

Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет

Заснований  
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого  
засобу масової інформації  
Серія КВ № 15436-4008 ПР,  
22.06.2009 р.

Адреса редакції:  
Україна, 69600,  
м. Запоріжжя, МСП-41,  
вул. Жуковського, 66

# **В і с н и к**

## **Запорізького національного університету**

**Телефон**  
для довідок:  
(061) 289-12-52

**Факс:** (061) 764-45-46

- **Фізико-математичні науки**

**№ 2, 2017**

**Запоріжжя 2017**

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2017. – 342 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Наказ Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Вісник індексується під назвою «Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences» у таких наукометричних базах:

- INDEX COPERNICUS, ICV 2016: **65.80** (<https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=43958>);
- CiteFactor (<http://www.citefactor.org/>);
- ResearchBib (<http://paper.researchbib.com/>);
- Journal Factor (<http://www.journalfactor.org/>).

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 13 від «20» червня 2017 р.)

### РЕДАКЦІЙНА РАДА

Головний редактор	– Грищак В. З.,	доктор технічних наук, професор
Заступник головного редактора	– Гребенюк С. М.,	доктор технічних наук, доцент
Відповідальні редактори	– Гоменюк С. І., Приварников А. К., Клименко М. І., Чопоров С. В.,	доктор технічних наук, професор доктор фізико-математичних наук, професор кандидат фізико-математичних наук, доцент кандидат технічних наук, доцент

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Андріанов І. В.	– доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина)
Ванько В. І.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія)
Гіржон В. В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гоман О. Г.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гудрамович В. С.	– доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Козін І. В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Колаковські З.	– доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща)
Кондрат'єва Н. О.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кузьменко В. І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Маневич Л. І.	– доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія)
Морачковський О. К.	– доктор технічних наук, професор
Ольшанецький В. Ю.	– доктор технічних наук, професор
Перепелиця В. О.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Пожуєв В. І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Толок О. В.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкин», Росія)
Швидка С. П.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент

## ЗМІСТ

<b>АЛЬ-АТАМНЕХ Б. Г. М.</b> АЛГОРИТМ ПОИСКА ОСОБЫХ ТОЧЕК ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИЕЙ .....	6
<b>BESSMERTNYI Y. O.</b> DEFORMATION AND STABILITY OF THIN-WALLED SHALLOW CONICAL SHELLS UNDER EXTERNAL PRESSURE AND PERIODICALLY DISCRETE BORDER FIXATION .....	14
<b>ГАЛЬЧЕНКО А. В.</b> ЗАХИСТ ПЕРСОНАЛЬНИХ ДАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ АЛГОРИТМІВ НЕОДНОЗНАЧНОГО ШИФРУВАННЯ .....	19
<b>ГРИЩАК В. З., ДЬЯЧЕНКО Н. Н.</b> ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ НА БАЗЕ ГИБРИДНОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОДХОДА .....	32
<b>ДЕМ'ЯНЕНКО А. Г., ГУРІДОВА В. О.</b> КОРОТКИЙ НАРИС ДОСЛІДЖЕНЬ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ СИСТЕМ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ НЕКЛАСИЧНИМ МЕТОДОМ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ.....	47
<b>КАИРОВ А. С., ВЛАСОВ О. И., ЛАТАНСКАЯ Л. А.</b> СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ.....	57
<b>КАРНАУХОВ В. Г., КОЗЛОВ В. І., КАРНАУХОВА Т. В.</b> ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ШАРНІРНО ОПЕРТОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ З П'ЄЗОСЕНСОРАМИ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ТА ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ.....	65
<b>КИРИЧОК І. Ф., СЕНЧЕНКОВ І. К., ЧЕРВІНКО О. П.</b> ВИМУШЕНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ВІБРОРОЗІГРІВ ГНУЧКОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ З П'ЄЗОСЕНСОРАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ .....	73
<b>КЛИМЕНКО М. І., ГРЕБЕНЮК С. М., БОГУСЛАВСЬКА А. М.</b> ТЕРМОПРУЖНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА З КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ТРАНСТРОПНИМ ВОЛОКНОМ .....	82
<b>КОСТРОВА М. М.</b> ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛАСТИЧНОГО ЦИЛИНДРА С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЖЕСТКОЙ ПОСАДКЕ .....	90
<b>КОСТРУБ Р. В.</b> ПОРІВНЯННЯ АЛГОРИТМІВ ОПТИМІЗАЦІЇ В ДЕЯКИХ ЗАДАЧАХ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ.....	101
<b>КУДІН О. В., БОРИСОВСЬКА Ю. О.</b> ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРОДОВЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КРУГЛИХ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ.....	107
<b>КУРАПОВ С. В., ДАВИДОВСКИЙ М. В.</b> ЕДИНИЧНЫЕ И ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ В ГРАФЕ.....	116
<b>ЛАТИФОВ Ф. С., МАМЕДОВ Р. А.</b> ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ .....	131
<b>ЛАТИФОВ Ф. С., МУСАЕВ З. С., МАМЕДРЗАЕВА Ф. Т.</b> ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТВЕРДОЙ СРЕДОЙ И ЖИДКОСТЬЮ.....	140
<b>ЛАТИФОВ Ф. С., ХАЛИЛОВА Э. Н.</b> КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТВЕРДОЙ СРЕДОЙ.....	149

