглядових робіт, присвячених тематиці розробки систем машинного слуху, можна виділити декілька, які є найбільш загальними. Так, в оглядових статтях [4, 6, 23] наводиться опис компонент системи автоматичної класифікації звуків, яка містить модулі попередньої обробки, екстракції ознак, алгоритм навчання та модуль обчислень.

У [4] детально розглянуто підходи до виділення ознак сигналу. Наводяться критерії, за якими можна класифікувати мову, музику та природні звуки. Виділяються методи, засновані на фізичних властивостях сигналів та особливостях людського сприйняття звуків. Частіше за все використовуються методи виділення ознак, які представляють акустичний сигнал у таких областях: часовій, частотній, кепстральній та вейвлет.

Огляди [6, 24] містять аналіз загальних підходів та публікацій з автоматичної класифікації музичних записів за жанрами. Пропонується множина найбільш інформативних міток, які можуть використовуватись як класи при навчанні класифікаторів. Розглядаються найбільш вживані джерела розмічених акустичних даних, які можуть використовуватися в системах навчання з учителем. Зазвичай це відкриті музичні бази в мережі Інтернет, розмічені користувачами записи, наприклад у соціальних мережах, та дані, які згенеровано спеціально для розв'язання задач машинного слуху. У роботі [24] окремо розглядається питання оцінки ефективності систем класифікації музичних файлів за жанрами.

Для класифікації даних за певними ознаками можуть використовуватися як статистичні методи (класифікатор Баєса [10, 20], дискримінантний аналіз [7, 13], EM алгоритм тощо), так і методи, які ґрунтуються на мірах схожості та відмінності (метод k-середніх [8, 15, 21], метод опорних векторів [8, 13, 19], метод k найближчих сусідів [8, 9] тощо).

В останні роки все більше робіт присвячено використанню нейронних мереж як при вилученні ознак з даних, так і безпосередньо при класифікації [5, 7, 9, 16, 17, 19, 21, 23, 25-27].

У роботі [12] визначається онтологія, що формалізує набір аудіоданих, який може використовуватися для навчання систем машинного слуху. Онтологія, яка вводиться в статті, визначає систему можливих категорій звуків для розпізнавання. Пов'язаний із цією роботою ресурс research.google.com/audioset містить набір розмічених вручну звукових роликів з YouTube (понад 2 мільйони файлів). Кожен з 10-ти секундних сегментів може відноситись до одного чи декількох класів онтології. Також відомими платформами з даними для систем машинного слуху є freesound.org, DCASE (dcase.community) та певною мірою kaggle.com [10, 11].

З аналізу літературних джерел можна зробити висновок, що задача класифікації акустичних даних і загалом розробки систем машинного слуху є досить актуальною. Опубліковані на сьогодні наукові статті можна умовно розділити на три категорії.

До першої відносять роботи, у яких виконується попередня обробка сигналу з метою сегментації та вилучення ознак, далі навчається класифікатор, на вхід якого подаються вектори ознак. У цих роботах зазвичай застосовується перетворення Фур'є, обчислення мел-частотних кепстральних коефіцієнтів та інших частотних або спектральних характеристик сигналу. З класифікаторів частіше застосовуються метод опорних векторів, k-найближчих сусідів, дерева прийняття рішень, метод k-середніх, нейронні мережі та інші. Може також застосовуватися ансамбль декількох класифікаторів, у такому випадку клас-переможець визначається шляхом голосування.

До другої категорії можна віднести публікації, в яких автори намагаються автоматизувати процес побудови оптимального набору ознак для застосування класифікаторів. Серед підходів, які застосовуються для такої автоматизації, можна виділити генетичні алгоритми та нейронні мережі. Класифікатори використовуються ті ж, що і в публікаціях попередньої категорії.

У публікаціях третьої категорії застосовуються підходи глибинних нейронних мереж. Часто це згорткові нейронні мережі, на вхід яких можуть подаватися як дані без попередньої обробки, так і набори ознак акустичних даних. Ефективність такого підходу пояснюється багатошаровою архітектурою згорткових нейронних мереж. Передбачається наявність декількох типів шарів: шари згортки, у яких виділяються певного виду ознаки, агрегувальні шари, у яких відбувається зменшення розмірності та декілька повністю зв'язних шарів, у яких виконується класифікація. До недоліків такого підходу можна віднести складність налаштування нейронних мереж зі складною архітектурою та вимогливість до обчислювальних ресурсів. Реалізація глибинних нейронних мереж зазвичай потребує системи паралельних та розподілених обчислень, залучення графічних процесорів GPU.

Метою цієї роботи є побудова системи класифікації акустичних даних різного походження на основі згорткових нейронних мереж та застосування підходу [14] для побудови ансамблю нейронних мереж. Перевагою такого підходу є його висока ефективність та адаптивність з точки зору вимогливості до обчислювальних ресурсів, оскільки, за необхідності, можна коригувати кількість класифікаторів, які входять до ансамблю.

ПОПЕРЕДНЯ ОБРОБКА ТА ОБЧИСЛЕННЯ ОЗНАК СИГНАЛУ

На практиці безпосередній аналіз звукового сигналу в часовій області (залежність амплітуда-час) майже не застосовується, оскільки не є досить ефективним та вимагає додаткових часових та просторових ресурсів для збереження і обробки даних. Для найбільш раціонального представлення акустичного сигналу використовують класичні методи цифрової обробки сигналів. Серед них можна виділити перетворення, які розкладають сигнал за ортогональними базисними функціями: перетворення Фур'є, Хартлі, Мелліна, вейвлет тощо, а також різноманітні ознаки сигналу, які обчислюються на базі цих перетворень, наприклад мел-кепстральні коефіцієнти, центроїди, енергія сигналу тощо [1]. Часто використовуються одиниці виміру, які пов'язані з психофізичними особливостями людського сприйняття частоти та сили звуку: мел, барк, фон тощо. Наприклад, мел – це одиниця суб'єктивної частоти звуку, яка сприймається людиною. Вона пов'язана з частотою сигналу (f , Гц) таким співвідношенням [1]:

$$m = 1127,01048 \ln \left(1 + \frac{f}{700} \right).$$

Крім представлення сигналу в часовій області, зазвичай використовується також частотна область (амплітуда-частота, спектр) та кепстральна.

Нехай $x(m)$ – вихідний цифровий сигнал, тобто сигнал, який отримано з аналогового шляхом дискретизації за часом та квантуванням за рівнем. Тоді дискретне перетворення Фур'є задається таким рівнянням [1]:

$$S(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-i \frac{2\pi}{N} mn}, \quad n = \overline{0, N-1},$$

а зворотне дискретне перетворення Фур'є [1]:

$$x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{i \frac{2\pi}{N} mn}, \quad m = \overline{0, N-1}.$$

Послідовність $S[n]$ називається спектром сигналу $x[m]$. Для того, щоб обчислити кепстр потужності сигналу, необхідно обчислити зворотнє перетворення Фур'є від логарифма модуля спектра [4]:

$$C(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |S(n)|^2 e^{i \frac{2\pi}{N} mn}, \quad m = \overline{0, N-1},$$

де

$$|S(n)|^2 = |\operatorname{Re} S(n)|^2 + |\operatorname{Im} S(n)|^2.$$

Перетворення сигналу з часової області у спектр або кепстр дозволяє отримати більш компактне та наглядне представлення інформації. Наприклад, одна гармоніка, яка в часовій області може мати безліч точок, перетворюється на одну точку в спектрі.

Зазвичай на практиці використовується швидке перетворення Фур'є в комбінації з віконною функцією, яка дозволяє обробляти звуковий сигнал по частинах довжиною в декілька мілісекунд. Для отриманих значень спектра кожного вікна t у задачах класифікації звуку додатково обчислюються такі ознаки сигналу.

Перетин нульової позначки. Обчислюється як кількість змін знаку послідовних значень цифрового сигналу [1, 4, 7, 8, 18]:

$$Z_t = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N |\operatorname{sign}(x(m)) - \operatorname{sign}(x(m-1))|,$$

де функція $\operatorname{sign}(\)$ приймає значення 1 або 0 відповідно для позитивних та негативних чисел.

Спектральний центроїд. Визначається як центроїд, або центр ваги, значень спектра сигналу [1, 4, 7, 8, 18, 22]:

$$C_t = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} n |S(n)|}{\sum_{n=0}^{N-1} |S(n)|}.$$

Спектральна пропускна здатність p -го порядку. Визначається через поняття центроїду [1, 4, 7, 8, 18]:

$$B_t^p = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (n - C_t)^p |S(n)|^p}{\sum_{n=0}^{N-1} |S(n)|^p}.$$

Енергія сигналу. Є важливим параметром при обробці сигналів з перемінною силою звуку, наприклад голосових сигналів [1, 4, 7, 8, 18]:

$$E_t = \sum_{m=0}^{N-1} (x(m))^2.$$

Спектральна частота згортання. Визначає частоту R_t , нижче якої знаходиться k -та частина значень спектра [1, 4, 7, 8, 18]:

$$\sum_{m=0}^{R_t} S(n) = k \sum_{n=0}^{N-1} S(n),$$

де k змінюється від 0 до 1; на практиці зазвичай використовують значення 0.8–0.9.

Мел-частотні кепстральні коефіцієнти. Для отримання коефіцієнтів вихідний цифровий сигнал підлягає перетворенню Фур'є, потім виконується перехід у мел-шкалу, накладання цифрових фільтрів та обчислення кепстру. Ці коефіцієнти широко застосовуються в задачах класифікації звуку, розпізнавання мовлення тощо.

Окрім указаних, практично універсальних ознак, можуть використовуватися й інші, більш спеціалізовані. Наприклад, для аналізу музичних даних використовуються так звані хромограми. Хромограма – це проекція спектра звуку в 12 класів, які представляють собою 12 півтонів музичної октави. Очевидно, що таке представлення ефективне для класифікації або кластеризації музичних композицій.

Обчислення наведених та інших ознак звукових даних, які часто застосовуються на практиці, може відбуватися за допомогою таких спеціалізованих бібліотек, як наприклад Python-бібліотека Librosa.

Після виконання попередньої обробки звуку та обчислення векторів характерних ознак можуть застосовуватися класифікатори, такі як метод опорних векторів, метод k -найближчих сусідів, дерева прийняття рішень.

ВИКОРИСТАННЯ ЗГОРТКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Останніми роками для розпізнавання зображень та звуку широко застосовуються підходи, засновані на використанні глибинних нейронних мереж. Часто це згорткові нейронні мережі, на вхід яких можуть подаватися як дані без попередньої обробки, так і набори виділених ознак даних. При цьому точність отриманої моделі для задач розпізнавання та класифікації часто перевищує класичні підходи машинного навчання. Ефективність такого підходу пояснюється багат шаровою архітектурою згорткових нейронних мереж з використанням декількох типів шарів, які чергуються один з одним, утворюючи складну структуру.

У шарі згортки виконується афінне перетворення вхідного шару, який називається мапою ознак, у вихідний, який є, відповідно, входом для наступного шару нейронів. Нехай в l -му шарі згортки виконується лінійне перетворення двомірних вхідних даних, які представлені матрицею $X_{M \times N}^l$ у вихідну матрицю $Y_{M' \times N'}^l$ ($M' \leq M, N' \leq N$) за допомогою вагової матриці $W_{d \times d}$ ($d < M, N$):

$$y_{i',j'}^l = \sum_{a,b=0}^{d-1} W_{a,b} x_{i+a,j+b}^l.$$

Матриця $W_{d \times d}$ називається ядром згортки, а її значення визначаються алгоритмом навчання нейронної мережі. Зазвичай це варіанти методу градієнтного спуску, такі як пакетний або стохастичний градієнтний спуск. Фактично ядро згортки – це вікно перетворень, яке переміщується мапою ознак, обчислюючи результуючі значення. Коефіцієнти ядра згортки можуть застосовуватись декілька разів до різних областей мапи ознак. Також операція згортки призводить до того, що кожне значення на виході згорткового шару залежить тільки від декількох вхідних значень, тоді як у повнозв'язній нейронній мережі кожне значення залежить від усіх входів. Отже, операцію згортки можна інтерпретувати як виділення певних локальних ознак вхідних даних. Чим більше в нейронній мережі шарів згортки, тим більше локальних ознак може бути виділено [3, 13, 28].

У класичній архітектурі згорткової мережі, після обчислення згортки, до мапи ознак застосовується нелінійна функція активації. Це може бути одна із функцій, які використовуються в нейронних мережах: логістична функція, гіперболічний тангенс, ReLU тощо [3, 13, 28].

Шари субдискретизації виконують зменшення розмірності мапи ознак, яка поступає на вхід з попереднього шару згортки. Зазвичай це перетворення виконується шляхом проходження по мапі ознак вікном, як це відбувається на етапі згортки, однак при субдискретизації обирається максимальне (або середнє) значення серед тих, що потрапили у вікно. Цей процес можна інтерпретувати як узагальнення ознак та, як наслідок, зменшення мапи ознак [3].

Останні шари згорткових нейронних мереж є багатошаровим перцептроном. Після декількох ітерацій послідовного виконання згортки та субдискретизації на вхід перцептрона поступає набір досить абстрактних ознак, які використовуються для навчання при класифікації [3, 13].

Завдяки своїй структурі глибинні нейронні мережі, при вдалому налаштуванні, можуть знаходити закономірності у вихідних даних та використовувати їх для розв'язання задач класифікації. Сучасні архітектури згорткових нейронних мереж можуть використовувати десятки шарів. Так, архітектура VGG (англ. Visual Geometry Group) використовує 19 шарів «згортка-нелінійність-субдискретизація», а GoogLeNet та DenseNet (англ. Dense Convolutional Network) відповідно 22 та 250 шарів [3]. Кількість шарів сучасних ResNet (англ. Residual Convolutional Network) вже близько тисячі. Також розробляються спеціальні архітектури для пристроїв з обмеженими ресурсами, наприклад MobileNets, SqueezeNet [3].

Реалізація глибинних нейронних мереж зазвичай потребує системи паралельних та розподілених обчислень, часто із залученням графічних процесорів (NVIDIA GPU), та може займати тижні [3, 13]. На цей момент існує декілька бібліотек (TensorFlow, Keras, Theano, Caffe, PyTorch, CUDA), у яких реалізовано основні архітектури глибинних нейронних мереж, зокрема згорткові мережі.

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ АНСАМБЛЕВОГО НАВЧАННЯ

Ансамблеве навчання передбачає об'єднання декількох моделей, наприклад класифікаторів, в одну модель з наступним узгодженням результатів усіх моделей за деяким алгоритмом. Дослідження свідчать, що ефективність ансамблю зазвичай вище ефективності окремих моделей [13]. При цьому висувається вимога відсутності кореляції між моделями, що входять до ансамблю.

Одним з підходів до побудови ансамблів є використання різних типів класифікаторів (наприклад дерева прийняття рішень, SVM, класифікатор Баеса тощо) та формування спільного прогнозу шляхом простого голосування, обчислення середнього або спеціального алгоритму машинного навчання. Альтернативою може бути навчання однакових типів класифікаторів на різних підмножинах тренувальних даних з подальшим осередненням результату прогнозу. Такий підхід іноді називається бегінгом. Ще один клас методів ансамблевого навчання – методи підсилення (бустінгу). Методи цього класу (AdaBoost, градієнтний бустінг) послідовно навчають класифікатори таким чином, щоб наступний підсилював результат попереднього [13].

Останнім часом саме використання ансамблів глибинних нейронних мереж призводить до розвитку в практичному застосуванні машинного навчання [3, 13, 15]. Але, незважаючи на високу точність, ансамблеве навчання нейронних мереж застосовується не так широко, як ансамблі більш класичних методів машинного навчання. Це пояснюється високою вимогливістю до часових та просторових ресурсів.

Більшість робіт із застосування ансамблю нейронних мереж направлена на дослідження методів генерації спільного результату з отриманих результатів навчених класифікаторів.

У роботі [14] пропонуються замість навчання M нейронних мереж навчати одну мережу. Основна ідея полягає в тому, що при застосуванні методу стохастичного градієнтного спуску запам'ятовуються значення вагової матриці при потрапленні у M точок локального мінімуму. Після цього для кожної з M вагових матриць генерується відповідна нейронна

мережа. Отже, час навчання ансамблю майже не відрізняється від часу навчання однієї нейронної мережі.

ОПИС ТЕСТОВОГО НАБОРУ АКУСТИЧНИХ ДАНИХ

Для тестування запропонованих підходу в роботі використовуються дані з ресурсу www.kaggle.com, а саме – набір даних Urban Sound Classification [11, 23]. Набір даних містить 3449 звукових файлів у форматі .wav для навчання та тестування системи. Вибірка для навчання містить звукові файли з 9 категорій. Здебільшого це вуличні міські звуки: шум транспорту, автомобільні сирени, дитячий сміх тощо. Мінімальна кількість файлів в одній категорії – 94, максимальна – 300. Тривалість звукових файлів переважно становить 4 с.

ОПИС МОДЕЛІ

Розв'язання задачі класифікації акустичних даних виконується в декілька етапів (рис. 1, а), основне призначення яких – підготовка даних та подальше навчання класифікаторів.

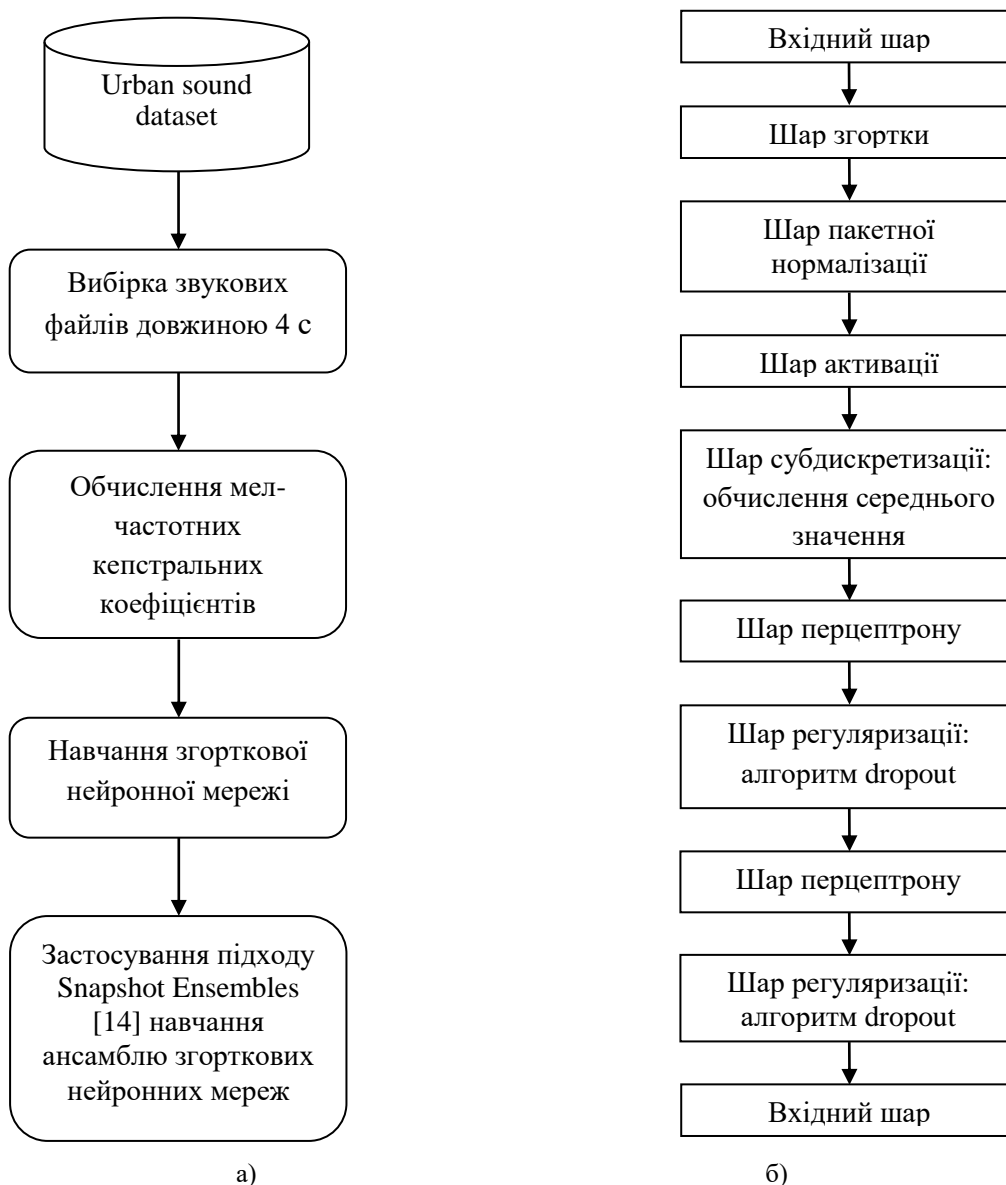


Рис. 1. Етапи розв'язання задачі та структура нейронної мережі

При цьому згорткова нейронна мережа, яка використовується безпосередньо для класифікації, має структуру, зображену на рис. 1, б. Одними з основних складностей, які виникають при навчанні нейронних мереж, є визначення способу початкової ініціалізації wag

мережі та проблема перенавчання. Параметри нейронної мережі та деталі реалізації засобами Python пакету Keras наведені на рис. 2.

Повна реалізація наведена за посиланням <https://www.kaggle.com/avk256/fork-of-urban-sound-class-using-cnn-snapshot-ensem?scriptVersionId=5625604>.

```

kernel_initializer='lecun_uniform'
bias_initializer='zeros'
kernel_regularizer=None
activation = "selu"
##### Визначення шарів згорткової нейронної мережі
model = models.Sequential()
model.add(Conv2D(128, 32, 32, border_mode="same",
                input_shape = input_shape, kernel_initializer=kernel_initializer,
                bias_initializer=bias_initializer, kernel_regularizer=None))
model.add(BatchNormalization())
model.add(Activation(activation))
model.add(AveragePooling2D())
##### Додавання повнозв'язного шару
model.add(Flatten())
model.add(Dense(1024, kernel_initializer=kernel_initializer, bias_initializer=bias_initializer))
model.add(Activation("relu"))
model.add(Dropout(0.6))
model.add(Dense(1024, kernel_initializer=kernel_initializer, bias_initializer=bias_initializer))
model.add(Activation("relu"))
model.add(Dropout(0.8))
model.add(Dense(9, kernel_initializer=kernel_initializer, bias_initializer=bias_initializer))
model.add(Activation('softmax'))
##### Компіляція моделі
##### Головні параметри ансамблю
M = 150 # Кількість станів, які зберігаються
nb_epoch = T = 200 # Кількість епох навчання
alpha_zero = 0.0001 # Коефіцієнт швидкості навчання
model_prefix = 'Model_'
snapshot = SnapshotCallbackBuilder(T, M, alpha_zero)
optimizer = optimizers.Nadam(lr=alpha_zero, beta_1=0.9, beta_2=0.999,
                             epsilon=None, schedule_decay=0.004)
model.compile(loss = "categorical_crossentropy", optimizer = optimizer,
             metrics = ["accuracy"])
history = model.fit(X_mfcc_train, y_train, batch_size = batch_size,
                  epochs = nb_epoch, verbose=2, validation_data = (X_mfcc_test, y_test),
                  callbacks=snapshot.get_callbacks(model_prefix=model_prefix))

```

Рис. 2. Програмна реалізація згорткової нейронної мережі

Точність побудованої моделі та функція похибки залежно від епох навчання наведені на рис. 3. Наводяться значення для навчальної та тестової вибірки.

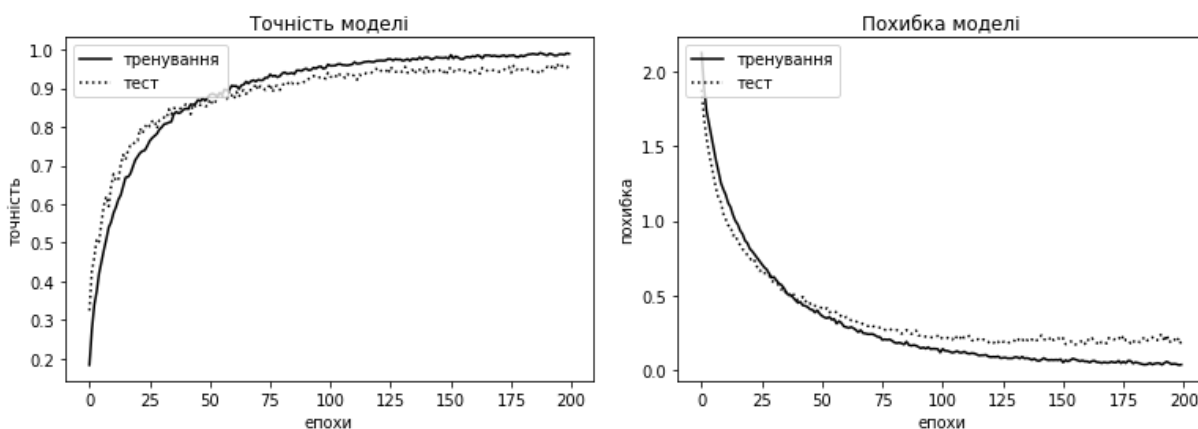


Рис. 3. Точність та похибка розробленої моделі

Ефективність прогнозування розробленої моделі за кожним класом можна розглянути за допомогою матриці розбіжностей. Індеси за строками позначають фактичні дев'ять класів, а за стовпцями – класи, спрогнозовані за допомогою розробленої моделі. Отже, матриця

розбіжностей ідеального класифікатора є діагональною. Для тестування розробленої моделі обрана стратифікована вибірка з 382 файлів вибірки для навчання.

$$\text{Confusion_matrix} = \begin{bmatrix} 47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 35 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 47 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Значення матриці розбіжностей свідчать про задовільну точність класифікації. Так, спрогнозовані значення класів з шостого по восьмий повністю збігаються з фактичними класами, розміченими для даних звукових файлів.

ВИСНОВКИ

Побудований у роботі ансамбль згорткових нейронних мереж дозволяє досить ефективно розв'язувати задачу класифікації акустичних даних. Точність моделі на тестових даних становить 96,5%. Слід зазначити, що для розв'язку поставленої задачі достатньою виявилася структура нейронної мережі всього з одним пакетом шарів згортки-активації-субдискретизації. Перспективи подальших досліджень пов'язані з поширенням розглянутого підходу на акустичні дані складнішої структури: відмінність звукових файлів за довжиною, якістю запису тощо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бондарев В. Н., Трестер Г., Чернега В. С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства. Харьков: Конус, 2001. 398 с.
2. Кривохата А. Г., Кудін О. В., Лісняк А. О. Огляд методів машинного навчання для класифікації акустичних даних. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. №3(66), Т.1. С. 327–331.
3. Николенко С., Кадурич А., Архангельская Е. Глубокое обучение. Санкт-Петербург: Питер, 2018. 480 с.
4. Alías F., Socoró J. C., Sevillano X. A review of physical and perceptual feature extraction techniques for speech, music and environmental sounds. *Applied Sciences*. 2016. № 6(5):143.
5. Bach J.-H., Meyer A.-F., McElfresh D., Anemüller J. Automatic classification of audio data using nonlinear neural response models. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Kyoto, Japan*. 2012. P. 357–360.
6. Bertin-Mahieux T., Eck D., Mandel M. Automatic tagging of audio: the state-of-the-art. *Machine audition: principles, algorithms and systems. IGI Global*. 2011. P. 334–352.
7. Burges C. J. S., Platt J. C., Jana S. Extracting noise-robust features from audio data. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Orlando, FL, USA, 13–17 May 2002*. 2002. P. 1021–1024.
8. Camastra F., Vinciarelli A. Machine learning for Audio, Image and Video analysis. London: Springer-Verlag, 2015. 561 p.
9. Costa C. H. L., Valle Jr. J. D., Koerich A. L. Automatic classification of audio data. *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. 2004. P. 562–567.
10. Dongge Li, Ishwar K. Sethi, Nevenka Dimitrova, Tom McGee. Classification of general audio data for content-based retrieval. *Pattern Recognition Letters*. 2001. № 22(5). P. 533–544.

11. Free sound General-Purpose Audio Tagging Challenge. URL: <https://www.kaggle.com/c/freesound-audio-tagging/data> (Дата звернення 06.06.2018).
12. Gemmeke J. F., Ellis D. P. W., Freedman D., Jansen A., Lawrence W., Moore R. C., Plakal M., Ritter M. Audio set: an ontology and human-labeled dataset for audio events. *Proceedings of the Acoustics, Speech and Signal Processing International Conference*. 2017. URL: <https://research.google.com/pubs/archive/45857.pdf> (Дата звернення 06.06.2018).
13. Geron A. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn and TensorFlow. Sebastopol: O'Reilly. 2017. 861 p.
14. Howel J., Rooth M., Wagner M. Acoustic classification of focus: on the web and in the lab. *Laboratory Phonology: Journal of the Association for Laboratory Phonology*. 2017. № 8(1):16. P. 1-41.
15. Huang G. et al. Snapshot Ensembles: Train 1, Get M for Free. arXiv, 2017. URL: <http://arxiv.org/abs/1704.00109> (Дата звернення 06.06.2018).
16. Ibrahim Z. Al A., Ferrane I., Joly P. Audio Data Analysis Using Parametric Representation of Temporal Relations. *IEEE International Conference on Information and Communication Technologies: from Theory to Applications (ICTTA)*. 2006.
17. Kong Q., Xu Y., Wang W., Plumbley M. D. Convolutional gated recurrent neural network incorporating spatial features for audio tagging. *The 2017 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN 2017), Anchorage, Alaska*. 2017.
18. Kong Q., Xu Y., Wang W., Plumbley M. D. A joint separation-classification model for sound event detection of weakly labelled data. *ICASSP 2018 - 2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 15-20 April 2018, Calgary, Canada. 2018.
19. Lyon R. F. Machine Hearing: An Emerging Field. *IEEE Signal Process. Mag.* 2010, Vol. 27. P. 131–139.
20. Mierswa I., Morik K. Learning feature extraction for learning from audio data. *Technische Universität Dortmund. Technical Reports*. 2004. No. 55.
21. Oppenheim A. V., Schaffer R. W. Discrete-Time Signal Processing. Third edition. Pearson Education Limited. 2014. 1055 p.
22. Rizzi A., Buccino M., Panella M., Uncini A. Optimal short-time features for music/speech classification of compressed audio data. *International Conference on Intelligent Agents. 28 November-1 December 2006. Sydney, NSW, Australia*.
23. Salamon J., Jacoby C., Bello J. P. A dataset and taxonomy for urban sound research. DOI: <http://dx.doi.org/10.1145/2647868.2655045>, 2017. P. 1–4.
24. Stastný J., Skorpil V., Fejfar J. Audio Data Classification by Means of New Algorithms. *36th International conference on Telecommunications and Signal Processing*, Rome, Italy. 2013. P. 507–511.
25. Sturm B. L. A Survey of Evaluation in Music Genre Recognition. *Adaptive Multimedia Retrieval: Semantics, Context, and Adaptation. AMR 2012. Lecture Notes in Computer Science*. 2014. Vol 8382. P. 29–66.
26. Wichern G., Yamada M., Thornburg H., Sugiyama M., Spanias A. Automatic audio tagging using covariate shift adaptation. *IEEE international conference Acoustics speech and signal processing (ICASSP), 14–19 March 2010*.
27. Xu Y., Huang Q., Wang W., Foster P., Sigtia S., Jackson P. J. B., Plumbley M. D. Unsupervised Feature Learning Based on Deep Models for Environmental Audio Tagging. *IEEE/ACM transactions on audio, speech and language processing*. 2017. Vol 25(6). P. 1230–1241.
28. Zaccane G., Karim Md. R. Deep learning with TensorFlow. Packt Publishing. 2018. 767 p.

REFERENCES

1. Bondarev, V.N., Tryoster, G. & Chernega, V.S. (2001). Digital signal processing: methods and tools. Harkov: Konus (In Russian).
2. Kryvokhata, A.G., Kudin, O.V. & Lisnyak, A.O. (2018). A Survey of Machine Learning Methods for Acoustic Data Classification. *Visnyk of Kherson National Technical University*, No. 3(66), pp. 327–331.

3. Nikolenko, S., Kadurin, A. & Arhangelskaya, E. (2018). Deep learning. Saint Petersburg: Piter (In Russian).
4. Alias, F., Socoró, J.C. & Sevillano X. (2016). A review of physical and perceptual feature extraction techniques for speech, music and environmental sounds. *Applied Sciences*, No. 6(5):143.
5. Bach, J.-H., Meyer, A.-F., McElfresh, D. & Anemüller, J. (2012). Automatic classification of audio data using nonlinear neural response models. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, (pp. 357–360), Kyoto, Japan.
6. Bertin-Mahieux, T., Eck, D. & Mandel, M. (2011). Automatic tagging of audio: the state-of-the-art. *Machine audition: principles, algorithms and systems*. IGI Global, pp. 334–352.
7. Burges, C.J.S., Platt, J.C. & Jana, S. (2002). Extracting noise-robust features from audio data. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, (pp. 1021–1024), Orlando, FL, USA, 13–17 May 2002.
8. Camastra, F. & Vinciarelli, A. (2015). *Machine learning for Audio, Image and Video analysis*. London: Springer-Verlag.
9. Costa, C.H.L., Valle, Jr. J.D. & Koerich, A.L. (2004). Automatic classification of audio data. *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pp. 562–567.
10. Dongge, Li, Ishwar, K. Sethi, Nevenka, Dimitrova & Tom, McGee (2001). Classification of general audio data for content-based retrieval. *Pattern Recognition Letters*, No. 22(5), pp. 533–544.
11. Free sound General-Purpose Audio Tagging Challenge. Retrieved from <https://www.kaggle.com/c/freesound-audio-tagging/data>.
12. Gemmeke, J.F., Ellis, D.P.W., Freedman, D., Jansen, A., Lawrence, W., Moore, R.C., Plakal, M. & Ritter, M. (2017). Audio set: an ontology and human-labeled dataset for audio events. *Proceedings of the Acoustics, Speech and Signal Processing International Conference, 2017*. Retrieved from <https://research.google.com/pubs/archive/45857.pdf>.
13. Geron, A. (2017). *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn and TensorFlow*. Sebastopol: O'Reilly.
14. Howel, J., Rooth, M. & Wagner, M. (2017). Acoustic classification of focus: on the web and in the lab. *Laboratory Phonology: Journal of the Association for Laboratory Phonology*, No. 8(1):16, pp. 1-41.
15. Huang, G. et al. (2017). Snapshot Ensembles: Train 1, Get M for Free. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/1704.00109>.
16. Ibrahim, Z. Al A., Ferrane, I., & Joly, P. (2006). Audio Data Analysis Using Parametric Representation of Temporal Relations. *IEEE International Conference on Information and Communication Technologies: from Theory to Applications (ICTTA)*, 2006.
17. Kong, Q., Xu, Y., Wang, W. & Plumbley, M.D. (2017). Convolutional gated recurrent neural network incorporating spatial features for audio tagging. *The 2017 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN 2017)*, Anchorage, Alaska.
18. Kong, Q., Xu, Y., Wang, W. & Plumbley, M.D. (2018). A joint separation-classification model for sound event detection of weakly labelled data. *ICASSP 2018 - 2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 15-20 Apr 2018, Calgary, Canada.
19. Lyon, R.F. (2010). Machine Hearing: An Emerging Field. *IEEE Signal Process. Mag.*, Vol. 27, pp. 131-139.
20. Mierswa, I. & Morik, K. (2004). Learning feature extraction for learning from audio data. *Technische Universität Dortmund. Technical Reports*, No. 55.
21. Oppenheim, A.V. & Schaffer, R.W. (2014). *Discrete-Time Signal Processing*. Third edition. Pearson Education Limited.
22. Rizzi, A., Buccino, M., Panella, M. & Uncini, A. (2006). Optimal short-time features for music/speech classification of compressed audio data. *International Conference on Intelligent Agents*. 28 Nov.-1 Dec. 2006. Sydney, NSW, Australia.
23. Salamon, J., Jacoby, C. & Bello, J.P. (2017). A dataset and taxonomy for urban sound research, pp. 1-4. doi: <http://dx.doi.org/10.1145/2647868.2655045>.

24. Stastný, J., Skorpil, V. & Fejfar, J. (2013). Audio Data Classification by Means of New Algorithms. 36th International conference on Telecommunications and Signal Processing 2013, (pp. 507-511), Rome, Italy.
25. Sturm, B.L. (2014). A Survey of Evaluation in Music Genre Recognition. Adaptive Multimedia Retrieval: Semantics, Context, and Adaptation. AMR 2012. Lecture Notes in Computer Science, Vol 8382, pp. 29-66.
26. Wichern, G., Yamada, M., Thornburg, H., Sugiyama, M. & Spanias, A. (2010). Automatic audio tagging using covariate shift adaptation. IEEE international conference Acoustics speech and signal processing (ICASSP), 14-19 Mar 2010.
27. Xu, Y., Huang, Q., Wang, W., Foster, P., Sigtia, S., Jackson, P.J.B. & Plumbley, M.D. (2017). Unsupervised Feature Learning Based on Deep Models for Environmental Audio Tagging. IEEE/ACM transactions on audio, speech and language processing, Vol 25(6), pp. 1230-1241.
28. Zaccone, G. & Karim, Md. R. (2018). Deep learning with TensorFlow. Packt Publishing.

УДК 519.172

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-06

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА НЕПЛАНАРНОГО ГРАФА

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Сгадов С. А.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

lilili5050@rambler.ru, sgadovsa@bk.ru

В данной работе рассматриваются алгебраические методы построения топологического рисунка несепарабельного непланарного графа. Базовым понятием для построения топологического рисунка является теория вращений. Приведен метод выбора оптимального маршрута для проведения соединения на дуальном графе циклов. Рассмотрена операция включения ранее не проведенных ребер в плоский топологический рисунок.

Ключевые слова: граф, вращение вершины, топологический рисунок.

АЛГЕБРАЇЧНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ ТОПОЛОГІЧНОГО РИСУНКА НЕПЛАНАРНОГО ГРАФА

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Сгадов С. А.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

lilili5050@rambler.ru, sgadovsa@bk.ru

У цій роботі розглядаються алгебраїчні методи побудови топологічного рисунка несепарабельного непланарного графа. Доведено, що граф довільного виду можна розбити на блоки, кожен із яких являє собою максимальний нероздільний підграф. Показана структурна перебудова сепарабельного графа в несепарабельну частину графа. Застосування методів теорії обертання вершин дозволяє описувати топологічний рисунок плоскої частини графа. Так само обертання вершин індукує прості орієнтовані цикли графа. І це в підсумку дозволяє будувати топологічний рисунок графа алгебраїчними методами, не проводячи ніяких геометричних побудов на площині. Плоска частина графа будується алгоритмом виділення підмножини ізометричних циклів з потужністю, рівною цикломатичному числу графа, що характеризується мінімальним значенням функціоналу Маклейна з подальшим видаленням мінімальної кількості ребер. Подальша побудова для проведення з'єднань, віддалених у процесі планаризації, здійснюється пошуком маршрутів для пересічних з'єднань. Наведено метод вибору оптимального маршруту для проведення з'єднання на дуальному графі циклів. Розглянуто операцію включення раніше не проведених ребер у плоский топологічний рисунок.

Ключові слова: граф, обертання вершини, топологічний рисунок.

ALGEBRAIC CONSTRUCTION METHODS OF THE TOPOLOGICAL DRAWING OF NONPLANARIC GRAPH

Kurapov S. V., Ph.D., Associate Professor, Sgadov S. A.

Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

lilili5050@rambler.ru, sgadovsa@bk.ru

In this paper, we consider algebraic methods for constructing a topological picture of an inseparable nonplanar graph. It is shown that graph of arbitrary form can be divided into blocks, each of which is a maximal inseparable subgraph. Here restructuring of the separable graph into a non-separable part of graph have been shown.. Using of vertices rotation theory methods allows to describe topological drawing of flat part of the graph. In turn, the vertex rotation induces oriented elementary graph's circles. Finally this allows topological graph drawing build by algebraic methods without any geometrical constructing in the plane. The flat part of the graph is built with extraction algorithm of subset of isometric cycles with a capacity equal to the cyclomatic number of the graph, characterizing with minimum value of the McLane's functional, followed by removing the minimum number of edges. Futher removed during planarization connections building is performed with searching of intersecting connections routes. A method for selecting the optimal route for the connection the connection on the dual cycles' graph is given. The construction of a dual graph allows one to find routes for making connections that have been removed in the process of planarization. When making connections corresponding to the chosen route, the intersection of the edges is considered as the formation of additional vertices in the flat graph graph. The newly introduced vertices are described by rotating the vertices of the graph. This allows us to consider the implementation of intersecting connections as the construction of a new topological drawing with added vertices. Operation of including of previously unrouted edges in planar topological drawing have been considered.

Key words: graph, vertex rotation, topological drawing.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются алгебраические методы для построения топологического рисунка непланарного графа.

Если *граф* состоит из нескольких *компонент связности*, то его можно изучать «по частям», и это может упростить описание графа и облегчить решение многих задач. Однако и *связный граф* иногда можно представить как состоящий из частей, и такое *представление* также может быть полезным (рис. 1). После *компонент связности* простейшими частями такого рода являются блоки (называемые также компонентами *двусвязности*).

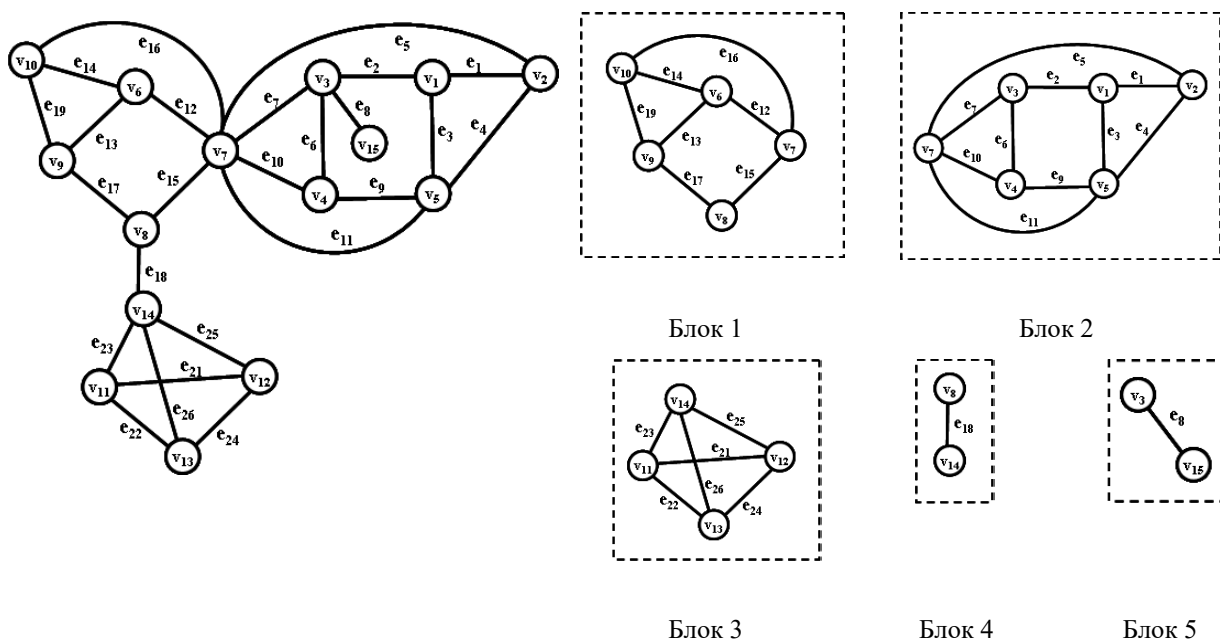


Рис. 1. Связный сепарабельный граф G и его блоки

Не ко всякому графу можно применить критерий планарности Маклейна [1] для проверки планарности или для выделения плоской части. Очевидно, что нельзя применить данный критерий к графу, имеющему хотя бы одну точку сочленения. Такой граф является разделимым и называется *сепарабельным*. Он разбивается на блоки, каждый из которых представляет собой максимальный неразделимый подграф. Граф, имеющий мосты, также можно отнести к сепарабельным графам.

Граф G называется *неразделимым*, если он связный и не имеет точек сочленения. Такой граф называется *несепарабельным*.

С другой стороны, применение методов теории вращения вершин, индуцирующих простые циклы, для описания топологического рисунка графа [3] требует видоизменения некоторого вида графов. К таким графам относятся графы с петлями, графы с кратным количеством ребер (мультиграфы), графы с «висячими» вершинами. Кроме того, в некоторых видах графа цепочка ребер, состоящих из вершин с локальной степенью два, должна быть заменена одним ребром (см. рис. 2).

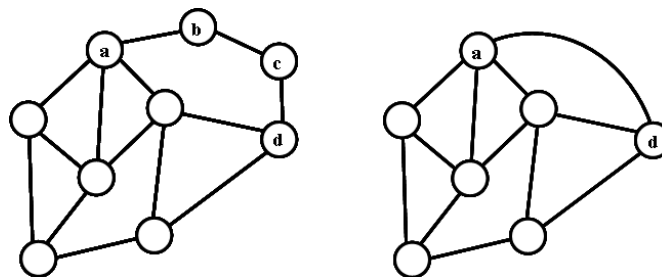


Рис. 2. Замена цепочки ребер одним ребром

Таким образом, требуется как-то обозначить вид графов, к которым можно применять понятие топологического рисунка графа и критерий планарности Маклейна. С этой целью расширим понятие несепарабельного графа [4].

Определение 1. *Несепарабельным графом G* будем называть связный неориентированный граф без петель и кратных ребер, без мостов и точек сочленения, без вершин с локальной степенью меньше или равной двум.

В дальнейшем будем рассматривать только несепарабельные графы.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ РИСУНОК ГРАФА И ЕГО ОПИСАНИЕ

Известно, что топологический рисунок планарного графа можно описать диаграммой вращения его вершин [3]

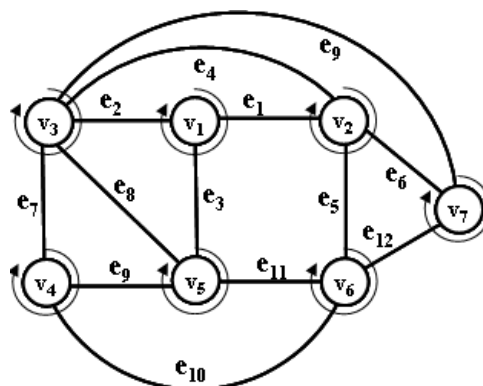


Рис. 3. Топологический рисунок (G, \hat{h}) для графа G

Например, топологический рисунок графа (G, \hat{h}) , представленный на рис. 3, описывается следующей диаграммой вращения вершин:

$$\begin{aligned} \hbar(v_1): & \quad v_3 \quad v_2 \quad v_5, \\ \hbar(v_2): & \quad v_1 \quad v_3 \quad v_7 \quad v_6, \\ \hbar(v_3): & \quad v_5 \quad v_4 \quad v_7 \quad v_2 \quad v_1, \\ \hbar(v_4): & \quad v_3 \quad v_5 \quad v_6, \\ \hbar(v_5): & \quad v_4 \quad v_3 \quad v_1 \quad v_6, \\ \hbar(v_6): & \quad v_4 \quad v_5 \quad v_2 \quad v_7, \\ \hbar(v_7): & \quad v_2 \quad v_3 \quad v_6. \end{aligned}$$

Топологический рисунок может быть записан в виде множества вращения вершин графа:

$$\begin{aligned} \hbar(\mathbf{G}) = \{ & \hbar(v_1) = \langle v_3, v_2, v_5 \rangle, \hbar(v_2) = \langle v_1, v_3, v_7, v_6 \rangle, \hbar(v_3) = \langle v_5, v_4, v_7, v_2, v_1 \rangle, \\ & \hbar(v_4) = \langle v_3, v_5, v_6 \rangle, \hbar(v_5) = \langle v_4, v_3, v_1, v_6 \rangle, \hbar(v_6) = \langle v_4, v_5, v_2, v_7 \rangle, \hbar(v_7) = \langle v_2, v_3, v_6 \rangle \}. \end{aligned}$$

Запись вращения вершин трактуется как циклическая запись ненулевых элементов соответствующей строки в матрицы смежностей графа. Запись в виде кортежа можно трактовать как запись циклического кортежа. Например, $\hbar(v_3) = \langle v_5, v_4, v_7, v_2, v_1 \rangle = \langle v_4, v_7, v_2, v_1, v_5 \rangle = \langle v_7, v_2, v_1, v_5, v_4 \rangle = \langle v_2, v_1, v_5, v_4, v_7 \rangle$.

В свою очередь, вращение вершин индуцирует ориентированные циклы. Следует заметить, что ориентация базисных циклов направлена в противоположную сторону, за исключением обода c_0 . Запишем циклы в виде циклического кортежа вершин, который можно преобразовать в сумму ориентированных ребер графа (дуг графа):

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle v_3, v_4, v_5 \rangle = (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_3); \\ c_2 &= \langle v_1, v_3, v_5 \rangle = (v_1, v_3) + (v_3, v_5) + (v_5, v_1); \\ c_3 &= \langle v_1, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_1, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1); \\ c_4 &= \langle v_2, v_6, v_7 \rangle = (v_2, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_2); \\ c_5 &= \langle v_4, v_6, v_5 \rangle = (v_4, v_6) + (v_6, v_5) + (v_5, v_4); \\ c_6 &= \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1); \\ c_7 &= \langle v_2, v_7, v_3 \rangle = (v_2, v_7) + (v_7, v_3) + (v_3, v_2); \\ c_0 &= \langle v_3, v_7, v_6, v_4 \rangle = (v_3, v_7) + (v_7, v_6) + (v_6, v_4) + (v_4, v_3). \end{aligned}$$

Данный вид записи нужно рассматривать не как арифметическое сложение ребер, а как последовательность ребер в цикле. Например, циклическая запись цикла c_7 показывает, что за ребром (v_2, v_7) следует ребро (v_7, v_3) , за ребром (v_7, v_3) следует ребро (v_3, v_2) и процесс объявляется замкнутым.

С другой стороны, каждый индуцированный вращением простой цикл характеризует суграф в подпространстве циклов и может быть записан в виде множества входящих в него ребер, который можно преобразовать в координатную форму или записать в виде множества вершин:

$$\begin{aligned} c_1 &= \{e_7, e_8, e_9\} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0) \rightarrow \{v_3, v_4, v_5\}; \\ c_2 &= \{e_2, e_3, e_8\} = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \rightarrow \{v_1, v_3, v_5\}; \\ c_3 &= \{e_1, e_3, e_5, e_{11}\} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \rightarrow \{v_1, v_2, v_5, v_6\}; \\ c_4 &= \{e_5, e_6, e_{12}\} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \rightarrow \{v_2, v_6, v_7\}; \\ c_5 &= \{e_9, e_{10}, e_{11}\} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) \rightarrow \{v_4, v_5, v_6\}; \\ c_6 &= \{e_1, e_2, e_4\} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}; \\ c_7 &= \{e_4, e_6, e_9\} = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \rightarrow \{v_2, v_3, v_7\}; \\ c_0 &= \{e_7, e_8, e_{10}, e_{12}\} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) \rightarrow \{v_3, v_4, v_6, v_7\}. \end{aligned}$$

Система базисных циклов обладает следующим свойством:

$$\sum_{i=1}^{m-n+1} c_i \oplus c_0 = \emptyset. \quad (1)$$

Кольцевая сумма базисных циклов и обода – пустое множество.