<b>ЛЕОНТЬЕВА В. В., КОНДРАТЬЕВА Н. А.</b> ВОПРОСЫ МЕТОДОЛОГИИ АНАЛИЗА, УПРАВЛЕНИЯ, РЕГУЛИРОВАНИЯ, ИДЕНТИФИКАЦИИ И НАБЛЮДЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	157
<b>МАХОРКІН М. І., СКРИПОЧКА Т. А.</b> СИНГУЛЯРНІСТЬ НАПРУЖЕНЬ У БАГАТОКЛИНОВІЙ СИСТЕМІ, З ПОВ'ЯЗАНИМИ МІЖ СОБОЮ ПРУЖНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЇЇ ЕЛЕМЕНТІВ, ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ.....	170
<b>МІШАРІН А. С., ПОПОВ В. Г.</b> КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ТОНКОГО ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ З ТРІЩИНАМИ НА ПРОДОВЖЕННІ ЗА ГАРМОНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ.....	179
<b>НИКОЛИШИН М. М., ОПАНАСОВИЧ В. К., КУРОТЧИН Л. Р., СЛОБОДЯН М. С.</b> РОЗТЯГ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ПОВЕРХНЕВИМИ ТРІЩИНАМИ НА ПРЯМОЛІНІЙНІЙ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ.....	189
<b>НОВИЦЬКИЙ В. В., ЗІНЧУК М. О., ТЕТЕРЯТНИК О. В.</b> ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ СТАЦІОНАРНИМИ ПАРАМЕТРИЧНИМИ СИСТЕМАМИ.....	197
<b>ОПАНАСОВИЧ В. К., ЗВІЗЛО І. С., ЯЦИК І. М.</b> ЗГІН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З ДВОМА РІВНИМИ ЗСУНУТИМИ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ.....	207
<b>ПАНАСЕНКО Є. В.</b> ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА В ПРОСТОРИ ГІЛЬБЕРТА.....	216
<b>ПОПАДЮК І. Й.</b> МІШАНА ЗАДАЧА ФРИКЦІЙНОГО КОНТАКТУ КОАКСІАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ТА ПРУЖНОГО ЗАПОВНЮВАЧА.....	223
<b>ПЫШНОГРАЕВ Ю. Н., ШТАНЬКО А. И., ПЫШНОГРАЕВ Е. Ю.</b> АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДВУХСЛОЙНЫХ СРЕДАХ.....	236
<b>СВИТЛИНЕЦ А. М., ОНИЩЕНКО И. С., ЧЕРНЯКОВ Ю. А.</b> ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ТЕРМОСИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНУЮ НАГРУЗКУ ТРУБЫ ПРИ ЕЕ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ.....	242
<b>СИДОРОВ М. В.</b> ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ФУНКЦІЙ ГРІНА ТА КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА ДЛЯ ПОБУДОВИ ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ.....	250
<b>СЛОБОДЯН М. С., МАТУЛКА М. І., БЛАШ О. В.</b> ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ З АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОЮ КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ПОБЛИЗУ ЇЇ ВЕРШИН.....	260
<b>СПИЦЯ О. Г.</b> АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ.....	266
<b>ФАСОЛЯК А. В.</b> ДИНАМІКА НЕСКІНЧЕННО ДОВГОЇ, ПІДКРІПЛЕНОЇ ПОВЗДОВЖНИМИ РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ, ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ТРИВИМІРНОМУ ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ.....	277
<b>ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А., СУШКО Т. С., ЕРЕМЕНКО А. А.</b> ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ.....	290
<b>ЧЕРНЯКОВ Ю. А., СТЕБЛЯНКО П. А., ПЕТРОВ А. Д.</b> МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПСЕВДОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ.....	297
<b>ЧОПОРОВ С. В.</b> АВТОМАТИЗАЦИЯ АНАЛИЗА ТЕМПЕРАТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	304

<b>ШАЦЬКИЙ І. П., КУРТАШ І. С.</b> ЗАДАЧА ЗГИНУ ПЛАСТИНИ ІЗ ЗАПОВНЕНОЮ ЩІЛИНОЮ.....	317
<b>ШНЕЙДЕР В. П.</b> ТЕОРИЯ ГИПЕРУПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ МИКРОДЕФОРМАЦИИ ....	323
<b>ЯНЧЕВСКИЙ И. В., БАБАЕВ А. А.</b> УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ КОНИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧЕК КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ.....	332
<b>ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ».....</b>	<b>339</b>

УДК 519.688:519.6:514.752

## АЛГОРИТМ ПОИСКА ОСОБЫХ ТОЧЕК ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Аль-Атамнех Б. Г. М., аспирант

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

bega\_88@mail.ru

Предложен алгоритм построения сеточной модели геометрической области, описанной неявно с помощью функционального представления. Описаны реализованные подходы к оптимизации полученной сеточной модели по двум критериям: соотношению длин (площадей) соседних граничных сегментов и величине угла между ними. Приведены примеры построения сеточных моделей для нескольких плоских геометрических областей.

*Ключевые слова: математическая модель, геометрическая область, R-функция, FREP, сеточная модель, параллельные вычисления.*

## АЛГОРИТМ ПОШУКУ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК ГЕОМЕТРИЧНОЇ ОБЛАСТІ, ЗАДАНОЇ НЕЯВНОЮ ФУНКЦІЄЮ

Аль-Атамнех Б. Г. М., аспірант

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

bega\_88@mail.ru

Запропоновано алгоритм побудови сіткової моделі геометричної області, описаної неявно за допомогою функціонального подання. Описано реалізовані підходи до оптимізації отриманої сіткової моделі за двома критеріями: співвідношенням довжин (площ) сусідніх граничних сегментів і величиною кута між ними. Наведені приклади побудови сіткових моделей для кількох плоских геометричних областей.

*Ключові слова: математична модель, геометрична область, R-функція, FREP, сіткова модель, паралельні обчислення.*

## ALGORITHM OF SEARCHING FOR SPECIAL POINTS OF THE GEOMETRIC REGION, AS SET BY THE IMPLICIT FUNCTION

Al-Atamneh B. G. M., postgraduate

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

bega\_88@mail.ru

Numerical analysis of various classes of boundary value problems requires the generation of grid (discrete) models of geometric regions of complex shape. For example, the use of the finite element method is based on assuming the existence of a finite element model of the investigated region. The problem of constructing grid models can be divided into two independent tasks: 1) formalization of the description of the initial geometric domain (construction of its model in a form suitable for subsequent computer processing); and 2) construction of a grid model from the previously obtained formal description of the initial geometric domain. Classical approaches to solving the first problem are the use of framework, surface and solid geometric modeling. The main disadvantage of these approaches is the complexity of describing the geometric domain of non-standard form. In the event that there is no element in the library of geometric primitives, then the construction of a complex geometric model becomes problematic. One possible effective way to solve this problem is to describe geometric regions by means of functional relationships in the form of a certain real function that takes negative values outside the region. This approach to the description of geometric models is called Function Representation (FREP) and is a generalization of the theory of R-functions of V. Rvachev. Practical application of FREP involves a number of significant difficulties, as it is necessary to solve the following tasks: 1) automate the search for nodes on the boundary of the implicitly defined FREP-model

of the original geometric domain; 2) reconstruction of the boundary of the grid model of the original region from the existing set of support nodes on its boundary; 3) visualization of the FREP-model. Therefore, the solution of the above problems is currently an actual problem. In this paper, an algorithm for constructing the boundary of an implicitly defined geometric domain described in the form of a FREP-model is described. The implemented approaches to optimizing the resulting grid model are described by two criteria: the ratio of the lengths (areas) of neighboring boundary segments and the magnitude of the angle between them. Examples of the construction of grid models for several planar geometric regions are given.

*Key words: mathematical model, geometric domain, R-function, FREP, grid model, parallel computations.*

## ВВЕДЕНИЕ

Численный анализ различных классов краевых задач требует создания сеточных (дискретных) моделей геометрических областей сложной формы. Проблему построения сеточной модели можно разделить на две самостоятельные задачи: 1) формализация описания исходной геометрической области (построение ее формальной модели) и 2) построение сеточной модели по ранее полученному формальному описанию исходной геометрической области. Классическими подходами к решению первой задачи является использование каркасного, поверхностного и твердотельного геометрического моделирования [1]. Главным недостатком этих подходов является сложность описания геометрической области нестандартной формы.

Одним из возможных эффективных способов решения этой проблемы является описание геометрических областей с помощью соотношений вида  $F(x, y, z) \geq 0$ , где  $F(x, y, z)$  – вещественная функция, неявно аналитически описывающая поверхность и внутреннюю часть исходной геометрической области с помощью набора элементарных математических функций и логических операций над ними. Такой подход к описанию геометрических моделей называется Function Representation (FREP) [2] и является обобщением теории R-функций академика В. Л. Рвачева [3].

Практическое применение FREP сопряжено с рядом существенных трудностей, т. к. необходимо решение следующих задач:

- 1) автоматизация поиска узлов на границе неявно заданной FREP-модели исходной геометрической области;
- 2) реконструкция границы сеточной модели исходной области по имеющемуся набору опорных узлов на ее границе;
- 3) визуализации FREP-модели.

Поэтому решение вышеперечисленных задач является в настоящее время актуальной проблемой. В данной работе описан алгоритм построения границы неявно заданной геометрической области, описанной в виде FREP-модели.

## АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПОРНЫХ ТОЧЕК

Пусть имеется некоторая геометрическая область  $\Omega$ , граница которой  $\partial\Omega$  – геометрическое место точек, удовлетворяющих условию:

$$\partial\Omega = \{(x, y, z): F(x, y, z) = 0\}, \quad (1)$$

где  $F(x, y, z) = 0$  – FREP-модель  $\partial\Omega$ .

Одним из возможных способов построения множества опорных точек (узлов, принадлежащих  $\partial\Omega$ ) на границе FREP-модели, неявно описывающей  $\Omega$ , является так называемое шаговое сканирование (рис. 1) с использованием заданной фоновой (опорной) сетки, координаты узлов которой определяются, например, следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}x_i &= x_{min} + ih_x, \\y_i &= y_{min} + ih_y, \\z_i &= z_{min} + ih_z,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $(x_{min}, y_{min}, z_{min})$ ,  $(x_{max}, y_{max}, z_{max})$  – координаты начала и конца фоновой сетки;  $h_x = \frac{x_{max}-x_{min}}{n}$ ,  $h_y = \frac{y_{max}-y_{min}}{n}$ ,  $h_z = \frac{z_{max}-z_{min}}{n}$  – размер ячейки сетки;  $n$  – количество шагов (размер ячейки сетки);  $i = \overline{0, n-1}$ .

Рассмотрим работу алгоритма шагового сканирования на примере плоской геометрической области, изображенной на рис. 1. Ее FREP-модель может быть описана следующим соотношением:

$$F(x, y) = (r_1^2 - (x - a_1)^2 - (y - b_1)^2) \wedge \neg(r_2^2 - (x - a_2)^2 - (y - b_2)^2),\tag{3}$$

где  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  – координаты центров и радиусы двух окружностей (соответственно).