ГРАФ ЦИКЛОВ И ЕГО СВОЙСТВА

Так как индуцированные циклы проходят по ребру e_i дважды – один раз в прямом направлении, а другой – в обратном, то топологический рисунок может характеризовать только плоские графы. Для описания рисунка непланарного графа введем понятие дуального графа Q к плоскому графу. Такой дуальный плоский граф будем называть графом циклов и обозначать латинской буквой Q . Например, для нашего топологического рисунка графа (G, \hbar) граф Q имеет вид (см. рис. 4).

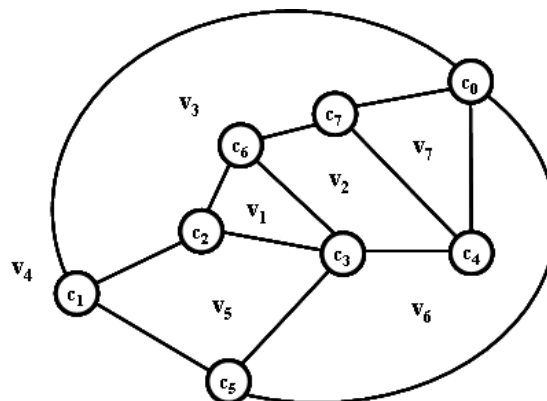


Рис. 4. Граф циклов Q

Рассмотрим свойства графа циклов Q :

- граф циклов Q планарного графа – планарен;
- количество независимых простых циклов в графе циклов Q определяется рангом исходного графа G ;
- каждому простому циклу в графе циклов Q может быть поставлен в соответствие центральный разрез соответствующей вершины исходного графа.

Рассмотрим алгоритм определения соответствия между циклами в графе циклов Q и центральными разрезами для вершины исходного графа G .

Выписываем все циклы исходного графа G , в которых содержится вершина v_1 :

$$c_2 = (v_1, v_3) + (v_3, v_5) + (v_5, v_1);$$

$$c_3 = (v_1, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1);$$

$$c_6 = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1).$$

Удалим симметричные ориентированные ребра:

$$c_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + (v_3, v_5) + (\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_1);$$

$$c_3 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1);$$

$$c_6 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (v_2, v_3) + (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1).$$

Будем записывать ориентированные ребра в обратном порядке, соблюдая их последовательность появления, причем нижним индексом будем помечать каждое ориентированное ребро, принадлежащее соответствующему циклу графа циклов Q . Начинаем с последнего цикла:

$$s(v_1) \rightarrow (v_3, v_2)_6 + (v_2, v_6)_3 + (v_6, v_5)_3 + (v_5, v_3)_2.$$

Нижний индекс в такой записи ориентированного ребра означает номер соответствующего цикла. Тем самым мы поставили в соответствие центральному разрезу вершины v_1 простой ориентированный цикл графа G в виде последовательности ориентированных ребер. Если рассматривать последовательность циклов в данной записи, то можно поставить в соответствие центральному разрезу вершины v_1 циклический кортеж циклов:

$$s(v_1) \rightarrow \langle c_6, c_3, c_2 \rangle = (c_6, c_3) + (c_3, c_2) + (c_2, c_6).$$

Выписываем все циклы исходного графа G , в которых содержится вершина v_2 :

$$c_3 = \langle v_1, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_1, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1);$$

$$c_4 = \langle v_2, v_6, v_7 \rangle = (v_2, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_2);$$

$$c_6 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1);$$

$$c_7 = \langle v_2, v_7, v_3 \rangle = (v_2, v_7) + (v_7, v_3) + (v_3, v_2).$$

Удалим симметричные ориентированные ребра:

$$c_3 = \langle v_1, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_1, v_5) + (v_5, v_6) + (\mathbf{v_6, v_2}) + (\mathbf{v_2, v_1});$$

$$c_4 = \langle v_2, v_6, v_7 \rangle = (\mathbf{v_2, v_6}) + (v_6, v_7) + (\mathbf{v_7, v_2});$$

$$c_6 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = (\mathbf{v_1, v_2}) + (\mathbf{v_2, v_3}) + (v_3, v_1);$$

$$c_7 = \langle v_2, v_7, v_3 \rangle = (\mathbf{v_2, v_7}) + (v_7, v_3) + (\mathbf{v_3, v_2}).$$

Будем записывать ориентированные ребра в обратном порядке, соблюдая их последовательность появления, причем нижним индексом будем помечать каждое ориентированное ребро, принадлежащее соответствующему циклу графа циклов Q . Начинаем с последнего цикла:

$$s(v_2) \rightarrow (v_3, v_7)_7 + (v_7, v_6)_4 + (v_6, v_5)_3 + (v_5, v_1)_3 + (v_1, v_3)_6.$$

Тем самым мы поставили в соответствие центральному разрезу вершины v_2 простой ориентированный цикл графа G в виде последовательности ориентированных ребер. Если рассматривать последовательность циклов в данной записи, то можно поставить в соответствие центральному разрезу вершины v_2 циклический кортеж циклов:

$$s(v_2) \rightarrow \langle c_7, c_4, c_3, c_6 \rangle = (c_7, c_4) + (c_4, c_3) + (c_3, c_6) + (c_6, c_7).$$

И так далее. Для всего множества центральных разрезов вершин запишем соответствия в виде простых ориентированных циклов, сформированных циклами базиса:

$$s(v_1) \rightarrow (v_3, v_2)_6 + (v_2, v_6)_3 + (v_6, v_5)_3 + (v_5, v_3)_2;$$

$$s(v_2) \rightarrow (v_3, v_7)_7 + (v_7, v_6)_4 + (v_6, v_5)_3 + (v_5, v_1)_3 + (v_1, v_3)_6;$$

$$s(v_3) \rightarrow (v_4, v_6)_0 + (v_6, v_7)_0 + (v_7, v_2)_7 + (v_2, v_1)_6 + (v_1, v_5)_2 + (v_5, v_4)_1;$$

$$s(v_4) \rightarrow (v_6, v_7)_0 + (v_7, v_3)_0 + (v_3, v_5)_1 + (v_5, v_6)_5;$$

$$s(v_5) \rightarrow (v_6, v_4)_5 + (v_4, v_3)_1 + (v_3, v_1)_2 + (v_1, v_2)_3 + (v_2, v_6)_3;$$

$$s(v_6) \rightarrow (v_7, v_3)_0 + (v_3, v_4)_0 + (v_4, v_5)_5 + (v_5, v_1)_3 + (v_1, v_2)_3 + (v_2, v_7)_4;$$

$$s(v_7) \rightarrow (v_3, v_4)_0 + (v_4, v_6)_0 + (v_6, v_2)_4 + (v_2, v_3)_7.$$

Или в виде циклического кортежа циклов:

$$s(v_1) \rightarrow \langle c_6, c_3, c_2 \rangle = (c_6, c_3) + (c_3, c_2) + (c_2, c_6);$$

$$s(v_2) \rightarrow \langle c_7, c_4, c_3, c_6 \rangle = (c_7, c_4) + (c_4, c_3) + (c_3, c_6) + (c_6, c_7);$$

$$s(v_3) \rightarrow \langle c_2, c_1, c_0, c_7, c_6 \rangle = (c_2, c_1) + (c_1, c_0) + (c_0, c_7) + (c_7, c_6) + (c_6, c_2);$$

$$s(v_4) \rightarrow \langle c_1, c_5, c_0 \rangle = (c_1, c_5) + (c_5, c_0) + (c_0, c_1);$$

$$s(v_5) \rightarrow \langle c_2, c_3, c_5, c_1 \rangle = (c_2, c_3) + (c_3, c_5) + (c_5, c_1) + (c_1, c_2);$$

$$s(v_6) \rightarrow \langle c_3, c_4, c_0, c_5 \rangle = (c_3, c_4) + (c_4, c_0) + (c_0, c_5) + (c_5, c_3);$$

$$s(v_7) \rightarrow \langle c_7, c_0, c_4 \rangle = (c_7, c_0) + (c_0, c_4) + (c_4, c_7).$$

Следует заметить, что сумма всех центральных разрезов исходного графа, записанная в виде соответствия циклического кортежа циклов, также есть пустое множество.

$$\sum_{i=1}^n s(v_i) = \emptyset. \quad (2)$$

ПОСТРОЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА НЕПЛАНАРНОГО НЕСЕПАРАБЕЛЬНОГО ГРАФА

Приступим к построению топологического рисунка непланарного графа G . Предположим, что нам нужно в топологический рисунок графа вставить ребро $\{v_2, v_4\}$. Естественно, что проведение данного соединения обязательно будет пересекать ребра плоской части графа. Будем вводить новые вершины как результат пересечения ребер. Вернемся к рассмотрению графа циклов для нашего примера (см. рис. 5).

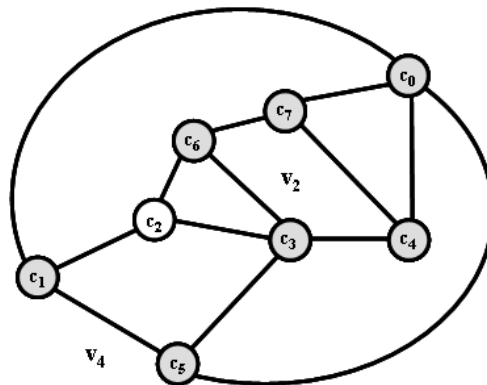


Рис. 5. Граф циклов Q с помеченными вершинами

Вершину v_2 окружают следующие вершины, соответствующие циклам исходного графа:

$$s(v_2) \rightarrow \langle c_7, c_4, c_3, c_6 \rangle = (c_7, c_4) + (c_4, c_3) + (c_3, c_6) + (c_6, c_7).$$

Вершину v_4 окружают следующие вершины, соответствующие циклам исходного графа:

$$s(v_4) \rightarrow \langle c_1, c_5, c_0 \rangle = (c_1, c_5) + (c_5, c_0) + (c_0, c_1).$$

Методом распространения волны выделим все маршруты, соединяющие выбранные вершины дуального графа циклов. В данном случае имеем пять маршрутов для проведения соединения (v_2, v_4) . Будем отсчитывать маршруты от вершины v_2 к вершине v_4 . Тогда можно записать выбранные маршруты в виде кортежей циклов $h_1 = \langle c_7, c_0 \rangle$, $h_2 = \langle c_4, c_0 \rangle$, $h_3 = \langle c_3, c_5 \rangle$, $h_4 = \langle c_6, c_2, c_1 \rangle$, $h_5 = \langle c_3, c_2, c_1 \rangle$.

Рассмотрим маршрут $h_5 = \langle c_3, c_2, c_1 \rangle$ и определим порядок проведения соединения (v_2, v_4) . При проведении соединения $\{v_2, v_4\}$ вначале пересекается ребро $e_3 = \{v_1, v_5\}$, принадлежащее циклу c_3 и циклу c_2 . Затем пересекается ребро $e_8 = \{v_3, v_5\}$, принадлежащее циклу c_2 и циклу c_1 . Следовательно, вводятся две новые вершины для исходного графа G . Обозначим их как v_8 и v_9 .

Введем вершину v_8 в ребро e_3 циклов c_3 и c_2 :

$$c_2 = \langle v_1, v_3, v_5, v_8 \rangle = (v_1, v_3) + (v_3, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_1);$$

$$c_3 = \langle v_1, v_8, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_1, v_8) + (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1).$$

Теперь введем вершину v_9 в ребро e_8 циклов c_1 и c_2 :

$$c_1 = \langle v_3, v_4, v_5, v_9 \rangle = (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_3);$$

$$c_2 = \langle v_1, v_3, v_9, v_5, v_8 \rangle = (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_1).$$

Осталось последовательно ввести части соединения $\{v_2, v_4\}$ в соответствующие циклы. Будем последовательно вводить ребро $\{v_2, v_8\}$ в цикл c_3 , ребро $\{v_8, v_9\}$ в цикл c_2 и ребро $\{v_9, v_4\}$ в цикл c_1 .

Вводим ребро $\{v_2, v_8\}$ в цикл c_3 :

$$\begin{aligned} c_3 &= (v_1, v_8) + (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1) + (v_2, v_8) + (v_8, v_2) = \\ &= (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_8) + (v_2, v_1) + (v_1, v_8) + (v_8, v_2). \end{aligned}$$

В результате образуются два новых цикла:

$$c_3 = (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_8);$$

$$c_8 = (v_2, v_1) + (v_1, v_8) + (v_8, v_2).$$

Вводим ребро $\{v_8, v_9\}$ в цикл c_2 :

$$\begin{aligned} c_2 &= (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_1) + (v_9, v_8) + (v_8, v_9) = \\ &= (v_8, v_1) + (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_8) + (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_9). \end{aligned}$$

В результате образуются два новых цикла:

$$c_2 = (v_8, v_1) + (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_8);$$

$$c_9 = (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_9).$$

Вводим ребро $\{v_9, v_4\}$ в цикл c_1 :

$$\begin{aligned} c_1 &= (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_3) + (v_9, v_4) + (v_4, v_9) = \\ &= (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_4) + (v_9, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_9). \end{aligned}$$

В результате образуются два новых цикла:

$$c_1 = (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_4);$$

$$c_{10} = (v_9, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_9).$$

Новая система циклов имеет вид:

$$c_1 = (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_4);$$

$$c_2 = (v_8, v_1) + (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_8);$$

$$c_3 = (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_8);$$

$$c_4 = \langle v_2, v_6, v_7 \rangle = (v_2, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_2);$$

$$c_5 = \langle v_4, v_6, v_5 \rangle = (v_4, v_6) + (v_6, v_5) + (v_5, v_4);$$

$$c_6 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1);$$

$$c_7 = \langle v_2, v_7, v_3 \rangle = (v_2, v_7) + (v_7, v_3) + (v_3, v_2);$$

$$c_8 = (v_2, v_1) + (v_1, v_8) + (v_8, v_2);$$

$$c_9 = (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_9);$$

$$c_{10} = (v_9, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_9);$$

$$c_0 = \langle v_3, v_7, v_6, v_4 \rangle = (v_3, v_7) + (v_7, v_6) + (v_6, v_4) + (v_4, v_3).$$

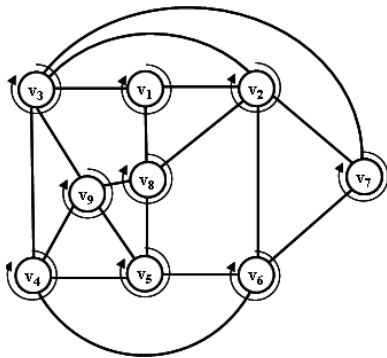


Рис. 6. Топологический рисунок с двумя точками пересечения

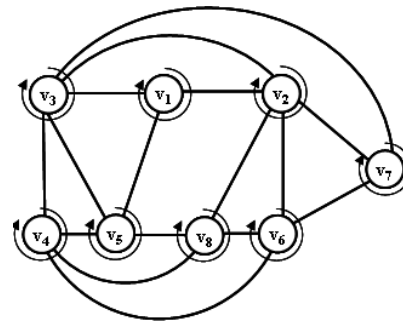


Рис. 7. Топологический рисунок с одной точкой пересечения

В результате получен топологический рисунок непланарного графа с двумя точками пересечения (см. рис. 6). Если воспользоваться маршрутом h_3 , то полученный топологический рисунок будет характеризоваться только одной точкой пересечения (см. рис. 7).

Выделим множество вращения вершин для топологического рисунка, представленного на рис. 6:

$$\begin{aligned} \hbar(\mathbf{G}) = \{ & \hbar(v_1) = \langle v_3, v_2, v_8 \rangle, \hbar(v_2) = \langle v_1, v_3, v_7, v_6, v_8 \rangle, \hbar(v_3) = \langle v_9, v_4, v_7, v_2, v_1 \rangle, \\ & \hbar(v_4) = \langle v_3, v_9, v_5, v_6 \rangle, \hbar(v_5) = \langle v_4, v_9, v_8, v_6 \rangle, \hbar(v_6) = \langle v_4, v_5, v_2, v_7 \rangle, \hbar(v_7) = \langle v_2, v_3, v_6 \rangle, \\ & \hbar(v_8) = \langle v_1, v_2, v_5, v_9 \rangle, \hbar(v_9) = \langle v_3, v_8, v_5, v_4 \rangle \}. \end{aligned}$$

Множество вращения вершин для топологического рисунка, представленного на рис. 7:

$$\begin{aligned} \hbar(\mathbf{G}) = \{ & \hbar(v_1) = \langle v_3, v_2, v_5 \rangle, \hbar(v_2) = \langle v_1, v_3, v_7, v_6, v_8 \rangle, \hbar(v_3) = \langle v_5, v_4, v_7, v_2, v_1 \rangle, \\ & \hbar(v_4) = \langle v_3, v_5, v_8, v_6 \rangle, \hbar(v_5) = \langle v_4, v_3, v_1, v_8 \rangle, \hbar(v_6) = \langle v_4, v_8, v_2, v_7 \rangle, \hbar(v_7) = \langle v_2, v_3, v_6 \rangle, \\ & \hbar(v_8) = \langle v_5, v_2, v_6, v_4 \rangle \}. \end{aligned}$$

Самое время применить алгоритм для определения вращений вершин.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ВРАЩЕНИЙ ВЕРШИН ДЛЯ ЗАДАННОЙ СИСТЕМЫ ЦИКЛОВ

Пусть задан граф \mathbf{G} . Предположим, что задано и множество изометрических циклов данного графа [1, 5], характеризующее базис с нулевым значением функционала Маклейна. Тогда существует обод, определенный как кольцевая сумма всех циклов базиса [2].

Опишем алгоритм построения диаграммы вращения вершин.

Шаг 1. [Циклическая вершинная запись подмножества циклов]. Представим запись циклов в виде ориентированных ребер, используя вектор P_e для выделенного базиса с нулевым значением функционала Маклейна при заданном направлении вращения. Запись будем производить с учетом того, что по каждому ребру мы проходим дважды, как в прямом, так и в обратном направлении.

Шаг 2. [Просмотр списка циклов]. Последовательно просматриваем изометрические циклы базиса и обод. Выбираем непомеченный цикл и идем на шаг 3. Если список всех циклов окончен, то получаем диаграмму вращений вершин для плоского рисунка графа.

Шаг 3. [Окаймляющая запись вершин]. Просматриваем ориентированную запись вершин выбранного цикла. В диаграмме вращений вершин для каждой вершины записываем окаймляющие ее вершины из данной ориентированной записи вершин в заданной последовательности. В случае необходимости объединяем записи для каждой вершины в диаграмме вращений. Идем на шаг 2.

Рассмотрим пример работы данного алгоритма.

В качестве примера построим диаграмму вращений вершин графа для плоского рисунка графа, представленного на рис. 7.

Согласно шагу 1 алгоритма, запишем систему независимых циклов и обод для плоского графа в виде ориентированных ребер через вершины (вращение по часовой стрелке):

$$\begin{aligned}
 c_1 &= (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_3) = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle; \\
 c_2 &= (v_3, v_5) + (v_5, v_1) + (v_1, v_3) = \langle v_3, v_5, v_1 \rangle; \\
 c_3 &= (v_1, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_2) + (v_2, v_1) = \langle v_1, v_5, v_8, v_2 \rangle; \\
 c_4 &= (v_2, v_8) + (v_8, v_6) + (v_6, v_2) = \langle v_2, v_8, v_6 \rangle; \\
 c_5 &= (v_2, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_2) = \langle v_2, v_6, v_7 \rangle; \\
 c_6 &= (v_4, v_8) + (v_8, v_5) + (v_5, v_4) = \langle v_4, v_8, v_5 \rangle; \\
 c_7 &= (v_4, v_6) + (v_6, v_8) + (v_8, v_4) = \langle v_4, v_6, v_8 \rangle; \\
 c_8 &= (v_3, v_1) + (v_1, v_2) + (v_2, v_3) = \langle v_3, v_1, v_2 \rangle; \\
 c_9 &= (v_3, v_2) + (v_2, v_7) + (v_7, v_3) = \langle v_3, v_2, v_7 \rangle; \\
 c_0 &= (v_3, v_7) + (v_7, v_6) + (v_6, v_4) + (v_4, v_3) = \langle v_3, v_7, v_6, v_4 \rangle.
 \end{aligned}$$

Согласно шагу 2 алгоритма, просматриваем все циклы и выбираем первый цикл $c_1 = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle$. Вершину v_3 окружают вершины: v_5 – слева и v_4 – справа. Вершину v_4 окружают вершины: v_3 – слева и v_5 – справа. Вершину v_5 окружают вершины: v_4 – слева и v_3 – справа. Для записи диаграммы вращений будем использовать только номера вершин.

Согласно 3-му шагу алгоритма, строим таблицу (диаграмму) вращений вершин по принципу помещения в строку данной вершины смежных вершин, находящихся слева и справа в вершинной записи цикла:

вершина 1:
 вершина 2:
 вершина 3: 5 4
 вершина 4: 3 5
 вершина 5: 4 3
 вершина 6:
 вершина 7:
 вершина 8:

Выбираем второй цикл $c_2 = \langle v_3, v_5, v_1 \rangle$ и достраиваем таблицу вращений вершин согласно ориентированной записи цикла:

вершина 1: 5 3
 вершина 2:
 вершина 3: 1 5 4
 вершина 4: 3 5
 вершина 5: 4 3 1
 вершина 6:
 вершина 7:
 вершина 8:

Выбираем третий цикл $c_3 = \langle v_1, v_5, v_8, v_2 \rangle$ и достраиваем таблицу вращений вершин:

вершина 1:	2	5	3	
вершина 2:	8	1		
вершина 3:	1	5	4	
вершина 4:	3	5		
вершина 5:	4	3	1	8
вершина 6:				
вершина 7:				
вершина 8:	5	2		

Последовательно выбираем циклы и достраиваем вращение вершин.

.....

Выбираем восьмой цикл $c_8 = \langle v_3, v_1, v_2 \rangle$ и достраиваем таблицу вращений вершин:

вершина 1:	2	5	3	2	
вершина 2:	7	6	8	1	3
вершина 3:	2	1	5	4	
вершина 4:	3	5	8	6	
вершина 5:	4	3	1	8	4
вершина 6:	4	8	2	7	
вершина 7:	6	2			
вершина 8:	4	5	2	6	4

Выбираем девятый цикл $c_7 = \langle v_3, v_2, v_7 \rangle$ и достраиваем таблицу вращений вершин:

вершина 1:	2	5	3	2	
вершина 2:	7	6	8	1	3
вершина 3:	7	2	1	5	4
вершина 4:	3	5	8	6	
вершина 5:	4	3	1	8	4
вершина 6:	4	8	2	7	
вершина 7:	6	2	3		
вершина 8:	4	5	2	6	4

Выбираем обод $c_0 = \langle v_3, v_7, v_6, v_4 \rangle$ и окончательно достраиваем таблицу вращений вершин:

вершина 1:	2	5	3	2	
вершина 2:	7	6	8	1	3
вершина 3:	7	2	1	5	4
вершина 4:	3	5	8	6	3
вершина 5:	4	3	1	8	4
вершина 6:	4	8	2	7	4
вершина 7:	6	2	3	6	
вершина 8:	4	5	2	6	4

По исчерпанию циклов алгоритм заканчивает свою работу.

ВЫВОДЫ

В работе рассматриваются алгебраические методы построения топологического рисунка несепарабельного непланарного графа. Исходной информацией для построения служит топологический рисунок планарной части графа. Построение дуального графа позволяет находить маршруты для проведения соединений, удаленных в процессе планаризации. При проведении соединений, соответствующих выбранному маршруту, пересечение ребер рассматривается как образование в рисунке плоского графа дополнительных вершин. Вновь введенные вершины описываются вращением вершин графа. Это позволяет рассматривать проведение пересекающихся соединений как построение нового топологического рисунка $G, h(v + v')$ с добавленными вершинами v' . Рассмотрены алгебраические операции включения ранее не проведенных ребер в плоский топологический рисунок. Приведен алгоритм для построения диаграммы вращения вершин относительно заданной системы простых ориентированных циклов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Лейн С. Комбинаторное условие для плоских графов. *Кибернетический сборник. Новая серия*. 1970. Вып. 7. С. 68–77.
2. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. Москва: Мир, 1984. 455 с.
3. Рингель Г. Теорема о раскраске карт. Москва: Мир, 1977. 126 с.
4. Харари Ф. Теория графов. Москва: Мир, 1973. 300 с.
5. Cycle bases in graphs: characterization, algorithms, complexity, and applications / T. Kavitha et al. *Computer Science Review*. 2009. Vol. 3, Issue 4. P. 199–243.

REFERENCES

1. McLane, S. (1970). Combinatorial condition for planar graphs. In: Cybernetic collection. New episode, Issue 7, pp. 68–77.
2. Swami, M. & Thulasaraman, K. (1984). Graphs, networks and algorithms. Moscow: Mir.
3. Ringel, G. (1977). A theorem on the coloring of maps. Moscow: Mir.
4. Harari, F. (1973). Theory of graphs. Moscow: Mir.
5. Kavitha, T., Liebchen, C., Mehlhorn, K., Michail, D., Rizzi, R., Ueckerdt, T. & Zweig, K. (2009). Cycle spaces in graphs: characterization, algorithms, complexity, and applications. *Computer Science Review*, Volume 3, Issue 4, pp. 199-243.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-07

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБЛЕГЧЕННЫХ ПОДПОРНЫХ СТЕН, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ГРУНТОМ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Ганиев Д. С., докторант
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,
ул. А. Султановой, 5, г. Баку, Азербайджан 1073/1

flatifov@mail.ru

В работе рассматривается система цилиндрических подпорных стен, которая используется для обеспечения сейсмоустойчивости сооружений. Подпорные стены моделируются двумя цилиндрическими оболочками с ортотропными механическими характеристиками в условиях динамического нагружения. В математической модели данной оболочечной системы

учитывается влияние грунта, действие которого заменяется компонентами вектора внешних сил. При этом предполагается что действуют как нормальные, так и сдвигающие составляющие. Для системы цилиндрических оболочек определена полная энергия, включающая потенциальную и кинетическую энергии и работу внешних сил. Между собой оболочки соединяются упруго. Предполагается, что торцевые части системы цилиндрических оболочек расположены на идеальных диафрагмах. На основе этого сформулированы граничные условия – условия шарнирного опирания.

Перемещения точек цилиндрических оболочек представляется на основе тригонометрических функций с неизвестными коэффициентами. Их подстановка в выражение для полной энергии и последующее применение принципа Остроградского-Гамильтона дает однородную систему линейных уравнений. Из условия ее нетривиальных решений получаем частотное уравнение. Это уравнение решается численно при конкретных значениях входящих в него параметров. В результате найдены зависимости частотных характеристик от различных параметров системы. Установлена взаимосвязь между геометрическими характеристиками оболочек и их характеристиками. Определено влияние ортотропии материалов на величину частотных параметров оболочек.

Ключевые слова: ортотропная оболочка, подпорные стены, грунт, свободные колебания, частотное уравнение, вариационный принцип.

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПОЛЕГШЕНИХ ПІДПІРНИХ СТІН, СКЛАДЕНИХ З ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, ЩО КОНТАКТУЮТЬ З ГРУНТОМ

Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Ганієв Д. С., докторант

*Азербайджанський Архітектурно-будівельний університет,
вул. А. Султанової 5, м. Баку, Азербайджан 1073/1*

flatifov@mail.ru

В роботі розглядається система циліндричних підпірних стін, яка використовується для забезпечення сейсмостійкості споруд. Підпірні стіни моделюються двома циліндричними оболонками з ортотропними механічними характеристиками в умовах динамічного навантаження. У математичній моделі даної оболонкової системи враховується вплив ґрунту, дія якого замінюється компонентами вектора зовнішніх сил. При цьому передбачається, що діють як нормальні, так і зсувні складові. Для системи циліндричних оболонок визначена повна енергія, що включає потенційну і кінетичну енергії і роботу зовнішніх сил. Між собою оболонки з'єднуються пружно. Передбачається, що торцеві частини системи циліндричних оболонок розташовані на ідеальних діафрагмах. На основі цього сформульовані граничні умови – умови шарнірного обпирання.

Переміщення точок циліндричних оболонок представляється на основі тригонометричних функцій з невідомими коефіцієнтами. Їх підстановка в вираз для повної енергії і подальше застосування принципу Остроградського-Гамільтона дає однорідну систему лінійних рівнянь. З умови її нетривіальних рішень отримуємо частотне рівняння. Це рівняння вирішується чисельно при конкретних значеннях назв параметрів. В результаті знайдені залежності частотних характеристик від різних параметрів системи. Встановлено взаємозв'язок між геометричними характеристиками оболонок і їх характеристиками. Визначено вплив ортотропії матеріалів на величину частотних параметрів оболонок.

Ключові слова: ортотропна оболонка, підпірні стіни, ґрунт, вільні коливання, частотне рівняння, варіаційний принцип.

FREE VIBRATIONS OF LIGHT SUPPRESSED WALLS MADE OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS CONTACT WITH GROUND

Latifov F. S., doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Ganiev D. S., doctoral student

*Azerbaijan Architecture and Construction University,
Str. A. Sultanovoy, 5, Baku, 1073/1, Azerbaijan*

flatifov@mail.ru

In this article, we study the system of supporting cylindrical walls as earthquake-resistant structures. A pair of cylindrical orthotropic shells under dynamic loading simulates a supporting wall. The simulation considers an impact of ground using external forces. At the same time, we suggest that there are both normal and shear forces.

Full energy has been obtained for a system of cylindrical shells including kinetic and potential energy and virtual work of external forces. Shells are elastic joined together. We suggest that edges of shells are placed on perfect apertures. Thus, boundary conditions allow rotations at edges.

Displacements of cylindrical shells are defined using trigonometric functions with unknown coefficients. Substitution of trigonometric functions into energy expression and application of the Ostrogradsky-Hamilton principle give homogeneous system of linear equations. The frequency equation is obtained using conditions of nontrivial solution existence. This equation could be solved numerically for concrete values of its parameters. Finally, dependences of frequency characteristics from parameters of the system are obtained. Dependence of shell's characteristics from its geometry are also obtained. Influence of orthotropic material on frequency characteristics is studied.

Key words: orthotropic shell, retaining walls, ground, free oscillations, frequency equation, variational principle.

Распространением тонкостенных конструкций или элементов конструкций в машиностроении, в системе передач, в области строительства делают актуальным вычисление их динамических прочностных характеристик и выбор их оптимальных вариантов. Основы подпорных стен составляют объединенные цилиндрические оболочки открытого профиля, и их форма принимается оптимальной. Заменой массивных подпорных стен на тонкостенные оболочки получается пустая система. Для обеспечения устойчивости этой системы пустые части заполняются грунтом, что приводит к экономии бетона.

Учитывая, что Азербайджанская Республика находится в активной сейсмической зоне, расчет собственных колебаний и нахождение резонансных частот таких конструкций имеет большое практическое значение.

Отметим, что расчет подпорных стен, состоящих из двух изотропных цилиндрических оболочек, выполнен для статических случаев в [1-3]. В работе [1] изучены статические деформации подпорных стен, состоящих из двух изотропных цилиндрических оболочек. При решении задачи используется методика, представленная в работе [4]. В работе [2] приведены расчеты подпорных стен, состоящих из трех изотропных цилиндрических оболочек при плоском деформировании. Задача сведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и построены их решения. Работа [3] посвящена методике расчета подпорных стен, состоящих из изотропных цилиндрических оболочек с учетом работы грунта при сжатии и сдвиге. Расчеты приведены на основе моментной теории цилиндрических оболочек. В научных работах [5-8], рассматривая различные варианты объединений цилиндрических оболочек открытого профиля, построены дифференциальные уравнения моментной теории при различных условиях стыковки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Напишем потенциальную и кинетическую энергии цилиндрических подпорных стен [9]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i = \frac{h_i R_i}{2} \iint_{S_i} \left\{ b_{11i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 - 2(b_{11i} + b_{12i}) \frac{w_i}{R} \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{w_i^2}{R^2} (b_{11i} + b_{12i} + b_{22i}) + \frac{b_{22i}}{R^2} \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial \theta} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2(b_{12i} + b_{22i}) \frac{w_i}{R^2} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \theta} + 2b_{12i} \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \theta} + b_{66i} \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right)^2 + b_{66i} \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + b_{66i} \frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right\} dx d\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$K_i = \frac{E_i h_i}{2R_i^2(1 - \nu_i^2)} \iint_{S_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy.$$

Здесь $i = 1$ соответствует первой цилиндрической оболочке в подпорных стенах, $i = 2$ соответствует второй цилиндрической оболочке в подпорных стенах (рис. 1); u_i , ϑ_i , w_i – перемещение оболочек, R_i , h_i – радиусы и толщины цилиндрических оболочек соответственно, b_{11} , b_{22} , b_{12} , b_{66} – основные модули упругости ортотропных материалов

цилиндрических оболочек и выражается через модули упругости в координатных направлениях E_{1i} , E_{2i} , через коэффициенты Пуассона ν_{1i} , ν_{2i} следующим образом:

$$b_{11i} = \frac{E_{1i}}{1 - \nu_{1i}\nu_{2i}}, \quad b_{22i} = \frac{E_{2i}}{1 - \nu_{1i}\nu_{2i}}, \quad b_{12i} = \frac{\nu_{2i}E_{1i}}{1 - \nu_{1i}\nu_{2i}} = \frac{\nu_{1i}E_{2i}}{1 - \nu_{1i}\nu_{2i}},$$

s_i – поверхности цилиндрических оболочек, фигурирующих в подпорных стенах. Влияние грунта на цилиндрические оболочки заменяются внешними силами q_{xi} , q_{yi} , q_{zi} . Работа, совершаемая этими силами в перемещениях оболочек, имеет вид:

$$A_i = - \int_0^{x_1} \int_0^{2\pi} (q_{xi}u_i + q_{yi}v_i + q_{zi}w_i) dx dy. \quad (2)$$

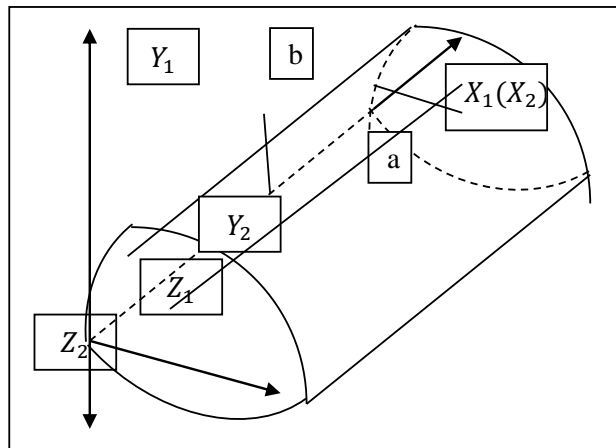


Рис. 1. Схема подпорной стены, состоящая из ортотропных цилиндрических оболочек

В результате для полной энергии подпорных стен получим:

$$\Pi = \sum_{i=1}^2 (\mathcal{E}_i + K_i + A_i). \quad (3)$$

К выражениям (1) и (2) прибавляются контактные и граничные условия. Будем предполагать, что цилиндрические оболочки соединены упруго между собой, т.е. в контакте выполняются:

$$\begin{aligned} w_1(x)|_{y_1=0} &= v_2(x)|_{y_2=0}; & v_1(x)|_{y_1=0} &= w_2(x)|_{y_2=0}; \\ u_1(x)|_{y_1=0} &= u_2(x)|_{y_2=0}; & \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \Big|_{y_1=0} &= \frac{\partial v_2(x)}{\partial x} \Big|_{y_2=0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Предполагается, что цилиндрические оболочки расположены на идеальных диафрагмах как на шарнирах по линиям $x = 0$ и $x = a$. В этом случае граничные условия имеют вид:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad T_1 = 0, \quad M_1 = 0. \quad (5)$$

Здесь T_1 , M_1 – сила и моменты в поперечном сечении цилиндрической оболочки.

Используя принцип стационарности Остроградского-Гамильтона, можно получить частотное уравнение колебания подпорных стен, состоящих из соединения двух цилиндрических оболочек открытого профиля

$$\partial W = 0. \quad (6)$$

Здесь $W = \int_{t_1}^{t_2} P dt$ – влияние Гамильтона. Выполняя операции варьирования в равенстве $\partial W = 0$ и учитывая независимости и произвольности вариаций δu , δv , δw , получим частотное уравнение колебаний подпорных стен, состоящих из соединения двух цилиндрических оболочек открытого профиля, контактирующих с грунтом. Итак, построение частотного уравнения колебаний подпорных стен, состоящих из соединения двух

цилиндрических оболочек открытого профиля, контактирующих с грунтом, сводится к совместному интегрированию полной энергии системы (3) при контактных (4) и граничных условиях (5).

Силы со стороны грунта на цилиндрические оболочки q_{xi} , q_{yi} , q_{zi} , входящие в (1), будем представлять в виде:

$$q_{xi} = q_{yi} = 0; \quad q_{z1} = k_1 w_1; \quad q_{z2} = k_2 w_2 - k_s \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right). \quad (7)$$

Здесь k_1 , k_2 , k_s – коэффициенты жесткостей грунта при сжатии и сдвиге.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Перемещения цилиндрических оболочек будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u_i &= u_{0i} \cos \chi \xi (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1, \\ \vartheta_i &= \vartheta_{0i} \sin \chi \xi (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1, \\ w_i &= w_{0i} \sin \chi \xi (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь u_{0i} , ϑ_{0i} , w_{0i} – неизвестные постоянные, $\xi = \frac{x}{a}$, $t_1 = \omega_0 t$, χ , $n = 2k + 1$ – волновые числа в направлении образующей и круговом направлении цилиндрических оболочек, $\theta_i = \frac{y_i}{R}$, $0 \leq \theta_i \leq \frac{3\pi}{4}$. При выполнении этих условий на границах $\theta_i = \frac{3\pi}{4}$ цилиндрических оболочек выполняются условия шарнирного опирания.

Подставляя решения (8) в (3), учитывая контактные условия (4) и выражение (7), выражая постоянные u_{02} , ϑ_{02} , w_{02} через постоянные u_{01} , ϑ_{01} , w_{01} , для полной энергии (3) получим полином второго порядка относительно постоянных u_{01} , ϑ_{01} , w_{01} :

$$\Pi = \check{\varphi}_{11} u_{01}^2 + \check{\varphi}_{22} \vartheta_{01}^2 + \check{\varphi}_{33} w_{01}^2 + \check{\varphi}_{44} u_{01} \vartheta_{01} + \check{\varphi}_{55} u_{01} w_{01} + \check{\varphi}_{66} \vartheta_{01} w_{01}.$$

Из-за сложности коэффициентов $\check{\varphi}_{11}$, $\check{\varphi}_{22}$, $\check{\varphi}_{33}$, $\check{\varphi}_{44}$, $\check{\varphi}_{55}$, $\check{\varphi}_{66}$ выражение их здесь не приводится. Выполняя операции варьирования в выражении Π относительно независимых постоянных u_{01} , ϑ_{01} , w_{01} и приравнявая коэффициенты независимых вариаций к нулю, получим следующую систему алгебраических однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2\check{\varphi}_{11} u_{01} + \check{\varphi}_{44} \vartheta_{01} + \check{\varphi}_{55} w_{01} = 0, \\ \check{\varphi}_{44} u_{01} + 2\check{\varphi}_{22} \vartheta_{01} + \check{\varphi}_{66} w_{01} = 0, \\ \check{\varphi}_{55} u_{01} + \check{\varphi}_{66} \vartheta_{01} + 2\check{\varphi}_{33} w_{01} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Так как система (9) линейная и однородная, то для существования ее нетривиальных решений необходимым и достаточным условием является равенство нулю ее главного определителя. В результате получим частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2\check{\varphi}_{11} & \check{\varphi}_{44} & \check{\varphi}_{55} \\ \check{\varphi}_{44} & 2\check{\varphi}_{22} & \check{\varphi}_{66} \\ \check{\varphi}_{55} & \check{\varphi}_{66} & 2\check{\varphi}_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) напишем в виде:

$$4\check{\varphi}_{11}\check{\varphi}_{22}\check{\varphi}_{33} + \check{\varphi}_{44}\check{\varphi}_{55}\check{\varphi}_{66} - \check{\varphi}_{55}^2\check{\varphi}_{22} - \check{\varphi}_{66}^2\check{\varphi}_{11} - \check{\varphi}_{44}^2\check{\varphi}_{33} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) реализовано численно. Для параметров задач, входящих в решение, приняты:

$$k_1 = k_2 = 7 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2}, \quad k_s = 11 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}, \quad \frac{a}{R} = 3, \quad \frac{h}{R} = \frac{1}{6}, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0,35.$$

Результаты вычислений приведены на рис. 2 в виде зависимости параметра частот от θ_1 , на рис. 3 параметра частот от отношений a/R . Из рис.2 видно, что с увеличением угла θ_1 значение параметра частот увеличивается. С увеличением длины оболочек значение

параметра частот уменьшается. Кроме того, с увеличением ортотропности материала оболочек значения параметра частот увеличиваются.

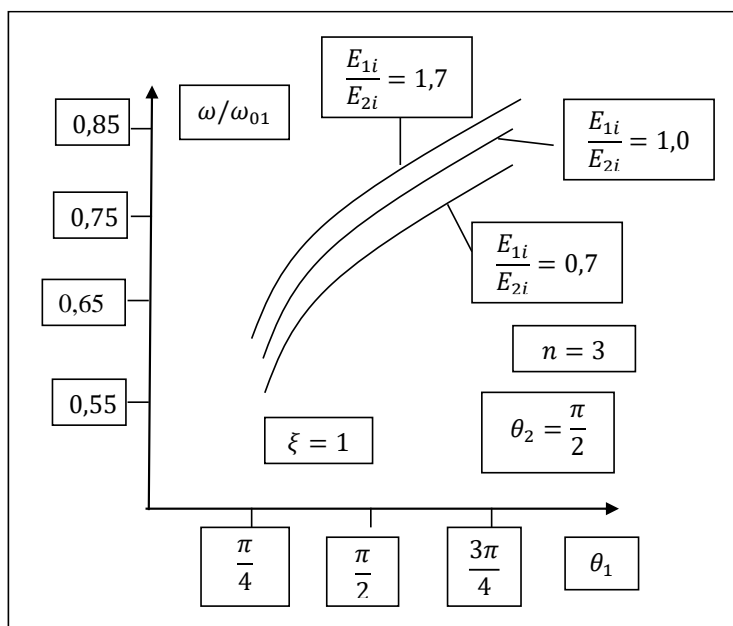


Рис. 2. Зависимость параметра частот от θ_1

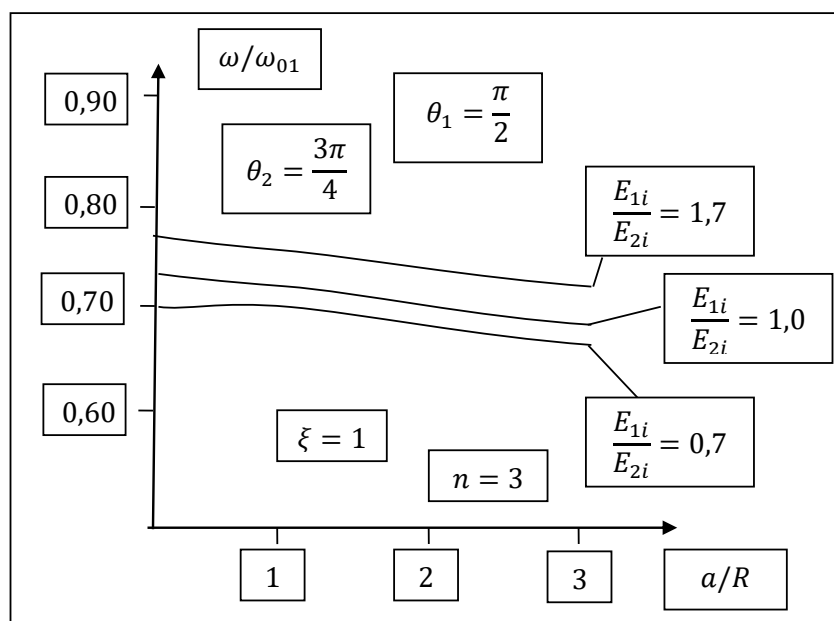


Рис. 3. Зависимость параметра частот от a/R

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганиев Д. С. Применение и расчеты цилиндрических оболочек в подпорных стенах. *Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет. Теоретическая и прикладная механика*. 2006. № 2. С. 7–10.
2. Ганиев Д. С. Исследование облегченных подпорных стен при плоской деформации. *Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет. Теоретическая и прикладная механика*. 2013. № 1. С. 43–47.
3. Ганиев Д. С. Решение задачи подпорных стен, состоящих из цилиндрических оболочек, лежащих на упругом основании. *Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет, Теоретическая и прикладная механика*. 2007. № 1. С. 103–107.
4. Сейфуллаев Х. К. Об одном методе решения краевых задач пологих оболочек. *Изв. вузов «Строительство и архитектура»*. 1975. № 7. С. 56–61.

5. Сейфуллаев Х. К. К расчету пологих оболочек с большим прямоугольным отверстием, открытых на упругий контур. *Изд. вузов «Строительство и архитектура»*. 1978. № 4.
6. Сейфуллаев Х. К. Об одном методе исследования несущей способности пологих оболочек при больших прогибах. *Ст. научных трудов по механике*. 1994. № 4. С. 4–7.
7. Сейфуллаев Х. К., Азимов Н. А. К решению уравнений теории пологих оболочек переменной толщины и кривизны при произвольных граничных условиях. *Прикладная механика*. 1980. Вып. XVI, № 10. С. 47–53.
8. Сейфуллаев Х. К., Гусейнли Х. Расчет пологих ребристых оболочек на основе модели конструктивно-ортотропных систем. *Сборник научных трудов по механике* 1997. Ч. 1, № 7. С. 112–116.
9. Босьяков С. М., Чживэй В. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011. № 3(10).
10. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. Киев: Наукова думка, 1973. 245 с.

REFERENCES

1. Ganiev, D. S. (2006). Application and calculation of cylindrical shells in retaining walls. *Azerbaydzhanskiy Arkhitekturo-Stroitel'nyy Universitet. Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, No. 2, pp. 7-10.
2. Ganiev, D. S. (2013). Investigation of lightweight retaining walls with planar deformation. *Azerbaydzhanskiy Arkhitekturo-Stroitel'nyy Universitet. Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, No. 1, pp. 43-47.
3. Ganiev, D. S. (2007). Solution of the problem of retaining walls consisting of cylindrical shells lying on an elastic foundation. *Azerbaydzhanskiy Arkhitekturo-Stroitel'nyy Universitet. Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, No. 1, pp. 103-107.
4. Seyfullaev, X. K. (1975). On a method for solving boundary value problems of shallow shells. *Izd. vuzov "Stroitel'stvo i arkhitektura"*, No. 7, pp. 56-61.
5. Seyfullaev, X. K. (1978). To the calculation of shallow shells with a large rectangular opening open to the elastic contour. *Izd. vuzov "Stroitel'stvo i arkhitektura"*, No. 4.
6. Seyfullaev, X. K. (1994). On a method for studying the load-bearing capacity of shallow shells with large deflections. *Sb. nauchnykh trudov po mekhanike*, No. 4, pp. 4-7.
7. Seyfullaev, X. K. & Azimov, N. A. (1980). To the solution of the equations of the theory of shallow shells of variable thickness and curvature under arbitrary boundary conditions. *Prikladnaia mekhanika*, Iss. XVI, No. 10, pp. 47-53.
8. Seyfullaev, X. K. & Guseynli, Kh. (1997). Calculation of gently sloping ribbed shells on the basis of the model of constructive-orthotropic systems. *Sbornik nauchnykh trudov po mekhanike*, Iss. 1, No. 7, pp. 112-116.
9. Bosyakov, S. M. & Chzhivey, V. (2011). Analysis of free vibrations of a cylindrical shell of fiberglass with the boundary conditions Navie. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov*, No. 3(10).
10. Amiro, I. Ya., Zarutskiy, V. A. & Polyakov, P. S. (1973). Ribbed cylindrical shells. Kiev: Naukova dumka.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицкая Т. И., к. т. н., доцент,
Пожуева И. С., к.т.н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, 69063, Украина*

tigr_lev@ukr.net

Опираясь на соотношения, связывающие производные перемещений и потенциала электрического поля, как обобщенные функции, с обычными производными, получена система линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Правые части уравнений содержат обобщенные функции, зависящие от скачков перемещений, напряжений, потенциала электрического поля, электрической индукции. Решение системы получено в виде свертки матрицы фундаментальных решений со столбцом правых частей системы. Полученное интегральное представление может быть использовано для сведения соответствующих краевых задач к сильносингулярным интегральным уравнениям.

Ключевые слова: пластина, регулярные обобщенные функции, электроупругость, пьезоэлектрическое напряжение, диэлектрическая проницаемость, вектор электрической индукции.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗРИВНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ, ЩО ОПИСУЄ УЗАГАЛЬНЕНІЙ ПЛОСКИЙ ЕЛЕКТРОПРУЖНИЙ СТАН П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ ПЛАСТИНИ

Левада В. С., к. т. н., доцент, Левицька Т. І., к. т. н., доцент,
Пожуева І. С., к. т. н., доцент, Хижняк В. К., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна*

tigr_lev@ukr.net

Представлена робота є безпосереднім продовженням робіт [1, 2]. Дослідження напружено-деформованого стану твердих тіл, що деформуються та які містять дефекти, є важливою проблемою, тим більше в застосуванні до п'єзоелектричних тіл, які знаходять широке застосування в різних галузях науки і техніки. Водночас розв'язання відповідних крайових задач викликає серйозні математичні труднощі. В [1, 2] отримано інтегральні представлення розв'язків таких задач для анізотропних середовищ. До цього ж використовувався зв'язок між звичайними й узагальненими похідними регулярних узагальнених функцій. Ця методика застосовується і в цій роботі. Для розв'язання задач, пов'язаних із розрахунком подібних тіл, Г. Я. Поповим було запропоновано узагальнений метод інтегральних перетворень. Цей метод отримав розвиток у роботах Г. А. Мораря та інших дослідників. С. Краучем був запропонований метод розривних зсувів як варіант методу граничних елементів (МГЕ). Відповідні граничні елементи для анізотропних середовищ було отримано у попередніх роботах. При цьому використовувався зв'язок між звичайними й узагальненими похідними регулярних узагальнених функцій.