На первом этапе алгоритма строится фоновая сетка и выполняется поиск множества опорных узлов на границе исходной области  $\Omega$ , которые определяются, как пересечение линий фоновой сетки с  $\partial\Omega$  (рис. 1). Поиск узлов осуществляется из того соображения, что значение R-функции отрицательное за пределами области и положительное – внутри. Таким образом, поиск опорного узла начинается тогда, когда значение R-функции имеет разные знаки на концах образующей текущей ячейки фоновой сетки. Поиск нулевого значения R-функции можно выполнять разными способами, например, с использованием метода дихотомии.

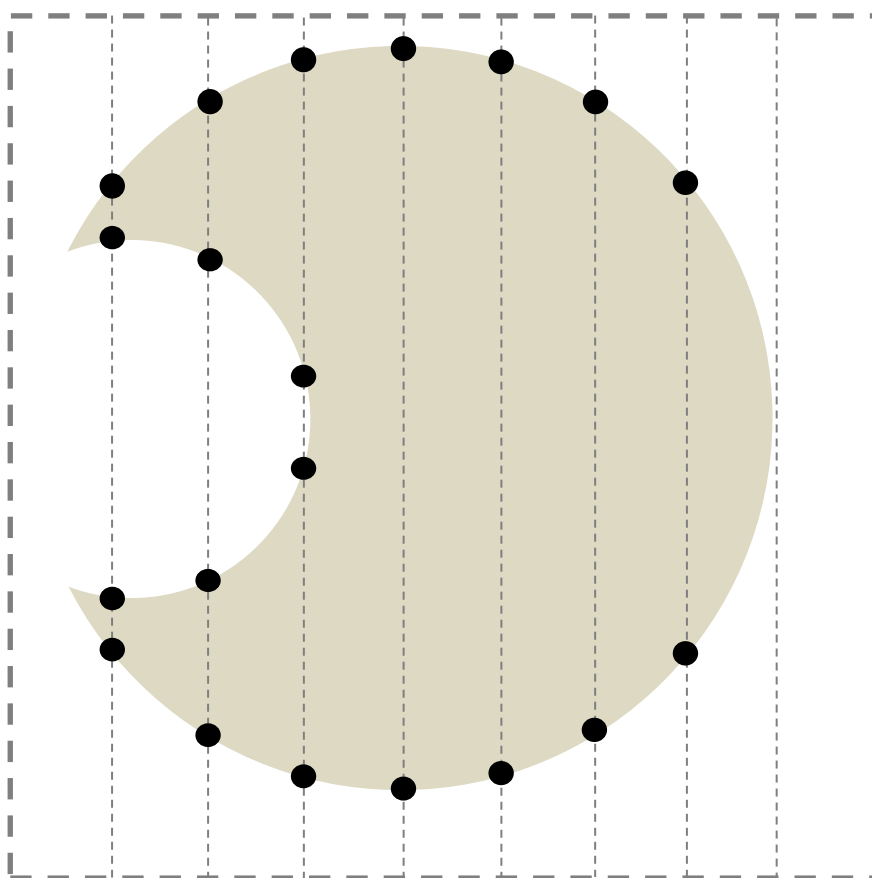


Рис. 1. Поиск опорных узлов на границе области с помощью шагового сканирования

На втором этапе алгоритма для полученного опорного множества узлов, лежащих на границе исходной области, реконструируется поверхность полученной дискретной модели. В общем виде данная задача является достаточно нетривиальной. Поэтому для ее решения



предлагается подход, заключающийся в построении некоторой сеточной модели (например, триангуляции) для заданного набора опорных узлов, а затем выделении границы области, базируясь на том соображении, что граничные сегменты принадлежат только одной ячейке сетки. Другими словами, если сторона некоторой ячейки является общей для двух соседних ячеек, то она не является граничной.

После реконструкции поверхности модели осуществляется ее оптимизация. Очевидно, что при большом шаге фоновой сетки (или при наличии сравнительно мелких особенностей на границе  $\partial\Omega$ ) возможна существенная потеря точности аппроксимации исходной области  $\Omega$  (рис. 2).