Спираючись на співвідношення, що пов'язують похідні переміщень і потенціалу електричного поля, як узагальнені функції, зі звичайними похідними, було отримано систему лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Праві частини рівнянь містять узагальнені функції, що залежать від стрибків переміщень, напружень, потенціалу електричного поля, електричної індукції. Розв'язок системи отримано у вигляді згортки матриці фундаментальних рішень зі стовпцем правих частин системи. Отримане інтегральне представлення може бути використано для зведення відповідних крайових задач до сильносингулярних інтегральних рівнянь, які можуть бути розв'язані методом граничних елементів.

Ключові слова: пластина, регулярні узагальнені функції, електропружність, п'єзоелектричні навантаження, діелектрична проникність, вектор електричної індукції.

INTEGRAL REPRESENTATION OF THE DISCONTINUOUS SOLUTION OF THE PROBLEM DESCRIBING THE GENERALIZED PLANE ELECTROELASTIC CONDITION OF THE PIEZOELECTRIC PLATE

Levada V. S., Ph.D. of Technical Science, Associate Professor,
Levitskaya T. I., Ph.D. of Technical Science, Associate Professor,
Pozhueva I. S., Ph.D. of Technical Science, Associate Professor,
Khizhnyak V. K., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

*Zaporizhzhya National Technical University,
Zhukovsky str., 64, Zaporizhzhya, 69063, Ukraine*

tigr_lev@ukr.net

The study of the stress-strain state of solid deformable bodies containing defects is an important problem, especially when applied to piezoelectric bodies that are widely used in various fields of science and technology. At the same time, the solution of the corresponding boundary value problems causes serious mathematical difficulties. To solve these problems G.Ya. Popov proposed a generalized method of integral transformations. This method was developed in the works of G.A. Morar and other researchers. Crouch proposed the method of discontinuous displacements as a variant of the method of boundary elements (MBE). The corresponding boundary elements for anisotropic media were obtained earlier. In the works [1, 2] integral representations of solutions of such problems for anisotropic media were obtained. In this connection, the connection between the ordinary and generalized derivatives of regular generalized functions was used. This technique is also used in this work. The present paper is a direct continuation of the works [1, 2].

Relying on the relationships connecting the derivatives of displacements and the potential of the electric field as generalized functions, with ordinary derivatives, a system of linear partial differential equations is obtained. The right-hand sides of the equations contain generalized functions that depend on jumps: displacements, voltages, electric field potential, electric induction. The solution of the system is obtained as a convolution of the matrix of fundamental solutions with a column of right-hand sides of the system. The resulting integral representation can be used to reduce the corresponding boundary value problems to strongly singular integral equations.

Key words: plate, regular generalized functions, electroelasticity, piezoelectric voltage, dielectric constant, electric induction vector.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является непосредственным продолжением работ [1, 2]. Исследование напряженно-деформированного состояния твердых деформируемых тел, содержащих дефекты, является важной проблемой, тем более в применении к пьезоэлектрическим телам, которые находят широкое применение в различных областях науки и техники. В тоже время решение соответствующих краевых задач вызывает серьезные математические затруднения.

В [1, 2] получены интегральные представления решений таких задач для анизотропных сред. При этом использовалась связь между обычными и обобщенными производными регулярных обобщенных функций. Эта методика применяется и в данной работе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается следующая задача:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где

$$L_{11} = c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad L_{12} = L_{21} = c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\begin{aligned}
L_{13} = L_{31} &= b_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b_{12} + b_{31}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{32} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; & L_{22} &= c_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\
L_{23} = L_{32} &= b_{31} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b_{32} + b_{21}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; & L_{33} &= -a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - a_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.
\end{aligned} \quad (2)$$

Здесь: c_{ij} – коэффициенты упругости; b_{ij} – коэффициенты пьезоэлектричности; a_{ij} – коэффициенты диэлектрической проницаемости.

Зависимость между компонентами тензора напряжений, тензора деформаций, вектора напряженности электрического поля и вектора электрической индукции выражается следующим равенством:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ D_x \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} & -b_{11} & -b_{12} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} & -b_{21} & -b_{22} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} & -b_{31} & -b_{32} \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & a_{11} & a_{12} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где (E_x, E_y) – напряженность электрического поля; (D_x, D_y) – вектор электрической индукции.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где φ – потенциал электрического поля; u, v – перемещения в направлениях Ox и Oy .

Рассматривается обобщенное плоское электроупругое состояние. $(x, y) \in B \subset R^2$, B – ограниченная область, ℓ_0 – кусочно-гладкая граница области B , $\ell_i = A_i B_i$ ($i = \overline{1, k}$) – гладкие кривые, лежащие в B . На ℓ_0 задается три граничных условия. Также по три условия задаются на ℓ_i . Кривые ℓ_i моделируют трещины или тонкие включения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем следующие обозначения:

$n^{(0)} = (n_x^{(0)}, n_y^{(0)})$ – единичный внешний нормальный вектор к ℓ_0 ;

$n^{(i)} = (n_x^{(i)}, n_y^{(i)})$ – произвольно направленный единичный вектор к ℓ_i ($i = \overline{1, k}$).

Если γ – кривая, лежащая в B , то на γ определяются:

вектор напряжений –

$$\sigma_x^n = \sigma_x \cos(\angle n, x) + \tau_{xy} \cos(\angle n, y),$$

$$\sigma_y^n = \tau_{xy} \cos(\angle n, x) + \sigma_y \cos(\angle n, y),$$

электрическая индукция –

$$D^n = D_x \cos(\angle n, x) + D_y \cos(\angle n, y),$$

где n – нормальный вектор к γ .

Учитывая (3), получаем:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{(n)} &= \left(c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + b_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos(\angle n, x) + \\
 &+ \left(c_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + b_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b_{32} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos(\angle n, y); \\
 \sigma_y^{(n)} &= \left(c_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + b_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b_{32} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos(\angle n, x) + \\
 &+ \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + c_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + b_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos(\angle n, y); \\
 D^{(n)} &= \left(b_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial v}{\partial y} + b_{31} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos(\angle n, x) + \\
 &+ \left(b_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + b_{32} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos(\angle n, y).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Положим, $u(x, y) \equiv v(x, y) \equiv \varphi(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \notin B \cup \ell_0$. Будем рассматривать u , v и φ как регулярные обобщенные функции, $u \in D'(R^2)$, $v \in D'(R^2)$, $\varphi \in D'(R^2)$ [3]. Обозначим: $D^\alpha f(x, y)$ – производная порядка α регулярной обобщенной функции $f(x, y) \in D'(R^2)$, $\{D^\alpha f(x, y)\}$ – обычная производная порядка α функции $f(x, y)$.

Используя связь между $D^\alpha f(x, y)$ и $\{D^\alpha f(x, y)\}$, где $f(x, y) = u(x, y)$, или $f(x, y) = v(x, y)$, или $f(x, y) = \varphi(x, y)$, получаем:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \sum_{i=0}^k [f]_i n_x^{(i)} \delta(\ell_i); \\
 \frac{\partial f}{\partial y} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \right\} + \sum_{i=0}^k [f]_i n_y^{(i)} \delta(\ell_i); \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} + \sum_{i=0}^k \left(\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_i n_x^{(i)} \delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial x} ([f]_i n_x^{(i)} \delta(\ell_i)) \right); \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\} + \sum_{i=0}^k \left(\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_i n_x^{(i)} \delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial x} ([f]_i n_y^{(i)} \delta(\ell_i)) \right) = \\
 &= \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\} + \sum_{i=0}^k \left(\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_i n_y^{(i)} \delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial y} ([f]_i n_x^{(i)} \delta(\ell_i)) \right).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Здесь: $[g(x, y)]_i$ – скачок функции $g(x, y)$ на кривой ℓ_i в направлении нормали $n^{(i)}$; $\delta(\ell_i)$ – дельта-функция, сосредоточенная на ℓ_i ($i = \overline{0, k}$).

Учитывая (4) и (5), получаем:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix},
 \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
g_1 &= \sum_{i=0}^k \left(\left[\sigma_x^{(n_i)} \right]_i \delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial x} (c_{11} [u]_i n_x^{(i)} + c_{16} [u]_i n_y^{(i)} + c_{16} [v]_i n_x^{(i)} + \right. \\
&+ c_{12} [v]_i n_y^{(i)} + b_{11} [\varphi]_i n_x^{(i)} + b_{12} [\varphi]_i n_y^{(i)}) \delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial y} (c_{16} [u]_i n_x^{(i)} + c_{66} [u]_i n_y^{(i)} + \\
&+ c_{66} [v]_i n_x^{(i)} + c_{26} [v]_i n_y^{(i)} + b_{31} [\varphi]_i n_x^{(i)} + b_{32} [\varphi]_i n_y^{(i)}) \delta(\ell_i) \Big); \\
g_2 &= \sum_{i=0}^k \left(\left[\sigma_y^{(n_i)} \right]_i \delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial x} (c_{16} [u]_i n_x^{(i)} + c_{66} [u]_i n_y^{(i)} + c_{66} [v]_i n_x^{(i)} + c_{26} [v]_i n_y^{(i)} + \right. \\
&+ b_{31} [\varphi]_i n_x^{(i)} + b_{32} [\varphi]_i n_y^{(i)}) \delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial y} (c_{12} [u]_i n_x^{(i)} + c_{26} [u]_i n_y^{(i)} + \\
&+ c_{26} [v]_i n_x^{(i)} + c_{22} [v]_i n_y^{(i)} + b_{21} [\varphi]_i n_x^{(i)} + b_{22} [\varphi]_i n_y^{(i)}) \delta(\ell_i) \Big); \\
g_3 &= \sum_{i=0}^k \left(\left[D^{n_i} \right]_i \delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial x} (b_{11} [u]_i n_x^{(i)} + b_{31} [u]_i n_y^{(i)} + b_{31} [v]_i n_x^{(i)} + b_{21} [v]_i n_y^{(i)} - \right. \\
&- a_{11} [\varphi]_i n_x^{(i)} - a_{12} [\varphi]_i n_y^{(i)}) \delta(\ell_i) + \frac{\partial}{\partial y} (b_{12} [u]_i n_x^{(i)} + b_{32} [u]_i n_y^{(i)} + \\
&+ b_{32} [v]_i n_x^{(i)} + b_{22} [v]_i n_y^{(i)} - a_{12} [\varphi]_i n_x^{(i)} - a_{22} [\varphi]_i n_y^{(i)}) \delta(\ell_i) \Big). \tag{7}
\end{aligned}$$

Решение (6) получаем сверткой матрицы фундаментальных решений $\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} \end{bmatrix}$ с

матрицей $\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$. Матрица $\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} \end{bmatrix}$ – решение уравнения

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(x) \delta(y). \tag{8}$$

Решение (8) получено в [3]. Оно выражено в замкнутом виде через элементарные функции:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ \varphi(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(x, y) & \Gamma_{12}(x, y) & \Gamma_{13}(x, y) \\ \Gamma_{12}(x, y) & \Gamma_{22}(x, y) & \Gamma_{23}(x, y) \\ \Gamma_{13}(x, y) & \Gamma_{23}(x, y) & \Gamma_{33}(x, y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \\ g_3(x, y) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Выполнив (9) с учетом (4), получаем:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \sum_{i=0}^k \left(\int_{\ell_i} \left[\sigma_{\xi}^{n_i}(u, v, \varphi) \right]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{11}(x - \xi, y - \eta) ds_{(\xi, \eta)} + \right. \\
&+ \int_{\ell_i} \left[\sigma_{\eta}^{n_i}(u, v, \varphi) \right]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{12}(x - \xi, y - \eta) ds_{(\xi, \eta)} + \int_{\ell_i} \left[D^{n_i}(u, v, \varphi) \right]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{13}(x - \xi, y - \eta) ds_{(\xi, \eta)} - \\
&- \int_{\ell_i} \left[u(\xi, \eta) \right]_i \sigma_{\xi}^{n_i}(\Gamma_{11}(x - \xi, y - \eta), \Gamma_{12}(x - \xi, y - \eta), \Gamma_{13}(x - \xi, y - \eta)) ds_{(\xi, \eta)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\ell_i} [v(\xi, \eta)]_i \sigma_\eta^{n_i} (\Gamma_{11}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{12}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{13}(x-\xi, y-\eta)) ds_{(\xi, \eta)} - \\
 & - \int_{\ell_i} [\varphi(\xi, \eta)]_i D^{n_i} (\Gamma_{11}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{12}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{13}(x-\xi, y-\eta)) ds_{(\xi, \eta)}; \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y) = & \sum_{i=0}^k \left(\int_{\ell_i} [\sigma_\xi^{n_i}(u, v, \varphi)]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{12}(x-\xi, y-\eta) ds_{(\xi, \eta)} + \right. \\
 & + \int_{\ell_i} [\sigma_\eta^{n_i}(u, v, \varphi)]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{22}(x-\xi, y-\eta) ds_{(\xi, \eta)} + \int_{\ell_i} [D^{n_i}(u, v, \varphi)]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{23}(x-\xi, y-\eta) ds_{(\xi, \eta)} - \\
 & - \int_{\ell_i} [u(\xi, \eta)]_i \sigma_\xi^{n_i} (\Gamma_{12}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{22}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{23}(x-\xi, y-\eta)) ds_{(\xi, \eta)} - \\
 & - \int_{\ell_i} [v(\xi, \eta)]_i \sigma_\eta^{n_i} (\Gamma_{12}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{22}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{23}(x-\xi, y-\eta)) ds_{(\xi, \eta)} - \\
 & \left. - \int_{\ell_i} [\varphi(\xi, \eta)]_i D^{n_i} (\Gamma_{12}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{22}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{23}(x-\xi, y-\eta)) ds_{(\xi, \eta)} \right); \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, y) = & \sum_{i=0}^k \left(\int_{\ell_i} [\sigma_\xi^{n_i}(u, v, \varphi)]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{13}(x-\xi, y-\eta) ds_{(\xi, \eta)} + \right. \\
 & + \int_{\ell_i} [\sigma_\eta^{n_i}(u, v, \varphi)]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{23}(x-\xi, y-\eta) ds_{(\xi, \eta)} + \int_{\ell_i} [D^{n_i}(u, v, \varphi)]_{(\xi, \eta)} \Gamma_{33}(x-\xi, y-\eta) ds_{(\xi, \eta)} - \\
 & - \int_{\ell_i} [u(\xi, \eta)]_i \sigma_\xi^{n_i} (\Gamma_{13}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{23}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{33}(x-\xi, y-\eta)) ds_{(\xi, \eta)} - \\
 & - \int_{\ell_i} [v(\xi, \eta)]_i \sigma_\eta^{n_i} (\Gamma_{13}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{23}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{33}(x-\xi, y-\eta)) ds_{(\xi, \eta)} - \\
 & \left. - \int_{\ell_i} [\varphi(\xi, \eta)]_i D^{n_i} (\Gamma_{13}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{23}(x-\xi, y-\eta), \Gamma_{33}(x-\xi, y-\eta)) ds_{(\xi, \eta)} \right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Устремляя в (10, 11, 12) точку (x, y) к ℓ_i ($i = \overline{0, k}$) и учитывая заданные условия на ℓ_i , получим сильно сингулярную систему граничных интегральных уравнений, которую можно решать МГЭ.

ВЫВОДЫ

Получено интегральное представление разрывного решения задачи, описывающей обобщенное плоское электроупругое состояние пьезоэлектрической пластины, содержащей дефекты (кривые, на которых терпят разрывы: перемещения, напряжения, потенциалы, индукция). Полученное представление позволяет свести краевую задачу к системе интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Levada V. S., Khizhniak V. K., Levitskaya T. I. Integral representation discontinuous solution of the problem of bending of anisotropic plates. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2015. № 1. С. 107–114.
2. Левада В. С., Левицкая Т. И., Хижняк В. К. Интегральное представление разрывного решения плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. *Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 146–152.
3. Левада В. С., Левицкая Т. И., Пожуева И. С., Хижняк В. К. Построение матрицы фундаментальных решений системы уравнений, описывающих обобщенное плоское электроупругое состояние пьезоэлектрической пластиной. *Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 252–261.

REFERENCES

1. Levada, V. S., Khizhniak, V. K. & Levitskaya, T. I. (2015). Integral representation discontinuous solution of the problem of bending of anisotropic plates. *Novi materialy i tekhnolohiyi v metalurhii ta mashynobuduvanni*, No. 1, pp. 107–114.
2. Levada, V. S., Levitskaya, T. I. & Khizhniak, V. K. (2016). Integral representations of discontinuous solutions of plane problems of theory of elasticity for an anisotropic medium. *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Fiziko-matematični nauki*, No. 1, pp. 146–152.
3. Levada, V. S., Levitskaya, T. I., Pozhueva, I. S. & Khizhniak, V. K. (2017). Construction of the matrix of fundamental solutions of the system of equations describing the generalized plane electrical elastic state of the piezoelectric plate. *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Fiziko-matematični nauki*, 2017, No. 1, pp. 252–261.

УДК 519.6

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-09

**МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗПОДІЛУ КОРИСНИХ КОПАЛИН
У ШАХТНІЙ СЕЙСМІЧНІЙ ТОМОГРАФІЇ**

Литвин О. М., д. ф.-м. н., професор, Драгун В. В., аспірант

*Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, Україна*

vdragun.94@gmail.com

Міжсвердловинна томографія є важливим інструментом у моніторингу водосховищ, розвідці корисних копалин, будівництві та дослідженнях, пов'язаних з утилізацією радіоактивних відходів.

Проте жоден із відомих методів міжсвердловинної сейсмічної томографії не дає точної картини досліджуваного регіону. У зв'язку із цим виникає необхідність дослідити можливість використання методів комп'ютерної томографії в шахтній сейсмічній томографії для знаходження можливості поліпшення результатів досліджень.

У цій статті ми пропонуємо відновити значення повільності невідомої області в шахтній сейсмічній томографії, використовуючи твердження робіт [1, 2], для частини земної кори, навколо якої з усіх чотирьох сторін є штреки. На сторонах цього регіону ми можемо розмістити сейсмічні приймачі і створювати сейсмічні сигнали на інших сторонах. У результаті ми отримаємо час проходження сейсмічного сигналу через досліджуваний регіон, тобто проєкційні дані – інтеграли вздовж ліній, що перетинають досліджуваний об'єкт. Відповідно до методу, описаного в [1], рішення задачі можна отримати як суму Фур'є. Особливістю і перевагою методу, описаного в [1, 2], є явні формули для наближеного розрахунку коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних, часів приходу сейсмічних хвиль від системи джерел до системи приймачів. Це дозволило скоротити вирішення задачі до задачі обчислення коефіцієнтів Фур'є, використовуючи формули, запропоновані в [1, 2], та вибору систем прямих, якими задаються проєкційні дані.

Також у цій статті є обчислювальний експеримент для синтетичної функції, яка є розподілом повільності чотирикутної області. Наведені результати обчислювального експерименту показують, що вже при невеликому порядку сум Фур'є та обчислювальних даних результати, отримані за допомогою методу, описаного в роботах [1, 2], близькі до тестових значень функцій, що описує задане зображення рельєфу.

Розглянутий приклад підтверджує ефективність запропонованого методу. Його аналіз дозволяє зробити висновок про те, що запропонований метод може бути використаний при невеликій кількості джерел і приймачів, що є важливим з практичної точки зору. Проте необхідно дослідити можливість поліпшення методу за допомогою тверджень робіт [3], а також провести випробування на реальних даних.

Ключові слова: комп'ютерна томографія, шахтна сейсмічна томографія, сума Фур'є.

METHOD OF FINDING DISTRIBUTION OF MINERAL RESOURCES IN MINE SEISMIC TOMOGRAPHY

Lytvyn O. M., D.Sc. in Physics and Math., Professor, Drahun V. V., postgraduate student

*Ukrainian engineering and pedagogical academy,
Universitetskaya st., 16, Kharkiv, Ukraine*

vdragun.94@gmail.com

Crosshole tomography is an important tool in monitoring reservoirs, exploration of minerals, construction and research related to the disposal of radioactive waste.

However, none of the known methods of crosshole seismic tomography can provide an accurate picture of the studied region. In connection with this, there is a need to explore the possibility of using computer tomography techniques to study the feasibility of improving research results.

In this article, we propose to restore the value of the slowness of an unknown region in the mine seismic tomography using the statements of works [1, 2], for the part of the crust of the earth, around which are borehole on the four sides. On the sides of this region, we can place seismic receivers and create seismic signals on other sides. As a result, we obtain the time of the seismic waves which need for passing through the current region, which are projection data – integrals along the lines that cross the investigated object. In accordance with the method described in [1], the solution of the problem can be obtained as a Fourier sum. The feature and advantage of the method described in [1, 2] are explicit formulas for the approximate calculation of Fourier coefficients of the function of two variables, times of arrival of seismic waves from source system to receiver system. This made it possible to reduce the solution of the problem to the problem of calculating the Fourier coefficients using the formulas proposed in [1, 2] and the choice of systems of direct, along which projective data is given.

Also in this article is a computational experiment for a synthetic function which is the distribution of slowness quadrangular area. The results of the computational experiment show that, with a small order of Fourier sums and computational data, the results obtained using the method described in [1, 2] are close to the test values of synthetic function that describe a given image of the relief.

The considered example confirms the effectiveness of the proposed method. It analysis allows us to conclude that the proposed method can be used with a small number of sources and receivers, which is important in practice. However, it is necessary to investigate the possibility of improving the method with the help of statements of work [3] as well conduct tests on real data set.

Key words: computer tomography, crosshole seismic tomography, Fourier's sum.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Міжсвердловинна сейсмозв'язка передбачає передачу сейсмічних сигналів між двома або більше свердловинами. Із записаних часів прибуття сигналу, за допомогою томографічних інверсій, можна визначити структуру міжсвердловинної області. Уникаючи високого рівня згасання коливань у приповерхневих шарах Землі, міжсвердловинні методи можуть надавати зображення більш високої роздільної здатності, ніж відповідні методи для випадку поверхня-поверхня. Саме з цієї причини міжсвердловинна томографія стала важливим інструментом у моніторингу водосховищ, розвідці корисних копалин, будівництві та дослідженнях, пов'язаних з утилізацією радіоактивних відходів.

Проте не існує жодного методу, який точно відновлює досліджуваний регіон, тому виникає необхідність дослідити можливість використання методів комп'ютерної томографії в шахтній сейсмічній томографії для знаходження можливості поліпшення результатів міжсвердловинного дослідження.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

У роботі [4] детально описується взаємозв'язок між сейсмічною томографією, перетворенням Радону, а також зворотним перетворенням Радону, а також указано, яким чином можна узагальнити метод гармонійного розкладання на довільну горизонтально-однорідну опорну модель, як узагальнити метод зворотного проектування з фільтрацією на випадок неоднорідної моделі.

Також у цій роботі вказано, що сейсмічні промені лише в деяких випадках є прямими лініями, що збільшує похибку при використанні методів комп'ютерної томографії в

сейсмічній томографії. Для більш точного наближення можна розглядати нев'язку часів прибуття променя,

$$\delta T(p, \phi) = \int_L \delta u(X) ds, \quad (1)$$

де $T = T_0 + \delta T$ і $u = u_0 + \delta u$, $u(X)$ – функція, яка описує значення повільності досліджуваного регіону, $T(p, \phi)$ – час пробігу сейсмічного променя, заданий у полярних координатах, X – радіус-вектор точки у двовимірному просторі, пряма L задається рівнянням

$$p = x \cos \phi + y \sin \phi = r \cos(\theta - \phi) \quad (2)$$

з вектором $X = (x, y) = (r, \theta)$, заданим в декартових і полярних координатах.

Опорні часи пробігу

$$T_0(p, \phi) = \int_{L_0} \delta u_0(x) ds \quad (3)$$

обчислюються для променів, відповідних повільності опорної моделі $u_0(x)$, і при інтерпретації нев'язок (1) промені вважаються прямолінійними і можна використовувати методи комп'ютерної томографії.

Е статті [1] запропоновано новий метод розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії. В основі методу лежать оригінальні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою проєкцій ездвож деякої системи ліній, що перетинають об'єкт дослідження. Важливою особливістю вказаного методу є заміна тригонометричних функцій кусково-сталими сплайнами найкращого рівномірного наближення.

Суть методу полягає у математичному моделюванні структури тіла у вигляді скінченної суми ряду Фур'є

$$F(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N C_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}, \quad (4)$$

$$C_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy, \quad (5)$$

де $C_{k,l}$ – коефіцієнти Фур'є невідомої функції $f(x, y)$.

Метод, представлений у роботі [1] був розвинутий у дисертаційній роботі [2], де розглядається проблема розробки і дослідження чисельної реалізації та нового методу розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії, запропонованого в [1].

ФОРМУЛЮВАННЯ МЕТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідити можливість використання методів комп'ютерної томографії і загалом методів, описаних у роботах [1, 2], у шахтній сейсмічній томографії.

ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

У даній статті пропонується відновлювати значення повільності невідомого регіону в шахтній сейсмічній томографії, скориставшись твердженнями робіт [1, 2]. Припустимо, що є штреки навколо невідомої ділянки у формі чотирикутного паралелепіпеда, тоді ми можемо розмістити приймачі сейсмічного сигналу (наприклад, акселерометри) на вертикальних гранях та ребрах досліджуваного регіону і, створюючи сейсмічні коливання на інших гранях

та ребрах у заданій площині (наприклад, ударами кувалди по металевій підкладці), ми отримаємо часи проходження сейсмічних хвиль через досліджуваний регіон. Тоді час проходження сейсмічного сигналу можна використати як відомі проекційні дані – інтеграли вздовж ліній паралельних прямих $kx + ly = t$, які перетинають досліджуваний об’єкт.

Для вирішення задачі знаходження розподілу повільності в шахтній сейсмічній томографії використовуватимемо метод, запропонований у роботі [1]. Відповідно до нього, вирішення задачі може бути отримане у вигляді суми Фур’є (формула (4)), де невідома функція $f(x, y)$ описує структуру тіла, яку необхідно відновити. У результаті ми можемо відновити повільність розповсюдження сейсмічного сигналу в кожній точці досліджуваного регіону за допомогою інтегральних характеристик про неї (проекцій).

У роботах [1, 2] наведені формули для їх обчислення, які використовуються в цій роботі для випадку, коли невідома функція $f(x, y)$ є повільністю і нам відомі лише часи прибуття сейсмічного сигналу в точки спостереження.

Особливістю і перевагою розробленого методу є явні формули для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур’є функції двох змінних часів пробігу сейсмічних хвиль від системи джерел до системи приймачів. Це дозволило звести розв’язання задачі до задачі обчислення коефіцієнтів Фур’є безпосередньо за допомогою формул, запропонованих у роботах [1, 2], системи прямих (інтегралів), уздовж яких задаються проекційні дані і від формул для їх обчислення, обумовлених значеннями індексів k і l у сумі Фур’є.

Також ми пропонуємо використовувати замість суми Фур’є суму Фейєра

$$S(x, y, N) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \left(1 - \frac{|l|}{N+1}\right) F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}, \quad (6)$$

що зумовлено впливом явища Гіббса на результати дослідження, оскільки, ймовірніше, функція $f(x, y)$ має розриви. Як відомо, використання сум Фур’є, внаслідок явища Гіббса, не дозволяє отримати достовірні результати при візуалізації інформації за допомогою розривних функцій навіть тоді, коли коефіцієнти Фур’є обчислені точно. Ще однією перевагою сум Фейєра у порівнянні з сумами Фур’є є те, що ядро суми Фейєра є позитивним і умови збіжності виписуються простіше.

Приклад. Нехай нам задані часи прибуття сейсмічного сигналу в точки спостереження на досліджуваній площині

$$f(x, y) = \begin{cases} 0,57 \text{ if } y > 0, 2 + 3(x - \sin(y) - 0,1)^2, \\ 0,43 \text{ if } \left(x + \frac{\sin(y)}{10} - 0,75\right)^2 + (2y + 2\cos(x) - 3)^2 < 0,05, \\ 0,65 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Вхідні дані та отриманий результат можна побачити на рис. 1 (а-г).

Як можна побачити, рис. 1 (б-г) схожий на рис. 1 (а), хоча ці рисунки не співпадають з оригіналом у точках розриву, місцях, де функція різко змінює свої значення (місце переходу між чорним кольором, темно-сірим та світло-сірим), а також межі рисунку. Причому абсолютна похибка для рис. 1 (б) становить 0,127, відносна – 0,295, для рис. 1 (в) абсолютна – 0,113, відносна – 0,263, для рис. 1 (г) абсолютна – 0,11, відносна – 0,256. Уже при невеликій кількості джерел та приймачів метод з робіт [1, 2] дає непогані результати, проте їх можна поліпшити, скориставшись твердженнями роботи [3].

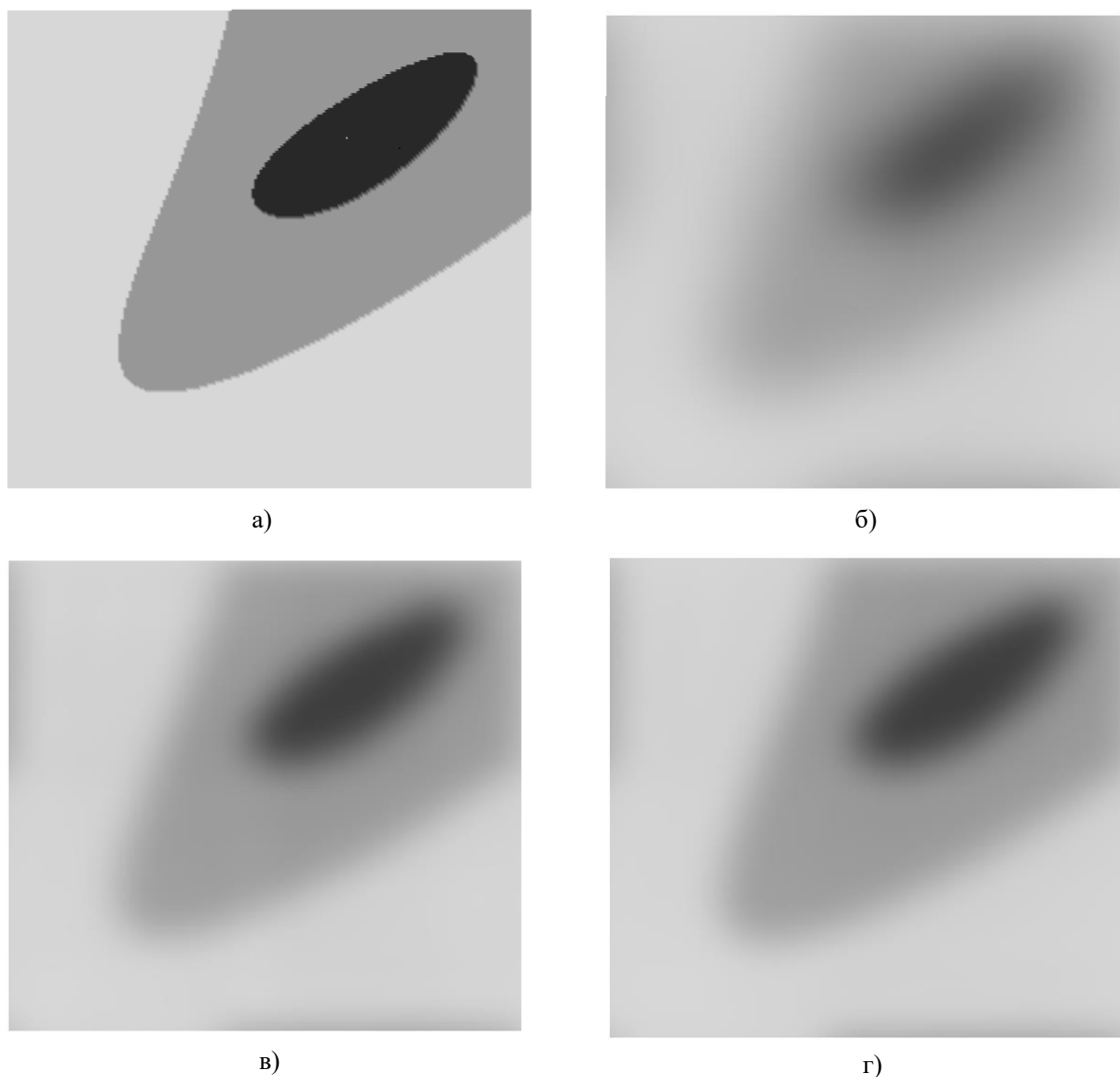


Рис. 1. Вхідні дані та отриманий результат тестової задачі:

а) вхідні дані;

б) результати обчислень методом, описаним у роботах [1, 2], коли $N = 4$ (порядок суми Фур'є) і кількість джерел та приймачів по 16 на кожній зі сторін;

в) результати обчислень методом, описаним у роботах [1, 2], коли $N = 8$, кількість джерел та приймачів по 16;

г) результати обчислень методом, описаним у роботах [1, 2], коли $N = 8$, кількість джерел та приймачів по 32

ВИСНОВКИ

У цій роботі запропоновано новий спосіб дослідження внутрішньої структури чотирикутної ділянки у формі паралелепіпеда, розміщеної між штреками за часом приходу сейсмічної хвилі від конкретного джерела системи джерел до кожного приймача системи приймачів.

Наведені результати обчислювального експерименту показують, що вже при невеликому порядку сум Фур'є та обчислювальних даних результати, отримані за допомогою методу, описаного в роботах [1, 2], близькі до тестових значень функцій, що описує задане зображення рельєфу.

Розглянутий приклад підтверджує ефективність запропонованого методу. Його аналіз дозволяє зробити висновок про те, що запропонований метод може бути використаний при невеликій кількості джерел і приймачів, що є важливим з практичної точки зору. Проте необхідно дослідити можливість поліпшення методу за допомогою тверджень робіт [3], а також провести випробування на реальних даних.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії. *Системний аналіз, управління й інформаційні технології: Вісник Харківського державного політехнічного університету*: зб. наук. праць. 2000. № 125. С. 27–35.
2. Кулик С. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів: дис. ... канд. фіз.-мат. наук / Харків, 2008. 192 с.
3. Литвин О. М. Підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних. *Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ»*. Математичне моделювання в техніці та технологіях: темат. вип. 2016. № 6 (1178). С. 43–46.
4. Чепмен К. Преобразование Радона и сейсмическая томография. *Сейсмическая томография* / под ред. Г. Нолетта. Москва: Мир, 1990. С. 34–60.

REFERENCE

1. Lytvyn, O. M. (2000). Periodic splines and a new method of solving the plane problem of X-ray computed tomography. *Systemnyi analiz, upravlinnia i informatsiini tekhnolohii: Visnyk Kharkivskoho derzhavnoho politekhnichnoho universytetu*. Zbirka naukovykh prats, No. 125, pp. 27-35.
2. Kulyk, S. I. (2008). Mathematical modeling in computer tomography using wavelets. (Extended abstract of Candidate thesis). Kharkiv, Ukraine.
3. Lytvyn, O. M. (2016). Improving the accuracy of decomposition in Fourier series of discontinuous functions of one and two variables. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu "KhPI": zbirka naukovykh prats. Tematychnyi vypusk: Matematychnе modeliuвання v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*, No. 6 (1178), pp. 43-46.
4. Chepmen, K. (1990). Radon Transformation and Seismic Tomography. *Sejsmicheskaya tomografiya*. Moskow: Mir, pp. 34-60.

УДК 681.3:771.537.442

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-10

АНАЛІЗ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ НА ОСНОВІ ВОКСЕЛЬНИХ СТРУКТУР ОБРАЗІВ-МОДЕЛЕЙ У СИСТЕМІ «РАНОК»

Мильцев О. М., викладач

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, Україна*

alexmyltsev@gmail.com

У статті розглядається розвиток принципів М-образного аналізу складних функцій трьох змінних, заданих аналітичним або кусково-аналітичним способом. Перехід на воксельну структуру представлення образів-моделей дозволило підвищити простір досліджуваної функції до четвертого виміру, що призвело до розширення класу задач, пов'язаних з багатовимірними підстановками. Розглядаються задачі формування, уточнення та візуалізації тривимірного воксельного масиву даних, побудови графічного М-образного представлення функції, визначення просторового руху по градієнту на основі воксельних структур М-образів. Аналіз на воксельних структурах стає основою в розвитку системи рекурсивного аналізу на образних компонентах РАНОК.

Ключові слова: моделювання, R-функція, аналіз функцій, диференційні характеристики функції, рух просторового градієнту, воксельний масив даних, образ-модель, графічний М-образ.

ANALYSIS OF THE FUNCTIONS OF THREE VARIABLES BASED ON VOXEL STRUCTURES OF IMAGES-MODELS IN THE SYSTEM “RANOK”

Mylytsev O. M., lecturer

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine*

alexmylytsev@gmail.com

Modern ways of representing the function give a clear idea of the shape of its surface levels. Thus, the needs of the visual analysis of the simulated geometry of the object are completely satisfied. This combination of analytics and computer graphics already allows you to create analytical design systems. Improving the quality of images in the visual analysis process is approaching a certain limit. In this case, the responsibility for making a decision during the study of the shape of the object remains with visual control. The level of associations on the basis of image perception of the object and to date is a problem for the automation process.

The RANOK system is a programmatic basis for continuing the development of the principles of constructing special graphic images that can be applied in algorithmization and reflecting the local geometric characteristics of complex geometric models.

These images allow not only to visualize the relief properties that arise in the area of determination of the investigated surface of the function, but also to algorithmize the problem of determining the gradient descent from any given point of the surface with the definition of its extreme points. Such a graphic image is called "image-model" of the surface, which reflects some geometric properties (simplified "M-image").

The article deals with the development of the principles of the M-analysis of complex functions of the three variables given by the analytic or piecewise-analytical method. The transition to the voxel structure of representation of image-models allowed to increase the space of the investigated function to the fourth dimension, which led to the expansion of the class of problems associated with multidimensional substitutions. The problems of the formation, refinement and visualization of a three-dimensional voxel data array, the construction of a graphical M-representation of a function, and the determination of spatial motion on a gradient based on voxel structures of M-images are considered. The analysis on the voxel structures becomes the basis for the development of the system of recursive analysis on the figurative components of the RANOK.

As a result, the principles and algorithms for the formation, refinement, analysis and display of three-dimensional voxel graphic M-shaped and described in the article formed the basis of the RANOK system.

In the paper, it was shown that the principles of the M-shaped estimate of the surface relief of the function are transferred to a multidimensional space with the use of voxel approaches of the organization of M-images, as well as multidimensional structures that are not capable of visual perception.

All this allows you to direct further research and development of the system to automate the analysis process geometric characteristics of multidimensional objects defined by functions of n-variables, using graphic representations of image-models for increased space and subsequent projection of them.

Key words: modeling, R-function, analysis of functions, differential characteristics of a function, spatial gradient motion, voxel dataset, image-model, graphic M-image.

ВСТУП

Сучасні способи зображення функції дають наочне уявлення про форму її поверхонь рівня. Тим самим повністю задовольняються потреби візуального аналізу модельованої геометрії об'єкта. Таке поєднання аналітики і комп'ютерної графіки вже дозволяє створювати системи аналітичного конструювання.

Удосконалення якості зображень в процесі візуального аналізу підходить до певної межі. При цьому відповідальність за прийняття рішення в ході дослідження форми об'єкта залишається за зоровим контролем. Рівень асоціацій на основі образного сприйняття об'єкта і на сьогоднішній день становить проблему для процесу автоматизації.

Система РАНОК є програмною основою для продовження розвитку принципів побудови спеціальних графічних образів, які можна застосувати в алгоритмізації і що відображають локальні геометричні характеристики складних геометричних моделей [1, 2].

Ці образи дозволяють не тільки наочно відображати рельєфні властивості, що виникають на області визначення досліджуваної поверхні функції, але і алгоритмізувати завдання визначення градієнтного спуску з будь-якої зазначеної точки поверхні з визначенням її екстремальних точок. Такий графічний образ представлений в роботах [1, 2] як «образ-модель» поверхні, що відображає деякі геометричні властивості (спрощено «М-образ»).

В продовження роботи з воксельним поданням М-образів і використовується система РАНОК (Рекурсивний Аналіз На Образних Компонентах), що створена для побудови і візуалізації тривимірних воксельних зображень складних функцій трьох змінних, заданих аналітичним або кусково-аналітичним способом (R-функції) [3]. Розроблена оригінальна структура динамічного тривимірного масиву [4], що дозволяє формувати воксельні дані в процесі рекурсивного «занурення». Незважаючи на пристойні розміри пам'яті, що виділяється при такому підході, цей масив дозволяє як відновлювати сценарій рекурсивного процесу в разі апаратного збою і інших причин, так і використовувати різні методи інтерполяції, що прискорюють процедуру уточнення аналітичного об'єкта. Один раз і з необхідною точністю обробивши аналітичний об'єкт, можна досить швидко отримувати різні зображення об'єкта в різному ракурсі та перерізах.

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ОБ'ЄКТІВ

Вихідними даними для аналізу є дійсні функції трьох змінних, що задані аналітичним або кусково-аналітичним (R-функції) способом на деякій замкнутій прямокутній області, у вигляді [3]:

$$f(p) \geq 0, \quad (1)$$

де $p = p(x, y, z)$ – точка у просторі E^3 , що задана координатними змінними.

Таким чином $f(p) > 0$ визначає точки всередині об'єкта, $f(p) = 0$ – точки на поверхні об'єкта, $f(p) < 0$ – точки ззовні об'єкта (що не належать об'єктові).

Дослідження вихідної функції відбувається на замкнутій прямокутній підобласті області визначення функції за допомогою компілятора формульної мови FORTU [5] та рекурсивного алгоритму розбиття прямокутної габаритної призми, що містить аналітичний об'єкт [4]. Рекурсивний підхід розкриває додаткові можливості в процесі дослідження, оскільки представляє динамічно уточнюючу процедуру з виходом по заданій умові.

РЕКУРСИВНИЙ АЛГОРИТМ ФОРМУВАННЯ ТРИВИМІРНОГО ВОКСЕЛЬНОГО МАСИВУ ДАНИХ ФУНКЦІЇ

Формування тривимірного воксельного масиву даних засновано на рекурсивному алгоритмі уточнення тривимірної області методом половинного ділення трьома взаємоперпендикулярними площинами на вісім подібних підобластей. Для кожної з отриманих підобластей застосовується та ж сама процедура, доки не буде досягнута задана глибина рекурсії. Такий підхід призводить в результаті до воксельної організації тривимірної області дослідження функції, де для кожного вокселя визначено знак та базовий набір диференційних характеристик функції [4].

Характерно те, що отриманий воксельний масив даних функції являє собою основу для побудови М-образів, що відображають локальні геометричні характеристики на області дослідження функції.

ФОРМУВАННЯ ГРАФІЧНИХ ОБРАЗІВ-МОДЕЛЕЙ

Базові М-образи C_x, C_y, C_z, C_t . При формуванні воксельного масиву даних тіло функції $t = f(x, y, z)$, що досліджується, представляється як чотири скалярних поля:

$$N_f = N_x(x, y, z, t)i + N_y(x, y, z, t)j + N_z(x, y, z, t)k + N_t(x, y, z, t)l, \quad (2)$$

де N_x, N_y, N_z, N_t – компоненти вектора нормалі \bar{N} , що обчислюється для кожного вокселя.

Встановимо відповідність просторових скалярних полів N_x, N_y, N_z, N_t з їх графічним воксельним поданням у вигляді базових М-образів C_x, C_y, C_z, C_t через інтенсивність тону монохромної палітри $P \in [0, 255]$ [6]:

$$C_x = \frac{P(1 + N_x)}{2}, \quad (3)$$

$$C_y = \frac{P(1 + N_y)}{2}, \quad (4)$$

$$C_z = \frac{P(1 + N_z)}{2}, \quad (5)$$

$$C_t = \frac{P(1 + N_t)}{2}. \quad (6)$$

В результаті маємо чотири базових М-образи як цілочисельні тривимірні області значень. Кожен з отриманих образів несе інформацію про поведінку кожної з чотирьох проекцій вектора нормалі, що обчислюється для кожного вокселя з масиву даних на відповідній підобласті досліджуваної функції. Тобто базові М-образи містять значення кута повороту нормалі від кожної осі на проміжку $[0, \pi]$.

Отриманий воксельний масив базових М-образів дозволяє відмовитися від подальшого використання аналітичного виду функції в наступних графічних перетвореннях для отримання необхідної кількості наступних образів-моделей.

М-образи $C_{tx}, C_{ty}, C_{tz}, C_{tt}$, що характеризує просторове положення горизонту спостерігача до об'єкта. Ці образи характеризують модуль зміни косинуса кута відхилу нормалі від осей відповідно. Кут $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_t)$ визначає горизонт спостерігача в чотиривимірному просторі (по замовчуванню $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha_t = \frac{\pi}{2}$). Таким чином, використовуючи (3)–(6), маємо:

$$C_{tx} = 2 \left| C_x - P \frac{(1 + \cos \alpha_x)}{2} \right|, \quad (7)$$

$$C_{ty} = 2 \left| C_y - P \frac{(1 + \cos \alpha_y)}{2} \right|, \quad (8)$$

$$C_{tz} = 2 \left| C_z - P \frac{(1 + \cos \alpha_z)}{2} \right|, \quad (9)$$

$$C_{tt} = 2 \left| C_t - P \frac{(1 + \cos \alpha_t)}{2} \right|. \quad (10)$$

М-образи часткових похідних $C_{dx} = \partial f / \partial x, C_{dy} = \partial f / \partial y, C_{dz} = \partial f / \partial z$ обчислюються на основі (7)–(10) наступним чином:

$$C_{dx} = \left\| \frac{C_{tx}}{C_{tt}} \right\| = \begin{cases} \frac{C_{tx}}{C_{tt}} \leq 1 \rightarrow C_{dx} = P - \frac{PC_{tx}}{2C_{tt}}; \\ \frac{C_{tx}}{C_{tt}} > 1 \rightarrow C_{dx} = \frac{PC_{tt}}{2C_{tx}}, \end{cases} \quad (11)$$

$$C_{dy} = \left\| \frac{C_{ty}}{C_{tt}} \right\| = \begin{cases} \frac{C_{ty}}{C_{tt}} \leq 1 \rightarrow C_{dy} = P - \frac{PC_{ty}}{2C_{tt}}; \\ \frac{C_{ty}}{C_{tt}} > 1 \rightarrow C_{dy} = \frac{PC_{tt}}{2C_{ty}}, \end{cases} \quad (12)$$

$$C_{dz} = \left\| \frac{C_{tz}}{C_{tt}} \right\| = \begin{cases} \frac{C_{tz}}{C_{tt}} \leq 1 \rightarrow C_{dz} = P - \frac{PC_{tz}}{2C_{tt}}; \\ \frac{C_{tz}}{C_{tt}} > 1 \rightarrow C_{dz} = \frac{PC_{tt}}{2C_{tz}}. \end{cases} \quad (13)$$

М-образи часткових похідних $C_{xy} = \partial x / \partial y$, $C_{xz} = \partial x / \partial z$, $C_{yx} = \partial y / \partial x$, $C_{yz} = \partial y / \partial z$, $C_{zx} = \partial z / \partial x$, $C_{zy} = \partial z / \partial y$ обчислюються на основі (3)–(6) та (7)–(10) наступним чином:

$$C_{xy} = \left\| \frac{C_{tx}}{C_{ty}} \right\| = \begin{cases} C_x \geq \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{ty}}{C_{tx}} \leq 1 \rightarrow C_{xy} = \frac{PC_{ty}}{4C_{tx}}; \\ \frac{C_{ty}}{C_{tx}} > 1 \rightarrow C_{xy} = \frac{P}{2} - \frac{PC_{tx}}{4C_{ty}}; \end{cases} \\ C_x < \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{ty}}{C_{tx}} \leq 1 \rightarrow C_{xy} = P - \frac{PC_{ty}}{4C_{tx}}; \\ \frac{C_{ty}}{C_{tx}} > 1 \rightarrow C_{xy} = P - \left(\frac{P}{2} - \frac{PC_{tx}}{4C_{ty}} \right), \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

$$C_{xz} = \left\| \frac{C_{tx}}{C_{tz}} \right\| = \begin{cases} C_x \geq \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{tz}}{C_{tx}} \leq 1 \rightarrow C_{xz} = \frac{PC_{tz}}{4C_{tx}}; \\ \frac{C_{tz}}{C_{tx}} > 1 \rightarrow C_{xz} = \frac{P}{2} - \frac{PC_{tx}}{4C_{tz}}; \end{cases} \\ C_x < \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{tz}}{C_{tx}} \leq 1 \rightarrow C_{xz} = P - \frac{PC_{tz}}{4C_{tx}}; \\ \frac{C_{tz}}{C_{tx}} > 1 \rightarrow C_{xz} = P - \left(\frac{P}{2} - \frac{PC_{tx}}{4C_{tz}} \right), \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

$$C_{yx} = \left\| \frac{C_{ty}}{C_{tx}} \right\| = \begin{cases} C_y \geq \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{tx}}{C_{ty}} \leq 1 \rightarrow C_{yx} = \frac{PC_{tx}}{4C_{ty}}; \\ \frac{C_{tx}}{C_{ty}} > 1 \rightarrow C_{yx} = \frac{P}{2} - \frac{PC_{ty}}{4C_{tx}}; \end{cases} \\ C_y < \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{tx}}{C_{ty}} \leq 1 \rightarrow C_{yx} = P - \frac{PC_{tx}}{4C_{ty}}; \\ \frac{C_{tx}}{C_{ty}} > 1 \rightarrow C_{yx} = P - \left(\frac{P}{2} - \frac{PC_{ty}}{4C_{tx}} \right), \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

$$C_{yz} = \left\| \frac{C_{ty}}{C_{tz}} \right\| = \begin{cases} C_y \geq \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{tz}}{C_{ty}} \leq 1 \rightarrow C_{yz} = \frac{PC_{tz}}{4C_{ty}}; \\ \frac{C_{tz}}{C_{ty}} > 1 \rightarrow C_{yz} = \frac{P}{2} - \frac{PC_{ty}}{4C_{tz}}; \end{cases} \\ C_y < \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{tz}}{C_{ty}} \leq 1 \rightarrow C_{yz} = P - \frac{PC_{tz}}{4C_{ty}}; \\ \frac{C_{tz}}{C_{ty}} > 1 \rightarrow C_{yz} = P - \left(\frac{P}{2} - \frac{PC_{ty}}{4C_{tz}} \right); \end{cases} \end{cases} \quad (17)$$

$$C_{zx} = \left\| \frac{C_{tx}}{C_{tz}} \right\| = \begin{cases} C_z \geq \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{tx}}{C_{tz}} \leq 1 \rightarrow C_{zx} = \frac{PC_{tx}}{4C_{tz}}; \\ \frac{C_{tx}}{C_{tz}} > 1 \rightarrow C_{zx} = \frac{P}{2} - \frac{PC_{tz}}{4C_{tx}}; \end{cases} \\ C_z < \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{tx}}{C_{tz}} \leq 1 \rightarrow C_{zx} = P - \frac{PC_{tx}}{4C_{tz}}; \\ \frac{C_{tx}}{C_{tz}} > 1 \rightarrow C_{zx} = P - \left(\frac{P}{2} - \frac{PC_{tz}}{4C_{tx}} \right); \end{cases} \end{cases} \quad (18)$$

$$C_{zy} = \left\| \frac{C_{tz}}{C_{ty}} \right\| = \begin{cases} C_z \geq \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{ty}}{C_{tz}} \leq 1 \rightarrow C_{zy} = \frac{PC_{ty}}{4C_{tz}}; \\ \frac{C_{ty}}{C_{tz}} > 1 \rightarrow C_{zy} = \frac{P}{2} - \frac{PC_{tz}}{4C_{ty}}; \end{cases} \\ C_z < \frac{P}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{C_{ty}}{C_{tz}} \leq 1 \rightarrow C_{zy} = P - \frac{PC_{ty}}{4C_{tz}}; \\ \frac{C_{ty}}{C_{tz}} > 1 \rightarrow C_{zy} = P - \left(\frac{P}{2} - \frac{PC_{tz}}{4C_{ty}} \right). \end{cases} \end{cases} \quad (19)$$

Результатом послідовних графічних перетворень воксельних масивів, що зберігають М-образи у процесі їх побудови, є результуюча образна модель функції (образ-модель), що дозволяє досліджувати геометричні характеристики функції та просторовий градієнт в кожній точці геометричного об'єкта.