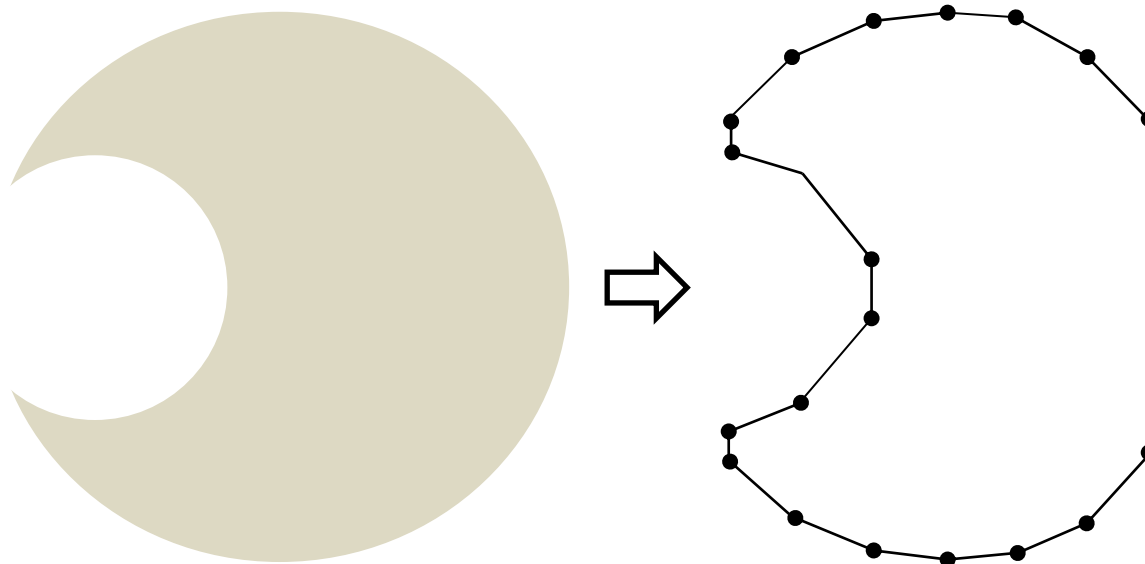


Рис. 2. Потеря точности при большом шаге фоновой сетки

Одним из наиболее простых с точки зрения реализации и очевидных способов повышения качества первоначального разбиения области является уменьшение шага регулярной сетки. Ясно, что такой подход, с одной стороны, не дает гарантии учета всех особенностей  $\partial\Omega$ , а с другой – приводит к значительному росту вычислительных затрат. Для преодоления данной проблемы предлагается использовать алгоритм, базирующийся на идее поиска и обработке соседних граничных сегментов, геометрические характеристики которых, такие, как углы между ними или их длины (площади), значительно отличаются друг от друга. Для этого необходимо определить участки границы  $\partial\Omega$ , где соотношение углов между векторами нормали к соседним сегментам или их длин (площадей) больше некоторого наперед заданного параметра. После чего выполнить процедуру вставки нового опорного узла следующим образом: отыскать точку пересечения вектора нормали к текущему граничному сегменту и  $\partial\Omega$  (рис. 3). При необходимости данную процедуру можно итерационно повторять до получения приемлемой точности оптимизации аппроксимации  $\partial\Omega$ .

Пример работы алгоритма оптимизации аппроксимации  $\partial\Omega$  только лишь за счет сгущения фоновой сетки приведен на рис. 4. Здесь приведены результаты построения геометрической модели области  $\Omega$ , изображенной на рис. 1 при разных значениях шага фоновой сетки (150, 250, 350 и 450 шагов соответственно). График изменения времени работы алгоритма приведен на рис. 5. Здесь по оси абсцисс отложено количество шагов опорной сетки, а по оси ординат – время работы алгоритма в секундах.

На рис. 6 приведен пример работы вышеописанного алгоритма оптимизации аппроксимации границы без сгущения опорной сетки по критерию соотношения длин соседних граничных сегментов. Время работы данного алгоритма составило 8,1 с. Хорошо видно, что уже при количестве шагов фоновой сетки 250 получается вполне адекватная модель исходной геометрической области. Следует отметить, что такой вид оптимизации не зафиксировал

особые точки исходной геометрической области (точки пересечения образующих исходную область окружностей).

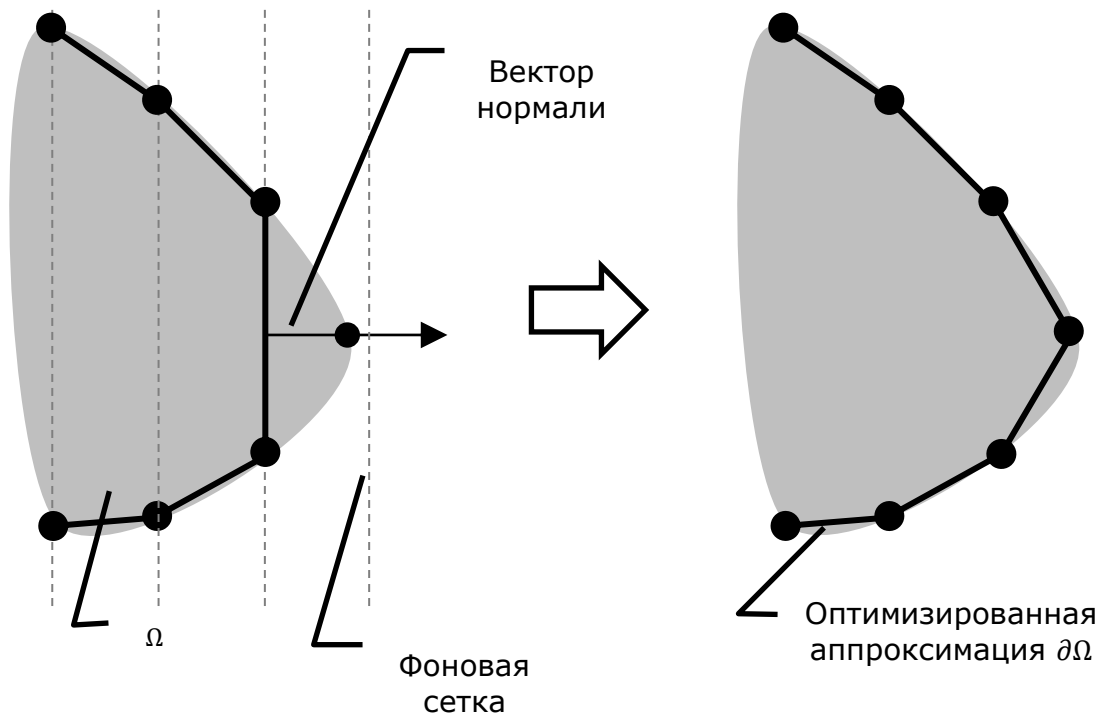


Рис. 3. Схема вставки нового опорного узла («дробление» граничного сегмента)