УТОЧНЕННЯ ТРИВИМІРНОГО ВОКСЕЛЬНОГО МАСИВУ ДАНИХ

Продуктивність рекурсивного алгоритму формування воксельного масиву даних безпосередньо залежить від глибини рекурсії. Чим більше глибина рекурсії, тим вище ступінь деталізації вихідного об'єкта, а також час роботи алгоритму.

Загальний вигляд досліджуваної функції також впливає на продуктивність алгоритму – чим складніше функція, тим більше часу потрібно на її обробку. Таким чином, виникає питання про скорочення часових витрат при формуванні тривимірних М-образів зі збереженням точності деталізації досліджуваного об'єкта.

Одним з рішень поставленої проблеми є застосування методів просторової інтерполяції векторних характеристик досліджуваної функції, що зберігаються в тривимірному воксельному масиві даних [7].

Перевагою запропонованого методу просторової інтерполяції є те, що можна повністю абстрагуватися від виду вихідної досліджуваної функції і працювати тільки з воксельним масивом даних, що має регулярну структуру, зручну для проведення просторового аналізу. Використання єдиної інтерполяційної функції також дозволяє скоротити часові витрати на обробку даних. Таким чином, час роботи інтерполяційного алгоритму залежить тільки від обсягу досліджуваного воксельного масиву даних.

АНАЛІЗ ФУНКЦІЙ НА БАЗІ ОБРАЗІВ-МОДЕЛЕЙ

Тривимірні воксельні масиви М-образів часткових похідних, що отримані за допомогою (14), (15), (16), (17), (18) та (19), можуть використовуватися для визначення напрямку руху просторового градієнту. У цьому випадку переміщення точки представляється в 26-ти напрямках тривимірного простору М-образного масиву. Потрібну точку переміщення можна представити як перетин трьох ортогональних площин у тривимірному воксельному масиві, утворених напрямками руху градієнту $G_x(C_{xy}, C_{xz})$, $G_y(C_{yx}, C_{yz})$ та $G_z(C_{zx}, C_{zy})$ уздовж кожної з координатних осей, у вигляді [6]:

$$G = G_x \cap G_y \cap G_z. \quad (20)$$

Загалом отримана воксельна образна модель функції, що складається із 17 М-образів, дозволяє виконувати основні процедури математичного аналізу, такі як [8]:

- визначення часткових похідних по обраним осям;
- зростання або спадання функції на обраному напрямку;
- визначення критичних точок, ліній та областей, локальних екстремумів;
- визначення областей позитивних та негативних значень;
- аналіз просторового градієнту.

Це все дозволяє автоматизувати процес аналізу геометричних характеристик функцій трьох змінних, використовуючи графічні перетворення образів-моделей.

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ВОКСЕЛЬНОГО МАСИВУ М-ОБРАЗІВ

В основу візуалізації тривимірного воксельного масиву даних покладено алгоритм часткового сортування по глибині, що дозволяє поетапно формувати реалістичне зображення по одному з принципів Z-буферного алгоритму. На відміну від існуючих Z-буферних алгоритмів, цей алгоритм має рекурсивно спрямований пошук елементів, що перекриваються, і це дозволяє різко скоротити час обробки тривимірної сцени. При цьому конкретний вид і спосіб представлення об'єкта не має особливого значення. Даний алгоритм може бути застосований для побудови зображень довільних тривимірних об'єктів, що допускають розбиття на частини і відображення окремої частини незалежно від інших [4].

Одним із запропонованих варіантів скорочення технології розрахунку є введення проміжного динамічного масиву даних, що дозволяє зберігати отриману в розрахунках інформацію для більш оперативного створення нових проєкцій.

Також регулярна воксельна структура дозволяє досить легко відображати об'єкт, використовуючи перерізи, тим самим даючи змогу аналізувати геометричні характеристики функції всередині об'єкта.

ВИСНОВКИ

В результаті розроблені та описані вище принципи і алгоритми формування, уточнення, аналізу і відображення тривимірних воксельних графічних М-образів лягли в основу системи рекурсивного аналізу на образних компонентах РАНОК.

В роботі було показано, що принципи М-образної оцінки рельєфу поверхні функції можуть бути перенесені на багатовимірний простір із застосуванням воксельних підходів організації М-образів, а також багатовимірних структур, які не піддаються зоровому сприйняттю.

Все це дозволяє направити подальші дослідження і розвиток системи на автоматизацію процесу аналізу геометричних характеристик багатовимірних об'єктів, заданих функціями n -змінних, використовуючи графічні представлення образів-моделей підвищеного простору з проєціюванням їх в тривимірний простір спостерігача для подальшого когнітивного аналізу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Толлок А. В. Синтез компьютерных образов геометрических характеристик для оценки рельефа поверхности функции двух переменных. *Математика, природознание, технические науки*: зб. доп. НАН України. 2004. № 4. С.63–69.
2. Гоменюк С. И., Толлок А. В. Моделирование образной оценки градиента на рельефе поверхности. *Научно-теоретический журнал «Искусственный Интеллект»*. 2004. № 1. С.113–119.
3. Рвачев В. Л., Толлок А. В., Уваров Р. А., Шейко Т. И. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций. *Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки*. 2000. № 2. С.119–131.
4. Мыльцев А. М., Толлок А. В. Математическая модель визуализации динамического массива данных при построении трехмерных сцен. *Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки. Біологічні науки*. 2002. № 3. С. 76–82.
5. Толлок А. В., Толлок В. А., Гоменюк С. И. Язык описания схем решения задач теории упругости и пластичности. *Новые информационные технологии в науке, образовании и бизнесе: XXVI Международная конференция и дискуссионный научный клуб IT+SE'99*. Ялта-Гурзуф, 1999. С. 43–46.
6. Толлок А. В., Мыльцев А. М., Корогод В. Л. Аналитическое моделирование на основе графических преобразований в системе «РАНОК». *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2006. № 1. С. 124–133.
7. Корогод В. Л., Мыльцев А. М., Толлок А. В. Математическая модель уточнения трехмерного массива данных методом пространственной интерполяции. *Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки. Біологічні науки*. 2003. № 1. С. 42–48.
8. Морозов Д. Н., Гнездовский А. В., Мыльцев А. М., Толлок А. В. Когнитивная компьютерная графика в процессе решения оптимизационных задач математического моделирования. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2010. Вип. 86. С. 112–117.

REFERENCES

1. Tolok, A. V. (2004). Synthesis of computer images of geometric characteristics for the evaluation of the surface relief of a function of two variables. *Matematyka, pryrodoznavstvo, tekhnichni nauky: zbirnyk dopovidey NAN Ukrayiny*, No. 4, pp. 63-69.
2. Gomenyuk, S. I. & Tolok, A.V. (2004). Modeling of a figurative gradient estimation on the surface relief. *Nauchno-teoreticheskiy zhurnal «Iskusstvennyy Intellekt»*, No. 1, pp. 113-119.
3. Rvachev, V. L., Tolok, A. V., Uvarov, R. A. & Sheyko, T. Y. (2000). New approaches to the construction of equations of three-dimensional loci using R-functions. *Visnyk Zaporiz'koho derzhavnoho universytetu. Fyzyko-matematychni nauky*, No. 2, pp. 119-131.
4. Myl'tsev, A. M. & Tolok, A. V. (2002). Mathematical model of visualization of a dynamic data array when constructing three-dimensional scenes. *Visnyk Zaporiz'koho derzhavnoho universytetu. Fyzyko-matematychni nauky. Biolohichni nauky*, No. 3, pp. 76-82.
5. Tolok, A. V., Tolok, V. A. & Gomenyuk, S. I. (1999). A language for describing schemes for solving problems in the theory of elasticity and plasticity. *New information technologies are in science, education and business : XXVI the International conference and scientific debating-society IT SE'99*, (pp. 43-46), Yalta-Gurzuf.

6. Tolok, A. V., Myl'tsev, A. M. & Korohod, V. L. (2006). Analytical modeling based on graphic transformations in the RANOK system. *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fizyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 124-133.
7. Korohod, V. L., Myl'tsev, A. M. & Tolok, A. V. (2003). Mathematical model for refining a three-dimensional data array using spatial interpolation. *Visnyk Zaporiz'koho derzhavnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky. Biologichni nauky*, No. 1, pp. 42-48.
8. Morozov, D. N., Gnezdovskiy, A. V., Myl'tsev, A. M. & Tolok, A. V. (2010). Cognitive computer graphics in the process of solving optimization problems of mathematical modeling. *Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika*, Issue 86, pp. 112-117.

УДК 539.312

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-11

ЗАСТОСУВАННЯ БІПОЛЯРНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ДВОХ КООКСІАЛЬНИХ ОБОЛОНОК У ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

¹Пожуєв В. І., ²Пожуєв А. В., ³Фасоляк А. В.

^{1,3}*Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, 69063, Україна*

²*Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69000, Україна*

²scorpio1@mail.ru, ³antonfasolyak@mail.ru

У роботі розглянуто динаміку двох коаксіальних циліндричних оболонок у лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному середовищі. вивчається випадок, коли імпульсивне навантаження діє по нормалі до внутрішньої поверхні однієї оболонки, а інша оболонка вільна від напружень. Контакт між оболонками та середовищем припускається ковзним. Досліджується взаємний вплив оболонок на динамічний напружено-деформований стан даної механічної системи.

У цій статті припускається, що навантаження рівномірно розподілене вздовж осьової координати, тобто не залежить від неї, тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності. Також робиться припущення, що навантаження діє симетрично відносно лінії, яка сполучає центри порожнин, що підкріплені оболонками. Тому вздовж цієї лінії можна зробити розріз, який потім буде враховано за допомогою граничних умов. Для розв'язання задачі використовується біполярна система координат (БСК), застосування якої дало можливість відобразити півпростір з порожниною, який моделює задачу, у прямокутник скінчених розмірів. Оскільки БСК є ортогональною системою координат, тому в ній справедливі рівняння руху, співвідношення Коші, закон Гука. Тому для отримання виразів для напружень через переміщення у БСК співвідношення Коші було підставлено у закон Гука. Після підстановки отриманих виразів у рівняння руху було отримано динамічні рівняння теорії пружності в БСК у переміщеннях, які використано для опису руху середовища. Для опису руху оболонки використані класичні рівняння теорії тонких оболонок, які задовольняють гіпотезі Кірхгофа-Лява, які отримано в БСК.

Оскільки динамічні рівняння теорії пружності містять досить складні змінні коефіцієнти, тому в роботі запропоновано чисельний підхід до розв'язання задачі. Цей підхід ґрунтується на методи скінчених різниць за просторовими змінними. Розв'язок динамічної задачі отримано за допомогою ітераційного θ -метода Вілсона, який дозволяє звести початкову задачу до послідовності квазістатичних задач.

На основі отриманих результатів встановлено, що для випадку, коли відстань між оболонками понад їх п'ять радіусів, величина їх взаємного впливу на динамічний напружено-деформований стан розглянутої системи є незначним.

Отримані результати та розроблені методи можуть бути застосовані при розрахунках підземних споруд, зокрема тунелів метрополітену та підземних трубопроводів.

Ключові слова: коаксіальні циліндричні оболонки, біполярна система координат, пружне середовище, динамічне навантаження.

APPLICATION OF THE BIPOLAR COORDINATE SYSTEM TO MODELING OF TWO COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS DYNAMICS IN ELASTIC MEDIUM

¹Pozhuev V. I., ²Pozhuev A. V., ¹Fasoliak A. V.

¹Zaporizhzhya national technical university,
Zhykovskago str, 64, Zaporizhzhia, 69063, Ukraine

²Zaporizhzhya state engineering academy,
Sobornyy av., 226, Zaporizhzhia, 69000, Ukraine

²scorpio1@mail.ru, ¹antonfasolyak@mail.ru

The present paper considers the dynamics of two coaxial cylindrical shells in a linearly elastic homogeneous inertial medium. In this work studies case, when normal impulsive loads act on inner surface of one of the shell and other shell is stresses free. The contact between the shells and the medium was supposed to be gliding. The mutual influence of the shells on the dynamic stress-strain state of the media is under research and it's scientific novelty of this work.

In present paper, it is assumed that loads are evenly distributed on the axial coordinate, i.e. they don't depend on axial coordinate, so the problem, which is considered, is reduced to plane elasticity theory problem. It's also accepted, that loads are applied symmetrically to line, which passes the centers of the cavities, so we can cut the area along this line. This incision will be taken into account in boundary conditions. Then the bipolar coordinate system (BCS) is used to solve this problem. The used BCS gives the opportunity to display a half-space with two cavities, which models the medium in the finite rectangle.

As the BCS is an orthogonally coordinate system, the motion equation of elasticity theory, Cauchy's equations and Hooke's law are in force. So, we substitute deformations expressions by displacements (Cauchy's equations) for the deformations in Hooke's law and obtain the expressions for stresses by displacements in the BCS. Then we substitute the expressions for stresses by displacements (in the BCS) in the motion equation of elastic theory, and we obtain motion equations of elastic theory by displacements in the BCS. These equations are used to modeling media motions. The shell motions are described by classic thin shells theory equations, which satisfy Kirchhoff-Love theory.

As motion equations of elastic theory by displacements in the BCS have sufficiently difficult coefficients, which depend on space variables, so we use finite differences method on space variables for solution of the problem to be obtained. Dynamic problem can be reduced to iterative sequences of quasi-static problems using Wilson's θ -method. So, the approach of solving dynamic problem in BCS, based on finite differences method and Wilson's θ -method has been developed

It was established that in cases, when the distance between the shells is more than five times its radii, the influence of the mutual influence of the shells on the stress-strain state of considered mechanical system, is insignificant.

The obtained results, and the methods, developed in present work, can be applied in calculations of underground structures, in particular, subway tunnels and pipelines.

Key words: coaxial cylindrical shells, bipolar coordinate system, elastic medium, dynamic loads.

ВСТУП

На сьогодні досить важливе значення для практики має розрахунок динамічного напружено-деформованого стану для механічних систем, що складаються з пружного середовища, що містить дві коаксіальні циліндричні порожнини, підкріплені тонкими пружними оболонками. Зокрема, до такої розрахункової схеми приводять задачі моделювання тунелів метрополітену та трубопроводів.

Досить добре досліджені динамічні задачі для циліндричних оболонок у необмеженому пружному інерційному середовищі (при відстані між оболонками понад 5 її діаметрів). Таким задачам присвячені роботи [1-3], причому в монографії [1] розглянуто випадок рухомих навантажень, а в роботах [2, 3] розглянуті подібні задачі у нестационарній постановці.

У випадках, коли відстань між оболонками є невеликою, потрібно враховувати взаємний вплив двох коаксіальних оболонок на динамічний напружено-деформований стан розглянутої механічної системи. Така динамічна задача розглянута в роботі [4] із застосуванням методу скінченних елементів.

Ця робота присвячена динамічним задачам для двох коаксіальних оболонок у пружному інерційному середовищі. Розглядаються випадки, коли відстань між оболонками не перевищує трьох їх радіусів. Для розв'язання задачі застосовується біполярна система координат. Розглядаються випадки, коли навантаження діє на внутрішню поверхню однієї з оболонок, а інша оболонка вільна від напружень. Також досліджується питання впливу відстані між оболонками на динамічний напружено-деформований стан системи оболонка-середовище.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається нестационарна деформація лінійно-пружного, однорідного та ізотропного середовища, що містить дві коаксіальні циліндричні порожнини, які підкріплені оболонками. Припускаємо, що нормальні навантаження, що діють на внутрішню поверхню однієї з оболонок, залежать від часу як одинична функція Хевісайда. Інша оболонка вільна від напружень. Нехай оболонки та середовище віднесені до нерухомої декартової системи координат $\{x, y, z\}$. Внутрішня поверхня однієї з оболонок задається рівнянням $x^2 + (y+l)^2 = b^2$, а іншої – $x^2 + (y-l)^2 = b^2$. Поверхні контакту між півсередовищем та оболонками – $x^2 + (y+l)^2 = r^2$ та $x^2 + (y-l)^2 = r^2$ відповідно ($h = r - b$ – товщина оболонок). Осі оболонок та вісь z паралельні. Контакт між оболонками та середовищем вважаємо ковзним. У момент часу $t < 0$ оболонки та середовище знаходяться у стані спокою та вільні від напружень. Потім у момент часу $t = 0$ прикладається імпульсивне навантаження, яке діє по нормалі до внутрішньої поверхні однієї з оболонок.

Варто зазначити, що в цій роботі приймається, що навантаження рівномірно розподілене за осью координатою, тобто не залежить від змінної z , тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності. Також будемо припускати, що навантаження прикладені симетрично відносно осі y .

Для розв'язання задачі одразу перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \{x_*, y_*\} &= \frac{1}{r} \{x, y\}; \quad \{U_x, U_y\} = \frac{1}{r} \{u_x, u_y\}; \quad \{V, W\} = \frac{1}{r} \{v, w\}; \\ \{\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \kappa = \frac{h}{r}; \\ R &= \frac{r}{r} = 1; \quad L = \frac{l}{r}; \quad \tau = \frac{c_s}{r} t; \quad c_s = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}, \end{aligned}$$

де ρ_2, G_2 – густина та модуль зсуву середовища, ρ_1, G_1 – густина та модуль зсуву оболонок.

Надалі всі рівняння одразу випишуватимемо у безрозмірному вигляді.

Введемо біполярну систему координат, яка задається співвідношеннями [5]:

$$x_* = \frac{a_0 \sin \beta}{ch\alpha + \cos \beta}, \quad y_* = -\frac{a_0 sh\alpha}{ch\alpha + \cos \beta}, \quad a_0 = \sqrt{L^2 - R^2}. \quad (1)$$

Оскільки припускається, що задані навантаження діють симетрично відносно y_* , тому можна зробити розріз по осі $O y_*$, який буде враховано за допомогою граничних умов. Введена біполярна система координат дозволяє перевести нескінченну область AD_1C_1BCD у скінченну область $-\bar{\alpha}_0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_0; 0 \leq \beta \leq \beta_0; (A'D_1'C_1'B'C'D')$, де $\bar{\alpha}_0 = \ln\left(\frac{R+L+a_0}{R+L-a_0}\right)$,

$\beta_0 = \pi$ (рис. 1).

Біполярна система координат, задана співвідношеннями (1) має наступні геометричні характеристики:

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{a_0}{ch\alpha + \cos\beta}, \quad g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = h_\alpha^2,$$

де h_α, h_β – коефіцієнти Ламе, $g_{\alpha\alpha}, g_{\beta\beta}$ – компоненти метричного тензора.

Оскільки біполярна система координат є ортогональною [5], тому в ній справедливі рівняння руху, які в довільній ортогональній системі координат (при відсутності масових сил) мають вигляд [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g\sigma_{ii}) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{g\sigma_{kk}}{h_{x_k}^2} \frac{\partial h_{x_k}^2}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{g\sigma_{ik} h_{x_i}}{h_{x_k}} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i=1,2,3, \quad (2)$$

де h_{x_i} ($i=1,2,3$) – коефіцієнти Ламе, $g = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = h_{x_1} h_{x_2} h_{x_3}$.

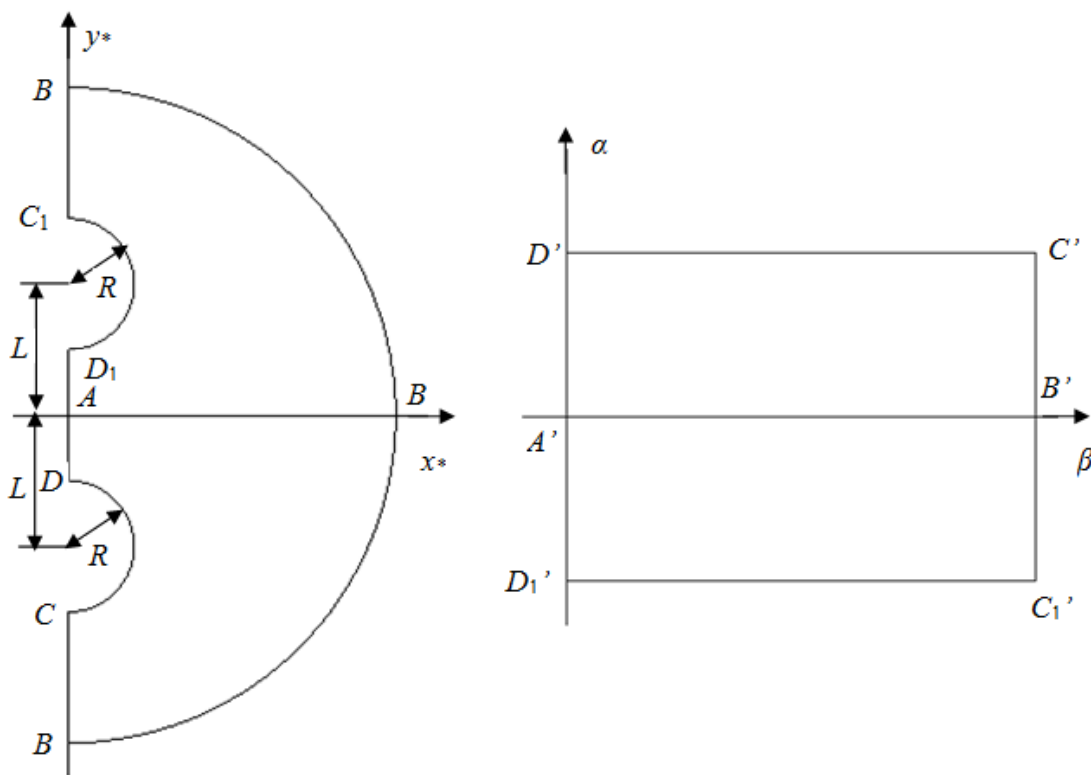


Рис. 1. Перетворення області

Оскільки для біполярної системи координат $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = z$, $h_{x_1} = h_\alpha$, $h_{x_2} = h_\beta$, $h_{x_3} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{\alpha\alpha} = h_\alpha^2$, $g_{33} = 1$, $g = g_{\alpha\alpha} = h_\alpha^2$, тоді рівняння (2) матимуть вигляд (у безрозмірних величинах):

$$\begin{cases} \frac{\partial(g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha})}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} \bar{\sigma}_{\beta\beta} + \frac{\partial(g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\beta})}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \tau^2}; \\ \frac{\partial(g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} + \frac{\partial(g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\beta\beta})}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \tau^2} \end{cases} \quad (3)$$

або після спрощення:

$$\begin{cases} g_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) + h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} (2\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} - \bar{\sigma}_{\beta\beta}) + 2h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \tau^2}; \\ g_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\beta\beta}}{\partial \beta} \right) + h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} (2\bar{\sigma}_{\beta\beta} - \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}) + 2h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \tau^2}. \end{cases} \quad (4)$$

Також у довільній ортогональній системі координат справедливі співвідношення Коші, які мають вигляд [5]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + \frac{1}{2h_i^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_i^2}{\partial x_k} \frac{u_k}{h_k}, \quad i=1,2,3, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2h_i h_j} \left(h_i^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + h_j^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j}{h_j} \right) \right), \quad i, j=1,2,3, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (5)$$

У біполярній системі координат вирази (5) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \alpha} \frac{u_\alpha}{h_\alpha} + \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \beta} \frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} u_\beta \right); \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \alpha} \frac{u_\alpha}{h_\alpha} + \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \beta} \frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} u_\beta \right); \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Тепер отримаємо вирази для напружень через переміщення у біполярній системі координат. Для цього використаємо закон Гука [5]:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_{\alpha\alpha}; \quad \sigma_{\beta\beta} = \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_{\beta\beta}; \quad \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

де $\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$, $\mu = G$ – параметри Ламе, ν – коефіцієнт Пуасона, $\vartheta = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}$. Тепер підставляємо вирази (6) у співвідношення (7), будемо мати для безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{U_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{U_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{2}{1-2\nu} \left(U_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + U_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right); \\ \bar{\sigma}_{\beta\beta} &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{U_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{U_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{2}{1-2\nu} \left(U_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + U_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right); \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{U_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{U_\beta}{h_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Після спрощення вирази (8) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + U_\beta \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right); \\ \bar{\sigma}_{\beta\beta} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + U_\beta \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right); \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} + U_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Тепер отримаємо рівняння руху середовища у переміщеннях у біполярній системі координат. Для цього у виразах (9) замість v підставимо v_2 , а потім отриманий результат підставимо у (4). Після спрощення отримаємо рівняння:

$$\left\{ \begin{aligned} & h_\alpha \left(\frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \beta^2} + \frac{1}{1-2v_2} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{3-4v_2}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial \alpha} - 3 \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \\ & + \left(\frac{2v_2}{1-2v_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \right)^2 \right) U_\alpha + \left(\frac{1}{1-2v_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2v_2}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) U_\beta = \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \tau^2}; \\ & h_\alpha \left(\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \alpha^2} + \frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \beta^2} + \frac{1}{1-2v_2} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - 3 \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{3-4v_2}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \beta} + \frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \\ & + \left(\frac{1}{1-2v_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2v_2}{1-2v_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right) U_\alpha + \left(\frac{2v_2}{1-2v_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2(1-v_2)}{1-2v_2} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \right)^2 \right) U_\beta = \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \tau^2}. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Рух оболонки будемо описувати наближеними рівняннями теорії оболонок, що задовольняють гіпотезі Кірхгофа-Лява та в ортогональній системі координат мають вигляд [7]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(N_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_{12} g_1)}{\partial x_2} + N_{23} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - N_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - \frac{Q_1}{R_1} = \rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_1 - f_1); \\ & \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(N_{12} g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_2 g_1)}{\partial x_2} + N_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - N_{12} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - \frac{Q_2}{R_2} = \rho_1 h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_2 - f_2); \\ & \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(Q_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Q_2 g_1)}{\partial x_2} + \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) = \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_3 - f_3); \\ & \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(M_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_2 g_1)}{\partial x_2} + M_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + M_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + Q_2 = 0; \\ & \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(M_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_{12} g_1)}{\partial x_2} - M_{12} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - M_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - Q_1 = 0, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

де u, v, w – компоненти переміщень середньої поверхні оболонки у напрямках осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 відповідно; (f_1, f_2, f_3) – відповідні компоненти навантаження; (q_1, q_2, q_3) – відповідні реакції з боку середовища; R_1, R_2 – радіуси кривизни ліній $x_1 = const, x_2 = const$ відповідно; ρ_1, h, G_1, ν_1 – густина, товщина, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона оболонки; g_1, g_2 – відповідні компоненти першої квадратичної форми середньої поверхні оболонки. Інші величини системи (11), враховуючи технічну моментну теорію оболонок, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{v}{g_1 g_2} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{w}{R_1}; \quad \eta_2 = \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{u}{g_1 g_2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} + \frac{w}{R_2}; \\ \xi &= \frac{g_2}{g_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v}{g_2} \right) + \frac{g_1}{g_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u}{g_1} \right); \quad N_1 = \frac{2hG_1}{1-\nu_1} (\eta_1 + \nu_1 \eta_2); \\ N_2 &= \frac{2hG_1}{1-\nu_1} (\eta_2 + \nu_1 \eta_1); \quad N_{12} = hG_1 \xi; \quad M_1 = M_2 = M_{12} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Як видно на рисунку 1, при введенні біполярних координат виразами (1) середні поверхні оболонок будуть задаватись рівняннями $\alpha = \bar{\alpha}_0$ та $\alpha = -\bar{\alpha}_0$, тому у виразах (11), (12) потрібно прийняти, що $Ox_1 = Oz$, $Ox_2 = O\beta$, $Ox_3 = O\alpha$. Тоді $g_1 = 1$, $g_2 = h_\alpha$, $\frac{1}{R_1} = 0$, $\frac{1}{R_2} = 1$. Також, відповідно до припущення, що навантаження рівномірно діє вздовж осьової координати, потрібно зазначити, що $u = 0$, $q_1 = 0$, $f_1 = 0$ та похідні від усіх величин за змінною z дорівнюють нулю. Тоді вирази (12) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_1 = 0; \eta_2 = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{r}; \xi = 0; N_1 = \frac{2hG_1\nu_1}{1-\nu_1} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right); \\ N_2 = \frac{2hG_1}{1-\nu_1} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right); N_{12} = 0; M_1 = M_2 = M_{12} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

З урахуванням (13) перше рівняння системи (11) перетвориться у тотожність $0 = 0$, а четверте та п'яте у вирази:

$$Q_1 = 0; Q_2 = 0. \tag{14}$$

Враховуючи (13) та (14), система (11) у біполярній системі координат (у безрозмірних величинах) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial V^k}{\partial \beta} + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial^2 V^k}{\partial \beta^2} + \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial W^k}{\partial \beta} = \frac{\rho}{\gamma} \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 V^k}{\partial \tau^2} - \frac{1-\nu_1}{2\gamma\kappa} (-f_\beta^k + q_\beta^k); \\ \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial V^k}{\partial \beta} + \frac{W^k}{h_\alpha} = -\frac{\rho}{\gamma} \frac{1-\nu_1}{2} \frac{d^2 W^k}{d\tau^2} - \frac{1-\nu_1}{2\gamma\kappa} (-f_\alpha^k + q_\alpha^k), \end{cases} \tag{15}$$

де V^k, W^k – безрозмірні переміщення оболонки у напрямку осей $O\beta$ та $O\alpha$, причому $k = 1$ відповідає навантаженій оболонці, а $k = 2$ – оболонці, яка вільна від напруг; ν_1 – коефіцієнт Пуассона оболонок. Зауважимо, що в системі (15) величини h_α та $g_{\alpha\alpha}$ беруться при $\alpha = \bar{\alpha}_0$ або $\alpha = -\bar{\alpha}_0$ (залежно від оболонки).

У випадку, коли контакт між оболонками та середовищем ковзний, граничні умови для навантаженої оболонки матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} U_\alpha(\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = W^1(\beta, \tau); \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = -\bar{q}_\alpha^1(\beta, \tau); \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = \bar{q}_\beta^1(\beta, \tau) = f_\beta^1(\beta, \tau) = 0, f_\alpha^1(\beta, \tau) = F(\beta)H(\tau), \end{aligned} \tag{16}$$

а для оболонки, яка вільна від напружень:

$$\begin{aligned} U_\alpha(-\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = W^2(\beta, \tau); \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(-\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = -\bar{q}_\alpha^2(\beta, \tau); \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(-\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = \bar{q}_\beta^2(\beta, \tau) = f_\beta^2(\beta, \tau) = f_\alpha^2(\beta, \tau) = 0. \end{aligned}$$

Розріз, який було зроблено по осі y_* , враховується такими умовами:

$$U_\beta(\alpha, 0, \tau) = U_\beta(\alpha, \beta_0, \tau) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\alpha, 0, \tau) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta_0, \tau) = 0.$$

Також припускаємо, що всі невідомі величини на нескінченності обертаються в нуль, тому в точці $(0, \pi)$ всі величини дорівнюють нулю. Початкові умови приймаємо нульовими, тобто всі шукані величини та їх перші похідні при $\tau = 0$ дорівнюють нулю.

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ

Оскільки рівняння (9, 10, 15) мають достатньо складні коефіцієнти, які залежать від просторових змінних, тому для розв'язання задачі за просторовими змінними застосуємо метод скінченних різниць. Для цього розіб'ємо область $-\bar{\alpha}_0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_0$, $0 \leq \beta \leq \beta_0$ (рис. 1) на сітку таким чином, що за змінною α на N_α частин, а за змінною β на N_β частин

відповідно. Нехай $h_1 = \frac{\bar{\alpha}_0}{N_\alpha}$ – довжина відрізка розбиття за змінною α , а $h_2 = \frac{\pi}{N_\beta}$ – за змінною

β . Отже, ми отримали сітку з точок (α_i, β_j) , де $\alpha_i = \frac{ih_1}{N_\alpha} (i = \overline{0, N_\alpha})$, $\beta_j = \frac{jh_2}{N_\beta} (j = \overline{0, N_\beta})$. Далі

апроксимуємо похідні скінченними різницями другого порядку точності.

Далі у внутрішніх точках області $(\alpha_i, \beta_j), i = \overline{1, N_\alpha - 1}, j = \overline{1, N_\beta - 1}$ записуємо різницеві рівняння для системи (10). Відповідно до граничних умов:

$$U_{\beta i, 0} = U_{\beta i, N_\beta} = 0 (i = \overline{0, N_\alpha}); U_{\alpha 0, N_\beta/2} = 0; V_0^k = V_{N_\beta}^k = 0, k = 1, 2.$$

На границях $\beta = 0, \beta = \pi$ записуємо різницеві рівняння для (9) для величин, які входять до відповідних граничних умов.

На границі $\alpha = \bar{\alpha}_0$ та $\alpha = -\bar{\alpha}_0$ записуємо різницеві рівняння для системи (15) з урахуванням відповідних граничних умов.

У результаті отримаємо систему з $2N_\beta(N_\alpha + 2) - 3$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних $U_{\beta i, j} (i = \overline{0, N_\alpha}, j = \overline{1, N_\beta - 1}), U_{\alpha i, j} (i = \overline{0, N_\alpha}, j = \overline{0, N_\beta}), V_j^k (j = \overline{1, N_\beta - 1}, k = 1, 2)$.

Після розв'язання описаної вище СЛАР отримаємо розв'язок задачі в біполярній системі координат. Тепер опишемо процес отримання відповідних величин у декартовій системі координат.

Поле переміщень (як і будь-яке векторне поле) в декартовій системі координат $\{U_x, U_y\}$ виражається через відповідні компоненти поля переміщень в ортогональній системі координат $\{U_{x_1}, U_{x_2}\}$ за наступними співвідношеннями [8]:

$$U_x = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{h_{x_i}} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} U_{x_i}; \quad U_y = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{h_{x_i}} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} U_{x_i}, \quad (17)$$

де $x = \psi_1(\alpha, \beta)$, $y = \psi_2(\alpha, \beta)$ – формули зв'язку між декартовою та довільною ортогональною системами координат. Для випадку біполярної системи координати, які задаються співвідношеннями (1), формула (17) матиме вигляд:

$$U_x = \frac{-U_\alpha \operatorname{sh} \alpha \sin \beta + U_\beta (1 + ch \alpha \cos \beta)}{ch \alpha + \cos \beta}; \quad U_y = \frac{-U_\alpha (1 + ch \alpha \cos \beta) - U_\beta \operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{ch \alpha + \cos \beta}. \quad (18)$$

Відповідні компоненти тензора напружень знаходяться по отриманим у формулах (18) переміщеннях за виразами, аналогічними виразам (9).

РОЗВ'ЯЗОК ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ

Після застосування скінченно-різницевої схеми за біполярними координатами до рівнянь (9), (10), (15) за методом, описаним вище, отримаємо динамічне матричне рівняння, яке можна записати у вигляді:

$$[A]\{U\} + [B]\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \{U\} = \{F\}H(\tau), \tag{19}$$

де $\{U\}$ – вектор невідомих вузлових переміщень, $[A], [B]$ – матриці коефіцієнтів скінченно-різницевої схеми та коефіцієнтів при других похідних за змінною безрозмірного часу відповідно, $\{F\}$ – вектор вузлових навантажень, $H(\tau)$ – одинична сходящкова функція Хевісайду. Отримане динамічне матричне рівняння (19) розв’язується за допомогою θ -метода Вілсона, алгоритм якого наведено в роботі [9]. Цей метод дозволяє звести динамічне рівняння (19) до ітераційної послідовності квазістатичних задач, які зі свого боку є звичайними системами лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що розв’язуються методом Гауса.

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Наведемо результати чисельного аналізу вищеописаного алгоритму. При розрахунках використовувались наступні значення безрозмірних величин:

$$\gamma = 30; \rho = 4; \kappa = 0,02.$$

Величини L, τ змінювались.

Розглянемо випадок, коли імпульсивне нормальне навантаження діє по нормалі до внутрішньої поверхні однієї з оболонок ($k = 1$), а поверхня іншої ($k = 2$) вільна від напруг. Функція $F(\beta)$, яка входить у граничні умови (16), задається у вигляді:

$$F(\beta) = -\frac{1}{g_{\alpha\alpha}(\alpha_0, \beta)}.$$

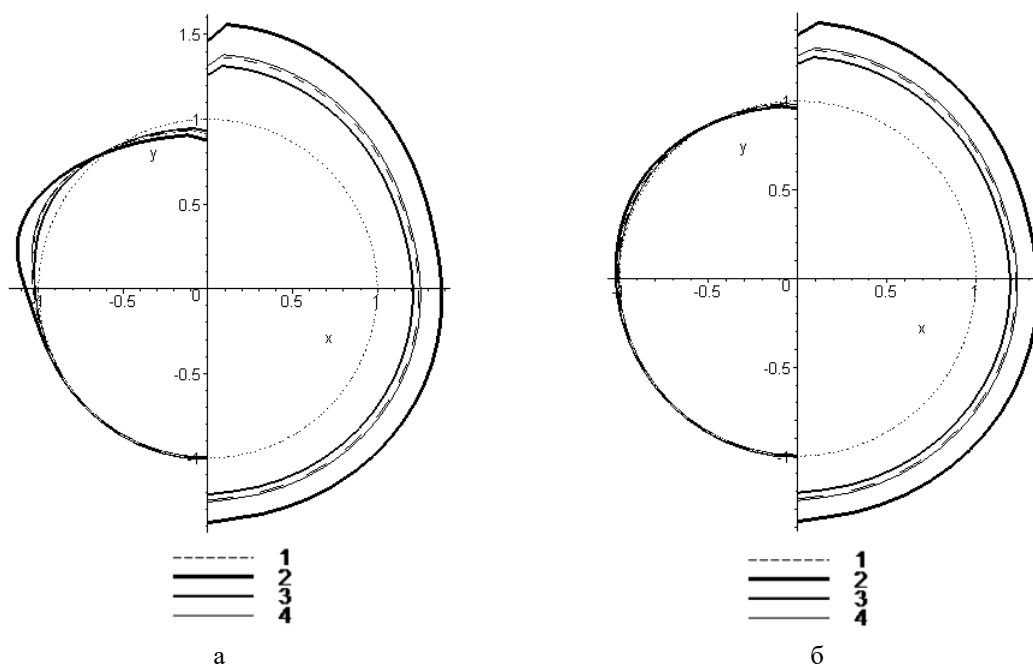


Рис. 2. Переміщення границі контакту оболонки та середовища

Далі на всіх графіках крива 1 відповідає статичному розв’язку, крива 2 моменту безрозмірної змінної часу $\tau = 2$, крива 3 – $\tau = 4$, крива 4 – $\tau = 6$.

На рисунку 2 (а, б) зображено переміщення границі контакту оболонки та середовища в різні моменти часу у порівнянні із статичним розв’язком, причому на рисунку 2а – $L=1$, на рисунку 2б – $L=1,5$. Точковим пунктиром позначено положення границі контакту до застосування навантаження. Причому на обох рисунках зліва показані переміщення для оболонки, яка вільна від напружень, а справа – навантажена оболонка.

На рисунку 3 наведено переміщення середовища по осі Oy_* між оболонками, причому на рис. 3а $L = 1$, а на рис. 3б $L = 1,5$.

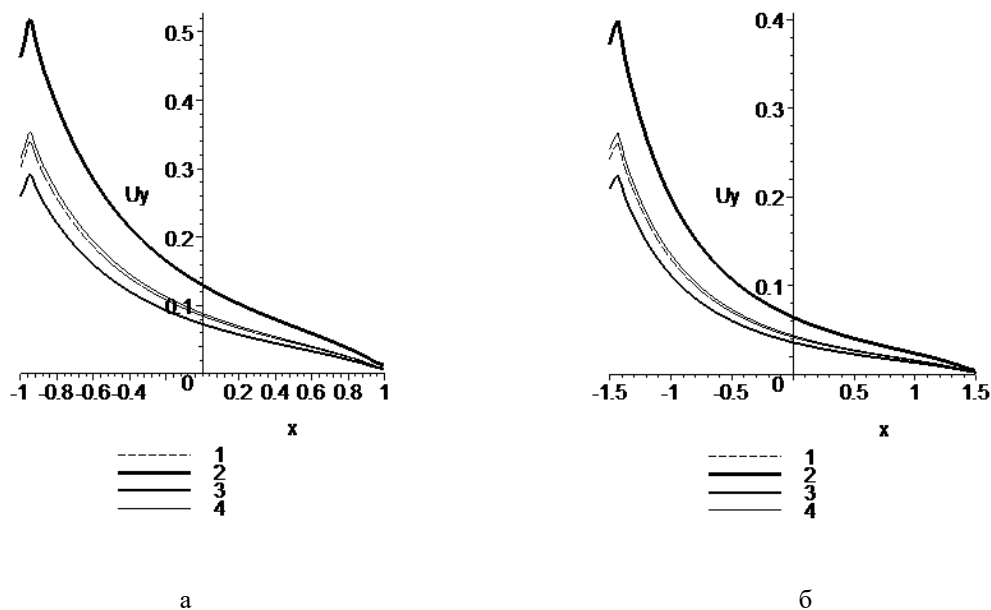


Рис. 3. Переміщення поверхні середовища по осі Oy_* між оболонками

На рисунках 4, 5 наведені напруження на границі контакту навантаженої оболонки та середовища у різні моменти часу. Причому на рис. 4 $L = 1$, а на рис. 5 $L = 1,5$.

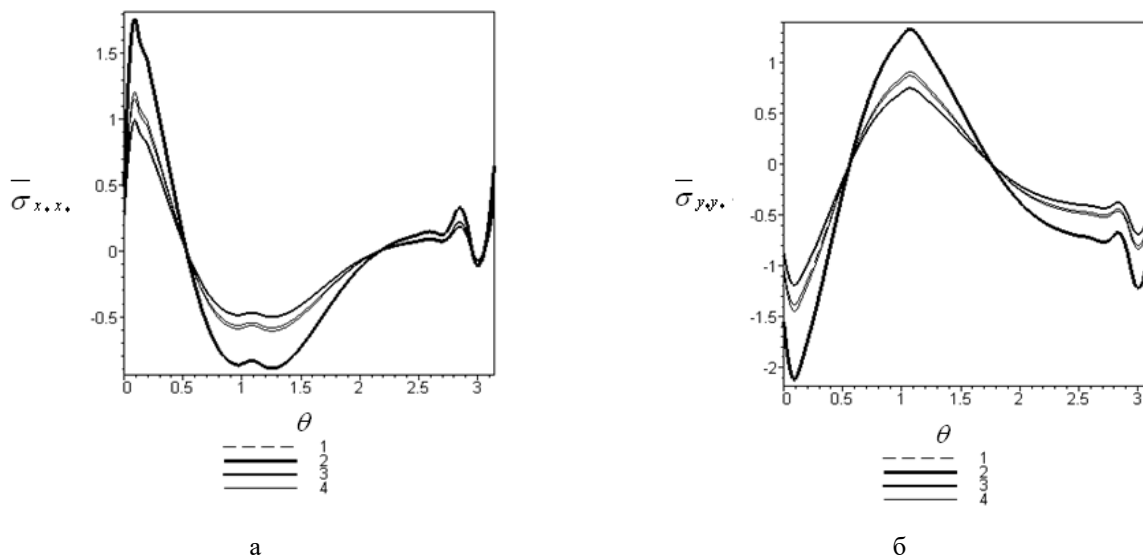


Рис. 4. Напруження на границі контакту між навантаженою оболонкою та середовищем при $L = 1$

На основі порівняння отриманих результатів з аналогічними результатами у роботі [4] можна зробити висновок, що максимальна величина відхилення не перевищує 15%.

На основі отриманих результатів можна встановити, що для оболонок, які розташовані на відстані понад 5 їх радіусів можна, без суттєвої втрати точності, розглядати задачу для середовища з однією порожниною, що підкріплена оболонкою.

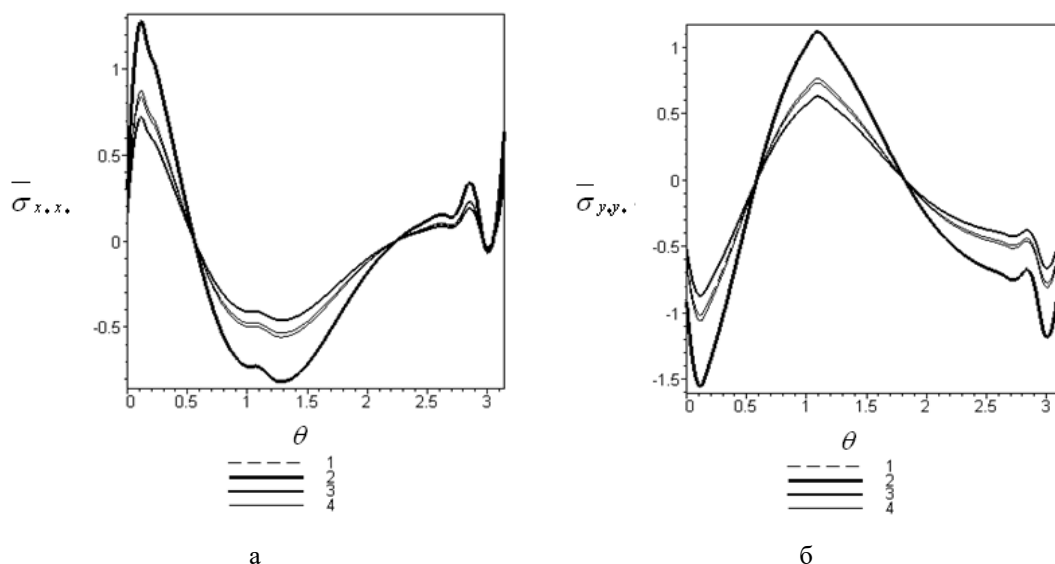


Рис. 5. Напруження на границі контакту між навантаженою оболонкою та середовищем при $L = 1,5$

ВИСНОВКИ

У роботі розв'язано динамічну задачу для лінійно-пружного однорідного та ізотропного середовища, що містить дві коаксіальні циліндричні порожнини, які підкріплені тонкими оболонками. Розглянуто випадок, коли на внутрішній поверхні однієї оболонки діє динамічне імпульсивне нормальне навантаження, яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда.

Задача розв'язана за допомогою використання біполярної системи координат. Розроблено підхід до розв'язання динамічної задачі, який ґрунтується на методі скінченних різниць та θ -методі Вілсона.

Показано збіжність динамічних результатів до відповідного статичного розв'язку. Встановлено, що при відстані між порожнини понад 5 її радіусів, взаємний вплив порожнин на компоненти напружено-деформованого стану розглянутої системи є незначним.

Отримані результати та запропоновані методи можуть бути застосовані при розрахунку підземних конструкцій, зокрема тунелів метрополітену.

ЛІТЕРАТУРА

1. Горшков А. Г., Пожуев В. И. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. Москва: Изд-во МАИ, 1992. 136 с.
2. Пожуев А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2015. № 2. С. 108–114.
3. Пожуев А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються. *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 200–213.
4. Пожуев В. І., Фасоляк А. В. Динаміка коаксіальних циліндричних оболонок у пружному інерційному середовищі. *Техническая механика*. 2017. № 3. С. 90–99.
5. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 232 с.
6. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.
7. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. Москва: Машиностроение, 1970. 736 с.
8. Ерофеев В. Т. Теоремы сложения. Минск: Наука и техника, 1989. 256 с.

9. Пожуєв В. І., Пожуєв А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2016. № 1. С. 119–126.

REFERENCES

1. Gorshkov, A. G. & Pozhuev, V. I. (1992). Planes and shells on inertial foundations under action of moving loads. Moscow: Izd-vo MAI.
2. Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2015). Non-stationary non axi-symmetrical deformation cylindrical shell in elastic space subjected to moving surface loads. *Novi materially i technologii v metalurgiyi ta mashynobuduvanni*, No. 2, pp. 108-115.
3. Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2016). Non-stationary deformation of cylindrical shell in elastic medium, subjected to extended surface loads. *Visnyk of Zaporizkogo natsionalnogo universitetu: zbirnyk naukovykh statey, Fizyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 200-213.
4. Pozhuev, V. I. & Fasoliak, A. V. (2017). Dynamics of cylindrical shells in elastic inertial medium. *Tehnicheskaya mehanika*, No. 3, pp. 90-99.
5. Ufliand, J. S. (1950). Bipolar coordinates in elastic theory. State publishing house *tehniko-teoreticheskoy literatury*. Leningrad: Gos. izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury.
6. Novatskiy, V. (1975). Elastic theory. Moscow: Mir.
7. Filippov, A. P. (1970). Vibrations of deformable systems. Moscow: Mashynostroenie.
8. Erofeenko, V. T. (1989). Additions theorems., Minsk: Nauka i tehnika.
9. Pozhuev, V. I., Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2016). Nonstationary deformation of the cylindrical shell in elastic half-space with free surface. *Novi materially i technologii v metalurgiyi ta mashynobuduvanni*, No. 1, pp. 119-126.

УДК 517.988 : 519.633

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-12

МЕТОД РОТЕ У КОМБІНАЦІЇ З МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Сидоров М. В., к. ф.-м. н., доцент

*Харківський національний університет радіоелектроніки,
просп. Науки, 14, Харків, 61000*

maxim.sidorov@nure.ua

У роботі розглядається перша початково-крайова задача для напівлінійного рівняння теплопровідності. Задачі такого типу (з пошуком додатного розв'язку) часто виникають при математичному моделюванні процесів у хімічній кінетиці, теорії горіння, біології тощо. На основі модифікованого методу Роте вихідна нестационарна задача замінюється на кожному часовому шарі нелінійною крайовою задачею для рівняння з еліптичним оператором. Далі для знаходження додатного розв'язку цієї нелінійної крайової задачі будується метод послідовних наближень з двобічним характером збіжності. Для побудови такого методу дослідження крайової задачі використовуються методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах. За допомогою методу функцій Гріна від нелінійної крайової задачі для еліптичного рівняння здійснюється перехід до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке розглядається як нелінійне операторне рівняння з гетеротонним оператором у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Досліджуються властивості нелінійного інтегрального оператора, що входить у рівняння. Далі будуються сильно інваріантний конусний відрізок та дві ітераційні послідовності, які стартують з відповідних

кінців сильно інваріантного конусного відрізка. Перша з цих послідовностей є монотонно зростаючою і наближає шуканий розв'язок знизу, а друга є монотонно спадною і наближає шуканий розв'язок зверху. Наведено умови існування спільної границі цих послідовностей, тобто умови єдиності розв'язку нелінійних крайових задач методу Роте на кожному часовому шарі. Отримано апріорну й апостеріорну оцінки похибки наближеного розв'язку задачі. Обчислювальний експеримент проведено для задачі з гетеротонною степеневою нелінійністю. Отримано наближений розв'язок нестационарної задачі у момент часу 0,1 двома способами: з кроком 0,1 та з кроком 0,05, що дало можливість підвищити порядок апроксимації методу на одиницю і уточнити наближений розв'язок за правилом Рунге. Результати обчислювального експерименту подано у вигляді рисунків та таблиць з числовими даними.

Ключові слова: напівлінійне рівняння теплопровідності, додатний розв'язок, сильно інваріантний конусний відрізок, гетеротонний оператор, двобічні наближення, функція Гріна.

ROTHER METHOD IN COMBINATION WITH TWO-SIDED APPROXIMATIONS METHOD FOR SOLVING THE INITIAL-BOUNDARY PROBLEMS FOR THE SEMI-LINEAR HEAT EQUATION

Sidorov M. V., Ph.D. in Physics and Maths, associate professor

*Kharkov National University of Radio Electronics,
Nauky Ave. 14, Kharkiv, 61000*

maxim.sidorov@nure.ua

In this paper, we consider the first initial-boundary problem for the semi-linear heat equation. Problems of this type (with the search for a positive solution) often arise in the mathematical modeling of processes in chemical kinetics, combustion theory, biology, and others. Based on the modified Rothe method, the original non-stationary problem is replaced at each time layer by a nonlinear boundary-value problem for an equation with an elliptic operator. Next, for finding a positive solution of this nonlinear boundary value problem, a method of successive approximations with a two-sided character of convergence is constructed. To construct such a method and study the boundary value problem, methods of the theory of nonlinear operators in semi-ordered spaces are used. Using the Green's functions Hammerstein integral equation is considered, which is investigated as a nonlinear operator equation with a heterotone operator in the space of continuous functions that is semi-ordered by a cone of non-negative functions. The properties of a nonlinear integral operator included in the equation are studied. Next, a strongly invariant cone segment and two iterative sequences are constructed which start from the corresponding ends of a strongly invariant cone segment. The first of these sequences is monotonically increasing and approximates the desired solution from below, and the second is monotonically decreasing and brings the desired solution from above. Conditions for the existence of a common limit of these sequences are given, that is, the conditions for uniqueness of the solution of nonlinear boundary value problems of the Rothe method on each time layer. A priori and a posteriori estimation of the error of the approximate solution of the problem was obtained. A computational experiment was carried out for a heterotone power nonlinearity problem. An approximate solution of a non-stationary problem at time moment 0.1 was obtained in two ways: with a step of 0.1 and a step of 0.05, which made it possible to increase the order of approximation of the method per unit and to clarify the approximate solution according to the Runge rule. The results of the computational experiment are presented in the form of figures and tables with numerical data.

Key words: semilinear heat equation, positive solution, strongly invariant cone segment, heterotone operator, two-sided approximations, Green's function.

ВСТУП

Задачі математичного моделювання у теплофізиці, хімії, біології тощо призводять до необхідності розв'язання початкових або початково-крайових задач для квазілінійного рівняння вигляду $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k(\mathbf{x}, t) \operatorname{grad} u) + f(\mathbf{x}, t, u)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ [2, 8, 10, 13]. Дослідженню задач для цього рівняння присвячено багато праць, зокрема роботи [1-3, 8, 10, 13]. Серед методів його чисельного аналізу можна виділити скінченно-різницеві методи (метод сіток) та напівдискретні методи (метод прямих, або метод Роте) [11, 14]. Ця робота продовжує дослідження, розпочаті у [4, 12], і розповсюджує їх на нестационарні задачі на прикладі квазілінійного рівняння теплопровідності.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Метою роботи є розробка напівдискретних методів у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0], \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0], \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T_0], \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4)$$

де Ω – обмежена вимірна за Жорданом область з \mathbf{R}^2 чи \mathbf{R}^3 з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$), $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, якщо $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо $\Omega \subset \mathbf{R}^3$.

Позначимо $\bar{Q}_{T_0} = \{(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, t \in [0, T_0]\}$. Вважатимемо, що

$$f(\mathbf{x}, t, u) \text{ неперервна і додатна, якщо } (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{T_0}, \quad u > 0, \quad (5)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) \text{ неперервна і додатна, якщо } \mathbf{x} \in \Omega, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6)$$

2. ПОБУДОВА НАПІВДИСКРЕТНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ЗАДАЧІ (1)-(4) МЕТОДОМ РОТЕ

На відрізку $[0, T_0]$ введемо сітку з кроком τ , яка складається з точок $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $m\tau = T_0$, і позначимо

$$U_j = U_j(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Відповідно до методу прямих (методу Роте) в рівнянні (1) диференціальний оператор $\frac{\partial u}{\partial t}$ апроксимуємо відношенням скінченних різниць і розв'язок задачі (1)-(4) шукатимемо вздовж прямих $t = \text{const}$.

Тоді з похибкою $O(\tau)$ рівняння (1) на прямій $t = t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ замінюється нелінійним еліптичним рівнянням

$$\frac{U_j - U_{j-1}}{\tau} - a^2 \Delta U_j = f(\mathbf{x}, t_j, U_j). \quad (7)$$

Рівняння (7) є певною модифікацією класичного методу Роте [14], бо на j -му часовому шарі використовує поточне значення U_j при апроксимації нелінійності $f(\mathbf{x}, t, u)$, а не попереднє значення U_{j-1} .

Відповідно до початкової умови (4) на нульовому часовому шарі $t_0 = 0$ матимемо

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}). \quad (8)$$

Використовуючи крайову умову (3), отримаємо крайову умову на функцію $U_j(\mathbf{x})$:

$$U_j|_{\partial\Omega} = 0.$$

Отже, розв'язання початково-крайової задачі (1)-(4) зводиться до розв'язання послідовності нелінійних еліптичних крайових задач

$$-\Delta U_j + \frac{1}{a^2 \tau} U_j = \frac{1}{a^2 \tau} U_{j-1} + \frac{1}{a^2} f(\mathbf{x}, t_j, U_j), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

$$U_j(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10)$$

$$U_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 1, \dots, m; \quad (11)$$

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}).$$

Зауважимо, що умова (6) означає, що $U_0(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega$.

Збіжність методу Роте при $\tau \rightarrow 0$ доведена у різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей у рівнянні (1) [6, 14].

Крайові задачі (9)-(11) розв'язуються послідовно, а отже, при розв'язанні задачі для $U_j(\mathbf{x})$ функція $U_{j-1}(\mathbf{x})$ буде вже відомою. Тому праву частину рівняння (9) позначимо через $F(\mathbf{x}, U_j)$:

$$F_j(\mathbf{x}, U_j) = \frac{1}{a^2 \tau} U_{j-1} + \frac{1}{a^2} f(\mathbf{x}, t_j, U_j). \quad (12)$$

Застосуємо для розв'язання кожної з задач (9)-(11) метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [4, 12].

3. РОЗВ'ЯЗАННЯ АПРОКСИМУЮЧИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Розглянемо задачу (9)-(11) для деякого фіксованого j . Якщо $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольца $-\Delta + \frac{1}{a^2 \tau}$ в області Ω , то задача (9)-(11) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$U_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F_j(\mathbf{s}, U_j(\mathbf{s})) ds. \quad (13)$$

Рівняння (13) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$. Норма у $C(\bar{\Omega})$ вводиться за правилом $\|U\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |U(\mathbf{x})|$. У просторі $C(\bar{\Omega})$ виділимо конус $K_+ = \{U \in C(\bar{\Omega}) : U(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$ невід'ємних функцій. Конус K_+ у $C(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть гострим) [5, 9]. За допомогою конуса K_+ у просторі $C(\bar{\Omega})$ введемо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } U, V \in C(\bar{\Omega}) \quad U \leq V, \text{ якщо } V - U \in K_+,$$

тобто

$$U \leq V, \text{ якщо } U(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Шукатимемо узагальнений розв'язок $U_j(\mathbf{x})$ крайової задачі (9)-(11), тобто неперервний розв'язок інтегрального рівняння (13).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор T_j , що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T_j(U)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F_j(\mathbf{s}, U_j(\mathbf{s})) ds. \quad (14)$$

Нехай функція $f(\mathbf{x}, t, u)$, що задовольняє умовам (5), дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, t, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, t, u, u)$, де невід'ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$ є неперервною за сукупністю змінних \mathbf{x} , t , v , w , монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in (0, T_0]$. Тоді функція $F_j(\mathbf{x}, U_j)$ вигляду (12) теж дозволить діагональне подання, тобто $F_j(\mathbf{x}, U_j) = \hat{F}_j(\mathbf{x}, U_j, U_j)$, де функція $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$ задаватиметься рівністю

$$\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w) = \frac{1}{a^2 \tau} U_{j-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v, w). \quad (15)$$

Завдяки неперервності і невід'ємності у Ω функції $U_{j-1}(\mathbf{x})$ функція $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$ буде неперервною за сукупністю змінних \mathbf{x} , v , w невід'ємною функцією, що монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$.

Отже, оператор T_j вигляду (14) буде гетеротонним із супровідним оператором

$$\hat{T}_j(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds. \quad (16)$$

Оператори T_j і \hat{T}_j є цілком неперервними.

Оператор T_j вигляду (14) матиме такі властивості:

а) є додатним оператором, тобто залишає інваріантним конус K_+ : якщо $U \in K_+$, то і $T(U) \in K_+$;

б) є u_0 -додатним оператором з функцією $u_0(\mathbf{x})$, яка задається формулою

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds, \quad (17)$$

тобто для будь-якого $U \in K_+$ існують такі числа $\alpha = \alpha(U) > 0$, $\beta = \beta(U) > 0$, що $\alpha u_0, T(U), \beta u_0$;

в) є гетеротонним оператором із супровідним оператором вигляду (16), якщо функція $f(\mathbf{x}, t, u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, t, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, t, u, u)$, де невід'ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$ є неперервною за сукупністю змінних \mathbf{x} , t , v , w , монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in (0, T_0]$;

г) є псевдоувігнутим і навіть u_0 -псевдоувігнутим оператором функцією $u_0(\mathbf{x})$, яка має вигляд (17), якщо виконується умова: для всіх $v, w > 0$ і при будь-якому $v \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, t, v, \frac{1}{v} w\right) > v \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0]. \quad (18)$$

Позначимо через $K(u_0)$ підмножину функцій $U \in K_+$, для яких існують числа $\alpha, \beta > 0$ такі, що $\alpha u_0, U, \beta u_0$. Тоді гетеротонний оператор T називається псевдоувігнутим [9], якщо для

будь-яких ненульових елементів $V, W \in K_+$ маємо, що $\hat{T}(V, W) \in K(u_0)$, і для всіх $V, W \in K(u_0)$ та будь-якого $v \in (0; 1)$ виконується нерівність $\hat{T}\left(vV, \frac{1}{v}W\right) > v\hat{T}(V, W)$. Умова u_0 -псевдоувігнутості для псевдоувігнутого оператора є більш жорсткою, ніж умова просто псевдоувігнутості [9]: для всіх $V, W \in K(u_0)$ та будь-якого $v \in (0; 1)$ існує $\eta = \eta(V, W, v) > 0$ таке, що має місце нерівність $\hat{T}\left(vV, \frac{1}{v}W\right) > v(1 + \eta)\hat{T}(V, W)$.

Далі вважатимемо, що оператор T_j вигляду (14) є гетеротонним із супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16). Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (13) (а отже, і крайової задачі (9)-(11)).

Виділимо умовами $\hat{T}_j(v_j^0, w_j^0) \geq v_j^0$, $\hat{T}_j(w_j^0, v_j^0) \leq w_j^0$ у конусі K_+ сильно інваріантний для гетеротонного оператора T_j конусний відрізок $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$. Це призводить до того, що для функцій $v_j^0(\mathbf{x})$ і $w_j^0(\mathbf{x})$ виконуватимуться нерівності

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v_j^0(\mathbf{s}), w_j^0(\mathbf{s})) ds \geq v_j^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, w_j^0(\mathbf{s}), v_j^0(\mathbf{s})) ds \leq w_j^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

або (з урахуванням (15))

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v_j^0(\mathbf{s}), w_j^0(\mathbf{s})) ds \geq v_j^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (19)$$

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w_j^0(\mathbf{s}), v_j^0(\mathbf{s})) ds \leq w_j^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (20)$$

де позначено

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{a^2 \tau} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_{j-1}(\mathbf{s}) ds. \quad (21)$$

Очевидно, що $\varphi_j(\mathbf{x}) > 0$ для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ і $\varphi_j|_{\partial\Omega} = 0$.

Тепер за схемою $v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)})$, $w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, починаючи з кінців відрізка $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$, сформуємо ітераційний процес:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_j^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_j^0(\mathbf{x}).$$

З урахуванням (15) ітераційні формули набувають вигляду

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_j^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_j^0(\mathbf{x}). \quad (24)$$

З формул (22), (23) випливає, що $v^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$, $w^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$ для всіх $k = 1, 2, \dots$, незалежно від того $v_j^0|_{\partial\Omega} = 0$ та/або $w_j^0|_{\partial\Omega} = 0$ чи $v_j^0|_{\partial\Omega} \neq 0$ та/або $w_j^0|_{\partial\Omega} \neq 0$.

Послідовність функцій $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ є неспадною за конусом K_+ , а послідовність $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ є незростаючою за конусом K_+ . Тоді з нормальності конуса K_+ випливає існування границь $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей.

Застосовуючи різні умови збіжності двобічних наближень до розв'язку нелінійної еліптичної крайової задачі [9], отримаємо наступні умови збіжності наближень (22)-(24) до розв'язку задачі (9)-(11).

Теорема 1. Нехай $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду (14) із супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16) і система рівнянь

$$v(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds, \quad (25)$$

$$w(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) ds \quad (26)$$

не має на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес (22)-(24) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (9)-(11).

Двобічна збіжність ітераційного процесу (22)-(24) означає виконання ланцюга нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \gg v^{(1)} \gg \dots \gg v^{(k)} \gg \dots \gg U_j^* \gg \dots \gg w^{(k)} \gg \dots \gg w^{(1)} \gg w^{(0)} = w^0. \quad (27)$$

Теорему 1 можна уточнити за рахунок накладання додаткових умов на функцію $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$, за виконання яких система рівнянь (25), (26) не має на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ розв'язків таких, що $v \neq w$ [9]. Мають місце такі твердження.

Теорема 2. Нехай $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду (14) із супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16), $j = 1, \dots, m$, і для будь-яких чисел v, w, u таких, що $0 < v < w$, $0 < u < w$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in (0, T_0]$ має місце нерівність

$$\hat{f}(\mathbf{x}, t, v+u, w-u) < \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w) + uM^{-1},$$

де $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x})$.

Тоді при кожному j , $j = 1, \dots, m$, ітераційний процес (22)-(24) двобічно (у сенсі ланцюга нерівностей (27)) збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (9)-(11).

Теорема 3. Нехай $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду (14) із супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16), $j=1, \dots, m$, і існує така неперервна на $(0, T_0]$ функція $L(t) > 0$, що функція $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$ для всіх чисел v, w таких, що $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max_{j=1, \dots, m} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} w_j^0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність

$$|\hat{f}(\mathbf{x}, t, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)| \leq L(t)|w - v|.$$

Якщо $\gamma = ML < 1$, де $M = \max_{j=1, \dots, m} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0^j(\mathbf{x})$, $L = \max_{j=1, \dots, m} L(t_j)$, то при кожному $j, j=1, \dots, m$, ітераційний процес (22)-(24) двобічно збігається (у сенсі ланцюга нерівностей (27)) у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (9)-(11). При цьому для j -ї задачі матиме місце оцінка

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (L_j M)^{k+1} \|w_j^0 - v_j^0\|,$$

де $L_j = L(t_j)$, $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x})$.

Використання умови (18) u_0 -псевдоувігнутості гетеротонного оператора T_j вигляду (14) із супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16) призводить до такого результату.

Теорема 4. Нехай $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle \succ K(u_0)$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду (14) з супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (16), $j=1, \dots, m$, і для всіх $v, w > 0$ і при будь-якому $v \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, t, v, \frac{1}{v}w\right) > v\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0]. \quad (28)$$

Тоді при кожному $j, j=1, \dots, m$, ітераційний процес (22)-(24) двобічно збігається (у сенсі ланцюга нерівностей (27)) у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (9)-(11).

При реалізації розглянутого методу двобічних наближень за наближений розв'язок вихідної нестационарної задачі (1)-(4) на j -му часовому шарі на k -й ітерації приймаємо функцію

$$U_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (29)$$

На кожній k -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (29):

$$\|U_j^* - U_j^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})),$$

що є перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес розв'язання j -ї задачі, $j=1, \dots, m$, слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} |w^{(k_j)}(\mathbf{x}) - v^{(k_j)}(\mathbf{x})| < 2\varepsilon$$

і з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(\mathbf{x}, t_j) = U_j^*(\mathbf{x}) \approx U_j^{(k_j)}(\mathbf{x}).$$

Тоді, застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), U_1^{(k_1)}(\mathbf{x}), U_2^{(k_2)}(\mathbf{x}), \dots, U_m^{(k_m)}(\mathbf{x}). \quad (30)$$

Відповідно до загальних теорем збіжності метода Рунге [6, 14] з теорем 2-4 випливає збіжність запропонованої схеми до розв'язку задачі (1)-(4) при $\tau \rightarrow 0$.

Використовуючи, наприклад, апарат теорії інтерлінації [7], за набором функцій (30) можна побудувати наближений розв'язок задач (1)-(4) у вигляді функції $u_m(\mathbf{x}, t)$, визначеної при всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T_0]$. Цей наближений розв'язок має точність $O(\tau)$. Якщо зробити розрахунки з кроком $\frac{\tau}{2}$, то отримаємо наближений розв'язок $u_{2m}(\mathbf{x}, t)$, який відповідно до правила Рунге можна уточнити до порядку $O(\tau^2)$ за формулою

$$u(\mathbf{x}, t) = 2u_{2m}(\mathbf{x}, t) - u_m(\mathbf{x}, t).$$

При чисельній реалізації методу двобічних наближень розв'язання задач (9)-(11) для побудови сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$, що виділяється умовами (19)-(20), можуть бути корисні наступні загальні рекомендації.

Якщо функція $f(\mathbf{x}, t, u)$ визначена при $u = 0$, то незалежно від того $f(\mathbf{x}, t, 0) > 0$ чи $f(\mathbf{x}, t, 0) = 0$, конусний відрізок $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ можна шукати у вигляді $v_j^0(\mathbf{x}) = 0$, $w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j$. Це призводить до нерівностей

$$\begin{aligned} \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, 0, \beta) ds &\geq 0 \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \\ \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \beta, 0) ds &\leq \beta \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Перша з цих нерівностей завжди виконуватиметься, а друга нерівність набуває вигляду

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{M}{a^2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, \beta, 0) \leq \beta,$$

де $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$.

Оскільки шуканий розв'язок задачі (9)-(11) задовольняє однорідну крайову умову, то у загальному випадку незалежно від того, визначена функція $f(\mathbf{x}, t, u)$ при $u = 0$ чи ні, конусний відрізок $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ можна шукати у вигляді $v_j^0(\mathbf{x}) = \alpha_j u_0(\mathbf{x})$, $w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j u_0(\mathbf{x})$.

Тоді для визначення чисел α_j , β_j ($0 < \alpha_j < \beta_j$) отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leq \min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_1^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j), \quad \beta_j \geq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} h_2^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j), \quad (31)$$

де

$$h_1^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j) = \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{u_0(\mathbf{x})} + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \alpha_j u_0(\mathbf{s}), \beta_j u_0(\mathbf{s})) ds,$$

$$h_2^j(\mathbf{x}; \alpha_j, \beta_j) = \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{u_0(\mathbf{x})} + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, \beta_j u_0(\mathbf{s}), \alpha_j u_0(\mathbf{s})) ds.$$

4. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Розглянемо задачу (1)-(4) в одиничному квадраті $\bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ з

$$f(\mathbf{x}, t, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \tag{32}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2),$$

де $p, q > 0, \lambda, \mu > 0$.

Для функції $f(\mathbf{x}, t, u)$ вигляду (32) обираємо $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$. Умова u_0 -псевдо-увігнутості (28), записана для функції $f(\mathbf{x}, t, u)$ вигляду (32), призводить до нерівності

$$\lambda v(\tau^{p-1} - 1)v^p + \mu v(\tau^{q-1} - 1)w^{-q} > 0,$$

яка виконуватиметься для всіх $v \in (0, 1), v, w > 0$ і для будь-яких $\lambda, \mu > 0$, якщо $0 < p < 1, 0 < q < 1$.

Функція Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольца $-\Delta + \frac{1}{a^2 \tau}$ в одиничному квадраті Ω має вигляд

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x_1 \sin \pi m x_2 \sin \pi n s_1 \sin \pi m s_2}{\pi^2 (n^2 + m^2) + \kappa^2},$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{s} = (s_1, s_2), \kappa^2 = \frac{1}{a^2 \tau}$.

Шукаючи на j -му часовому шарі кінці сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ у вигляді $v_j^0(\mathbf{x}) = \alpha_j u_0(\mathbf{x}), w_j^0(\mathbf{x}) = \beta_j u_0(\mathbf{x})$, відповідно до (31) для визначення чисел α_j, β_j ($0 < \alpha_j < \beta_j$) отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leq m_0^j + \frac{\lambda m_1^j}{a^2} \alpha_j^p + \frac{\mu m_2^j}{a^2} \beta_j^{-q}, \quad \beta_j \geq M_0^j + \frac{\lambda M_1^j}{a^2} \alpha_j^p + \frac{\mu M_2^j}{a^2} \beta_j^{-q}, \tag{33}$$

де

$$m_0^j = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{u_0(\mathbf{x})}, \quad M_0^j = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{u_0(\mathbf{x})},$$

$$m_1^j = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^p(\mathbf{s}) ds, \quad M_1^j = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^p(\mathbf{s}) ds,$$

$$m_2^j = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^{-q}(\mathbf{s}) ds, \quad M_2^j = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{u_0(\mathbf{x})} u_0^{-q}(\mathbf{s}) ds.$$

Отже, для $\lambda, \mu > 0$ і $0 < p < 1, 0 < q < 1$ згідно з теоремою 4 на кожному часовому шарі $j, j = 1, \dots, m$, ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left\{ \lambda [v^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \mu [w^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} \right\} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (34)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left\{ \lambda [w^{(k)}(\mathbf{s})]^p + \mu [v^{(k)}(\mathbf{s})]^{-q} \right\} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (35)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_j u_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_j u_0(\mathbf{x}), \quad (36)$$

де α_j, β_j ($0 < \alpha_j < \beta_j$) є розв'язком системи нерівностей (33), двобічно збігається до функції $U_j^*(\mathbf{x})$, яка є наближенням за модифікованим методом Роте для $u(\mathbf{x}, t_j)$.

Застосуємо розроблений метод двобічних наближень до знаходження наближення $U_1(\mathbf{x})$ до функції $u(\mathbf{x}, t)$ на першому часовому шарі для $\tau_1 = 0,1$, якщо $a = 1$, $\lambda = \mu = 1$, $p = q = \frac{1}{2}$.

Знаходимо

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 10 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) s_1 s_2 (1-s_1)(1-s_2) ds_2, \quad u_0(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds_2,$$

$$m_0^1 = 0,1241, \quad M_0^1 = 0,4682, \quad m_1^1 = 0,0921, \quad M_1^1 = 0,1908, \quad m_2^1 = 5,4310, \quad M_2^1 = 17,1891.$$

Розв'язок системи нерівностей (33) для обраних значень параметра наведено на рис. 1.

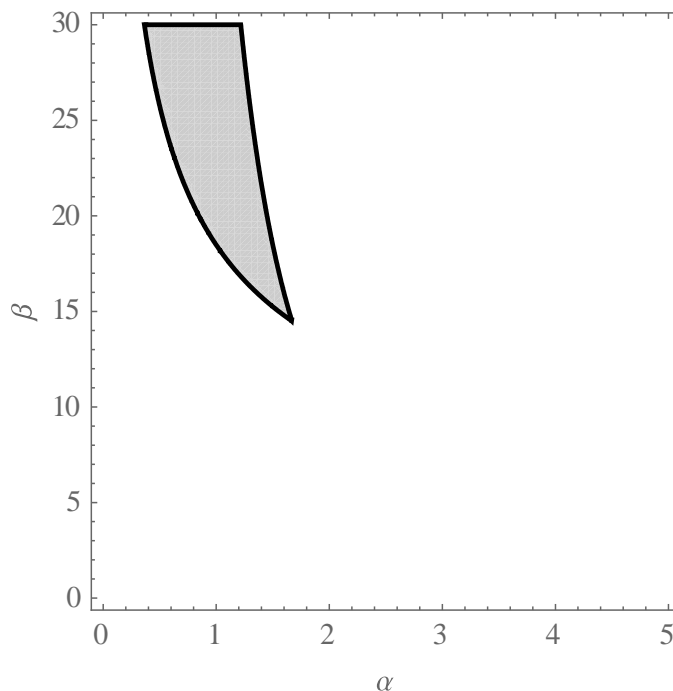


Рис. 1. Розв'язок системи нерівностей (33) для першого часового шару ($\tau = 0,1$)

Для реалізації ітераційного процесу (34)-(36) обираємо $\alpha_1 = 1,6693$, $\beta_1 = 14,4990$. Для $\varepsilon = 10^{-4}$ було зроблено десять ітерацій. На рис. 2 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$. На рис. 3 наведено поверхню, а на рис. 4 лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$, а у табл. 1 наведено значення $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$ у точках області $\bar{\Omega}$ з координатами $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$. Розглядаючи відношення $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$,

$k = 0, 1, \dots, 9$, похибок $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$, отримали $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,452$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з таким показником.

$$w^{(k)}(x_1, 0,5), v^{(k)}(x_1, 0,5)$$

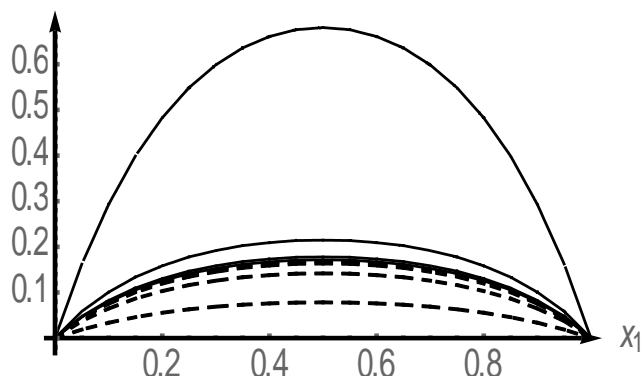


Рис. 2. Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$ для першого часового шару ($\tau = 0,1$)

Таблиця 1 – Значення функції $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$ у точках вигляду $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$ ($\tau = 0,1$)

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,1$	$x_1^2 = 0,2$	$x_1^3 = 0,3$	$x_1^4 = 0,4$	$x_1^5 = 0,5$	$x_1^6 = 0,6$	$x_1^7 = 0,7$	$x_1^8 = 0,8$	$x_1^9 = 0,9$	$x_1^{10} = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,1$	0	0,0458	0,0641	0,0730	0,0773	0,0786	0,0773	0,0730	0,0641	0,0458	0
$x_2^2 = 0,2$	0	0,0641	0,0961	0,1132	0,1218	0,1244	0,1218	0,1132	0,0961	0,0641	0
$x_2^3 = 0,3$	0	0,0730	0,1132	0,1360	0,1477	0,1513	0,1477	0,1360	0,1132	0,0730	0
$x_2^4 = 0,4$	0	0,0773	0,1218	0,1477	0,1613	0,1656	0,1613	0,1477	0,1218	0,0773	0
$x_2^5 = 0,5$	0	0,0786	0,1244	0,1513	0,1656	0,1700	0,1656	0,1513	0,1244	0,0786	0
$x_2^6 = 0,6$	0	0,0773	0,1218	0,1477	0,1613	0,1656	0,1613	0,1477	0,1218	0,0773	0
$x_2^7 = 0,7$	0	0,0730	0,1132	0,1360	0,1477	0,1513	0,1477	0,1360	0,1132	0,0730	0
$x_2^8 = 0,8$	0	0,0641	0,0961	0,1132	0,1218	0,1244	0,1218	0,1132	0,0961	0,0641	0
$x_2^9 = 0,9$	0	0,0458	0,0641	0,0730	0,0773	0,0786	0,0773	0,0730	0,0641	0,0458	0
$x_2^{10} = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Знайдемо тепер розробленим методом наближення $U_1(\mathbf{x})$ і $U_2(\mathbf{x})$ до функції $u(\mathbf{x}, t)$ на першому та другому часових шарах для $\tau_1 = 0,05$, якщо $a = 1$, $\lambda = \mu = 1$, $p = q = \frac{1}{2}$. Для першого часового шару з $\tau_2 = 0,05$ знаходимо

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = 5 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) s_1 s_2 (1-s_1)(1-s_2) ds_2, \quad u_0(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds_2,$$

$$m_0^1 = 0,2083, \quad M_0^1 = 0,9649, \quad m_1^1 = 0,0770, \quad M_1^1 = 0,1666, \quad m_2^1 = 6,1659, \quad M_2^1 = 19,5828.$$

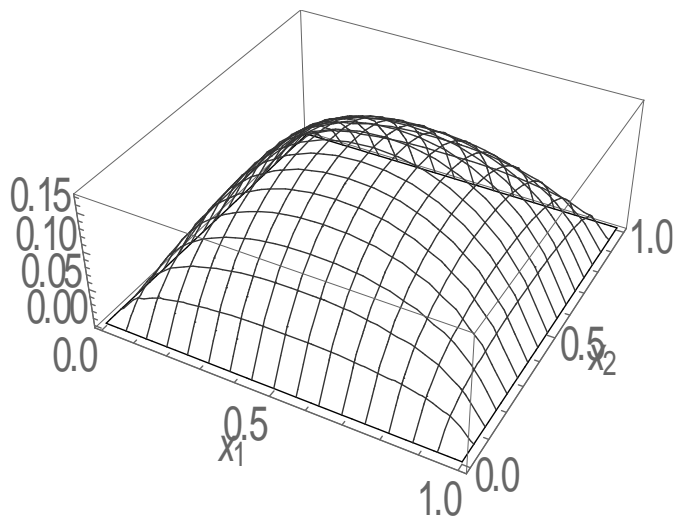


Рис. 3. Поверхня наближеного розв'язку $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$ для першого часового шару ($\tau = 0,1$)

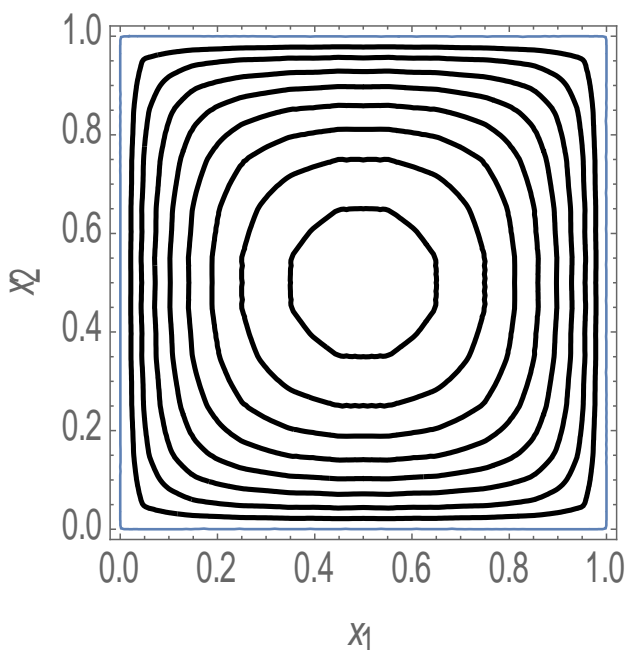


Рис. 4. Лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$ для першого часового шару ($\tau = 0,1$)

Розв'язок системи нерівностей (33) для обраних значень параметра наведено на рис. 5.

Для реалізації ітераційного процесу (34)-(36) обираємо $\alpha_1 = 1,8539$, $\beta_1 = 16,0138$. Для $\varepsilon = 10^{-4}$ було зроблено дев'ять ітерацій. На рис. 6 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$. На рис. 7 наведено поверхню, а на рис. 8 лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$, а у табл. 2 наведено значення $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ у точках області $\bar{\Omega}$ з координатами

$(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$. Розглядаючи відношення $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$, $k = 0, 1, \dots, 8$, похибок

$\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$, отримали $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,419$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з цим показником.

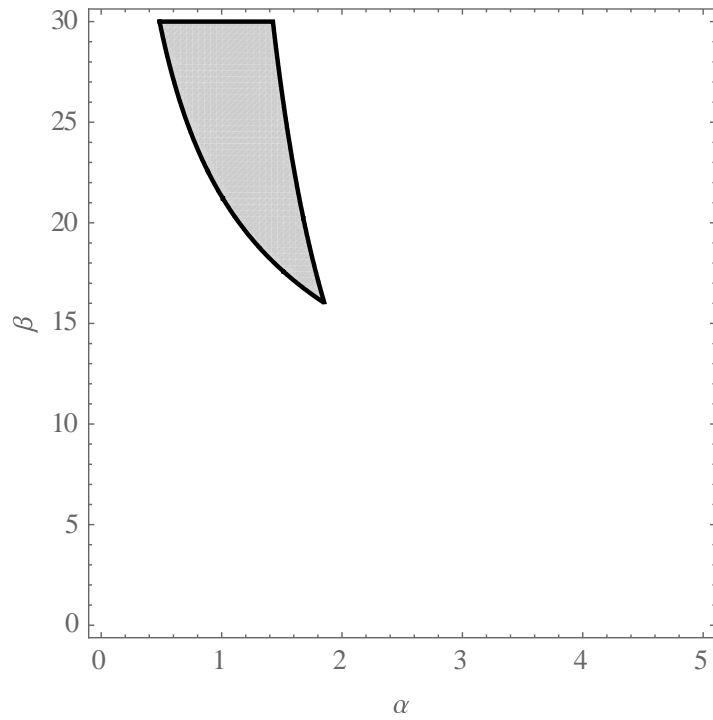


Рис. 5. Розв'язок системи нерівностей (33) для першого часового шару ($\tau = 0,05$)

$$w^{(k)}(x_1, 0,5), v^{(k)}(x_1, 0,5)$$

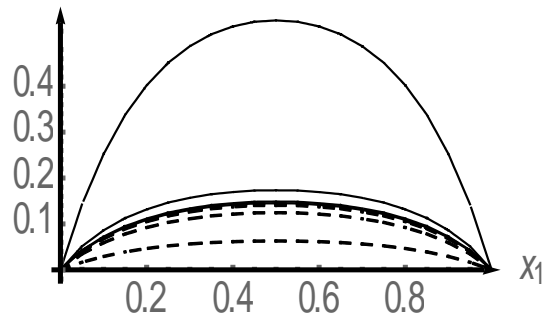


Рис. 6. Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$ для першого часового шару ($\tau = 0,05$)

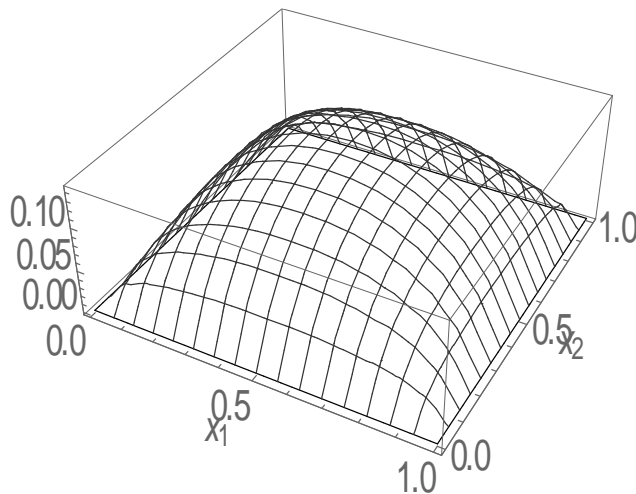


Рис. 7. Поверхня наближеного розв'язку $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ для першого часового шару ($\tau = 0,05$)

Таблиця 2 – Значення функції $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ у точках вигляду $(x_1^r, x_2^s) = (0, 1r; 0, 1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$ ($\tau = 0,05$)

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,1$	$x_1^2 = 0,2$	$x_1^3 = 0,3$	$x_1^4 = 0,4$	$x_1^5 = 0,5$	$x_1^6 = 0,6$	$x_1^7 = 0,7$	$x_1^8 = 0,8$	$x_1^9 = 0,9$	$x_1^{10} = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,1$	0	0,0427	0,0583	0,0656	0,0689	0,0699	0,0689	0,0656	0,0583	0,0427	0
$x_2^2 = 0,2$	0	0,0583	0,0856	0,0994	0,1061	0,1081	0,1061	0,0994	0,0856	0,0583	0
$x_2^3 = 0,3$	0	0,0656	0,0994	0,1178	0,1269	0,1297	0,1269	0,1178	0,0994	0,0656	0
$x_2^4 = 0,4$	0	0,0689	0,1061	0,1269	0,1376	0,1409	0,1376	0,1269	0,1061	0,0689	0
$x_2^5 = 0,5$	0	0,0699	0,1081	0,1297	0,1409	0,1443	0,1409	0,1297	0,1081	0,0699	0
$x_2^6 = 0,6$	0	0,0689	0,1061	0,1269	0,1376	0,1409	0,1376	0,1269	0,1061	0,0689	0
$x_2^7 = 0,7$	0	0,0656	0,0994	0,1178	0,1269	0,1297	0,1269	0,1178	0,0994	0,0656	0
$x_2^8 = 0,8$	0	0,0583	0,0856	0,0994	0,1061	0,1081	0,1061	0,0994	0,0856	0,0583	0
$x_2^9 = 0,9$	0	0,0427	0,0583	0,0656	0,0689	0,0699	0,0689	0,0656	0,0583	0,0427	0
$x_2^{10} = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Аналогічно для другого часового шару з $\tau_2 = 0,05$ знаходимо

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = 5 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_1^{(9)}(s_1, s_2) ds_2, \quad u_0(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds_2,$$

$$m_0^2 = 0,4303, \quad M_0^2 = 1,1886, \quad m_1^2 = 0,0921, \quad M_1^2 = 0,1908, \quad m_2^2 = 5,4310, \quad M_2^2 = 17,1891.$$

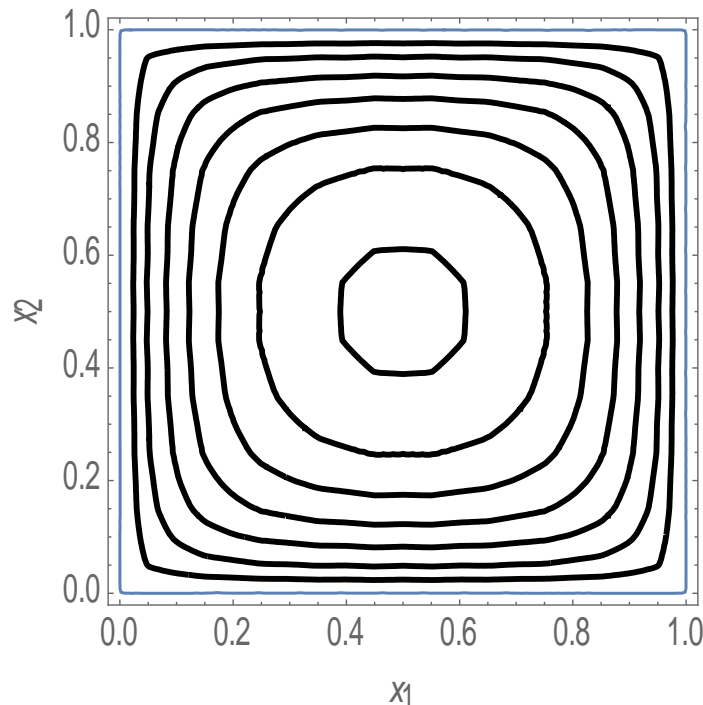


Рис. 8. Лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ для першого часового шару ($\tau = 0,05$)

Розв'язок системи нерівностей (33) для обраних значень параметра наведено на рис. 9.

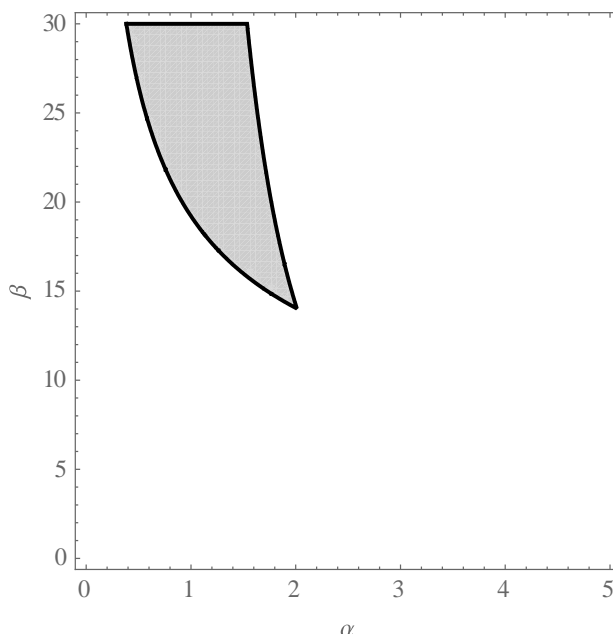


Рис. 9. Розв’язок системи нерівностей (33) для другого часового шару ($\tau = 0,05$)

Для реалізації ітераційного процесу (34)-(36) обираємо $\alpha_2 = 2,0111$, $\beta_2 = 14,0242$. Для $\varepsilon = 10^{-4}$ було зроблено вісім ітерацій. На рис. 10 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_2^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$. На рис. 11 наведено поверхню, а на рис. 12 лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв’язку $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$, а у табл. 3 наведено значення $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ у точках області $\bar{\Omega}$ з координатами $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$. Розглядаючи відношення $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$, $k = 0, 1, \dots, 7$, похибок $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x}))$, отримали $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,385$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з цим показником.

$$w^{(k)}(x_1, 0,5), v^{(k)}(x_1, 0,5)$$

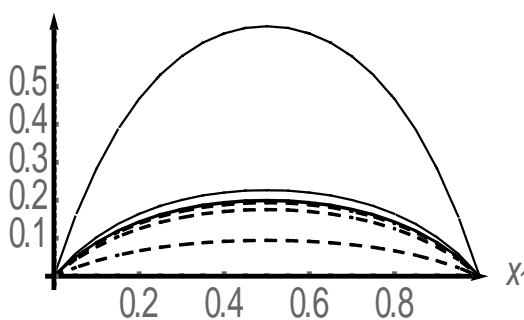


Рис. 10. Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_2^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$ для другого часового шару ($\tau = 0,05$)

Отримані функції $U_1^{(10)}(\mathbf{x})$, $U_1^{(9)}(\mathbf{x})$ і $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ є розв’язками з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ крайових задач вигляду (9)-(11) і наближають $u(\mathbf{x}, 0,1)$, $u(\mathbf{x}, 0,05)$ і $u(\mathbf{x}, 0,1)$ відповідно, але їх точність відносно кроку за часом становить лише $O(\tau)$. На основі правила Рунге уточнене до $O(\tau^2)$ значення $u(\mathbf{x}, 0,1)$ розрахуємо за формулою

$$u(\mathbf{x}, 0,1) = 2U_2^{(8)}(\mathbf{x}) - U_1^{(10)}(\mathbf{x}).$$

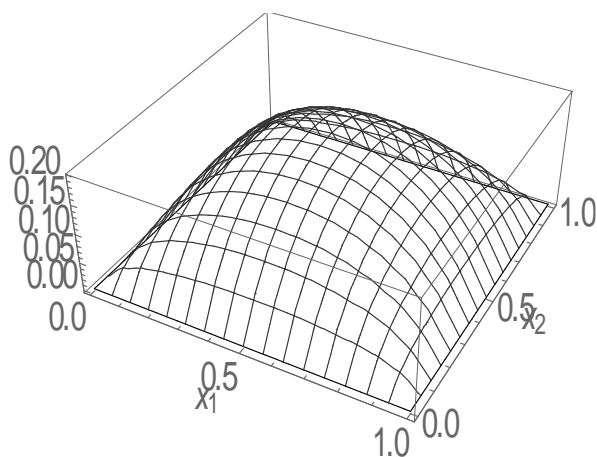


Рис. 11. Поверхня наближеного розв'язку $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ для другого часового шару ($\tau = 0,05$)

Таблиця 3 – Значення функції $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ у точках області $\bar{\Omega}$ вигляду $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,1$	$x_1^2 = 0,2$	$x_1^3 = 0,3$	$x_1^4 = 0,4$	$x_1^5 = 0,5$	$x_1^6 = 0,6$	$x_1^7 = 0,7$	$x_1^8 = 0,8$	$x_1^9 = 0,9$	$x_1^{10} = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,1$	0	0,0491	0,0701	0,0808	0,0861	0,0877	0,0861	0,0808	0,0701	0,0491	0
$x_2^2 = 0,2$	0	0,0701	0,1072	0,1277	0,1382	0,1414	0,1382	0,1277	0,1072	0,0701	0
$x_2^3 = 0,3$	0	0,0808	0,1277	0,1551	0,1695	0,1739	0,1695	0,1551	0,1277	0,0808	0
$x_2^4 = 0,4$	0	0,0861	0,1382	0,1695	0,1862	0,1914	0,1862	0,1695	0,1382	0,0861	0
$x_2^5 = 0,5$	0	0,0877	0,1414	0,1739	0,1914	0,1969	0,1914	0,1739	0,1414	0,0877	0
$x_2^6 = 0,6$	0	0,0861	0,1382	0,1695	0,1862	0,1914	0,1862	0,1695	0,1382	0,0861	0
$x_2^7 = 0,7$	0	0,0808	0,1277	0,1551	0,1695	0,1739	0,1695	0,1551	0,1277	0,0808	0
$x_2^8 = 0,8$	0	0,0701	0,1072	0,1277	0,1382	0,1414	0,1382	0,1277	0,1072	0,0701	0
$x_2^9 = 0,9$	0	0,0491	0,0701	0,0808	0,0861	0,0877	0,0861	0,0808	0,0701	0,0491	0
$x_2^{10} = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

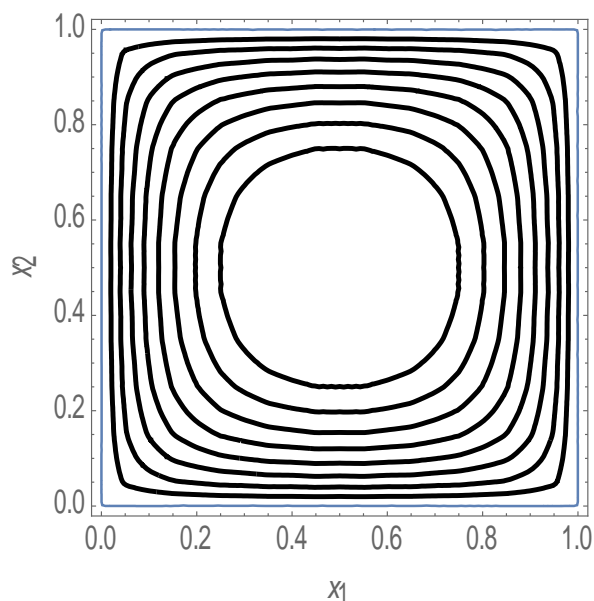


Рис. 12. Лінії рівня (з кроком 0,02) наближеного розв'язку $U_2^{(8)}(\mathbf{x})$ для другого часового шару ($\tau = 0,05$)

На рис. 13 наведено поверхню, а на рис. 14 лінії рівня (з кроком 0,02) наближення для $u(\mathbf{x}, 0,1)$, а у табл. 4 наведено значення цієї функції у точках області $\bar{\Omega}$ з координатами $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$.