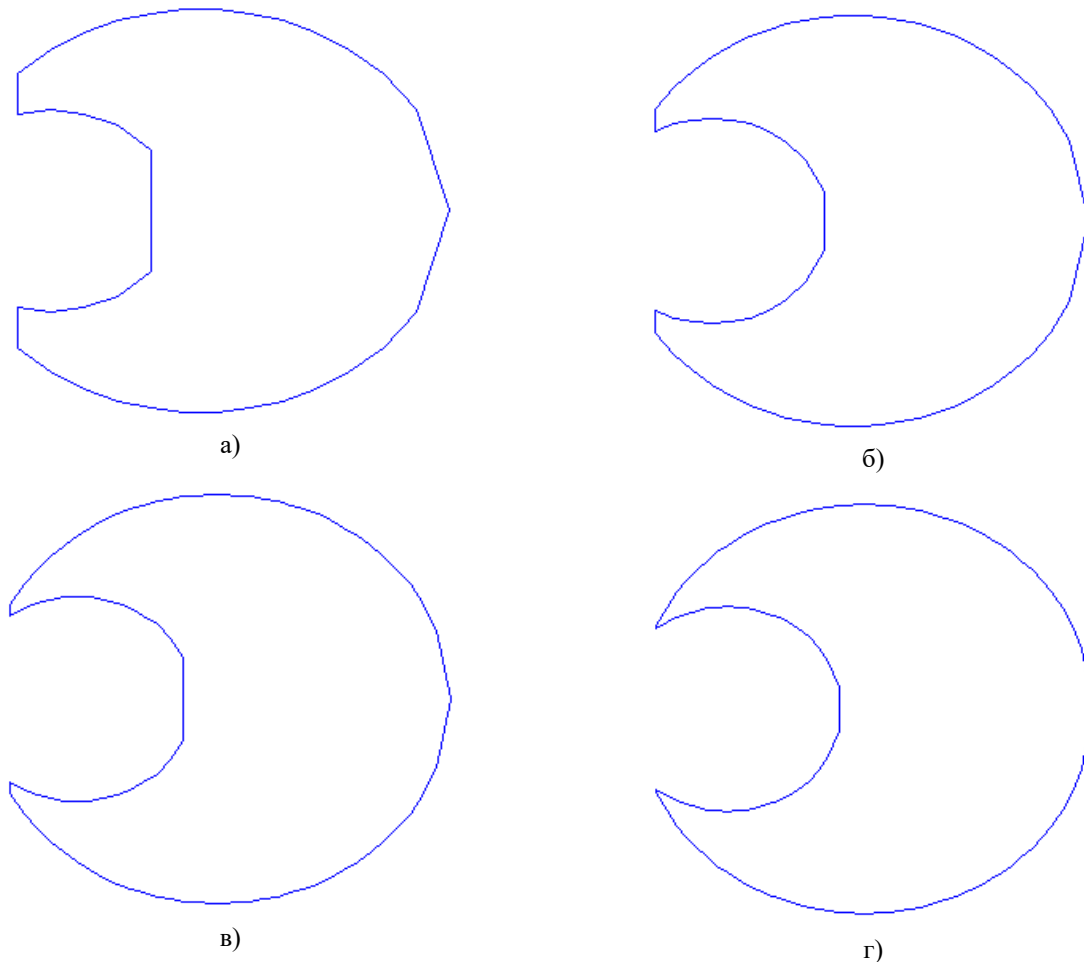


Рис. 4. Результат работы алгоритма построения аппроксимации границы исходной области при разном количестве шагов фоновой сетки: а) 150; б) 250; в) 350 г) 450.

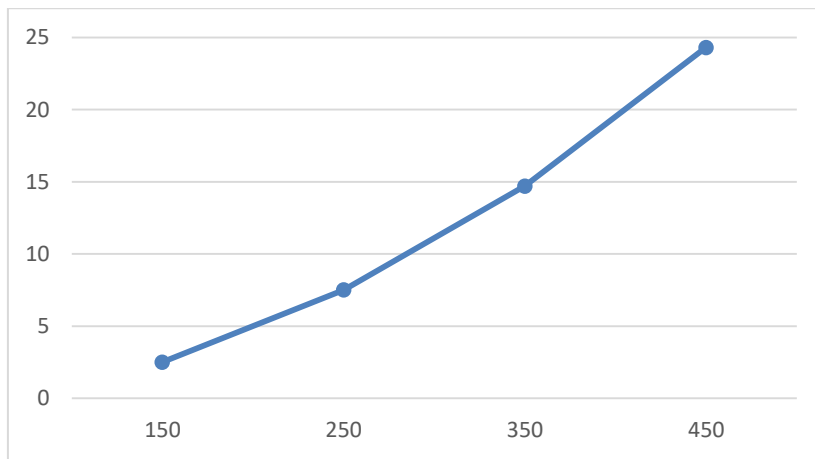


Рис. 5. Время работы алгоритма уточнения границы области за счет сгущения фоновой сетки (при разном количестве шагов)