Таблиця 4 – Значення наближення для $u(\mathbf{x}, 0,1)$ у точках області $\bar{\Omega}$ вигляду $(x_1^r, x_2^s) = (0,1r; 0,1s)$, $r, s = 0, 1, \dots, 10$

	$x_1^0 = 0$	$x_1^1 = 0,1$	$x_1^2 = 0,2$	$x_1^3 = 0,3$	$x_1^4 = 0,4$	$x_1^5 = 0,5$	$x_1^6 = 0,6$	$x_1^7 = 0,7$	$x_1^8 = 0,8$	$x_1^9 = 0,9$	$x_1^{10} = 1$
$x_2^0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2^1 = 0,1$	0	0,0524	0,0761	0,0886	0,0949	0,0968	0,0949	0,0886	0,0761	0,0524	0
$x_2^2 = 0,2$	0	0,0761	0,1182	0,1422	0,1546	0,1584	0,1546	0,1422	0,1182	0,0761	0
$x_2^3 = 0,3$	0	0,0886	0,1422	0,1742	0,1912	0,1965	0,1912	0,1742	0,1422	0,0886	0
$x_2^4 = 0,4$	0	0,0949	0,1546	0,1912	0,2110	0,2172	0,2110	0,1912	0,1546	0,0949	0
$x_2^5 = 0,5$	0	0,0968	0,1584	0,1965	0,2172	0,2237	0,2172	0,1965	0,1584	0,0968	0
$x_2^6 = 0,6$	0	0,0949	0,1546	0,1912	0,2110	0,2172	0,2110	0,1912	0,1546	0,0949	0
$x_2^7 = 0,7$	0	0,0886	0,1422	0,1742	0,1912	0,1965	0,1912	0,1742	0,1422	0,0886	0
$x_2^8 = 0,8$	0	0,0761	0,1182	0,1422	0,1546	0,1584	0,1546	0,1422	0,1182	0,0761	0
$x_2^9 = 0,9$	0	0,0524	0,0761	0,0886	0,0949	0,0968	0,0949	0,0886	0,0761	0,0524	0
$x_2^{10} = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

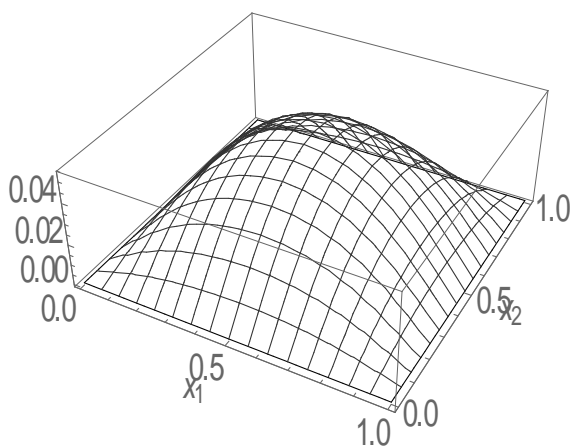


Рис. 13. Поверхня наближення для $u(\mathbf{x}, 0,1)$

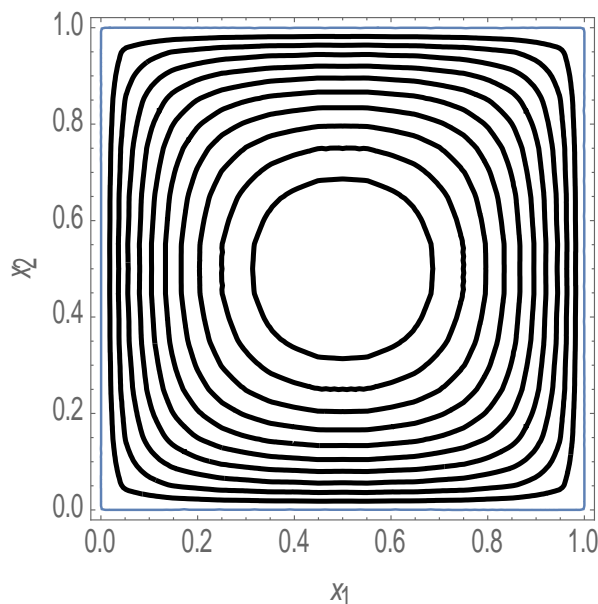


Рис. 14. Лінії рівня наближення для $u(\mathbf{x}, 0,1)$

ВИСНОВКИ

Для розв’язання першої початково-крайової задачі для квазілінійного рівняння теплопровідності у роботі вперше запропоновано комбінація модифікованого методу Рунге і методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Обчислювальний експеримент, проведений для задачі зі степеневою нелінійністю, продемонстрував можливості

та ефективність методу. Запропонований метод може бути використаний при розв'язанні прикладних задач, математичними моделями яких є початково-крайові задачі вигляду (1)-(4), і розповсюджений на задачі для квазілінійних гіперболічних рівнянь. Також за рахунок використання замість точної функції Гріна відповідної квазіфункції Гріна-Рвачова метод двобічних наближень можна буде використати для розв'язання відповідних задач в областях складної геометрії. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Голайдо С. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. Нестационарные задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением тепла. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1973. Т. 13, № 5. С. 1351–1356.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений: 2-е изд., доп. Москва: Наука, 1966. 686 с.
3. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1974. Т. 14, № 4. С. 891–905.
4. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 107–120.
5. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва : Физматгиз, 1962. 394 с.
6. Ладыженская О. А. Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений. *Тр. ММО*. 1958. Т. 7. С. 149–177.
7. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків: Основа, 2002. 544 с.
8. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов теплопереноса. Эволюция диссипативных структур. Москва: Наука, 1987. 352 с.
9. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
10. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987. 478 с.
11. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики: 2-е изд. Москва: Научный мир, 2003. 316 с.
12. Сидоров М. В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 250–259.
13. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Москва: Интеллект, 2008. 408 с.
14. Rothe E. Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben. *Mathematische Annalen*. 1930. Vol. 102, № 1. P. 650–670.

REFERENCES

1. Golaido, S. I., Martinson, L. K. & Pavlov, K. B. (1973). Non-stationary problems of non-linear heat conduction with volume heat absorption. *Journal of Computational Mathematics Mathematical Physics*, Vol. 13, No. 5, pp. 1351-1356.
2. Zel'dovich, Ya. B. & Raizer, Yu. P. (1966). *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Moscow: Nauka (in Russian).

3. Kalashnikov, A. S. (1974). The propagation of disturbances in problems of non-linear heat conduction with absorption. *Journal of Computational Mathematics Mathematical Physics*, Vol. 14, No. 4, pp. 891-905 (in Russian).
4. Kolosova, S. V., Lukhanin, V. S. & Sidorov, M. V. (2015). On the construction of two-sided approximations to the positive solution of the Lane-Emden equation. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, No. 3, pp. 107-120 (in Russian).
5. Krasnosel'skij, M. A. (1962). *Positive Solutions of Operator Equations*. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
6. Ladyženskaya, O. A. (1958). Solution of the first boundary problem in the large for quasilinear parabolic equations. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshestva*, No. 7, pp. 149-177 (in Russian).
7. Lytvyn, O. M. (2002). *Interlineation of functions and some its applications*. Kharkiv: Osnova (in Ukrainian).
8. Maslov, V. P., Danilov, V. G. & Volosov, K. A. (1987). *Mathematical modeling of heat and mass transfer processes. Evolution of dissipative structures*. Moscow: Nauka (in Russian).
9. Opojtsjev, V. I. & Khurodze, T. A. (1984). *Nonlinear Operators in Spaces with a Cone*. Tbilisi: Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta (in Russian).
10. Samarskii, A. A., Galaktionov, V. A., Kurdyumov, S. P. & Mikhailov, A. P. (1987). *Regimes with peaking in problems for quasilinear parabolic equations*. Moscow: Nauka (in Russian).
11. Samarskii, A. A. & Gulin, A. V. (2003). *Numerical methods of mathematical physics*. Moscow: Nauchnyj mir (in Russian).
12. Sidorov, M. V. (2017). Construction two-sided iterative processes for solving nonlinear boundary value problems using methods of Green's functions and the quasi-functions of Green-Rvachev. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, No. 2, pp. 250-259 (in Ukrainian).
13. Frank-Kamenetskii, D. A. (2008). *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*. Moscow: Intellekt (in Russian).
14. Rothe, E. (1930). Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben. *Mathematische Annalen*, Vol. 102, No. 1, pp. 650-670 (in German).

УДК 004.942

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-13

К СИНТЕЗУ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХЗВЕННОГО АВТОПОЕЗДА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАДНИМ ХОДОМ

Татиевский Д. Н., аспирант

*Запорожская государственная инженерная академия,
просп. Соборный, 226, г. Запорожье, 69006, Украина*

dtdissert@gmail.com

В исследовании проведено изучение состояния и решения проблемы, связанной с реверсным движением автопоезда, состоящего из тягача и двух полуприцепов со сцепными устройствами точно над задней осью тягача и полуприцепов («on-axle hitching» модель). На основе анализа подходов к синтезу законов управления таким автопоездом принято решение синтезировать требуемые законы управления (контроллеры) с использованием метода функций А. М. Ляпунова. Прямой метод А. М. Ляпунова для синтеза такого управления был уже применен для автопоезда с одним полуприцепом, но вследствие усложнения модели было решено использовать метод

бэкстеппинга (backstepping), основанный также на методе функций А. М. Ляпунова и, в силу рекурсивности алгоритма, подходящего для решения этой проблемы при увеличении количества полуприцепов в составе автопоезда. В итоге, законы управления, обеспечивающие стабилизацию автопоезда при реверсном движении и удовлетворяющие ограничениям по управлению, были синтезированы с помощью методов бэкстеппинга и прямого метода А. М. Ляпунова. Синтезированные с помощью этих методов законы проверены с помощью численного моделирования в системе Maple, что позволило добиться высокого качества управления движением автопоезда по круговой траектории с помощью настройки коэффициентов регулятора. При этом закон, синтезированный с помощью метода бэкстеппинга, имеет два регулирующих коэффициента, в отличие от единственного при синтезе, по прямому методу А. М. Ляпунова, и позволяет добиться более тонкой настройки управления. Для сравнения синтезированных законов проводился анализ фазовых портретов траекторий, углов складывания и управления, ориентационных углов, а также выполнялся анализ качества переходных процессов при изменении скорости движения автопоезда.

Ключевые слова: автопоезд, бэкстеппинг, контроллер, неголономная система, прямой метод А. М. Ляпунова, реверсное движение, робопоезд, синтез закона управления, «on-axle hitching» модель, Maple.

ДО СИНТЕЗУ ЗАКОНІВ УПРАВЛІННЯ НЕГОЛОНОМНОЇ МОДЕЛІ ТРИЛАНКОВОГО АВТОПОЇЗДА ПРИ РУСІ ЗАДНІМ ХОДОМ

Татієвський Д. М., аспірант

*Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, м. Запоріжжя, 69006, Україна*

dtdissert@gmail.com

У дослідженні проведено вивчення стану і вирішення проблеми, пов'язаної з реверсним рухом автопоїзда, що складається з тягача і двох напівприцепів із зчіпними пристроями точно над задньою віссю тягача і напівприцепів («on-axle hitching» модель). На основі аналізу підходів до синтезу законів управління таким автопоїздом прийнято рішення синтезувати необхідні закони управління з використанням методу функцій О. М. Ляпунова. Прямий метод О. М. Ляпунова для синтезу такого управління широко використовується для автопоїзда з одним напівприцепом, але внаслідок ускладнення моделі було вирішено використовувати метод бекстепінга (backstepping), заснований також на методі функцій О. М. Ляпунова і, в силу рекурсивності алгоритму, придатного для вирішення цієї проблеми при збільшенні кількості напівприцепів у складі автопоїзда. У підсумку закони управління, що стабілізують автопоїзд при реверсному русі з урахуванням обмежень з управління, були синтезовані за допомогою методів бекстепінга і прямого методу О. М. Ляпунова. Синтезовані за допомогою цих методів закони перевірені за допомогою чисельного моделювання в системі Maple, що дозволило добитися високої якості управління рухом автопоїзда по круговій траєкторії за допомогою настройки коефіцієнтів регулятора. При цьому закон, синтезований за допомогою методу бекстепінга, має два регулюючих коефіцієнти на відміну від єдиного при синтезі, за прямим методом О. М. Ляпунова, і дозволяє домогтися більш тонкого налаштування управління. Для порівняння синтезованих законів проводився аналіз фазових портретів траєкторій, кутів складання і управління, орієнтаційних кутів, а також виконувався аналіз якості перехідних процесів при зміні швидкості руху автопоїзда.

Ключові слова: автопоїзд, бекстепінг, контролер, неголономна система, прямий метод О. М. Ляпунова, реверсний рух, робопоезд, синтез закону управління, «on-axle hitching» модель, Maple.

REGARDING THREE LINK ROAD TRAIN MODEL MOVING REVERSE NON-HOLONOMIC SYSTEM STEERING LAWS SYNTHESIS

Tatievskiy D. N., postgraduate student

*Zaporizhzhya State Engineering Academy,
ave. Soborniy, 226, Zaporizhia, 69006, Ukraine,*

dtdissert@gmail.com

The current research contains studying of issue solutions state related to reverse motion of a road train reverse consisting of a tractor truck and two semitrailers with hitching units on the tractor truck rear axle directly (an “on-axle hitching” model). Based on analyzing approaches towards the kind of road train steering laws synthesis it's decided to synthesize the required steering laws (controllers) using

Lyapunov's functions method. Direct Lyapunov's method for synthesizing the kind of controlling has been already applied for a road train with one semitrailer, but due to a model increased complexity and algorithm (suitable for solving this task with growing road train semitrailers number) recursiveness a backstepping method has been used which is also based on Lyapunov's functions method. As a result, steering laws for stabilizing road train reverse motion and matching steering limitations have been synthesized using the backstepping and direct Lyapunov's methods.

Laws synthesized with these methods are checked via computational modeling in the Maple system which has allowed achieving high quality road train motion controlling along a circular trajectory using regulation factors configuration. It's necessary to mind that the law synthesized with the backstepping method has two regulation factors unlike one only when synthesizing according to Lyapunov's direct method and allows better steering fine tuning.

Analyzing of trajectory phase portraits, folding and steering angles, orientation angles as well as transitions quality when changing road train motion speed has been performed for the synthesized laws comparison.

As it's known, two types of automatic steering tracking systems are used: given motion trajectory tracking systems and controlling systems or given curve path following.

In the first case the trajectory sets desired variable conditions changing in the time function and this way the synthesized laws provide an effective solution. In the second case a desired curve path is set (can be set as a combination of straight lines and segments of an R radius circle) in the working space without being a time function.

As system desired folding angles values are definitely related to the hitching point between the tractor truck and the first semitrailer trajectory R radius of curvature value, a law is also synthesized for following a curve path set with its own radius, and here in border-line cases (radius going to infinity or desired folding angle to zero) a straight line motion is received.

Key words: road train, backstepping, controller, non-holonomic system, A. M. Lyapunov's direct method, reverse motion, robot train, steering law synthesis, an "on-axle hitching" model, Maple.

ВВЕДЕНИЕ

Автопоезда, состоящие из тягача и пассивных полуприцепов, относятся к классу нелинейных, неголономных, структурно неустойчивых (при реверсном движении) динамических систем. Задача управления их движением (обратным ходом) является актуальной как с точки зрения теории, так и с точки зрения практической реализации программного движения с заданными ограничениями.

При движении реверсом, без надлежащего управляющего воздействия, звенья автопоезда будут «выдавливать» друг друга, что сопровождается неограниченным ростом углов складывания (явление, известное как *jackknifing*), в то время, как при движении вперед полуприцепы будут «отслеживать» курсовой угол тягача. Поэтому в настоящее время автономные системы грузоперевозок являются объектом многочисленных исследовательских проектов, среди которых можно выделить работы по синтезу законов управления для реверсного движения таких систем.

Задача об управлении движением автопоезда с несколькими полуприцепами в предположении реализации неголономных связей (отсутствии бокового проскальзывания опорных колес) имеет большое теоретическое и прикладное значение. Исследования в этой области стимулируются многочисленными прикладными задачами.

Необходимо отметить, что работы в этом направлении активно ведутся за рубежом, особенно в последние годы. При этом для синтеза законов управления используется разнообразный математический аппарат: предлагаются методы управления и планирования движения такой системы, обусловленные исключительно геометрическими особенностями ее кинематики, сформулированными в каскадной форме [2], применение аппарата алгебр Ли [3, 4], нечеткой логики (*fuzzy logic*) [5], использование каскадной стратегии управления (VFO) [6], применение линейно-квадратичных контроллеров [7], нильпотентной аппроксимации [8] и прочее. Выполнен качественный анализ таких систем [9]. При этом, как правило, рассматриваются не только общие случаи решения проблемы управления, но и частные – для системы из одного и двух полуприцепов.

Главной целью исследования является синтез законов управления колесным модулем автопоезда при движении реверсом, обеспечивающих движение автопоезда в заданном коридоре. Последнее достигается наложением ограничений на величины углов складывания между звеньями автопоезда.

В исследовании синтез закона управления проведен на основе метода функций А. М. Ляпунова (Ляпунова) и метода бэкстеппинга [10, 11]. При выборе функции Ляпунова были использованы результаты, полученные в процессе бэкстеппинга. Заметим, что прямой метод Ляпунова уже был успешно применен для синтеза закона управления с одним полуприцепом [1], однако метод бэкстеппинга, в силу рекурсивной природы алгоритма, очевидно, более эффективен при синтезе управления в случае наличия нескольких полуприцепов.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В основе математической модели управляемого движения сочлененного автопоезда реверсом лежат классические положения механики системы твердых тел (с учетом наличия неголономных связей). Задача синтеза программного управляемого движения решалась на основе строго обоснованных подходов теории автоматического управления и контроля динамических систем; корректность полученных результатов проверялась на основе независимого численного моделирования системы, а именно:

- рассматривается кинематическая модель трехзвенного автопоезда с неголономными связями (отсутствие поперечных проскальзываний колесной системы);
- для стабилизации движения реверсом такой системы используются методы функций Ляпунова (второй метод Ляпунова) в сочетании с методом бэкстеппинга, который также опирается на метод функций Ляпунова;
- свойство устойчивости рассмотрено с точки зрения определения устойчивости по А. М. Ляпунову [13];
- при реализации метода бэкстеппинга необходимые символьные вычисления были проведены в среде Maple;
- численное моделирование (интегрирование) уравнений управляемого движения модели автопоезда также проведено в среде Maple.

Эмпирическое исследование заключалось в реализации управляемого движения масштабной физической модели, регистрации углов складывания и управляющего воздействия, что позволило выполнить оптимальную настройку регуляторов для обоих законов управления.

2. СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Кинематическая модель системы

Рассмотрим систему, состоящую из тягача с двумя пассивными полуприцепами, соединенными по модели «on-axle hitching», кинематическая схема которой изображена на рис. 1 [7].

Здесь $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – ориентационные углы объектов системы, L_1, L_2, L_3 – их линейные размеры, φ – управление (угол поворота рулевых колес тягача). Введем обозначения: $\gamma_1 = \theta_1 - \theta_2$ – угол складывания между тягачом и первым полуприцепом, $\gamma_2 = \theta_2 - \theta_3$ – угол складывания между полуприцепами. На эти углы накладываются ограничения $|\gamma_i| < \pi/2$, ограничения на угол φ определяются техническими возможностями управления.

Согласно этой схеме, дополним использованную для системы тягач-полуприцеп систему дифференциальных уравнений [1] последним уравнением (производная угловой скорости второго полуприцепа):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v \cdot \cos(\theta_1), \\ \dot{y}_1 &= v \cdot \sin(\theta_1), \\ \dot{\theta}_1 &= v \cdot \tan(\varphi)/L_1, \\ \dot{\theta}_2 &= v \cdot \sin(\gamma_1)/L_2, \\ \dot{\theta}_3 &= v \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2)/L_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где $v < 0$ – линейная скорость тягача.

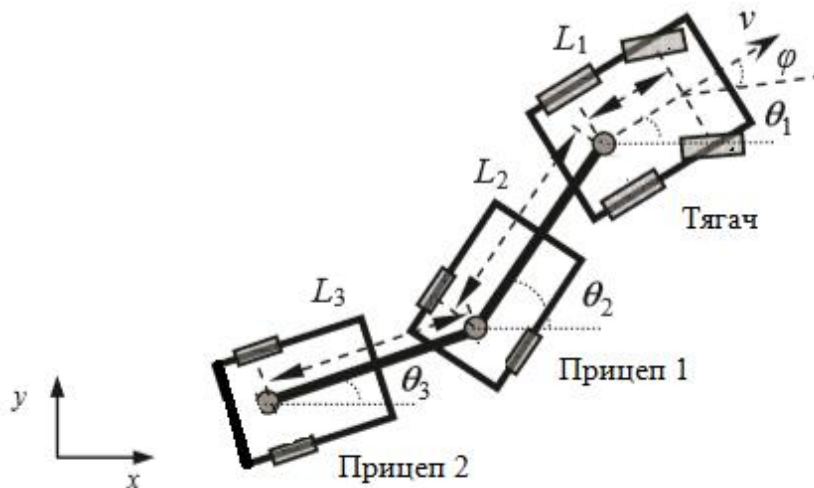


Рис. 1. Кинематическая схема системы

2.2. Синтез закона управления по методу бэкстеппинга

Синтезируем сначала закон управления по методу бэкстеппинга – с помощью рекурсивной процедуры, в которой совмещены задачи нахождения функции Ляпунова и соответствующего закона управления. Алгоритм бэкстеппинга заключается в том, чтобы сделать каждый интегратор объекта устойчивым путем добавления обратной связи, вычисленной по алгоритму [11, 12].

Обозначим желаемый угол складывания между полуприцепами как γ_{2ref} , при этом тот же угол, между тягачом и полуприцепом, может быть вычислен путем следующих рассуждений: при стационарном круговом движении ($\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$) все звенья автопоезда имеют одинаковую угловую скорость вращательного движения относительно вертикальной оси. Приравняв правые части двух последних уравнений системы (1), получим $\gamma_{1ref} = \arctan(L_2 \sin(\gamma_{2ref})/L_3)$.

Определим ошибку слежения $e_1 = \sin(\gamma_{2ref}) - \sin(\gamma_2)$ из последнего уравнения (1) и выберем функцию Ляпунова:

$$V_1 = e_1^2/2. \tag{2}$$

Вычислим ее производную, подставив необходимые выражения из системы (1):

$$\dot{V}_1 = -v(\sin(\gamma_{2ref}) - \sin(\gamma_2)) \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot (\tan(\gamma_1)/L_2 - \sin(\gamma_2)/L_3). \tag{3}$$

Выберем новую переменную в виде:

$$e_2 = \tan(\gamma_1)/L_2 - \sin(\gamma_2)/L_3 + k_1 \cdot e_1 \tag{4}$$

с коэффициентом $k_1 > 0$ и новую функцию Ляпунова (в соответствии с алгоритмом бэкстеппинга) в виде:

$$V_2 = V_1 + e_2^2/2. \quad (5)$$

Дифференцируя эту функцию и полагая из вышеприведенных соображений:

$$e_2 = v \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot (\sin(\gamma_{2ref}) - \sin(\gamma_2)) - k_2 \cdot e_2, \quad (6)$$

где $k_2 > 0$.

Продифференцируем выражение (4) и приравняем его правую часть с правой частью уравнения (6), в результате получим соотношение для определения закона управления углом поворота рулевого колеса:

$$\begin{aligned} \varphi = -\arctg \left(\left(L_1 \cdot \left(L_2^2 \cdot \left((L_3^2 + L_3 + 1) \cdot \sin(\gamma_2) - \sin(\gamma_{2ref}) \cdot L_3^2 \right) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot v \cdot \cos^3(\gamma_1) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - L_3 \cdot L_2 \cdot \left(v \cdot \sin(\gamma_1) \cdot (L_3 + 1) \cdot \cos(\gamma_2) + L_2 \cdot k_2 \cdot \left((L_3 \cdot k_1 + 1) \cdot \sin(\gamma_2) - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \sin(\gamma_{2ref}) \cdot L_3 \cdot k_1 \right) \right) \cdot \cos^2(\gamma_1) + L_2 \cdot L_3^2 k_2 \right) \cdot \sin(\gamma_1) \cdot k_2 \cdot \cos(\gamma_1) - \right. \\ \left. - L_3^2 \cdot \sin(\gamma_1) \cdot v \right) / \left(L_2 \cdot L_3^2 \cdot v \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференцирование отдельных выражений и определение закона управления (угла φ) выполнено с использованием системы Maple.

При этом структура сценария на внутреннем языке системы Maple имеет модульную структуру: синтез закона управления в символьном виде, запись СДУ, ввод данных, численное интегрирование, отображение фазовых портретов.

2.3. Синтез закона управления по прямому методу Ляпунова

Для прямого метода Ляпунова параметры его функции выберем, воспользовавшись результатами бэкстеппинга:

$$V = (e_1^2 + e_2^2)/2, \quad (8)$$

где e_1 – собственно, выражение для бекстеппинга и

$$e_2 = \tan(\gamma_1)/L_2 - \sin(\gamma_2)/L_3 \quad (9)$$

из выражения (4).

Вычислим соответствующие производные по правилам дифференцирования сложной функции с учетом значений производных ориентационных углов в (1):

$$\dot{e}_1 = -v \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot e_2, \quad (10)$$

$$\dot{e}_2 = -v \cdot \left((1 + \tan^2(\gamma_1)) \cdot \left(\sin(\gamma_1)/L_2 - \tan(\varphi)/L_1 \right) + \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot e_2 \right). \quad (11)$$

При этом в производной (10) можно явно выделить выражение для e_2 . Искомое управление входит в (11).

Подстановка (10) и (11) в производную функции Ляпунова приводит к результату (11):

$$\begin{aligned} \dot{V} = -v \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot e_1 \cdot e_2 + \\ + \left(-v \cdot \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \cdot e_2/L_3 - \left(1 + \tan^2(\gamma_1) \right) \cdot v \cdot \left(\sin(\gamma_1)/L_2 - \tan(\varphi)/L_1 \right) / L_2 \right) \cdot e_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Вынося за скобки в (11) $v \cdot e_2$ и полагая выражение в скобках равным $k \cdot e_2$, решим это уравнение относительно искомого управления – угла φ . Синтезированный таким образом закон управления имеет вид:

$$\varphi = \arctg \left(\left(\cos(\gamma_2) \cdot L_2^2 \cdot (L_3 \cdot e_1 + e_2) \cdot \cos^3(\gamma_1) + L_2^2 \cdot L_3 \cdot k \cdot e_2 \cdot \cos^2(\gamma_1) + \sin(\gamma_1) \cdot L_3 \right) \cdot L_1 / (L_2 \cdot L_3) \right). \quad (13)$$

Синтезированный по этому методу закон управления содержит один регулирующий коэффициент $k > 0$ для выполнения условия отрицательной полуопределенности производной функции Ляпунова:

$$\dot{V} = k \cdot v \cdot e_2^2 \leq 0, \quad (14)$$

$k \cdot v \cdot e_2^2 \leq 0$, поскольку скорость отрицательна.

2.4. Синтез закона для реализации движения автопоезда по заданной маршрутной кривой

Как известно, для управления транспортными средствами находят применение два типа следящих систем автоматического управления: системы слежения за заданной траекторией движения («trajectory tracking») и системы управления для следования по заданной маршрутной кривой («path following»).

В первом случае траектория задает желаемое изменение переменных состояний в функции времени и, таким образом, синтезированные законы успешно ее решают. Во втором случае задается желаемая маршрутная кривая (может задаваться в виде комбинации прямых и дуг окружности радиуса R) в рабочем пространстве, не являющаяся функцией времени.

Значения γ_{1ref} , γ_{2ref} однозначно связаны с величиной R_1 – радиусом кривизны траектории точки сцепки между тягачом и первым полуприцепом ($1/R_1 = \operatorname{tg}(\varphi_{ref})/L_1$): $\sin(\gamma_{1ref}) = L_2 \cdot \operatorname{tg}(\varphi_{ref})/L_1$; $\sin(\gamma_{2ref}) = L_3 \cdot \operatorname{tg}(\gamma_{1ref})/L_2$. Радиус окружности, по которой будет двигаться центр каждой опорной оси полуприцепа, определяется соотношением $1/R_i = \operatorname{tg}(\gamma_{iref})/L_i$ ($i = 2, 3$).

Результаты численного моделирования подтверждают справедливость приведенных выше формул: вычисленные по этим формулам соответствующие радиусы и их значения, полученные из фазовых траекторий, совпадают с точностью до десятых долей процента.

Таким образом, задавая радиус кривизны R_1 траектории движения точки сцепки между тягачом и первым полуприцепом, можно вычислить значение необходимого угла складывания для любого из синтезированных выше законов по формуле $\gamma_{2ref} = \arcsin(L_3/\sqrt{R_1^2 - L_2^2})$. Если задать радиус окружности, по которой будет двигаться центр опорной оси второго полуприцепа, получим выражение $\gamma_{2ref} = \arctg(L_3/R_3)$.

Примеры реализации предлагаемого закона управления для различных значений R_1 и R_3 представлены ниже (рис. 2, 3).

На представленных рисунках 2 и 3 R_1 – заданный радиус, R_c – вычисленный радиус, γ_{2ref} – вычисленный угол складывания между полуприцепами.

Хотя параметры установившегося движения неголономной модели автопоезда формально не зависят от величины продольной составляющей скорости тягача (особенность неголономной

постановки), на практике эта скорость должна быть порядка 1 м/с, чтобы не нарушались условия отсутствия поперечного проскальзывания опорных колес.

При этом следует иметь в виду, что при $R \rightarrow \infty$ или $\gamma_{2ref} \rightarrow 0$ движение автопоезда будет стремиться к прямолинейному.

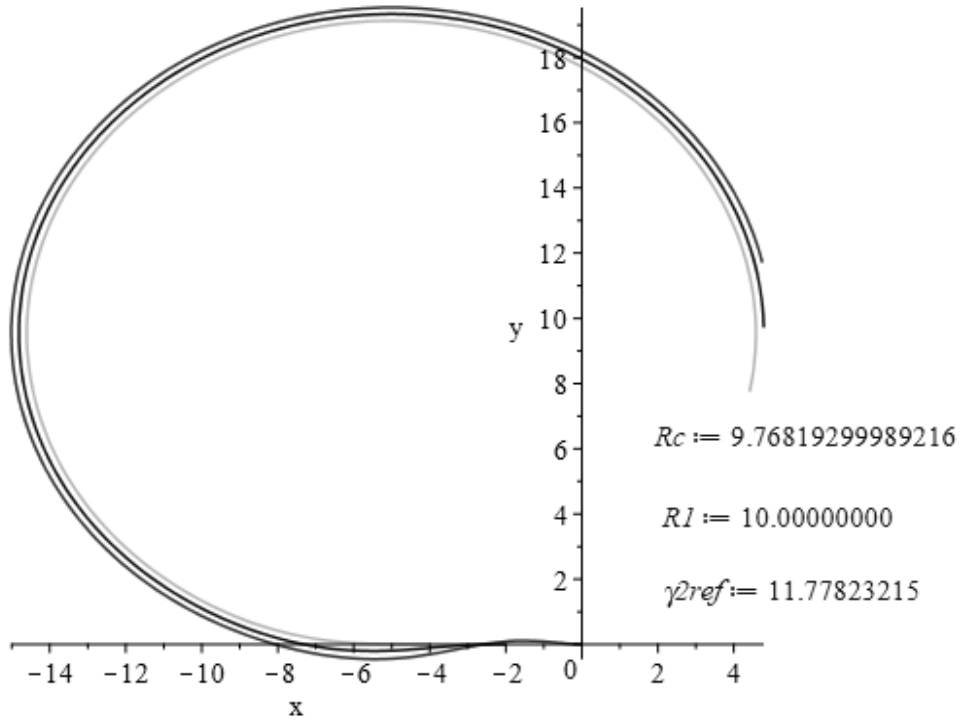


Рис. 2. Траектория движения автопоезда при заданном радиусе кривизны траектории точки сцепки между тягачом и первым полуприцепом

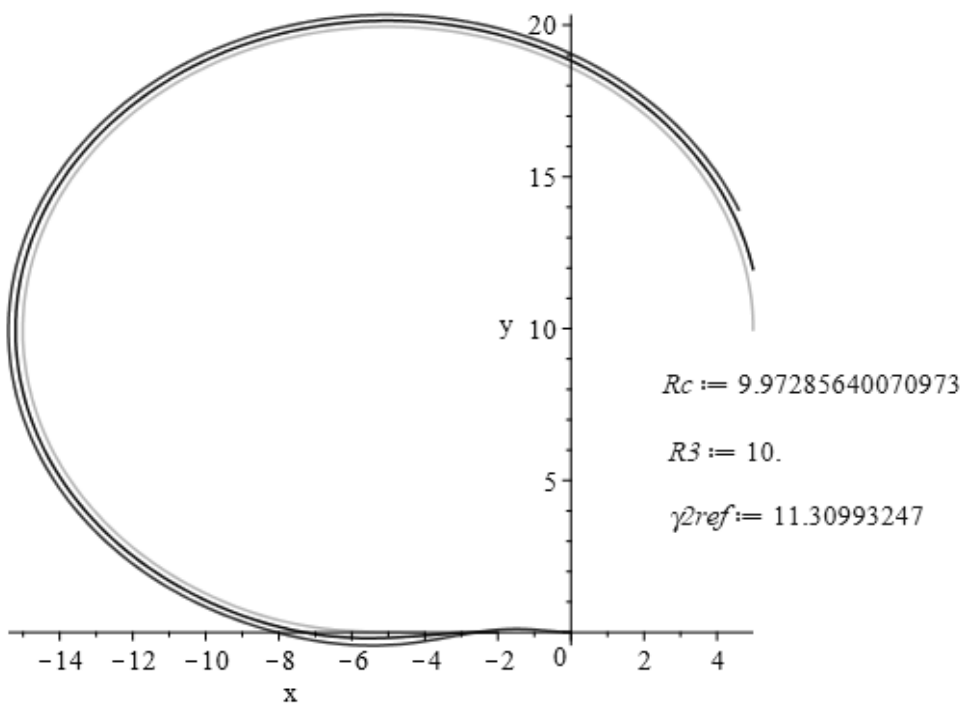


Рис. 3. Траектория движения автопоезда при заданном радиусе окружности, по которой будет двигаться центр опорной оси второго полуприцепа

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При начальных условиях (условия Коши для СДУ), равных ориентационным углам тягача и полуприцепов, равных соответственно $0, \pi/10$ и $-\pi/5 -\pi/5$, получены фазовые портреты их траекторий движения (рис. 4).

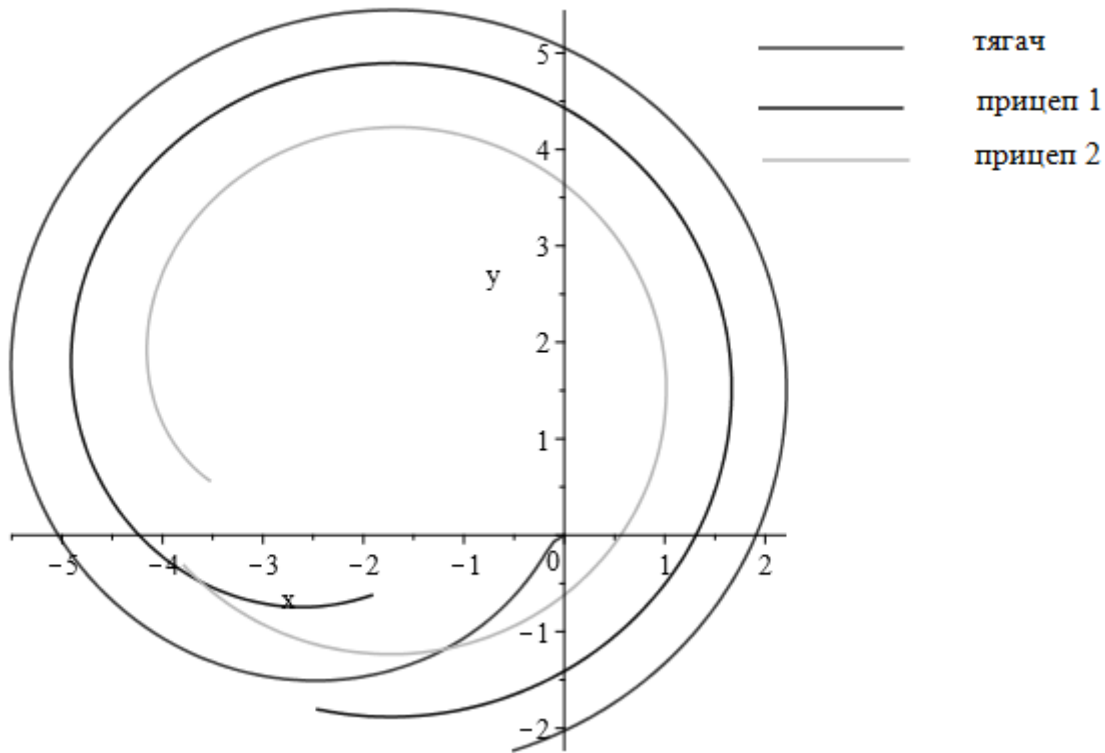


Рис. 4. Траектории движения тягача и прицепов

Траектория тягача получена как результат численного интегрирования (1), а координаты траектории полуприцепов вычислены исходя из голономных связей:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 - L_2 \cdot \cos(\theta_2), \\
 y_2 &= y_1 - L_2 \cdot \sin(\theta_2), \\
 x_3 &= x_1 - L_2 \cdot \cos(\theta_2) - L_3 \cdot \cos(\theta_3), \\
 y_3 &= y_1 - L_2 \cdot \sin(\theta_2) - L_3 \cdot \sin(\theta_3).
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

При этом углы складывания асимптотически сходятся к требуемым (желаемый – 36° , вычисленный – $\sim 30.45^\circ$), что изображено на рис. 5 и 6.

Для численного моделирования желаемый угол складывания для второго прицепа задан значением $\pi/5$, длины тягача и полуприцепов, соответственно – 1, 2 и 2 м при скорости –1 м/с. Коэффициенты для бэкстеппинга $k_1=0,4, k_2=10$, для Ляпунова – $k=2$. С этими параметрами достигается приемлемое практически одинаковое управление, показанное на рис. 7.

При этом уравнение асимптоты $\varphi_{ref} = \arctg(L_1 \sin(\gamma_{1ref})/L_2)$ (рис. 7) получено из условия равенства производных по ориентационным углам тягача и первого прицепа из уравнения (1).

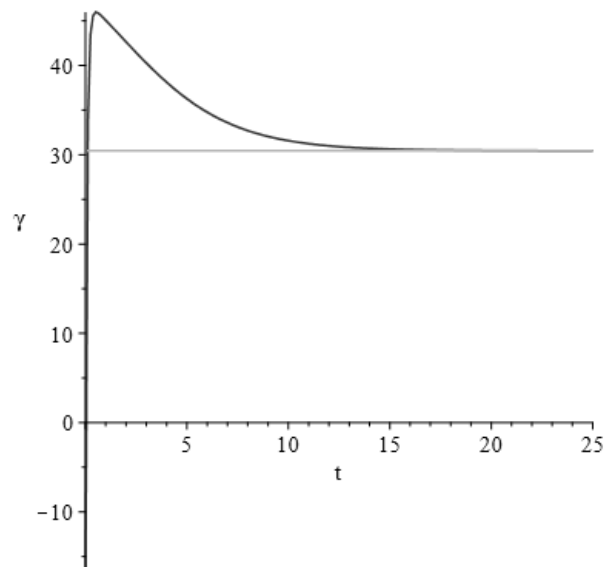


Рис. 5. Стабилизация угла складывания между тягачом и полуприцепом

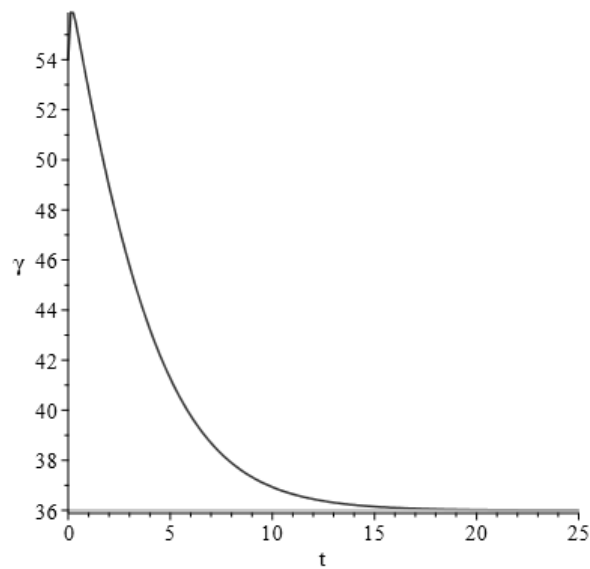


Рис. 6. Стабилизация угла складывания между полуприцепами

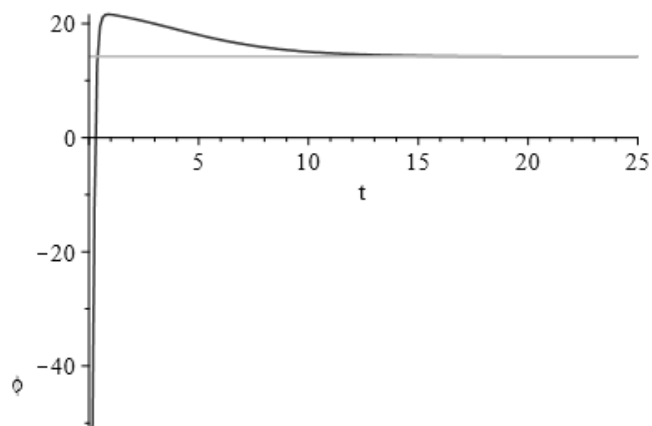


Рис. 7. Динамика изменения управления автопоездом

Исследование переходных процессов при различных скоростях показало, что с увеличением модуля скорости они носят характер затухающих колебаний. На рис. 8 изображен такой процесс для угла складывания между прицепом и тягачом при скоростях $v = -1$ м/с и $v = -15$ м/с.

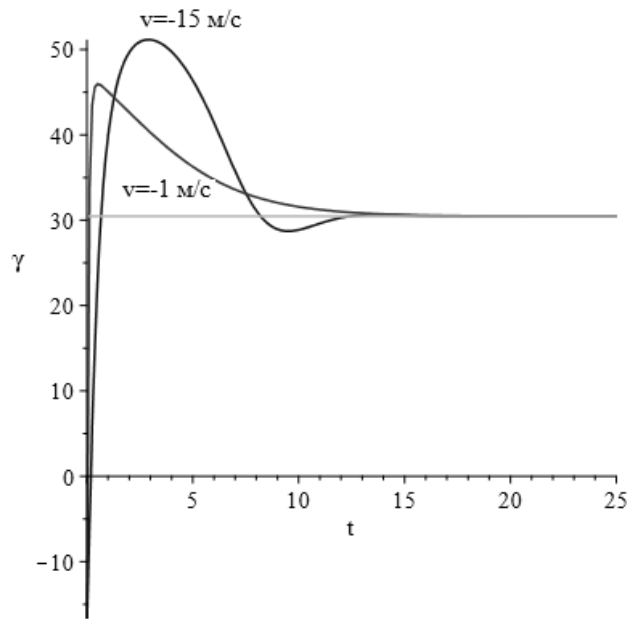


Рис. 8. Динамика изменения угла складывания между прицепом и тягачом при различных скоростях

ВЫВОДЫ

1. Выполнен обзор существующих комплексов теоретических и эмпирических методов, сочетание которых дает возможность с наибольшей достоверностью исследовать изучаемый объект с целью выбора оптимального математического аппарата, для достижения цели – синтеза законов управления для реверсного движения автопоезда.
2. Реализован синтез таких законов с использованием метода бэкстеппинга и прямого метода Ляпунова, с применением системы Maple для выполнения промежуточных расчетов и численного интегрирования системы дифференциальных уравнений.
3. Разработана возможность сравнения фазовых портретов при применении различных законов управления с возможностью тонкой настройки их регуляторов и, как следствие этого, получено оптимальное управление для обоих законов.
4. Синтезирована система управления для следования автопоезда по маршрутной кривой, заданной радиусом ее кривизны.

Практическая ценность данного исследования состоит в том, что синтезированные законы управления уже сейчас можно применить для программного управления роботопоездом – такая робототехническая установка находится в стадии реализации.

Предметом дальнейших исследований будет синтез законов управления для обеспечения стабильного прямолинейного движения с заданным ориентационным углом с целью создания машины Дубинса для решения задачи достижения цели, а также разработка соответствующих контроллеров для «off-axle hitching» модели сцепки (с выносом). Также применение метода бэкстеппинга, очевидно, позволит выполнить синтез управления для системы с большим количеством полуприцепов.

Благодарности

Вербицкому Владимиру Григорьевичу, д. ф.-м. н.

Мальшу Евгению Николаевичу

ЛИТЕРАТУРА

1. Tatievskiy D. N. The synthesis of steering rules for stabilizing road train reverse motion to solve the task of reaching a set goal. *Technology Transfer: fundamental principles and innovative technical solutions*. 2017. URL: [www.google.com/url?q=http://eu-jr.eu/tfipits/article/download/482/459&sa=](http://eu-jr.eu/tfipits/article/download/482/459)

- U&ved=0ahUKEwj9lbrCrITZAhUJhaYKHfshDMcQFggYMAE&usg=AOvVaw3VTgy9M9_z1DKwW2jjahsJ.
2. Michalek M. Tracking control strategy for the standard N-trailer mobile robot – geometrically motivated approach. Poland, Poznan University of Technology (PUT). URL: <http://etacar.put.poznan.pl/maciej.michalek/PublikacjePliki/MyT3ONTrackingVFORoMoCo.pdf>.
 3. Rouchon P., Fliess M., L'evine J., Martin P. Flatness and motion planning: the car with n trailers. France, Decision and Control. URL: <http://cas.ensmp.fr/~rouchon/publications/PR1993/ECC93.pdf>.
 4. Richard M., Shankar Sastry S. Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids. *IEEE Transactions on automatic control*. 1993. Vol. 38, № 5. P. 700–716. URL: <https://authors.library.caltech.edu/7315/1/MURieetac93.pdf>.
 5. Cheng J., Wang B., Zhang Y., Xu Y. Backward Path Tracking Control for Mobile Robot with Three Trailers. China, School of Electrical Engineering, University of Jinan. URL: http://www.uni-obuda.hu/users/szakala/SMC%202016%20pendrive/1030_smc2016.pdf.
 6. Maciej M. Application of the VFO method to set-point control for the N-trailer vehicle with off-axle hitching. Poland, *International Journal of Control*. 2012. Vol. 85. P. 502–521. URL: <http://etacar.put.poznan.pl/maciej.michalek/PublikacjePliki/MyT3ONTrackingVFORoMoCo.pdf>.
 7. Evestedt N., Ljungqvist O., Axehill D. Motion planning for a reversing general 2-trailer configuration using Closed-Loop. *RRT, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2016. P. 3690–3697. URL: <https://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1066727/FULLTEXT01.pdf>.
 8. Ardentov A. A. Controlling of a mobile robot with a trailer and its nilpotent approximation. Russia, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, 152020, Program Systems Institute of RAS. URL: <https://arxiv.org/pdf/1612.01344.pdf>.
 9. Мартынюк А. А., Никитина Н. В. О качественном анализе одной модели транспортных машин. *Прикладная механика*. 2018. № 2. С. 110–115.
 10. Ojha A. V., Khandelwal A. Control of non-linear system using backstepping. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. URL: <http://esatjournals.net/ijret/2015v04/i05/IJRET20150405111.pdf>.
 11. Bouadi H., Mora-Camino F. Adaptive Backstepping for Trajectory Tracking of Nonlinearly Parameterized Class of Nonlinear Systems. *International Symposium on Computational Intelligence and Informatics*. URL: <https://hal.inria.fr/file/index/docid/938519/filename/338.pdf>.
 12. Чебыкин Д. В. Backstepping – метод синтеза управления для нелинейных объектов. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Информационные технологии, телекоммуникации и системы управления». 2015. С. 248–254. URL: http://elar.ufr.ru/bitstream/10995/31024/1/ittisu_2015_41.pdf.
 13. Ляпунов А. М. Собрание трудов: в 6 т. Москва: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2.

REFERENCE

1. Tatievskiy, D. N. (2017). The synthesis of steering rules for stabilizing road train reverse motion to solve the task of reaching a set goal. Technology Transfer: fundamental principles and innovative technical solutions. Retrieved from www.google.com/url?q=http://eu-jr.eu/ttfpits/article/download/482/459&sa=U&ved=0ahUKEwj9lbrCrITZAhUJhaYKHfshDMcQFggYMAE&usg=AOvVaw3VTgy9M9_z1DKwW2jjahsJ.
2. Michalek, M. Tracking control strategy for the standard N-trailer mobile robot – geometrically motivated approach. Poland, Poznan University of Technology (PUT). Retrieved from <http://etacar.put.poznan.pl/maciej.michalek/PublikacjePliki/MyT3ONTrackingVFORoMoCo.pdf>.
3. Rouchon, P., Fliess, M., L'evine, J. & Martin, P. Flatness and motion planning: the car with n trailers. France, Decision and Control. Retrieved from <http://cas.ensmp.fr/~rouchon/publications/PR1993/ECC93.pdf>.
4. Richard, M. & Shankar Sastry, S. (1993). Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids. *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 38, No. 5, pp. 700-716. Retrieved from <https://authors.library.caltech.edu/7315/1/MURieetac93.pdf>.
5. Cheng, J., Wang, B., Zhang, Y. & Xu, Y. Backward Path Tracking Control for Mobile Robot with Three Trailers. China, School of Electrical Engineering, University of Jinan. Retrieved from http://www.uni-obuda.hu/users/szakala/SMC%202016%20pendrive/1030_smc2016.pdf.

6. Maciej, M. (2012). Application of the VFO method to set-point control for the N-trailer vehicle with off-axle hitching. Poland, International Journal of Control, Vol. 85, pp. 502-521. Retrieved from <http://etacar.put.poznan.pl/maciej.michalek/PublikacjePliki/MyT3ONT rackingVFORoMoCo.pdf>.
7. Evestedt, N., Ljungqvist, O. & Axehill, D. (2016). Motion planning for a reversing general 2-trailer configuration using Closed-Loop. RRT, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), pp. 3690-3697. Retrieved from <https://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1066727/FULLTEXT01.pdf>.
8. Ardentov, A. A. Controlling of a mobile robot with a trailer and its nilpotent approximation. Russia, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, 152020, Program Systems Institute of RAS. Retrieved from <https://arxiv.org/pdf/1612.01344.pdf>.
9. Martynyuk, A. A. & Nikitina, N. V. (2018). About qualitative analysis of one model of transport vehicles. Applied mechanics, No. 2, pp. 110-115.
10. Ojha, A. V. & Khandelwal, A. Control of non-linear system using backstepping. International Journal of Research in Engineering and Technology. Retrieved from <http://esatjournals.net/ijret/2015v04/i05/IJRET20150405111.pdf>.
11. Bouadi, H. & Mora-Camino, F. Adaptive Backstepping for Trajectory Tracking of Nonlinearly Parameterized Class of Nonlinear Systems. International Symposium on Computational Intelligence and Informatics. Retrieved from <https://hal.inria.fr/file/index/docid/938519/ filename/338.pdf>.
12. Chebykin, D. V. (2015). Backstepping – method of control synthesis for nonlinear objects. International conference of students, graduate students and young scientists “Information technology, telecommunications and management systems”, pp. 248-254. Retrieved from http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/31024/1/ittisu_2015_41.pdf.
13. Lyapunov, A. M. (1956). Collection of works in 6 volumes. Moscow: Izd-vo AN SSSR. Vol. 2.

УДК 004.942: 519.6

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-14

ОГЛЯД МЕТОДІВ ГЕНЕРАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

¹Халанчук Л. В., аспірант, ²Чопоров С. В., к. т. н., доцент

¹Таврійський державний агротехнологічний університет,
просп. Б. Хмельницького, 18, м. Мелітополь, 72300, Україна

^{1,2}Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua

У статті проведено огляд актуальних методів побудови структурованих і блочно-структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів. Наведено визначення дискретної моделі (сітки) геометричного об'єкта, її типів та різновидів. Описано загальну послідовність кроків, необхідних для генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів, рівняння і теорії, на основі яких будуються сітки, спеціальні програмні засоби для генерації сіток.

Наведено визначення та канонічні форми еліптичного, параболічного та гіперболічного типів диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку. Описано алгебраїчні, еліптичні та гіперболічні методи побудови структурованих сіток, розглянуто чисельні методи на прикладі методу скінченних різниць.

Розглянуто приклади побудови структурованої сітки аеродинамічної форми NASA0012 крила літака, що розроблені за допомогою Національного консультативного комітету з авіації (NASA), для рівняння Пуассона з різними значеннями параметрів. Визначено переваги і недоліки структурованих сіток. Наведено широке коло практичного застосування методів генерації дискретних моделей.

Ключові слова: дискретна модель, структурована сітка, блочно-структурована сітка, диференціальні рівняння, еліптичний метод, гіперболічний метод.

REVIEW OF DISCRETE MODELS OF GEOMETRIC OBJECTS GENERATION METHODS

¹Khalanchuk L. V., postgraduate, ²Choporov S. V., PhD in Engineering

¹Tavria State Agrotechnological University,
B. Khmelnytskii av., 18, Melitopol, 72300, Ukraine

^{1,2}Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66., Zaporizhzhia, 69600, Ukraine

larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua

Computer simulations have been widely employed in modern engineering. Such simulations allow to emulate a physical system using numerical analysis. Typical engineering problems employ structural analysis, heat transfer, fluid flow, etc. These problems generally require the solution to boundary value problem for partial differential equations. The numerical solution of a boundary value problem involves dividing the domain of the problem into a collection of subdomains (a discrete model). Generally, a discrete model of a geometric object (aka mesh or grid) is a tessellation of a part of the Euclidean space by simple shapes such as, triangles, quadrilaterals, tetrahedra, hexahedra, etc. There are exists two classes of meshes: structured and unstructured. Structured grids (opposite to unstructured) are identified by regular connectivity. Each element in the structured grid can be addressed by an index. Structured grids typically have the higher degree of quality, better convergence, and require less computational memory. Structured data also allows the use of solution algorithms which are not possible to implement on unstructured data.

The objective of this article is to study methods and approaches for an automatic generation of structured discrete models of geometric objects.

The article is a review of the most useful methods for the automatic generation of structured and block-structured discrete models of geometric objects. Initially, possible applications of structured grids have been described. In the next section, applications of elliptic, hyperbolic, and parabolic equations for structured grid generation have been studied. The most efficient numerical methods for mesh generation have been also reviewed. In the final section, some engineering applications of structured grids have been discussed.

Key words: discrete model, structured grid, block-structured grid, differential equations, elliptic method, hyperbolic method.

ВСТУП

На сьогоднішній день в інженерних додатках одне із провідних місць займають дослідження, які виконуються із застосуванням комп'ютерного моделювання різноманітних реальних процесів, оскільки комп'ютерне моделювання за своїми витратами в багато разів економічно вигідніше ніж побудова фізичної моделі. Сучасні проекти мають все більш складний характер, оскільки використовують моделі, які складаються з досить великої кількості компонентів і зв'язків між ними. Математичне моделювання процесів у таких конструкціях має певні труднощі, пов'язані зі складністю геометричної форми відповідних областей.

Дискретною моделлю геометричного об'єкту (сіткою) називають множину точок, що розподілені в досліджуваній області, разом зі зв'язками між цими точками. Дискретна модель геометричного об'єкта замінює вихідну неперервну область скінченною множиною простих фігур [45]. В залежності від розмірності простору дискретні моделі складаються з різних типів елементів:

- одновимірні (відрізки, дуги кривих);
- двовимірні (трикутники, чотирикутники);
- тривимірні (тетраедри, призми, шестигранники).

Розрізняють структуровані та неструктуровані сітки (рис. 1). Неструктуровані сітки визначаються звичайним набором вузлів. Логічний зв'язок між вузлами сітки визначається довільним чином, тобто кожен вузол може мати довільну кількість «сусідів». На відміну від неструктурованої сітки в структурованій всі внутрішні вершини топологічно еквівалентні

між собою. Наприклад, чотирикутні структуровані сітки топологічно еквівалентні стандартним прямокутним сіткам.

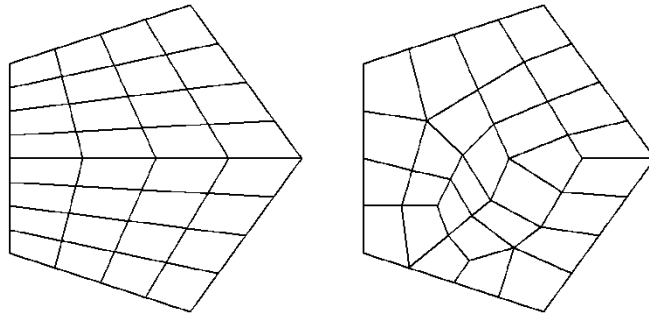


Рисунок 1. Структурована (ліворуч) і неструктурована (праворуч) сітки

Структурована сітка відрізняється від неструктурованої тим, що вона:

- накладає обмеження на форму елементів, структуру їхнього розміщення і на геометричну модель;
- потребує витратити більше часу людини-розробника, але менше часу розрахунку обчислювальної техніки;
- розрахунковий алгоритм не змінюється при подальшому подрібненні сітки, змінюється лише крок сітки.

Огляд актуальних підходів і методів автоматичної генерації неструктурованих сіток (дискретних моделей геометричних об'єктів), зокрема аналіз методів генерації дискретних моделей з використанням трикутних або тетраедричних елементів, а також чотирикутних або шестигранних скінченних елементів, наведено в роботі [7].

Метою даної роботи є аналіз актуального стану проблеми автоматичної побудови структурованих дискретних моделей (сіток) геометричних об'єктів.

Об'єкт дослідження – структуровані та блочно-структуровані сітки для геометричних моделей.

Предмет дослідження – методи генерації структурованих та блочно-структурованих сіток геометричних моделей.

ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ГЕНЕРАЦІЇ СТРУКТУРОВАНИХ СІТОК

Загальна послідовність кроків, необхідних для генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів така:

1. Геометрія області, яка буде дискретизована, повинна бути визначена, тобто границя області повинна бути описана. Подання геометрії може бути виконано різними шляхами: аналітична форма (сфери, циліндри), сплайни, NURBS (неоднорідні раціональні b-сплайни), методи інтерполяції. Геометрія може бути побудована в системі автоматизованого проектування (САПР) або в системі генерації сіток. Багато САПР використовують аналітичні форми і не дуже добре підходять для створення сіток з потоком, що є проблемним для аналітичного запису, тому багато пакетів генерації сіток забезпечують певний рівень підтримки САПР.
2. Аналіз меж геометричного об'єкта з метою встановлення відповідності між геометричними особливостями (наприклад, зламами) та межовими вузлами структурованої сітки. Для розв'язання цієї задачі з урахуванням подання поверхні часто її необхідно переорієнтувати. Далі для генерації сітки потрібно отримати параметрично гладкі поверхні, щоб точки сітки плавно змінювались по поверхні. Для отримання гладкої поверхні найчастіше використовуються САПР, які гарантують лише геометричну гладкість, але часто не є параметрично гладкими. Параметризація

згладжування поверхні зазвичай включає розв'язок еліптичного рівняння на поверхні.

Зауважимо, що при побудові декартової сітки цей крок не потрібен.

3. Генерація сітки об'єму. Ця процедура істотно відрізняється для різних типів сітки.

Для генерації структурованих сіток використовують різні спеціальні програмні засоби: ANSYS [1, 13], OpenFOAM [6], SPGrid [9], HybMesh [30] тощо.

Генерація структурованих сіток розробляється на основі різних рівнянь і теорій, а саме:

- еліптичні рівняння [9, 16, 34];
- параболічні рівняння [2];
- рівняння еластодинаміки [37];
- рівняння Нав'є-Стокса [10, 19, 22];
- триангуляція [5, 14];
- теорія R-функцій [4-5];
- крива, поверхня, об'єм, екстракція Безьє [8, 15];
- функції Гріна [42].

Розглянемо квазілінійне (лінійне відносно старших похідних) диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку вигляду

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1)$$

де $a_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, 2$, неперервні функції в деякій області \mathbf{G} .

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}(dx)^2 = 0, \quad (2)$$

яке називається характеристичним для рівняння (1), а його інтеграли – характеристиками.

З курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо: якщо $z = \varphi(x, y)$ – деякий розв'язок рівняння (3), тобто

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0, \quad (3)$$

тоді співвідношення $C = \varphi(x, y)$ є загальним інтегралом рівняння (2). Має силу і обернене твердження.

Нехай $a_{11} \neq 0$ ($a_{22} \neq 0$). Тоді із (2) маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}} \right),$$

де $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

Рівняння (1) в області $\mathbf{D} \subset \mathbf{G}$ називається рівнянням

а) *гіперболічного типу*, якщо дискримінант $\Delta > 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbf{D}$, канонічні форми якого можна записати у вигляді

$$U_{\xi\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{2\alpha_{12}}, \quad \alpha_{12} \neq 0,$$

або

$$\bar{U}_{\alpha\alpha} - \bar{U}_{\beta\beta} = F_1(\alpha, \beta, \bar{U}, \bar{U}_\alpha, \bar{U}_\beta);$$

б) *параболічного типу*, якщо $\Delta = 0$ при $(x, y) \in \mathbf{D}$, канонічні форми якого можна записати у вигляді

$$U_{\eta\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{22}}, \quad \alpha_{22} \neq 0;$$

в) *еліптичного типу*, якщо $\Delta < 0$ при $(x, y) \in \mathbf{D}$, канонічні форми якого можна записати у вигляді

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{11}}, \quad \alpha_{11} \neq 0.$$

У випадку лінійних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами одержуємо наступні канонічні форми:

$$\left. \begin{aligned} V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) - \text{еліптичний тип;} \\ V_{\eta\eta} + b_1 V_\xi &= g(\xi, \eta) - \text{параболічний тип;} \\ \left. \begin{aligned} V_{\xi\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) \\ V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} - \text{гіперболічний тип.} \end{aligned}$$

Наведемо деякі приклади побудови структурованої сітки аеродинамічної форми NACA0012 крила літака, що розроблені за допомогою Національного консультативного комітету з аеронавтики (NASA), а параметри в числовому коді можуть бути введені в рівняння для точної генерації поперечного перерізу профілю і обчислення його властивостей.

Розглянемо просту зв'язану обмежену область \mathbf{D} в двовимірному просторі з декартовими координатами $\bar{x} = (x, y)^T$, що розділена на чотири області [47, с. 130].

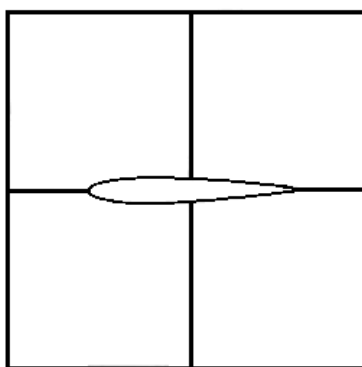


Рисунок 2. Область D поблизу аеродинамічної форми NACA0012

В узагальненому вигляді маємо рівняння Пуассона для генерації структурованої сітки

$$a_{22}\bar{x}_{\xi\xi} - 2a_{12}\bar{x}_{\xi\eta} + a_{11}\bar{x}_{\eta\eta} + (a_{22}P_{11}^1 - 2a_{12}P_{12}^1 + a_{11}P_{22}^1)\bar{x}_\xi + (a_{22}P_{11}^2 - 2a_{12}P_{12}^2 + a_{11}P_{22}^2)\bar{x}_\eta = 0,$$

де 6 коефіцієнтів P_{jk}^i називаються контрольними функціями.

Найпростіший приклад генерації сітки, що має назву лапласової сітки (рис. 3) [47, с. 131], отримаємо за умови, якщо всі 6 контрольних функцій дорівнюють нулю, тобто

$$P_{jk}^i = 0.$$

Тоді маємо наступний вигляд рівняння Пуассона

$$a_{22}\bar{x}_{\xi\xi} - 2a_{12}\bar{x}_{\xi\eta} + a_{11}\bar{x}_{\eta\eta} = 0.$$

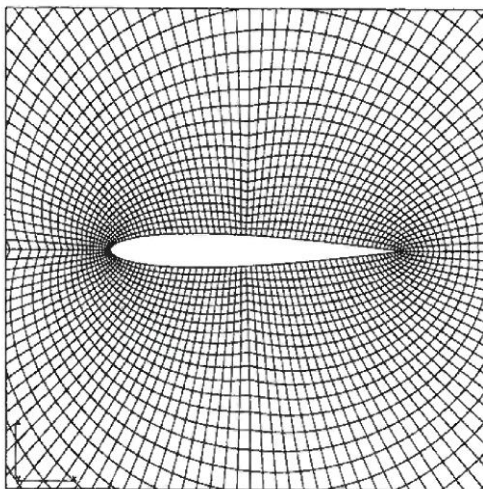


Рисунок 3. Лапласова сітка

Припустимо, що точки граничної сітки задані на чотирьох краях E_1, E_2, E_3, E_4 області \mathbf{D} , тоді сітка всередині цієї області може бути побудована на основі нормованої довжини дуги (рис. 4) [47, с. 133]. Отже, маємо 2 алгебраїчних рівняння для генерації сітки:

$$s = s_{E_3}^a(\xi)(1-t) + s_{E_4}^a(\xi)t,$$

$$t = t_{E_1}^a(\eta)(1-s) + t_{E_2}^a(\eta)s.$$

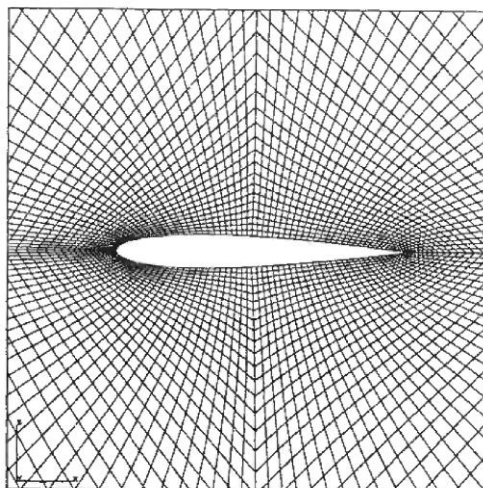


Рисунок 4. Сітка на основі довжини дуги

Якщо накласти граничні умови Дірихле-Неймана, то можна згенерувати сітку всередині області \mathbf{D} , яка буде ортогональна всім чотирьом краям області \mathbf{D} . В цьому випадку для генерації сітки (рис. 5) [47, с. 136] маємо рівняння

$$s = s_{E_3}^0(\xi)H_0(t) + s_{E_4}^0(\xi)H_1(t),$$

$$t = t_{E_1}^0(\eta)H_0(s) + t_{E_2}^0(\eta)H_1(s),$$

де верхній індекс 0 вказує на вимогу ортогональності, а H_0 та H_1 – кубічні функції інтерполяції Ерміта, що визначаються як

$$H_0(s) = (1+2s)(1-s)^2,$$

$$H_1(s) = (3-2s)s^2,$$

$$0 \leq s \leq 1.$$

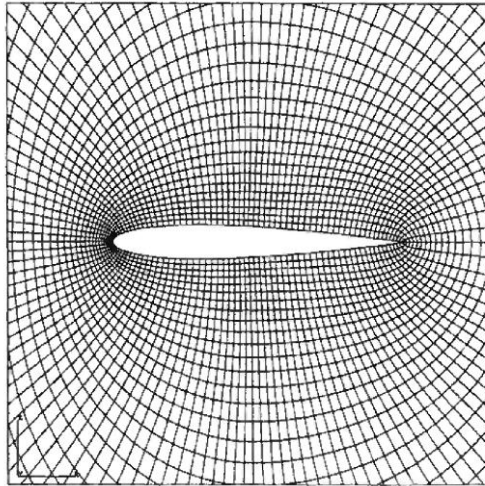


Рисунок 5. Сітка з граничною ортогональністю

Гранична ортогональність робить сітку гладкою по внутрішній межі області.

Різні типи диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку можуть асоціюватися з різноманітними типами гідромеханічних задач. Наприклад, задачі, що містять залежність від часу, зводяться до параболічних або гіперболічних рівнянь. Параболічними рівняннями визначаються течії, що мають дисипацію, наприклад течії, для яких істотною є в'язкість або теплопровідність, в цьому випадку розв'язок буде гладким, а градієнти із плином часу зменшуватимуться, якщо граничні умови не залежать від часу.

Якщо дисипаційні механізми відсутні, для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних розв'язок зберігає сталу амплітуду, а для нелінійних – амплітуда розв'язку може навіть зростати, таким розв'язком характеризуються гіперболічні диференціальні рівняння в частинних похідних. Еліптичні диференціальні рівняння в частинних похідних зазвичай визначають задачі, що описують врівноважений або сталий стан течії. Але деякі сталі процеси також можна описати параболічними (примежовий шар) або гіперболічними рівняннями (нев'язка надзвукова течія) [46].

Найпростіше генерувати ортогональну сітку, оскільки область покривається прямокутною сіткою. Границі області можуть не охоплюватися границями сітки, але адаптивне виправлення може бути використано для покращення поверхні. Отже, необхідне уточнення сітки в двох напрямках для двовимірного випадку, але для тривимірного випадку достатньо встановити сітку в напрямку, перпендикулярному границі. Найчастіше структуровані сітки будують як прямокутні шахові декартові сітки [2, 10-11, 17-18, 23, 25, 28, 32, 36, 41].

В блочно-структурованому методі обчислювальна область розділяється на набір прямокутних блоків, що не перекривають один одного. Далі сітка генерується на кожному блоці окремо. Згладжування на блоках виконується до досягнення певного ступеня неперервності на межі блоків. Розриви у відстані між сітками на межі блоків можуть ускладнити розв'язування.

Найбільш розповсюджені методи генерації сіток відносяться до наступних категорій: алгебраїчні, еліптичні і варіаційні, гіперболічні.

Алгебраїчні методи створюють сітки для внутрішньої області і комбінують алгебраїчне представлення границі. Для трансфінитної інтерполяції використовуються поліноми [8, 26]. Алгебраїчні методи не настільки гнучкі, як інші методи, але генерація цими методами є простою і швидкою.

Еліптичні методи генерації можуть обробляти більш загальні випадки. Вони можуть використовуватися для створення високоякісних сіток, які матимуть бажану гладкість, на доволі складних областях. Розв'язок рівняння Пуассона визначає місцеположення точок сітки. Варіаційний метод також дає еліптичне рівняння, розв'язок якого визначає місцеположення точок сітки. Важливим є вибір функцій управління, які визначають відстань між точками сітки та ортогональність сітки [9, 16, 34].

Гіперболічні методи розв'язують гіперболічну систему рівнянь для генерації сітки від границі області. Зазвичай накладається умова ортогональності ліній сітки. Зазвичай додається згладжування, щоб позбутися передчасного накладання ліній сітки. Зовнішня границя сітки визначається розв'язком рівняння, тому цей метод обмежений для використання в блочно-структурованих сітках, але дуже корисний при покритті сіток.

Під час генерації блочно-структурованої сітки спочатку створюються окремі складові сітки для різних частин геометрії, використовуючи алгебраїчний, еліптичний чи гіперболічний методи. Враховуючи набір складових сіток, визначається, як зробити покриття автоматичним, але може виникнути збій, якщо при покритті не будуть міцними зв'язки між компонентами різних блоків.

Використання методу скінчених різниць для розв'язку диференціальних рівнянь було одним із перших підходів для отримання дискретного представлення тіла. В його основі лежить ідея трансформації сітки, що визначена на одиничному кубі, у потрібну геометрію кубоподібного тіла. Якщо тіло має складну форму, то цю проблему можна розв'язати методами декомпозиції чи блочної декомпозиції, які засновані на ідеї декомпозиції тіла на кубоподібні блоки.

Чисельні методи, що використовуються при генерації структурованих сіток:

- метод скінчених різниць [2, 17, 34, 37];
- метод скінчених елементів [1-3, 14-15, 23, 27, 29, 33];
- метод скінченого об'єму [10-11];
- метод спектральних елементів [26];
- метод FDTD [37].

На практиці застосування генерації структурованих сіток використовується для моделювання широкого кола об'єктів і процесів:

- моделювання об'єктів, матеріалів, деформацій, тріщин [3, 4, 12, 13, 15, 20, 23, 24, 36, 39, 40, 44];
- моделювання аеродинаміки, гідродинаміки, потоків різного походження [2, 10, 11, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 30, 38-40, 42, 43];
- моделювання задач теплопровідності [11, 33, 36, 41];
- моделювання хвиль різної природи [14, 17, 27, 37];
- моделювання магнітостатичної задачі, оцінка електромагнітного поля [26, 42];
- оцінка щільності імпульсу електрона (EMD), його моментів і пов'язаної з ним інформаційної ентропії Шеннона для багатоелектронної молекулярної системи [28];
- дослідження зварювання тертям (FSW) [29];

- дослідження в циклонному дизайні падіння тиску [31];
- співставлення базисного представлення змінної поля над областю в контексті чисельного моделювання і зворотних задач, де неперервне скалярне або векторне поле над областю може бути представлено в різних скінчено вимірних базисних наближеннях, таких як неструктурований базис для чисельного розв'язку прямої задачі і регулярна сітка для представлення розв'язку зворотної задачі [35].

ВИСНОВКИ

В роботі проведено огляд сучасного стану генерації структурованих дискретних моделей, який є продовженням і доповненням попередніх досліджень, що проведені в роботі [45], а саме: описано основні кроки для побудови сітки, які є загальними для багатьох підходів їх автоматичної генерації; розглянуто алгебраїчні, еліптичні і варіаційні, гіперболічні методи генерації структурованих та блочно-структурованих сіток; проаналізовано спеціальні програмні засоби, за допомогою яких відбувається комп'ютерна генерація сіток; описано рівняння і теорії, на основі яких будуються сітки; наведено чисельні методи, що використовуються при генерації сіток; досліджено широке коло об'єктів і процесів, для моделювання якого використовуються структуровані сітки.

Дослідження методів генерації структурованих сіток виявило переваги та недоліки їхнього використання, а саме: переваги – можливість використання більш високого порядку апроксимації і меншої кількості ресурсів обчислювальних машин; недоліки – обмеження на форму елементів, структуру їхнього розміщення і на геометричну модель, адаптація до складних тіл досить трудомістка і є можливість появи вироджених елементів, декомпозицію на блоки можна застосувати для методів, коли блоки та границі можна представити явно, але у випадку надто складної форми тіла декомпозиція майже не застосовується. Популярною є комбінація генерації структурованих та неструктурованих сіток, яка дозволяє використати всі переваги і обмежити недоліки обох видів сіток.

Узагальнюючи результати дослідження, можна зробити висновок, що проведений огляд підтверджує актуальність розробки методів генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів для подальшого чисельного аналізу їх властивостей.

ЛІТЕРАТУРА

1. Басов К. А. ANSYS: справочник пользователя. Москва: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
2. Васильева М. В., Васильев В. И., Красников А. А., Никифоров Д. Я. Численное моделирование течения однофазной жидкости в трещиноватых пористых средах. *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. 2017. Т. 159, Кн. 1. С. 100–115.
3. Левандовский А. Н., Мельников Б. Е., Шамкин А. А. Моделирование пористого материала методом конечных элементов. *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2017. № 2(53). С. 61–77.
4. Литвинова Ю. С., Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. Аналитическая идентификация трехмерных геометрических объектов по информации о форме их сечений. *Проблемы машиностроения*. 2017. Т. 20, № 1. С. 45–51.
5. Лісняк А. О., Чопоров С. В., Гоменюк С. І. Методика візуалізації геометричних об'єктів, описаних за допомогою R-функцій. *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2010. № 1. С. 88–97.
6. Нуриев А. Н., Юнусова А. И., Зайцева О. Н. Моделирование перемещения клиновидного виброробота в вязкой жидкости при различных законах движения внутренней массы в пакете OpenFOAM. *Труды ИСП РАН*. 2017. Т. 29, Вып. 1. С. 101–118.
7. Чопоров С. В., Лісняк А. О., Борисовська Ю. О., Козлова О. С., Снежкова Л. С. Методи побудови дискретних моделей: неструктуровані сітки. *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 2. С. 237–250.

8. Яцук Ю. В. Построение расчетных сеток для решения уравнений математической физики методом «объемов Безье». *Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология*. 2009. № 1. С. 116–120.
9. Aanjaneya M., Gao M., Liu H., Batty C., Sifakis E. Power Diagrams and Sparse Paged Grids for High Resolution Adaptive Liquids. *ACM transactions on graphics*. 2017. Vol. 36, No 4. DOI: 10.1145/3072959.3073625.
10. AbdelMigid T. A., Saqr K. M., Kotb M. A., Aboelfarag A. A. Revisiting the lid-driven cavity flow problem: Review and new steady state benchmarking results using GPU accelerated code. *Alexandria engineering journal*. 2017. Vol. 56, No 1. P. 123–135.
11. Badreddine H., Sato Y., Berger M. et al. A Three-Dimensional, Immersed Boundary, Finite Volume Method for the Simulation of Incompressible Heat Transfer Flows around Complex Geometries. *International journal of chemical engineering*. 2017. DOI: 10.1155/2017/1726519
12. Bianchi G., Rane S., Kovacevic A., Cipollone R. Deforming grid generation for numerical simulations of fluid dynamics in sliding vane rotary machines. *Advances in engineering software*. 2017. Vol. 112. P. 180–191.
13. Bianchi G., Rane S., Kovacevic A., Cipollone R., Murgia S., Contaldi G. Grid generation methodology and CFD simulations in sliding vane compressors and expanders. *IOP Conference Series-Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 232. DOI: 10.1088/1757-899X/232/1/012053.
14. Bonazzoli M., Rapetti F., Venturini C. Dispersion analysis of triangle-based Whitney element methods for electromagnetic wave propagation. *Applied mathematics and computation*. 2018. Vol. 319. P. 274–286.
15. Chen L., Lingen E. J., de Borst R. Adaptive hierarchical refinement of NURBS in cohesive fracture analysis. *Numerical Methods in Engineering*. 2017. Vol. 112, No 13. P. 2151–2173.
16. Dolgov S. V., Kazeev V. A., Khoromskij B. N. Direct tensor-product solution of one-dimensional elliptic equations with parameter-dependent coefficients. *Mathematics and computers in simulation*. 2018. Vol. 145. P. 136–155.
17. Dostart N., Liu Y., Popovic M. A. Acoustic Waveguide Eigenmode Solver Based on a Staggered-Grid Finite-Difference Method. *Scientific reports*. 2017. Vol. 7. DOI: 10.1038/s41598-017-17511-x.
18. Falkenstein T., Kang S., Davidovic M., Bode M., Pitsch H., Kamatsuchi T., Nagao J., Arima T. LES of Internal Combustion Engine Flows Using Cartesian Overset Grids. *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies nouvelles*. 2017. Vol. 72. No 6. DOI: 10.2516/ogst/2017026.
19. Fort J., Furst J., Halama, J. Numerical simulation of flow through cascade in wind tunnel test section and stand-alone configurations. *Applied mathematics and computation*. 2018. Vol. 319. P. 633–646.
20. Gasii G. M. Structural and Design Specifics of Space Grid Systems *Science & technique*. 2017. Vol. 16, No 6. P. 475–484.
21. Huang C., Liu W., Yang G. Numerical studies of static aeroelastic effects on grid fin aerodynamic performances. *Chinese journal of aeronautics*. 2017. Vol. 30, No 4. P. 1300–1314.
22. Koblitz A. R., Lovett S., Nikiforakis N. Direct numerical simulation of particulate flows with an overset grid method. *Journal of computational physics*. 2017. Vol. 343. P. 414–431.
23. Li H., Liu T., Wang M., Zhao D., Qiao A., Wang X., Gu J., Li Z., Zhu B. Design optimization of stent and its dilatation balloon using kriging surrogate model. *Biomedical engineering online*. 2017. Vol. 16. DOI: 10.1186/s12938-016-0307-6.
24. Liu DW, Xu X., Li Q., Peng X., Chen DH. Correction of model deformation effects for a supercritical wing in transonic wind tunnel. *Tehnicki Vjesnik-Technical Gazette*. 2017. Vol. 24, No 6. P. 1647–1655.
25. Liu W., Li N., Zhao J., Su Y. Wake structure and hydrodynamic performance of flapping foils mimicking fish fin kinematics. *Saudi journal of biological sciences*. 2017. Vol. 24, No 6. P. 1344–1354.
26. Mahariq I., Erciyas A. A spectral element method for the solution of magnetostatic fields. *Turkish journal of electrical engineering and computer sciences*. 2017. Vol. 25, No 4. P. 2922–2932.

27. Mahmood M. S., Laghrouche O., Trevelyan J. Implementation and computational aspects of a 3D elastic wave modelling by PUFEM. *Applied mathematical modelling*. 2017. Vol. 49. P. 568–586.
28. Meena D. R., Gadre S. R., Balanarayan P. PAREMD: A parallel program for the evaluation of momentum space properties of atoms and molecules. *Computer physics communications*. 2018. Vol. 224. P. 299–310.
29. Meyghani B., Awang M. B., Emamian S. S., Mohd Nor M. K. B., Pedapati S. R. A Comparison of Different Finite Element Methods in the Thermal Analysis of Friction Stir Welding (FSW). *Metals*. 2017. Vol. 7, No 10. DOI: 10.3390/met7100450.
30. Okhotnikov D. I. Direct Numerical Simulation of Laminar-Turbulent Transition on Grids with Local Refinement. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta-seriya fiziko-matematicheskie nauki*. 2017. Vol. 159, No 2. P. 216–230.
31. Oliveira R. A. F., Justi G. H., Lopes G. C. Grid convergence study of a cyclone separator using different mesh structures. *Chemical industry & chemical engineering quarterly*. 2017. Vol. 23, No 3. P. 311–320.
32. Patel H. V., Das S., Kuipers J. A. M. A coupled Volume of Fluid and Immersed Boundary Method for simulating 3D multiphase flows with contact line dynamics in complex geometries. *Chemical engineering science*. 2017. Vol. 166. P. 28–41.
33. Pi Y., Wang N., Chen J., Miao M., Jin Y., Wang W. Anisotropic equivalent thermal conductivity model for efficient and accurate full-chip-scale numerical simulation of 3D stacked IC. *International journal of heat and mass transfer*. 2018. Vol. 120. P. 361–378.
34. Raeli A., Bergmann M., Iollo A. A finite-difference method for the variable coefficient Poisson equation on hierarchical Cartesian meshes. *Journal of computational physics*. 2018. Vol. 355. P. 59–77.
35. Schweiger M., Arridge S. Basis mapping methods for forward and inverse problems. *International journal for numerical methods in engineering*. 2017. Vol. 109, No 1. P. 3–28.
36. Shumaev V. V., Kuzenov V. V. Development of the numerical model for evaluating the temperature field and thermal stresses in structural elements of aircrafts. *International conference problems of thermal physics and power engineering (PTPPE-2017) Journal of Physics Conference Series*. 2017. Vol. 891. DOI: 10.1088/1742-6596/891/1/012311.
37. Takenaka H., Komatsu M., Toyokuni G., Nakamura T., Okamoto T. Quasi-Cartesian finite-difference computation of seismic wave propagation for a three-dimensional sub-global model. *Earth planets and space*. 2017. Vol. 69. DOI: 10.1186/s40623-017-0651-1.
38. Wang S., Zhang L., Yin G. Numerical Investigation of the FSI Characteristics in a Tubular Pump. *Mathematical problems in engineering*. 2017. DOI: 10.1155/2017/7897614.
39. Wang ZY, Yu JC, Zhang AQ, Wang YX, Zhao WT. Parametric geometric model and hydrodynamic shape optimization of a flying-wing structure underwater glider. *China Ocean Engineering*. 2017. Vol. 31, No 6. P. 709–715.
40. Xiao C. N., Denner F., van Wachem B. G. M. Fully-coupled pressure-based finite-volume framework for the simulation of fluid flows at all speeds in complex geometries. *Journal of computational physics*. 2017. Vol. 346 P. 91–130.
41. Yeo H., Ki H. A unified momentum equation approach for computing thermal residual stresses during melting and solidification. *Computer physics communications*. 2018. Vol. 224. P. 230–244.
42. Zhao P., Chan C. H., Wang G. An Improved Full-Wave Multilevel Green's Function Interpolation Method With RBF-QR Technique for Fast Field Evaluation. *IEEE ACCESS*. 2017. Vol. 5. P. 10241–10249.
43. Zheng J., Zhang W., Jiang J., Guo R. CFD simulation and experimental study of water-oil displacement flow in an inclined pipe. *International journal of heat and technology*. 2017. Vol. 35, No 3. P. 663–667.

44. Zhou L., Bai L., Shi WD, Li W, Wang C, Ye DX. Numerical analysis and performance experiment of electric submersible pump with different diffuser vanes number. *Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering*. 2018. Vol. 40, No 2. DOI: 10.1007/s40430-018-0986-y.
45. Чопоров С. В., Гоменюк С. І., Алатамнех Х. Х., Оспіщев К. С. Методи побудови дискретних моделей: структуровані та блочно-структуровані сітки. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 272–284.
46. Каліон В. А. Обчислювальна гідромеханіка. Модельні задачі: навч. посібник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2011. 175 с.
47. Thompson J. F., Soni B. K., Weatherill N. P. Handbook of Grid Generation. Boca Raton: CRC Press, 1998. 1096 p.

REFERENCES

1. Basov, K. A. (2005). ANSYS: reference book of user. Moskva: DMK Press.
2. Vasileva, M. V., Vasilev, V. I., Krasnikov, A. A. & Nikiforov, D. Ya. (2017). A numeral design of flow of monophasic liquid in трещиноватых porous environments. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, Vol. 159, No. 1, pp. 100-115.
3. Levandovskiy, A. N., Melnikov, B. E. & Shamkin, A. A. (2017). Design of porous material the method of eventual elements, No 2 (53), pp. 61-77.
4. Litvinova, Yu. S., Maksimenko-Sheyko, K. V. & Sheyko, T. I. (2017). Analytical authentication of three-dimensional geometrics on information about the form of their sections. *Problemy mashinostroeniya*, Vol. 20, No 1, pp. 45-51.
5. Lisniak, A. O., Choporov, S. V. & Homeniuk, S. I. (2010). Methodology of visualization of the geometrics described by means of R-functions. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu: zbirnyk naukovykh statei. Fyzyko-matematychni nauky*, No 1, pp. 88-97.
6. Nuriev, A. N., Yunusova, A. I. & Zaytseva, O. N. (2017). Design of moving of wedge-shaped vibrorobot in a viscid liquid at the different laws of motion of internal mass in the package of OpenFOAM. *Trudy ISP RAN*, Vol. 29, No. 1, pp. 101-118.
7. Choporov, S. V., Lisniak, A. O., Borysovska, Yu. O., Kozlova, O. S. & Sniezhkova, L. S. (2016). Methods of construction of discrete models: the unstructured nets. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu: Zbirnyk naukovykh statei. Fyzyko-matematychni nauky*, No 2, pp. 237-250.
8. Yatsuk, Yu. V. (2009). Construction of calculation nets for the decision of equalizations of mathematical physics by the method of “volumes of Besier”. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Morskaya tekhnika i tekhnologiya*, No 1, pp. 116-120.
9. Aanjaneya, M., Gao, M., Liu, H., Batty, C. & Sifakis, E. (2017). Power Diagrams and Sparse Paged Grids for High Resolution Adaptive Liquids. *ACM transactions on graphics*, Vol. 36, No 4. DOI: 10.1145/3072959.3073625.
10. AbdelMigid, T. A., Saqr, K. M., Kotb, M. A. & Aboelfarag, A. A. (2017). Revisiting the lid-driven cavity flow problem: Review and new steady state benchmarking results using GPU accelerated code. *Alexandria engineering journal*, Vol. 56, No 1, pp. 123-135.
11. Badreddine, H., Sato, Y., Berger, M. et al. (2017). A Three-Dimensional, Immersed Boundary, Finite Volume Method for the Simulation of Incompressible Heat Transfer Flows around Complex Geometries. *International journal of chemical engineering*. DOI: 10.1155/2017/1726519.
12. Bianchi, G., Rane, S., Kovacevic, A. & Cipollone, R. (2017). Deforming grid generation for numerical simulations of fluid dynamics in sliding vane rotary machines. *Advances in engineering software*, Vol. 112, pp. 180-191.
13. Bianchi, G., Rane, S., Kovacevic, A., Cipollone, R., Murgia, S. & Contaldi, G. (2017). Grid generation methodology and CFD simulations in sliding vane compressors and expanders. *IOP Conference Series-Materials Science and Engineering*, Vol. 232. DOI: 10.1088/1757-899X/232/1/012053.

14. Bonazzoli, M., Rapetti, F. & Venturini, C. (2018). Dispersion analysis of triangle-based Whitney element methods for electromagnetic wave propagation. *Applied mathematics and computation*, Vol. 319, pp. 274-286.
15. Chen, L., Lingen, E. J. & de Borst, R. (2017). Adaptive hierarchical refinement of NURBS in cohesive fracture analysis. *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 112, No 13, pp. 2151-2173.
16. Dolgov, S. V., Kazeev, V. A. & Khoromskij, B. N. (2018). Direct tensor-product solution of one-dimensional elliptic equations with parameter-dependent coefficients. *Mathematics and computers in simulation*, Vol. 145, pp. 136-155.
17. Dostart, N., Liu, Y. & Popovic, M. A. (2017). Acoustic Waveguide Eigenmode Solver Based on a Staggered-Grid Finite-Difference Method. *Scientific reports*, Vol. 7. DOI: 10.1038/s41598-017-17511-x.
18. Falkenstein, T., Kang, S., Davidovic, M., Bode, M., Pitsch, H., Kamatsuchi, T., Nagao, J. & Arima, T. (2017). LES of Internal Combustion Engine Flows Using Cartesian Overset Grids. *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies nouvelles*, Vol. 72, No 6. DOI: 10.2516/ogst/2017026.
19. Fort, J., Furst, J. & Halama, J. (2018). Numerical simulation of flow through cascade in wind tunnel test section and stand-alone configurations. *Applied mathematics and computation*, Vol. 319, pp. 633-646.
20. Gasii, G. M. (2017). Structural and Design Specifics of Space Grid Systems *Science & technique*, Vol. 16, No 6, pp. 475-484.
21. Huang, C., Liu, W. & Yang, G. (2017). Numerical studies of static aeroelastic effects on grid fin aerodynamic performances. *Chinese journal of aeronautics*, Vol. 30, No 4, pp. 1300-1314.
22. Koblitz, A. R., Lovett, S. & Nikiforakis, N. (2017). Direct numerical simulation of particulate flows with an overset grid method. *Journal of computational physics*, Vol. 343, pp. 414-431.
23. Li, H., Liu, T., Wang, M., Zhao, D., Qiao, A., Wang, X., Gu, J., Li, Z. & Zhu, B. (2017). Design optimization of stent and its dilatation balloon using kriging surrogate model. *Biomedical engineering online*, Vol. 16. DOI: 10.1186/s12938-016-0307-6.
24. Liu, DW, Xu, X., Li, Q., Peng, X. & Chen, DH. (2017). Correction of model deformation effects for a supercritical wing in transonic wind tunnel. *Tehnicki Vjesnik – Technical Gazette*, Vol. 24, No 6, pp. 1647-1655.
25. Liu, W., Li, N., Zhao, J. & Su, Y. (2017). Wake structure and hydrodynamic performance of flapping foils mimicking fish fin kinematics. *Saudi journal of biological sciences*, Vol. 24, No 6, pp. 1344-1354.
26. Mahariq, I. & Erciyas, A. (2017). A spectral element method for the solution of magnetostatic fields. *Turkish journal of electrical engineering and computer sciences*, Vol. 25, No 4, pp. 2922-2932.
27. Mahmood, M. S., Laghrouche, O. & Trevelyan, J. (2017). Implementation and computational aspects of a 3D elastic wave modelling by PUFEM. *Applied mathematical modeling*, Vol. 49, pp. 568-586.
28. Meena, D. R., Gadre, S. R. & Balanarayan, P. (2018). PAREMD: A parallel program for the evaluation of momentum space properties of atoms and molecules. *Computer physics communications*, Vol. 224, pp. 299-310.
29. Meyghani, B., Awang, M. B., Emamian, S. S., Mohd Nor, M. K. B. & Pedapati, S. R. (2017). A Comparison of Different Finite Element Methods in the Thermal Analysis of Friction Stir Welding (FSW). *Metals*, Vol. 7, No 10. DOI: 10.3390/met7100450.
30. Okhotnikov, D. I. (2017). Direct Numerical Simulation of Laminar-Turbulent Transition on Grids with Local Refinement. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta-seriya fiziko-matematicheskie nauki*, Vol. 159, No 2, pp. 216-230.
31. Oliveira, R. A. F., Justi, G. H. & Lopes, G. C. (2017). Grid convergence study of a cyclone separator using different mesh structures. *Chemical industry & chemical engineering quarterly*, Vol. 23, No 3, pp. 311-320.

32. Patel, H. V., Das, S. & Kuipers, J. A. M. (2017). A coupled Volume of Fluid and Immersed Boundary Method for simulating 3D multiphase flows with contact line dynamics in complex geometries. *Chemical engineering science*, Vol. 166, pp. 28-41.
33. Pi, Y., Wang, N., Chen, J., Miao, M., Jin, Y. & Wang, W. (2018). Anisotropic equivalent thermal conductivity model for efficient and accurate full-chip-scale numerical simulation of 3D stacked IC. *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 120, pp. 361-378.
34. Raeli, A., Bergmann, M. & Iollo, A. (2018). A finite-difference method for the variable coefficient Poisson equation on hierarchical Cartesian meshes. *Journal of computational physics*, Vol. 355, pp. 59-77.
35. Schweiger, M. & Arridge, S. (2017). Basis mapping methods for forward and inverse problems. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 109, No 1, pp. 3-28.
36. Shumaev, V. V. & Kuzenov, V. V. (2017). Development of the numerical model for evaluating the temperature field and thermal stresses in structural elements of aircrafts. *International conference problems of thermal physics and power engineering (PTPPE-2017) Journal of Physics Conference Series*, Vol. 891. DOI: 10.1088/1742-6596/891/1/012311.
37. Takenaka, H., Komatsu, M., Toyokuni, G., Nakamura, T. & Okamoto, T. (2017). Quasi-Cartesian finite-difference computation of seismic wave propagation for a three-dimensional sub-global model. *Earth planets and space*, Vol. 69. DOI: 10.1186/s40623-017-0651-1.
38. Wang, S., Zhang, L. & Yin, G. (2017). Numerical Investigation of the FSI Characteristics in a Tubular Pump. *Mathematical problems in engineering*. DOI: 10.1155/2017/7897614.
39. Wang, ZY, Yu, JC, Zhang, AQ, Wang, YX & Zhao, WT. (2017). Parametric geometric model and hydrodynamic shape optimization of a flying-wing structure underwater glider. *China Ocean Engineering*, Vol. 31, No 6, pp. 709-715.
40. Xiao, C. N., Denner, F. & van Wachem, B. G. M. (2017). Fully-coupled pressure-based finite-volume framework for the simulation of fluid flows at all speeds in complex geometries. *Journal of computational physics*, Vol. 346, pp. 91-130.
41. Yeo, H. & Ki, H. (2018). A unified momentum equation approach for computing thermal residual stresses during melting and solidification. *Computer physics communications*, Vol. 224, pp. 230-244.
42. Zhao, P., Chan, C. H. & Wang, G. (2017). An Improved Full-Wave Multilevel Green's Function Interpolation Method With RBF-QR Technique for Fast Field Evaluation. *IEEE ACCESS*, Vol. 5, pp. 10241-10249.
43. Zheng, J., Zhang, W., Jiang, J. & Guo, R. (2017). CFD simulation and experimental study of water-oil displacement flow in an inclined pipe. *International journal of heat and technology*, Vol. 35, No 3, pp. 663-667.
44. Zhou, L., Bai, L., Shi, WD., Li, W., Wang, C. & Ye, DX. (2018). Numerical analysis and performance experiment of electric submersible pump with different diffuser vanes number. *Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering*, Vol. 40, No 2. DOI: 10.1007/s40430-018-0986-y.
45. Choporov, S. V., Gomenyuk, S. I., Alatomneh, H. K. & Ospishchev, K. S. (2016). Discrete models generation methods: structured and block-structured grids. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu: Zbirnyk naukovykh statei. Fyzyko-matematychni nauky*, No 1, pp. 272-284.
46. Kalion, V. A. (2011). *Obchislyvalna hidromekhanika. Modelni zadachi: navch. posibnyk*. Kyiv. Vydavnycho-polihrafichnyi tsentr "Kyivskiy universytet".
47. Thompson, J. F., Soni, B. K. & Weatherill, N. P. (1998). *Handbook of Grid Generation*. Boca Raton: CRC Press.

УДК 517.944

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-15

ПРО ОДИН СПОСІБ ПОБУДОВИ Т-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

¹Хома Г. П., д. ф.-м. н., професор, ²Хома-Могильська С. Г., к. ф.-м. н., доцент,
¹Чорний В. З., к. ф.-м. н., доцент

¹*Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
вул. М. Кривоноса, 2, м. Тернопіль, 46027, Україна*

²*Тернопільський національний економічний університет,
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46020, Україна*

sv_khoma@ukr.net, vzch@ukr.net

При дослідженні розв'язків квазілінійних рівнянь гіперболічного типу другого порядку асимптотичними методами Крилова-Боголюбова-Митропольського завжди доводилося враховувати нульові за просторовою змінною крайові умови шуканого розв'язку незбуреного квазілінійного рівняння. При розгляді ряду технічних проблем також поставало питання, щоб знайдені розв'язки були періодичними. У зв'язку з цим виникла проблема дослідження крайових T -періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку, права частина яких містить ε – малий параметр.

Цьому питанню присвячено багато робіт, як українських, так і закордонних математиків, основним недоліком яких, на нашу думку, є використання методу відшукування розв'язку за допомогою тригонометричного ряду Фур'є. У 1984 році вперше чеськими математиками О. Вейвудою та М. Штедри було зазначено, що дану проблему можна вирішити аналітичним методом, не вимагаючи додаткових умов при диференціюванні рядів Фур'є і не розв'язуючи зчисленну множину звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

У цій роботі досліджується нова постановка задачі: як провести математичне моделювання розв'язку задачі $u_t - a^2 u_{xx} = g(x, t) + \varepsilon F(x, t, u, u_t, u_x)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + T) = u(x, t)$?

Розв'язок вказаного рівняння складається із суми двох розв'язків: розв'язку незбуреного рівняння ($\varepsilon = 0$) та розв'язку збуреного рівняння ($\varepsilon \neq 0$), права частина якого містить T -періодичну по t функцію $F(x, t, u, u_t, u_x)$.

Щоб провести математичне моделювання розв'язку незбуреного рівняння, нами у цій роботі вперше знайдено аналітичну формулу розв'язку крайової T -періодичної задачі для незбуреного рівняння, використовуючи результати монографії Митропольського Ю. О., Хоми Г. П., Гром'яка М. І. [1]. На основі операторів S_{a_1} та S_{a_2} знайдено точну аналітичну формулу розв'язку крайової T -періодичної задачі для неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку вигляду $u_t - a^2 u_{xx} = g(x, t)$.

Ключові слова: крайова T -періодична задача, властивості оператора, побудова формули T -періодичного розв'язку, рівняння гіперболічного типу, незбурене рівняння.

ABOUT ONE WAY OF CONSTRUCTION OF T-PERIODIC SOLUTIONS TO HYPERBOLIC TYPE EQUATIONS

¹Khoma H. P., D. Sc. in Physics and Maths, Professor,

²Khoma-Mohylska S. H., Ph. D. in Physics and Maths, Associate Professor,

¹Chornyi V. Z., Ph. D. in Physics and Maths, Associate Professor

¹*Ternopil Volodymyr Hnatiuk national pedagogical university,
M. Kryvonosa str., 2, Ternopil', 46027, Ukraine,*

²*Ternopil national economic university,
Lvivs'ka str., 11, Ternopil', 46020, Ukraine*

sv_khoma@ukr.net, vzch@ukr.net

To research the solutions of quasi-linear second-order hyperbolic equations by the asymptotic Krylov-Bohobubov-Mytropolskyi method, one always had to take into account the zero space variable boundary conditions of the solutions to an undisturbed quasi-linear equation. In considering a number of technical

problems, the question also arose that the found solutions were periodic. In this connection, a problem is in the study of boundary-value T -periodic problems for hyperbolic the second order equations, the right side of which contains ε (ε is a small parameter).

A lot of works of both Ukrainian mathematicians and foreign ones are devoted to this problem. The main disadvantage, in our opinion, is the method for finding a solution using the Fourier trigonometric series. In 1984, for the first time, the Czech Mathematicians O. Veivoda and M. Shtedry stated that this problem can be solved by analytical method without requiring the additional conditions for the differentiation of Fourier series and without solving a number of the ordinary second order differential equations.

In this paper, a new problem statement is investigated: how to conduct a mathematical modeling of the solution of the problem $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t) + \varepsilon F(x, t, u, u_t, u_x)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x, t)$?

The solution of this equation consists of the sum of two solutions: the solution of the undisturbed equation ($\varepsilon = 0$) and the solution of the disturbed equation ($\varepsilon \neq 0$), the right side of which contains the T -periodic of t function $F(x, t, u, u_t, u_x)$.

To carry out mathematical modeling solution undisturbed equation in this paper we first found an analytical formula for solving of the boundary-value T -periodic problem for the undisturbed equation using the results of the monograph Y. O. Mytropol'skyi, H. P. Khoma and M. I. Hromyak [1]. On the basis of operators S_{a_1} and S_{a_2} , we find an exact analytic formula for the solution to the boundary-value

T -periodic problem for a non-homogeneous hyperbolic the second order equation $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t)$.

Key words: boundary-value T -periodic problem, operator properties, construction of the T -periodic solution formula, hyperbolic type equation, undisturbed equation.

ВСТУП

Дослідження крайових задач з даними на всій границі області для гіперболічних рівнянь другого порядку передбачає накладання додаткових умов на шуканий розв'язок, зокрема умов періодичності чи майже періодичності як за просторовими координатами, так і за часовою змінною. Цій проблемі присвячено ряд робіт. Зокрема, у роботах [2-4] досліджено питання існування періодичних за часовою змінною розв'язків крайових задач з умовами Діріхле для лінійних та нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку, а в роботах [5-7] враховані умови Діріхле-Неймана для нелінійних хвильових рівнянь.

Автори робіт [8-11] встановили умови існування єдиного періодичного чи майже періодичного за просторовими координатами та з умовами Діріхле-Неймана за часовою змінною розв'язку крайових задач для лінійних гіперболічних рівнянь і систем рівнянь із сталими коефіцієнтами у смугі.

Основним недоліком досліджень [4, 5, 8-12], на нашу думку, є відшукання розв'язку за допомогою тригонометричного ряду Фур'є $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx$, де $u_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ – шукані T -періодичні функції.

У 1984 році вперше вказано [13], що цю проблему можна вирішити аналітичним методом, не вимагаючи додаткових умов при диференціюванні рядів Фур'є і не розв'язуючи зчисленну множину звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. У статті [14] встановлено умови існування 2π -періодичного гладкого розв'язку квазілінійного рівняння гіперболічного типу.

У цій статті нами вперше знайдено аналітичну формулу розв'язку крайової T -періодичної задачі для неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку вигляду

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Для цього використано результати робіт [1, 2].

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

C_π – простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$.

$C_\pi^{k,l}$ – простір функцій $u \in C_\pi$ таких, що $D_t^k D_x^l u \in C_\pi$.

$G_{\pi t}$ – простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ разом із похідною по t .

Q_T – простір функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ умову періодичності по t , тобто $g(x, t+T) = g(x, t)$.

$L(X, Y)$ – простір лінійних відображень X в Y .

$A_2 = \{g : g(x, t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi)\}$.

a – число.