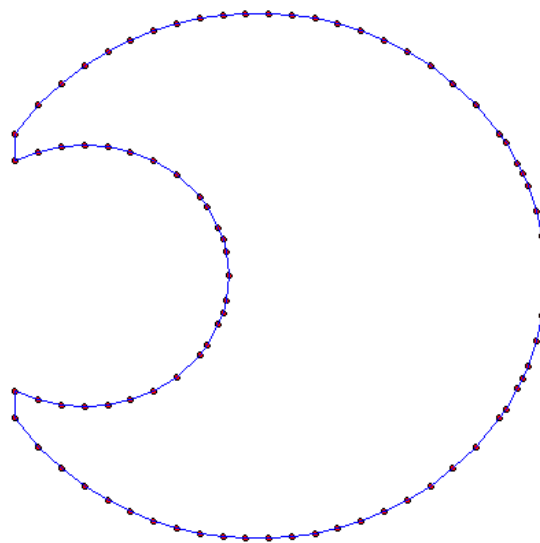


Рис. 6. Аппроксимация границы исходной области при использовании оптимизации по критерию соотношения длин соседних граничных сегментов

На рис. 7 приведено изображение геометрической модели исходной области, полученной с помощью оптимизации аппроксимации границы по критерию соотношения углов между соседними граничными сегментами при том же шаге фоновой сетки. Время работы алгоритма составило 8,0 с. Хорошо видно, что данный вариант алгоритма позволил отыскать особые точки исходной области.

И, наконец, на рис. 8 приведено изображение геометрической модели, полученное с помощью комбинации двух ранее описанных алгоритмов оптимизации (по критерию соотношения длин и углов) при том же количестве шагов фоновой сетки – 250. Время работы этого алгоритма составило 8,7 с. Здесь хорошо видно, что данный вариант алгоритма позволил не только отыскать особые точки исходной области, но и существенно повысить качество аппроксимации  $\partial\Omega$ .

Для интегральной оценки качества первоначальной аппроксимации границы области  $\partial\Omega$  на множество опорных узлов можно воспользоваться величиной среднего квадратичного отклонения углов между нормальными к соседним граничным сегментам и/или отношения между длинами (площадями) соседних граничных сегментов.

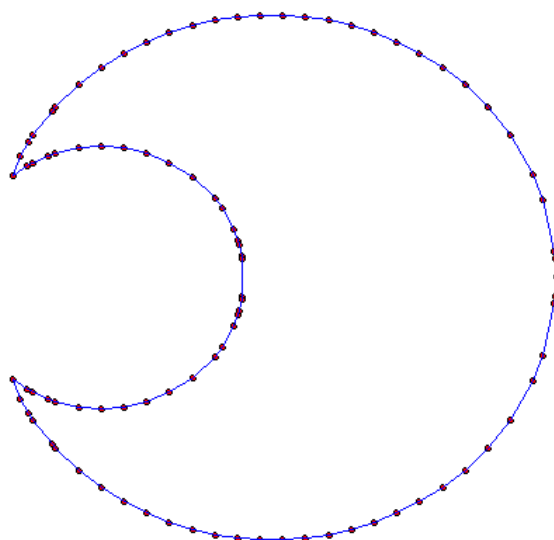


Рис. 7. Аппроксимация границы исходной области при использовании оптимизации по критерию соотношения углов нормалей к соседним граничным сегментам

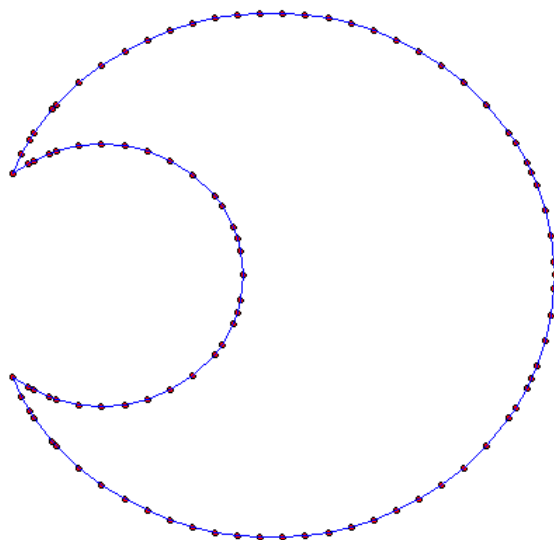


Рис. 8. Аппроксимация границы исходной области с использованием оптимизации по обоим вышеописанным критериям

Оценить качество сетки с помощью среднеквадратичного отклонения углов между соседними нормальными можно с помощью следующего соотношения:

$$\sigma_\gamma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\gamma}_i - \gamma_p)^2}, \quad (4)$$

где  $n$  – количество граничных сегментов;  $\bar{\gamma}_i$  – среднее значение углов между нормальными к  $i$ -му граничному сегменту и его окружению;  $\gamma_p$  – параметр алгоритма, определяющий максимально допустимое значение угла между соседними нормальными.

Аналогичным образом можно оценить среднее квадратичное отклонение длин (площадей) граничных сегментов. Таким образом, использование соотношения (4) позволяет выполнить оценку качества аппроксимации границы исходной геометрической области и при необходимости запустить процедуру оптимизации аппроксимации  $\partial\Omega$ .