\mathbf{R} – множина дійсних чисел.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо таку функцію [1, с. 26] (формула 9.6):

$$u_1^a(x, t) = -\frac{1}{2a} \int_0^x d\xi \int_{t-\gamma(x, \xi)}^{t+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau \equiv (S_{a_1} g)(x, t),$$

де $\gamma(x, \xi) = \frac{x-\xi}{a}$.

Обчислимо перші й другі частинні похідні по x і t . Маємо

$$\frac{\partial u_1^a(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{2a} \int_0^x \left\{ g(\xi, \alpha(x, t, \xi)) \cdot \frac{1}{a} + g(\xi, \beta(x, t, \xi)) \cdot \frac{1}{a} \right\} d\xi,$$

де $\alpha(x, t, \xi) = t + \frac{x-\xi}{a}$; $\beta(x, t, \xi) = t - \frac{x-\xi}{a}$.

$$\frac{\partial^2 u_1^a(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{a^2} g(x, t) - \frac{1}{2a^2} \int_0^x \left\{ \frac{\partial g(\xi, \alpha(x, t, \xi))}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{a} - \frac{\partial g(\xi, \beta(x, t, \xi))}{\partial \beta} \cdot \frac{1}{a} \right\} d\xi;$$

$$\frac{\partial u_1^a(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2a} \int_0^x \{ g(\xi, \alpha(x, t, \xi)) - g(\xi, \beta(x, t, \xi)) \} d\xi;$$

$$\frac{\partial^2 u_1^a(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{2a} \int_0^x \left\{ \frac{\partial g}{\partial \alpha} \cdot 1 - \frac{\partial g}{\partial \beta} \cdot 1 \right\} d\xi.$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u_1^a(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1^a(x, t)}{\partial x^2} = g(x, t).$$

Далі покажемо, що функція $u_1^a(x, t)$ для кожної функції $g \in C_\pi \cap Q_T$ – періодичної по t , є також T -періодична по t .

На основі формули $u_1^a(x, t) = -\frac{1}{2a} \int_0^x d\xi \int_{t-\gamma(x, \xi)}^{t+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau$, де $\gamma(x, \xi) = \frac{x-\xi}{a}$, маємо

$$u_1^a(x, t+T) = -\frac{1}{2a} \int_0^x d\xi \int_{t+T-\gamma(x, \xi)}^{t+T+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau.$$

З останньої рівності після виконання заміни $\tau = \theta + T$, $t - \gamma(x, t) \leq \theta \leq t + \gamma(x, t)$, одержуємо

$$u_1^a(x, t+T) = -\frac{1}{2a} \int_0^x d\xi \int_{t-\gamma(x, \xi)}^{t+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \theta+T) d\theta = u_1^a(x, t).$$

Розглянемо іншу функцію [1, с. 26] (формула 9.8):

$$u_2^a(x, t) = -\frac{1}{2a} \int_x^\pi d\xi \int_{t+\gamma(x, \xi)}^{t-\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau \equiv (S_{a_2} g)(x, t)$$

або

$$u_2^a(x, t) = -\frac{1}{2a} \int_\pi^x d\xi \int_{t-\gamma(x, \xi)}^{t+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau.$$

Знайдемо

$$\frac{\partial u_2^a(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{2a} \int_\pi^x \left\{ g(\xi, t+\gamma(x, \xi)) \cdot \frac{1}{a} + g(\xi, t-\gamma(x, \xi)) \cdot \frac{1}{a} \right\} d\xi;$$

$$\frac{\partial^2 u_2^a(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2a^3} \int_\pi^x \left\{ \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \right\} d\xi - \frac{1}{a^2} g(x, t);$$

$$\frac{\partial u_2^a(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2a} \int_\pi^x \left\{ g(\xi, t+\gamma(x, \xi)) \cdot 1 - g(\xi, t-\gamma(x, \xi)) \cdot 1 \right\} d\xi;$$

$$\frac{\partial^2 u_2^a(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{2a} \int_\pi^x \left\{ \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \right\} d\xi.$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 u_2^a(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2^a(x, t)}{\partial x^2} = g(x, t).$$

Аналогічно доводимо, що для кожної функції $g \in C_\pi \cap Q_T$ функція $u_2^a(x, t)$ – T -періодична по t .

Висновок: обидві функції $u_1^a(x, t)$ і $u_2^a(x, t)$ при $g \in G_{\pi, t} \cap Q_T$ – часткові T -періодичні класичні розв'язки T -періодичної задачі:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Далі розглянемо таку функцію:

$$u^a(x, t) = \frac{1}{2}(S_{a_1}g + S_{a_2}g)(x, t) \equiv (S_a g)(x, t)$$

або

$$u^a(x, t) = \frac{1}{2}(S_{a_1}g + S_{a_2}g)(x, t) \equiv -\frac{1}{4a} \int_0^x d\xi \int_{t-\gamma(x, \xi)}^{t+\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4a} \int_x^\pi d\xi \int_{t+\gamma(x, \xi)}^{t-\gamma(x, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau \equiv (S_a g)(x, t).$$

Теорема 1. Для $g \in G_{\pi, t} \cap Q_T$ функція $u^a(x, t) = (S_a g)(x, t)$ є частковим T -періодичним по t класичним розв'язком такої T -періодичної задачі:

$$\frac{\partial^2 u^a}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2} = g(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$u^a(x, t+T) = u^a(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Розглянемо тепер функцію:

$$\tilde{u}^a(x, t) = (S_a g)(x, t) + (\tilde{S}_a g)(x, t), \tag{3}$$

де

$$(\tilde{S}_a g)(x, t) = \frac{\pi-x}{4\pi a} \int_0^\pi d\xi \int_{t+\gamma(0, \xi)}^{t-\gamma(0, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{x}{4\pi a} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\gamma(\pi, \xi)}^{t+\gamma(\pi, \xi)} g(\xi, \tau) d\tau, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Теорема 2. Для функції $g \in C_\pi$ функція $\tilde{u}^a(x, t)$, означена формулою (3), задовольняє крайові умови

$$\tilde{u}^a(0, t) = \tilde{u}^a(\pi, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Доведення. Запишемо розгорнуту формулу (3)

$$\begin{aligned} \tilde{u}^a(x, t) = & -\frac{1}{4a} \int_0^x d\xi \int_{t-\frac{x-\xi}{a}}^{t+\frac{x-\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4a} \int_x^\pi d\xi \int_{t+\frac{x-\xi}{a}}^{t-\frac{x-\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau + \\ & + \frac{\pi-x}{4\pi a} \int_0^\pi d\xi \int_{t+\frac{\xi}{a}}^{t-\frac{\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{x}{4\pi a} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\frac{\pi-\xi}{a}}^{t+\frac{\pi-\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau \equiv I_1(x, t) + I_2(x, t) + I_3(x, t) + I_4(x, t). \end{aligned}$$

Покладаючи у записану формулу спочатку $x = 0$, знаходимо

$$I_1(0, t) = 0, \quad I_4(0, t) = 0,$$

$$I_2(0, t) + I_3(0, t) = -\frac{1}{4a} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\frac{\xi}{a}}^{t+\frac{\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{1}{4a} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\frac{\xi}{a}}^{t+\frac{\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Звідси одержуємо $\tilde{u}^a(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}$.

Тепер при $x = \pi$ знаходимо

$$I_1(\pi, t) = -\frac{1}{4a} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\frac{\pi-\xi}{a}}^{t+\frac{\pi-\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau,$$

$$I_2(\pi, t) = 0, \quad I_3(\pi, t) = 0,$$

$$I_4(\pi, t) = \frac{1}{4a} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\frac{\pi-\xi}{a}}^{t+\frac{\pi-\xi}{a}} g(\xi, \tau) d\tau.$$

Звідси одержуємо

$$I_1(\pi, t) + I_4(\pi, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

що у сумі $\sum_{i=1}^4 I_i(\pi, t) = 0$, тобто

$$\tilde{u}^a(\pi, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Для кожної T -періодичної функції $g(x, t)$ функція $\tilde{u}^a(x, t)$ є T -періодичною по t , тобто

$$\tilde{u}^a(x, t+T) = \tilde{u}^a(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (5)$$

Доведення теореми 3 випливає з такого твердження:

Лема. Якщо функція $K(x, t)$ визначається таким інтегралом

$$K(x, t) = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g(x, \tau) d\tau,$$

то для кожної функції $g(x, t)$ – T -періодичної по t , тобто $g(x, t+T) = g(x, t)$, сама функція $K(x, t)$ є T -періодичною по t .

Доведення. Справді, зробивши заміну змінної $\tau = T + \theta$ у наступному інтегралі, маємо

$$K(x, t+T) = \int_{t-T+\alpha}^{t+T+\alpha} g(x, \tau) d\tau = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g(x, \theta+T) d\theta = K(x, t),$$

що й потрібно було довести.

Наслідком теорем 2 і 3 є теорема 4.

Теорема 4. Функція $\tilde{u}^a(x, t)$, означена формулою (3), при $g \in C_\pi \cap Q_T$ задовольняє крайові та періодичні по t умови (4), (5):

$$\tilde{u}^a(0, t) = \tilde{u}^a(\pi, t) = 0, \quad \tilde{u}^a(x, t+T) = \tilde{u}^a(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Зауваження 1. Взагалі кажучи, функція $\tilde{u}^a(x, t)$ не є класичним розв'язком рівняння $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t)$, бо функція $(\tilde{S}_a g)(x, t)$ не є розв'язком однорідного рівняння

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$. Хоча $\frac{\partial^2 (\tilde{S}_a g)(x,t)}{\partial x^2} \equiv 0$, але $\frac{\partial^2 (\tilde{S}_a g)(x,t)}{\partial t^2}$ не для кожної функції $g(x,t)$ дорівнює нулеві. Для цього потрібні нові дослідження.

ВИСНОВКИ

1. На основі результатів роботи [1] розглянуто оператори S_{a_1} та S_{a_2} (с. 26, формули (9.6), (9.8), на основі яких будується вказаний результат).
2. Введено нові оператори S_a та \tilde{S}_a для дослідження T -періодичних по t розв'язків гіперболічних рівнянь вигляду $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t)$, $g(x,t+T) = g(x,t)$.
3. Доведено, що функція $\tilde{u}^a(x,t) = (S_a g)(x,t) + (\tilde{S}_a g)(x,t)$ ще не гарантує, чи буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}^a - a^2 u_{xx}^a = g(x,t)$, враховуючи властивості оператора \tilde{S}_a .

ЛІТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громьяк М. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев: Наук. думка, 1991. 232 с.
2. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. *Український математичний журнал*. 2005. Т. 57, № 7. С. 912–921.
3. Митропольський Ю. О., Хома Г. П., Хома-Могильська С. Г. Розв'язки крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. *Доповіді НАН України*. 2008. № 5. С. 30–36.
4. Gentile G., Mastropietro V., Procesi M. Periodic solution for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions. *Comm. Math. Phys.* 2005. Vol. 256, № 2. P. 437–490.
5. Павленко В. Н., Петраш Т. А. Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2012. Т. 18, № 2. С. 199–204.
6. Рудаков И. А. Нетривиальные периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями. *Дифференциальные уравнения*. 2005. Т. 41, № 10. С. 1392–1399.
7. Рудаков И. А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле. *Известия вузов. Математика*. 2007. Т. 537, № 2. С. 46–55.
8. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ: Наукова думка, 2002. 416 с.
9. Пташник Б. Й., Репетило С. М. Задача Діріхле-Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2012. Вип. 10. С. 7–14.
10. Пташник Б. Й., Репетило С. М. Задача Діріхле-Неймана у смузї для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Т. 56, № 3. С. 15–28.
11. Репетило С. М. Задача Діріхле-Неймана для лінійних гіперболічних рівнянь другого порядку у смузї. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка»*. Фізико-математичні науки. 2013. Вип. 768, № 768. С. 26–33.
12. Rabinowitz P. Periodic solution of hyperbolic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 1967. Vol. 20, № 1. P. 145–205.

13. Вейвода О., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений. *Дифференциальные уравнения*. 1984. Т. 20, № 10. С. 1733–1739.
14. Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г., Хохлова Л. Г. Умови існування 2π -періодичного гладкого розв'язку квазілінійного рівняння гіперболічного типу. *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 257–264.

REFERENCES

1. Mitropolskiy, Yu. A., Khoma, G. P. & Gromyak, M. I. (1984). Asymptotic methods for investigation of quasi-wave equations of hyperbolic type. Kiev: Naukova dumka.
2. Mytropolskiy, Yu. O. & Khoma-Mohylska, S. H. (2005). Conditions for the existence of solutions of a periodic boundary-value problem for an inhomogeneous linear hyperbolic equation of the second order. I". *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 57, No. 7, pp. 912-921.
3. Mytropolskiy, Yu. O., Khoma, H. P. & Khoma-Mohylska, S. H. (2008). Solutions to the boundary-value periodic problem for the nonhomogeneous linear hyperbolic the second order equation. *Dopovidi Natsionalnoyi akademiyi nauk Ukrayiny*, No. 5, pp. 30-36.
4. Gentile, G., Mastropietro, V. & Procesi, M. (2005). Periodic solution for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions. *Comm. Math. Phys*, Vol. 256, No. 2, pp. 437-490.
5. Pavlenko, V. N. & Petrash, T. A. (2012). Periodic solutions of the equation of oscillations of the string with boundary conditions of the Neumann and Dirichlet and discontinuous nonlinearity. *Trudy Institutu Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, Vol. 18, No. 2, pp. 199-204.
6. Rudakov, I. A. (2005). A nontrivial periodic solution of the nonlinear wave equation with homogeneous boundary conditions. *Differentsialnyye Uravneniya*, Vol. 41, No. 10, pp. 1392-1399.
7. Rudakov, I. A. (2007). Periodic solutions of a nonlinear wave equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions. *Russian Math*, Vol. 537, No. 2, pp. 44-52.
8. Ptashnyk, B. Yo., Ilkiv, V. S., Kmit, I. Ya. & Polishchuk, V. M. (2002). Nonlocal boundary-value problems for equations with partial derivatives. Kyiv: Naukova dumka.
9. Ptashnyk, B. Yo. & Repetylo, S. M. (2012). Dirichlet-Neumann problem for a system of equations with partial derivatives with constant coefficients. *Applied Problems of Mechanics and Mathematics*, Vol. 10, pp. 7-14.
10. Ptashnyk, B. Yo. & Repetylo, S. M. (2013). Dirichlet-Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients. *Matematychni Metody ta Fyzyko-Mekhanichni Polya*, Vol. 56, No. 3, pp. 15-28.
11. Repetylo, S. M. (2013). The Dirichlet-Neumann problem for second order linear hyperbolic equations in a strip. *Journal of National University "Lvivska Politechnika" "Physical & mathematical sciences"*, Vol. 768, No. 768, pp. 26-33.
12. Rabinowitz, P. (1967). Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 20, No. 1, pp. 145-205.
13. Veyvoda, O. & Shtedry, M. (1984). The existence of classical periodic solutions of the wave equation: The connection between the theoretic-numerical nature of a period and the geometric properties of solutions. *Differentsialnyye Uravneniya*, Vol. XX, No. 10, pp. 1733-1739.
14. Khoma, N. H., Khoma-Mohylska, S. H. & Khokhlova, L. H. (2016). Existence condition of 2π -periodic smooth solution to the quasi-linear equation of hyperbolic type. *Вісник Запорізького національного університету: збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*, No. 1, pp. 257-264.

УДК 539.374

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-16

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С ПЛОЩАДКОЙ ТЕКУЧЕСТИ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор, Лабибов Р. Р., аспирант

*Днепровский национальный университет им. Олеса Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина*

postrediori@gmail.com

Для описания текучести стали используется обобщенный вариант теории течения с комбинированным упрочнением в предположении, что поведение материала на пике-зубе течения и последующее резкое падение напряжения течения связано с освобождением дислокаций. Особенность теории состоит в том, что она улавливает прерывистость течения на площадке текучести.

Ключевые слова: текучесть, локализация, прерывистая деформация, упрочнение.

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ ДЛЯ МАТЕРІАЛІВ З ПЛОЩИНЮ ТЕКУЧОСТІ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., професор, Лабібов Р. Р., аспірант

*Дніпровський національний університет ім. Олеса Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010, Україна*

postrediori@gmail.com

Для опису текучості сталі використовується узагальнений варіант теорії течії з комбінованим зміцненням у припущенні, що поведінка матеріалу на піку-зубі течії і подальше різке падіння напружень пов'язане з вивільненням дислокацій. Особливість теорії полягає у тому, що вона добре описує не монотонність течії, площину текучості і подальше зміцнення, а також вплив ефекту Баушингера на площині текучості та на ділянці зміцнення.

У класичній моделі ідеальної пластично-пружної поведінки пластична текучість зразка розглядається як однорідний процес. Вважається, що неоднорідності у формі смуг Людерса підтверджують зсувний характер деформації текучості.

Експериментальні дані [1, 2, 3] показують, що пластична деформація в умовах одноосового розтягу і тиску пов'язана з розповсюдженням фронту текучості, який розділяє зразок на області пружної деформації та області пластичної деформації, де деформація дорівнює деформації Людерса ϵ_L . У роботі показано, що область нестабільної пластичної деформації, що розповсюджується на макрорівні, є областю перервної деформації.

Приймаються дві основні гіпотези нестабільної пластичної течії. Перша гіпотеза, що описана у [1], стверджує, що існування верхньої межі текучості пов'язане з затримкою дислокацій у «атмосферах» навколо атомів нітрогену та вуглецю. У результаті для початку руху дислокаціям необхідно подолати більший супротив цих атмосфер. Друга гіпотеза, описана у [2], пов'язує падіння напружень із збільшенням кількості дислокацій. Таким чином, із збільшенням кількості рухомих дислокацій зменшуються мінімальні напруження, що необхідні для початку руху інших дислокацій.

Одноосову модель розповсюдження дислокацій [4], що пов'язує падіння напружень на початку текучості, було розширено та використано для опису перервної деформації кручення сталевих стрижнів на основі експериментальних даних [5].

Ключові слова: текучість, локалізація, преривчаста деформація, зміцнення.

PLASTICITY THEORY OF MATERIALS WITH YIELDING PLANE

Chernyakov Yu. A., D.Sc. in Phys. and Maths, Prof., Labibov R. R., Graduate Student

*Oles Honchar Dnipro national university,
Gagarina ave., 72, Dnipro, 49010, Ukraine*

postrediori@gmail.com

Generalized type of yielding theory with combined hardening with the assumption that the behavior of the material on the yielding peak and the following abrupt decrease of stresses is connected to the release of dislocations is used to describe the process of yielding of steel. The well-imposed description

of non-monotonous yielding, yielding plateau, and subsequent hardening as well as Bauschinger effect during yielding and hardening are the peculiarity of the proposed theory.

Plastic yielding of a specimen is considered to be a uniform process according to the classical model of ideal plastic-elastic behavior. The emerging discrepancies in a form of Lüders bands are considered to be a confirmation of the shear deformation nature of yielding.

Empirical data in [1-3] show that plastic deformation during uniaxial tension and compression is connected to the advancement of yielding front that divides a specimen into a domain of plastic deformation with strains equal to Lüders deformation ε_L , and elastic domain. Unstable plastic deformation that is developed on a macro-level is explicitly shown to be discontinuous deformation.

Two major hypothesis of unstable yielding are accepted. The first [1] states that the existence of high yielding limit is connected to dislocation holding in “atmospheres” forming around atoms of nitrogen and carbon. As a result initial dislocation movement requires higher stresses to release from these atmospheres than to advance further. The second hypothesis [2] connects stress drop with an increase of dislocation population. Thus stresses required for dislocation movement decreases as the number of shifting dislocation number rise.

Uniaxial model [4] of dislocation propagation is connected with load drop at the beginning of yielding was generalized in [5] and was used to predict discontinuous deformation of steel bar twisting.

Key words: yielding, localization, discontinuous deformation, hardening.

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментально установлено [1-3], что при одноосном растяжении (сжатии) пластическое деформирование на площадке текучести связано с продвижением фронта пластической деформации, разделяющего стержень на область пластического деформирования, деформация в которой равна деформации Людерса ε_L , и области упругого деформирования. Было обращено внимание и на неустойчивость пластического деформирования, которая на макроскопическом уровне проявляется как прерывистая деформация.

В настоящее время приняты две основные гипотезы неустойчивого течения. В соответствии с первой, существование верхнего предела текучести в [1] связывают с закреплением дислокаций в «атмосферах», которые формируются вокруг атомов углерода и азота. Как следствие, начальное перемещение дислокаций требует более высокого напряжения для освобождения из этих атмосфер, чем для последующего движения. Во второй [2] – падение напряжений связывают с размножением дислокаций. С ростом числа подвижных дислокаций напряжение, требуемое для их перемещения, уменьшается.

Одномерная модель [4] размножения дислокаций, связанная с падением нагрузки в начале течения, была обобщена в работе [5] и использовалась для предсказания неоднородной деформации при кручении стальных стержней.

Серия экспериментов, проведенных в работах [6-8], наводит на мысль о пересмотре классической трактовки идеальной пластичности. Как показано в этих экспериментах, пластическая деформация на площадке текучести развивается за счет распространения полос скольжения Людерса-Чернова по длине образца. При этом в каждый момент времени имеет место течение вдоль одной или нескольких полос Людерса, пока вдоль них не будет достигнута пластическая деформация, отвечающая длине площадки текучести. Далее образуется новая полоса на некотором расстоянии от предыдущей, и пластическое течение продолжается.

Намного позже [9] использовали подобную формулировку для введения начального резкого падения нагрузки. Такое поведение с разупрочнением переходит в стандартное упрочнение при определенной деформации и таким образом создает необходимое падение нагрузки, приводящее к распространению области неустойчивости, как показано в [10].

Попытки описания явления локализованного пластического течения в работах [11-13] были направлены на анализ различных уточнений и дополнений к классическим уравнениям пластического состояния. Среди полученных авторами численных результатов имеются более или менее близкие к экспериментальным данным о пластическом течении. При этом можно указать на сильную чувствительность результатов к выбранному классу моделей.

Используемые методики неизбежно приводят к «реально» падающему участку диаграммы напряжений-деформаций, что позволяет провести аналогии между поведением при пластической локализации и разупрочнении. Предпринимались попытки рассмотрения градиентных теорий, позволяющих в полной мере описывать все характерные для площадки текучести эффекты. Так, в [14] представлена модификация уравнений состояния, которая позволяет получить пик-зуб заданной амплитуды в зависимости от пространственной конфигурации зерен и их размера.

В работе [16] была предложена континуальная теория пластического течения с комбинированным упрочнением для материалов с площадкой текучести. Теория позволила описать площадку текучести и участок упрочнения при одноосном нагружении, а также деформацию при мягком циклическом нагружении на площадке текучести. В настоящей работе показано, что вышеуказанный вариант теории течения [16] применяется для описания прерывистого характера деформации при жестком нагружении.

КОНТИНУАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Континуальная теория пластического течения с комбинированным упрочнением для материалов с площадкой текучести [16] использует условие текучести вида

$$f \equiv \sqrt{(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) / 2} - R(\lambda) = 0, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ – девиатор остаточных напряжений, определяющий кинематическое упрочнение, $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}/3$ – девиатор тензора напряжений Коши. Особенность теории состоит в том, сила сопротивления движению дислокаций $R(\lambda)$ представляется в виде суммы двух слагаемых

$$R(\lambda) = R_1(\lambda) + R_2(\lambda), \quad (2)$$

где $R_1(\lambda)$ – функция разупрочнения, связанная с освобождением дислокаций на площадке текучести, $R_2(\lambda)$ – функция упрочнения, связанная с движением дислокаций; причем $R_1(0) + R_2(0) = \sigma_s$ и σ_s – начальный предел текучести.

Из принципа градиентальности, с учетом условия текучести (1), имеем

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{N}, \quad (3)$$

где $\dot{\lambda}$ – пластический множитель, \mathbf{N} – направляющий девиатор ($\mathbf{N} : \mathbf{N} / 2 = 1$),

$$\mathbf{N} = \frac{(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})}{2\bar{\rho}}, \quad (\bar{\rho} = \sqrt{(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) / 2}).$$

Скорость изменения параметров изотропного и кинематического упрочнения задается пропорциональными интенсивности скорости пластической деформации сдвига $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \beta_0 (\alpha_0 \mathbf{N} - \boldsymbol{\alpha}) \dot{\lambda}, \quad \dot{R}_k = \beta_k (\bar{R}_k - R_k) \dot{\lambda}, \quad R_k(0) = R_{k0}, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

где \bar{R}_k , R_{k0} , β_0 , α_0 – постоянные материала.

ОДНООСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ СТЕРЖНЯ

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения, один конец которого закреплен, а на другом задано перемещение с постоянной скоростью V (жесткое нагружение) (Рис. 1). В упругом и в упругопластическом режиме, при условии, что материал упрочняется, распределение деформации в стержне остается однородным. Если же материал разупрочняется, то определяющие уравнения допускают бесконечное множество решений с

неоднородным распределением деформации. Пластическая область может локализоваться в сколь угодно малой области и стержень может исчерпать несущую способность при произвольно малой диссипации.

Как отмечалось выше, пластическая деформация развивается за счет роста протяженности пластической области I длины l , в которой деформация достигла величины ε_L , как показано на рис. 1. Такой рост происходит на участке II стержня длиной $\Delta l = d$. На участке II осуществляется переход из точки A на диаграмме материала в точку B . Величина d является параметром материала и зависит от микроструктуры (например, от размера зерна). В области III имеет место упругое деформирование. Когда область II достигает конца стержня, а протяженность области III становится нулевой, осуществляется переход к участку упрочнения.

Опишем квазистатический процесс деформирования стержня, при котором его длина увеличилась на значение $\Delta u = V\Delta t$, где V – скорость перемещения конца стержня, Δt – время. При перемещении конца стержня на расстояние Δu к пластической области добавится участок длины Δl , который перейдет из упругого состояния в пластическое. Выразим приращение длины всего образца Δu через приращения длины каждой области (I)-(III):

$$V\Delta t \equiv \Delta u = \Delta u_I + \Delta u_{II} + \Delta u_{III}. \quad (5)$$

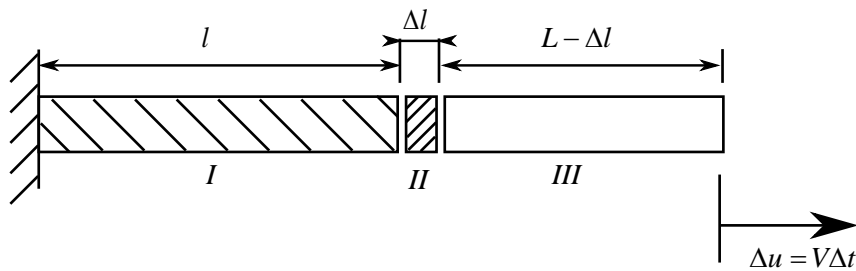


Рис. 1. Области пластичности (I), упругости (III) и текучести (III) в образце

Изменение длины пластической области будет зависеть от того, падают или растут напряжения в области (I):

$$\Delta u_I = \begin{cases} \Delta\sigma l/H, & \Delta\sigma > 0, \\ \Delta\sigma l/E, & \Delta\sigma < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где E – упругий модуль, H – модуль упрочнения в точке B диаграммы материала. Для области (II), где происходит пластическое течение:

$$\Delta u_{II} = \varepsilon_L \Delta l = \varepsilon_L c_p \Delta t, \quad (7)$$

где c_p – скорость распространения фронта пластической деформации в стержне. Приращение длины упругой области имеет вид:

$$\Delta u_{III} = \Delta\sigma(L-l)/E, \quad (8)$$

где $\Delta\sigma$ – изменение напряжений в образце.

Подставляя (6)-(8), в (5) получим:

$$\Delta\sigma l/E + \varepsilon_L c_p \Delta t + \Delta\sigma(L-l)/E = V\Delta t.$$

Отсюда находим выражение для изменения напряжений в образце за время Δt :

$$\Delta\sigma = \frac{E}{L}(V - \varepsilon_L c_p)\Delta t. \quad (9)$$

Так как описанный процесс локализации площадки текучести в слое ширины d занимает некоторое время Δt , то при рассмотрении эксперимента с образцом целесообразно определить скорость движения пластического фронта $V = d/\Delta t$. При достаточном размере локализованной области d по отношению к размеру образца L можно наблюдать приращение каждого отдельного слоя к области пластичности в виде периодических колебаний на диаграмме площадки текучести образца (Рис. 2).

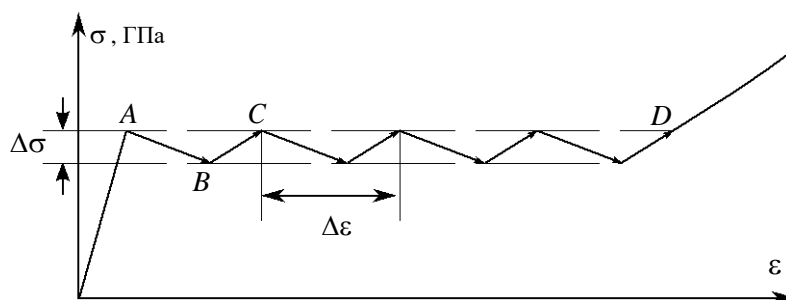


Рис. 2. Колебания на площадке текучести при одноосной деформации стержня

Если на площадке текучести образца схематически выделить осцилляции, то каждому приращению локализованного слоя к пластической области отвечает участок $A-B-C$, который привносит свою часть пластической деформации Людерса $\Delta\varepsilon_L$. Участок $A-B$ отвечает за разупрочнение каждого приращенного локализованного слоя. Модуль разупрочнения K здесь равен $K = dR(0)/d\lambda$. Участок $B-C$ отвечает упрочнению элементарного слоя, модуль упрочнения H равен модулю упрочнения образца после достижения точки D и равен $H = dR(\varepsilon_L)/d\lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ МАТЕРИАЛА

Для полного описания напряженно-деформируемого состояния материала не хватает значения R_1 , влияние которого проявляется только на участке локализованного течения II (Рис. 1). Оценить его можно используя экспериментальные данные.

В работе [8] была использована сталь-25 со следующими параметрами: $\varepsilon_L = 1,75\%$. Растяжение образца происходило со скоростью $\dot{L}/L = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. При этом фронт локализации перемещался вдоль образца со скоростью $V_p = 5 \times 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$. По результатам эксперимента на одноосное растяжение были составлены зависимости напряжений и деформаций в зависимости от времени. У материала наблюдалась явно выраженная площадка текучести, следующая за участком упругости. На площадке текучести напряжения не были постоянными и совершали периодические осцилляции с амплитудой по напряжениям $\Delta\sigma = 14,7 \text{ МПа}$. Период осцилляций составлял $\Delta t = 13 \text{ sec}$, что отвечало деформации $\Delta\varepsilon_L = 0,1\%$. Используя эти параметры, находим $R_{10} = 0,04$, $R_{20} = 0,05$. Данные значения коэффициентов позволяют получить полное описание материала на площадке текучести.

ВЫВОДЫ

Проведенная оценка дает основание полагать, что теория пластического течения с комбинированным упрочнением позволяет описать прерывистость пластического течения материала с площадкой текучести при жестком нагружении.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cottrell A. H., Bilby B. A. Dislocation Theory of Yielding and Strain Ageing of Iron. *Proceedings of the Physical Society. Section A.* 1949. 62.
2. Johnston W. G., Gilman J. J. Dislocation Velocities, Dislocation Densities, and Plastic Flow in Lithium Fluoride Crystals. *Journal of Applied Physics.* 1959. 30. P. 129–144.
3. Hall E. O. Yield point phenomena in metals and alloys. Plenum Press, 1970.
4. Hahn G. A. model for yielding with special reference to the yield-point phenomena of iron and related bcc metals. *Acta Metallurgica.* 1962. 10. P. 727–738.
5. Shioya T., Shioiri J. Elastic-plastic analysis of the yield process in mild steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1976. 24. P. 187–204.
6. Shaw J. A., Kyriakides S. Thermomechanical aspects of NiTi. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1995. 43. P. 1243–1281.
7. Shaw J. A., Kyriakides S. Initiation and Propagation of Localized Deformation in Elasto-Plastic Strips Under Uniaxial Tension. *International Journal of Plasticity.* 1998. 13. P. 837–871.
8. Kyriakides S., Miller J. E. On the Propagation of Luders Bands in Steel Strips. *Journal of Applied Mechanics.* 2000. 67. P. 645–654.
9. Yoshida F., Kaneda Y., Yamamoto S. A plasticity model describing yield-point phenomena of steels and its application to FE simulation of temper rolling. *International Journal of Plasticity.* 2008. 24. P. 1792–1818.
10. Kyriakides S. Buckle propagation in pipe-in-pipe systems. Part I. Experiments. *International Journal of Solids and Structures.* 2002. 39. P. 351–366.
11. Needleman A., Rice J. Limits to Ductility Set by Plastic Flow Localization. *Mechanics of Sheet Metal Forming.* – 1978.
12. Needleman A., Tvergaard V. Analyses of Plastic Flow Localization in Metals. *Annalen der Physik.* 1992. 45. P. 3–18.
13. Zuev L. On the waves of plastic flow localization in pure metals and alloys. *Вопросы механики твердого тела.* 2007. 16. P. 286–310.
14. Dowling N. Fatigue Failure Predictions for Complicated Stress-Strain Histories. 1971.
15. Frederick C. O., Armstrong P. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Materials at High Temperatures.* 2007. 24. P. 1–26.
16. Лабібов Р. Р., Черняков Ю. А. Феноменологічна теорія пластического течения на площадке текучести. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка.* 2016. №5 (24), Вип. 20. С. 99–107.

REFERENCES

17. Cottrell, A. H. & Bilby, B. A. (1949). Dislocation Theory of Yielding and Strain Ageing of Iron. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 62.
18. Johnston, W. G. & Gilman, J. J. (1959). Dislocation Velocities, Dislocation Densities, and Plastic Flow in Lithium Fluoride Crystals. *Journal of Applied Physics*, 30, pp. 129-144.
19. Hall, E. O. (1970). Yield point phenomena in metals and alloys. Plenum Press.
20. Hahn, G. A. (1962). Model for yielding with special reference to the yield-point phenomena of iron and related bcc metals. *Acta Metallurgica*, 10, pp. 727-738.
21. Shioya, T. & Shioiri, J. (1976). Elastic-plastic analysis of the yield process in mild steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24, pp. 187-204.
22. Shaw, J. A. & Kyriakides, S. (1995). Thermomechanical aspects of NiTi. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43, pp. 1243-1281.

23. Shaw, J. A. & Kyriakides, S. (1998). Initiation and Propagation of Localized Deformation in Elasto-Plastic Strips Under Uniaxial Tension. *International Journal of Plasticity*, 13, pp. 837-871.
24. Kyriakides, S. & Miller, J. E. (2000). On the Propagation of Luders Bands in Steel Strips. *Journal of Applied Mechanics*, 67, pp. 645-654.
25. Yoshida, F., Kaneda, Y. & Yamamoto, S. (2008). A plasticity model describing yield-point phenomena of steels and its application to FE simulation of temper rolling. *International Journal of Plasticity*, 24, pp. 1792-1818.
26. Kyriakides, S. (2002). Buckle propagation in pipe-in-pipe systems. Part I. Experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 351-366.
27. Needleman, A. & Rice, J. (1978). Limits to Ductility Set by Plastic Flow Localization. *Mechanics of Sheet Metal Forming*.
28. Needleman, A. & Tvergaard, V. (1992). Analyses of Plastic Flow Localization in Metals. *Annalen der Physik*, 45, pp. 3-18.
29. Zuev, L. (2007). On the waves of plastic flow localization in pure metals and alloys. *Voprosy mekhaniki tverdogo tela*, 16, pp. 286-310.
30. Dowling, N. (1971). Fatigue Failure Predictions for Complicated Stress-Strain Histories.
31. Frederick, C. O. & Armstrong, P. (2007). A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Materials at High Temperatures*, 24, pp. 1-26.
16. Labibov, R. R. & Chernyakov, Yu. A. (2016). Phenomenological theory of plastic flow at the flow area. *Visnyk Dnipropetrovs'koho universytetu. Seriya: Mekhanika*, No. 5(24), Iss. 20, pp. 99-107.

УДК

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

Іванов І. І., д. ф.-м. н., професор

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

ivan@mail.ru

До друку будуть прийматися лише наукові статті, де присутні такі необхідні елементи

(п. 3 Постанови президії ВАК України № 7 – 05 / 1 від 15 січня 2003 р.):

- **Постановка проблеми** у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.
- **Аналіз останніх досліджень і публікацій**, в яких започатковано порушення даної проблеми і на які спирається автор.
- **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми**, яким присвячується стаття.
- **Формулювання цілей статті** (постановка завдання).
- **Виклад основного матеріалу дослідження** з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.
- **Висновки з даного дослідження і перспективи** подальших розвідок у даному напрямку.

1. МАКЕТ СТОРІНКИ

Для оригінал-макета використовується формат А4 з такими полями:

з усіх боків – 2 см.

Шрифт набору – Times New Roman.

У разі необхідності для шрифтових виділень у таблицях і рисунках дозволяється застосовувати шрифт Courier New (наприклад, для ілюстрації текстів програм для ЕОМ). Для стилістичного виділення фрагментів тексту слід вживати начертання *курсив*, **напівжирний**, *напівжирний курсив* зі збереженням гарнітури, розміру шрифту та інтервалу абзацу.

Гарнітури, розміри шрифтів та начертання:

- a) для УДК: Times New Roman, – 14 пт, усі літери прописні;
- b) для заголовку статті: Times New Roman, – 14 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- c) для підзаголовків: Times New Roman, – 12 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- d) для прізвищ, ініціалів авторів, адреси електронної пошти: Times New Roman – 12 пт, усі строчні;
- e) для назв і адрес організацій: Times New Roman – 12 пт, курсив, усі строчні;
- f) для анотацій, виносков, посилань, підписів до рисунків та надписів над таблицями: Times New Roman – 10 пт;
- g) для ключових слів: Times New Roman – 10 пт, курсив;
- h) для основного тексту: Times New Roman – 12 пт, як у реченні.

Інтервал між абзацами – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

2. ТИПОГРАФСЬКІ ПОГОДЖЕННЯ ТА СТИЛІ

УДК вказується в першому рядку сторінки і вирівнюється за лівим краєм. Заголовок статті набирається в наступному за УДК рядку і вирівнюється по центру. У третьому рядку з вирівнюванням по центру зазначаються прізвища, ініціали авторів. У наступному рядку розміщується інформація про назву та адресу організації, де працює (навчається) автор, яка також вирівнюється по центру. Четвертий рядок містить адресу електронної пошти авторів, розміщену по центру. Далі розташовується анотація (3-5 речень) і ключові слова мовою оригіналу та анотація українською або російською мовами (залежно від мови оригіналу). З наступного абзацу послідовно набираються і вирівнюються по центру заголовок статті англійською мовою, транслітеровані прізвища, ініціали авторів, назви і адреси організацій, які повинні бути подані англійською мовою, із зазначенням міста і країни, без назви вулиці, яка подається транслітерацією. З наступного рядка розміщується розширена (обсягом не менше 3,5 тис. знаків) анотація із ключовими словами англійською мовою. Після анотацій з абзацу викладається основний текст статті.

Заголовки наукових статей повинні бути інформативними та містити тільки загальноприйняті скорочення. У перекладі заголовків статей англійською мовою не повинно бути жодних транслітерацій, окрім неперекладних назв власних імен, приладів та інших об'єктів, що мають власні назви; також не використовується неперекладний сленг. Це стосується також анотацій і ключових слів.

Початок абзацу основного тексту виділяється збільшеним інтервалом між абзацами і не виділяється відступом або пустим рядком.

Ілюстрації мають бути оригінальними рисунками або фотографіями. Фотографії скануються у 256 градаціях сірого. Ілюстрації розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні бути підписані та послідовно пронумеровані арабськими цифрами: Рис. 1, Рис. 2. Номер рисунка та підпис розміщуються безпосередньо під рисунком. Кожен рисунок та підписи до нього включаються до тексту публікації. Створення графічних об'єктів може здійснюватися будь-яким графічним редактором у форматі BMP файлів. Виконання рисунків засобами Microsoft Word здійснюється через використання команд панелі «Рисование». Підписи здійснюються командою «Надпись». Усі графічні компоненти рисунка і підписи об'єднуються командою «Группировать» (меню «Действия» на панелі «Рисование») і подаються у вигляді одного графічного об'єкта, прив'язаного до тексту з об'єктом «В тексте». Ілюстрації готують та масштабують так, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір літер основного тексту статті більше, ніж на 50%.

Ілюстрації, так само як і підписи до них, вирівнюються на середину рядка (за виключенням невеликих рисунків – не більш 7 см, які можуть розташовуватися по декілька в ряд).

Таблиці розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні містити назву та бути послідовно пронумерованими арабськими цифрами: Таблица 1, Таблица 2. Номер та назва таблиці розміщують над таблицями.

Посилання на літературні джерела послідовно нумеруються арабськими цифрами в порядку появи в тексті статті і зазначаються у квадратних дужках, де вказуються порядковий номер джерела та через кому конкретна сторінка [8, с.16]. Перелік літературних джерел мовою оригіналу подається в порядку їх нумерації після основного тексту статті з підзаголовком «ЛІТЕРАТУРА», який вирівнюється по центру. Список літератури оформлюється відповідно до ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання».

З наступного абзацу подається перелік літературних джерел латиницею з підзаголовком «REFERENCES», який вирівнюється по центру.

3. СТИЛІСТИЧНІ ПОГОДЖЕННЯ

- Не допускається закінчення сторінки одним або декількома пустими рядками, за винятком випадків, спричинених необхідністю дотримання попереднього пункту (висячі підзаголовки і початок абзацу) та кінця статті.
- Не допускається починати сторінку незакінченим рядком (переноси в останньому рядковій заборонені).
- Не дозволяється підкреслювання в заголовках, підписах і надписах.
- Слід дотримуватися правила про мінімальні зміни в шрифтовому та стильовому оформленні сторінки для того, щоб максимально уникнути різноманітності макета і зберегти єдиний стиль збірника.
- Не допускається часте використання виносок (виноска повинна розглядатися як виняток і вживатися тільки у випадку дійсної необхідності).
- Ілюстрації мають бути підготовані та масштабовані таким чином, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір букв основного тексту статті більш ніж на 50%.
- Сторінки тексту статті слід пронумерувати.
- Диск треба підписати, вказавши прізвище, ініціали автора, імена файлів.
- На диску повинно бути **два файли**:
 - ✓ **перший** – із текстом статті та анотацій з ключовими словами,
 - ✓ **другий** – із відомостями про авторів (прізвище, ім'я, по батькові; посада; вчений ступінь; учене звання; місце роботи або навчання; адреса електронної пошти; домашня адреса; номери контактних телефонів).

4. ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ СТАТТІ АВТОРУ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО РЕДАКЦІЇ ЗБІРНИКА:

1. Роздрукований текст статті з анотаціями та ключовими словами.
2. Відомості про авторів.
3. Витяг з протоколу засідання кафедри або факультету.
4. Зовнішню рецензію.
5. Диск із текстом статті, анотацій, ключовими словами та відомостями про авторів.

Адреса редакції: Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

Довідки за телефонами:

(061) 289-12-52 – відповідальний за випуск (технічний редактор)

(061) 228-75-21 – редакційно-видавничий відділ (IV корпус, кімн. 323)

Адреса електронної пошти:

kpmf.mf@znu.edu.ua

ПРОЦЕС РЕЦЕНЗУВАННЯ

До публікації у журналі всі рукописи спочатку розглядаються редакторами на предмет оцінки їх відповідності тематиці і вимогам журналу. Після рішення редакторів представлені рукописи спрямовуються експертам, працюючим у відповідній області. **Рукопис проходить одностороннє сліпе рецензування:** автори не знають рецензента; рецензенти знають авторів.

Рецензування існує для того, щоб журнали публікували високоякісні наукові дослідження. Зміни та покращення статті є частиною процесу публікації. **Рецензування є позитивним процесом і** невід'ємною частиною наукової публікації, що підтверджує високу якість наукових статей. Рецензенти, які вкладають свій час для поліпшення Вашої статті, є експертами з тематики наукового дослідження, викладеного у статті.

У процесі рецензування матеріал статті має стати більш достовірним. Рецензенти можуть вказати на недоліки у роботі, які вимагають більш докладного пояснення або додаткових досліджень і експериментів. Матеріал статті повинен стати більш доступним для сприйняття. Якщо якісь моменти у роботі є важкими для сприйняття читачами, рецензенти можуть попросити їх виправити. Рецензенти розглядають дослідження на предмет важливості в рамках своєї предметної області. Інший аспект наявності політики рецензування у журналі: редакція має бути впевненою, що публікує тільки якісні матеріали у своєму виданні.

Поширені причини для відмови публікації

Відмова в публікації статті, можлива, якщо:

- стаття неправильно структурована;
- стаття недостатньо кваліфіковано деталізована для розуміння постановки задачі та аналізу, запропонованих авторами;
- у статті недостатньо сформульована наукова новизна;
- відсутність достатньої кількості актуальних посилань на літературні джерела;
- стаття містить теорії, концепції або висновки, які не повністю підкріплені даними аналізу, аргументами, наданою інформацією;
- стаття не забезпечує досить докладний опис методів і матеріалів, які б дозволили іншим ученим повторити теоретичне дослідження та експеримент;
- у статті відсутні чіткі описи чи пояснення гіпотез, що перевірялись, описи експериментів, прикладів статистичних або експериментальних вибірок;
- у статті недостатньо описано методику проведення експериментів;
- зауваження до якості мови написання.

Повторний розгляд статті та відповідь на зауваження рецензента

За повторного перегляду статті та відповіді на зауваження рецензентів необхідно:

- звернути увагу на всі зауваження, які надані редактором і рецензентом;
- описати всі зміни в статті у зворотному листі;
- виконати додаткові експерименти або аналізи, які рекомендує рецензент, або дати докладне обґрунтування, чому цього не потрібно робити;
- у зворотному листі описати окремо всі моменти, в яких Ви згодні з рецензентом і в яких не згодні;
- забезпечити ввічливе і наукове обґрунтування моментів, з якими Ви не згодні;
- чітко зазначити всі зміни у статті, які Ви внесли;
- повернути переглянутий рукопис і зворотний лист в строк, встановлений редактором.

Пам'ятайте, що рецензент є експертом у Вашій предметній області. Якщо пропозиції, які вносить рецензент не вірні, то це, ймовірно, тому що рецензент не вірно зрозумів Вашу роботу. Це значить, що Ваша робота написана важко для сприйняття, а значить і читач не зможе належним чином розібратися у Вашому дослідженні. Таким чином, Вам слід зробити текст статті більш чітким і зрозумілим для читача.

Редакція не надає персональних даних рецензента, усе спілкування відбувається через редколегію журналу.

Важливо бути наполегливим при спробі опублікувати статтю. Якщо вчасно, коректно і науково обґрунтовано відповідати на зауваження редакторів та рецензентів, можна в подальшому домогтися публікації статті.

Краще не обирати інший журнал, доки не сталася одна з наступних подій:

- редактор дав відповідь, що тематика Вашої роботи в корені не відповідає тематиці журналу;
- редактор дає відмову Вашому рукопису без права його повторного надання;
- Вашому рукопису дали відмову навіть після того, як Ви відповіли на всі виправлення і коментарі рецензента;
- Ви отримали відмову від рецензента.

Публікація є складним процесом, тому Ви повинні бути готовим працювати над своєю статтею, відповідаючи на коментарі як редакторів, так і рецензентів, і вносити необхідні виправлення у Вашу роботу.

PROCESS OF REVIEW

Before publication in the journal, all manuscripts are initially considered by the editors to evaluate their compliance with the topics and requirements of the journal. After the editors' decision, the submitted manuscripts are sent to experts working in the relevant field. The manuscript passes a one-sided blind review: the authors do not know the reviewer; reviewers know the authors.

There is a review to ensure that journals publish high-quality research. Changes and improvements to the article are part of the publishing process. Reviewing is a positive process and an integral part of scientific publication, which confirms the high quality of scientific articles. Reviewers who invest time to improve your article are experts on the subject of scientific research outlined in the article.

In the review process, the material of the article should become more reliable. Reviewers may indicate disadvantages in the work that require more detailed explanation or additional research and experiments. The material of the article should become more accessible for perception. If any moments in the work are difficult for readers to perceive, reviewers may ask to correct them. Reviewers consider research on relevance within their subject area. Another aspect of the existence of a review policy in magazines: the editorial should be sure that publishes only qualitative materials in their publication.

Common Reasons to Discard Publication

Refusal to publish an article is possible in the following situations:

- the article is incorrectly structured;
- the article is insufficiently qualified in detail to understand the problem statement and analysis proposed by the authors;
- scientific novelty in the article is not sufficiently formulated;
- lack of sufficient number of actual references to literary sources;
- the article contains theories, concepts or conclusions that are not fully supported by the analysis data, the arguments provided by the information;
- the article does not provide a sufficiently detailed description of the methods and materials that would allow other scientists to repeat the theoretical study and experiment;
- the article does not contain clear descriptions or explanations of the hypotheses that were tested, description of experiments, examples of statistical or experimental samples;
- the article does not describe enough the technique of conducting experiments;
- remarks on the quality of the writing language.

Repeated review of the article and the response to the reviewer's remarks

For reconsideration of the article and responses to comments by reviewers, you must:

- pay attention to all comments provided by the editor and reviewers;
- describe all changes in the article in the reverse letter;
- perform additional experiments or analyzes that the reviewer recommends, or provide a detailed justification why this does not need to be done;
- in a return letter describe separately all the points in which you agree with the reviewer and which do not agree;
- provide a polite and scientific justification of the moments you disagree with;
- clearly state all changes in the article you have made;
- return the revised manuscript and the letter back in time set by the editor.

Remember that the reviewer is an expert in your subject area. If the suggestions made by the reviewer are not correct, then this is probably because the reviewer did not understand your work correctly. This means that your work is written hard to perceive, and therefore the reader will not be able to properly understand your research. Thus, you should make the text of the article more clear and understandable to the reader.

The editorial staff does not provide personal data to the reviewer, all communication takes place through the editorial board of the journal.

It's important to be persistent when you try to publish an article. If timely, correctly and scientifically substantiated to respond to the comments of editors and reviewers, you can further achieve the publication of the article.

It's better not to choose another journal until one of the following events has occurred:

- the editor replied that the topics of your work are fundamentally not relevant to the topic of the magazine, the editor refuses your manuscript without the right to re-submit it;
- Your manuscript was refused even after you answered all the corrections and comments by the reviewer;
- You have received a refusal from the reviewer.

Publication is a complex process, so you should be ready to work on your article, responding to comments from both editors and reviewers, and make the necessary corrections to your work.

Збірник наукових праць

Вісник Запорізького національного університету
Фізико-математичні науки
№ 1, 2018

Технічний редактор – *Н. В. Непритворна*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані
в редакційно-видавничому відділі
Запорізького національного університету
тел. (061) 289-12-98

Підписано до друку 29.01.2019. Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».

Умовн.-друк. арк. 23,7

Замовлення № 34. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет
69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 5229 від 11.10.2016