Для верификации предложенного алгоритма на более сложных геометрических областях была построена модель прямоугольной полосы с тремя круговыми отверстиями. FREP-модель этой области описывается следующим соотношением:

$$F(x, y) = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \neg\Omega_3 \wedge \neg\Omega_4 \wedge \neg\Omega_5, \quad (5)$$

где  $\Omega_1 = a^2 - x^2$  – горизонтальная полоса шириной  $2a$ ;  $\Omega_2 = b^2 - y^2$  – вертикальная полоса шириной  $2b$ ;  $\Omega_3 = r^2 - (x - x_3)^2 - (y - y_3)^2$  – окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $(x_3, y_3)$ ;  $\Omega_4 = r^2 - (x - x_4)^2 - (y - y_4)^2$  – окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $(x_4, y_4)$ ;  $\Omega_5 = r^2 - (x - x_5)^2 - (y - y_5)^2$  – окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $(x_5, y_5)$ ;  $a = 5$ ;  $b = 1$ ;  $r = 0.5$ ;  $x_3 = -5$ ;  $x_4 = 0$ ;  $x_5 = 5$ ;  $y_3 = y_4 = y_5 = 0$ .

На рис. 9 приведено изображение полученной геометрической модели области, описанной с помощью соотношения (5).

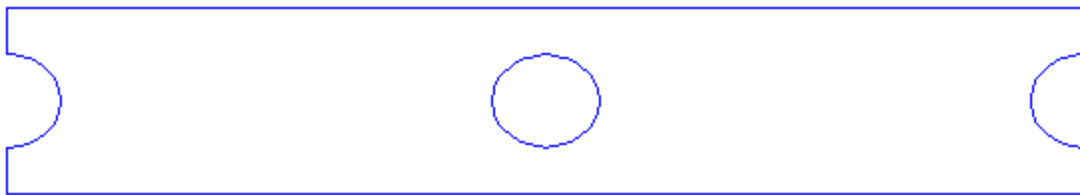


Рис. 9. Пример построения модели геометрической области, описанной соотношением (5)

## ВЫВОДЫ

Описанные алгоритмы были реализованы с помощью языка программирования Python 3. Вычислительные эксперименты выполнялись на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i7-3630QM CPU @ 2.40 GHz и 16 Гб ОЗУ. Можно отметить, что предложенный подход построения дискретных моделей геометрических областей, описанных неявно с использованием FREP, является эффективным и позволяет строить модели с необходимой пользователю точностью. Предложенные алгоритмы могут быть использованы для построения как плоских, так и трехмерных геометрических моделей.

Следует также отметить, что эти алгоритмы поддерживают параллельную реализацию. Для этого необходимо на первом этапе построить список подлежащих «дроблению» граничных сегментов, после чего процедуру их оптимизации можно запустить параллельно на разных ядрах или процессорах параллельной вычислительной системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Норенков И. П. Основы автоматизированного проектирования: учеб. для вузов: 4-е изд., перераб. и доп. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. 430 с.
2. Shape Modeling and Computer Graphics with Real Functions. URL: <http://hyperfun.org/wiki/doku.php?id=frep:main>.
3. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 106 с.

## REFERENCES

1. Norenkov, I. P. (2009). Basics of computer-aided design: a textbook for high schools: 4th edition, revised and supplemented. Moskow: Izd-vo MGTU im. N. E. Bauman.
2. Shape Modeling and Computer Graphics with Real Functions. Retrieved from <http://hyperfun.org/wiki/doku.php?id=frep:main>.
3. Rvachev, V. L. (1982). Theory of R-functions and some of its applications. Kiev: Naukova dumka.

UDC 539.3

## DEFORMATION AND STABILITY OF THIN-WALLED SHALLOW CONICAL SHELLS UNDER EXTERNAL PRESSURE AND PERIODICALLY DISCRETE BORDER FIXATION

Bessmertnyi Y. O., post-graduate student

*Prydniprov's'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Chernychevskiy str. 24a, Dnipro, 49600, Ukraine*

yaroslavbessmertnyi@gmail.com

A numerical study (within ANSYS software) deals with deformation and buckling of series of elastic isotropic flat closed conical shells subject to external normal uniform pressure. Fixation of shells edges is periodically discrete (movable-support sections alternate with hinged-support sections of the same length). Length of each periodic fixation is the same, and the total length of mobile fixation is equal to the total length of immobile fixation. While loading, the type of shells fixation causes periodically non-uniform stress-strain state in the circumferential direction. Periodicity of subcritical stress-strain state is equal to a number of fixed sections that varies in a wide range from zero up to fourteen and infinite. In this case zero corresponds to continuous mobile fixation, infinite – continuous immobile fixation, from two up to fourteen corresponds to periodic boundary conditions. The phenomenon of “static resonance” was found for conical shells. The essence of the effect is as follows. Minimum limit pressure of geometrically nonlinear analysis corresponds to the periodicity of stress-strain state of a conical shell which coincides with a half-sum of the periodicity of the first eigenvibration mode of an unloaded shell and the first eigenmode of linear buckling problem of a continuously hinged supported shell subject to external pressure. All results are presented in form of graphs and tables for each type of calculations – linear problem of stability (bifurcation) and geometrically non-linear problem of stability. The results of this work make possible to forecast the “static resonance” phenomena for shell with heterogeneous stress-strain state on the basis of two simple linear calculations.

*Key words: thin-walled shallow conical shell, periodically discrete fixation, heterogeneous stress-strain state, software ANSYS.*

## ДЕФОРМУВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ПОЛОГИХ КОНІЧНИХ ТОНКОСТІННИХ ОБОЛОНОК ПРИ ЗОВНІШНЬОМУ ТИСКУ ТА ПЕРІОДИЧНО ДИСКРЕТНОМУ СПИРАННІ

Бессмертний Я. О., аспірант

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,  
вул. Чернишевського, 24а, м. Дніпро, 49600, Україна*

yaroslavbessmertnyi@gmail.com

Чисельне дослідження (у програмному комплексі ANSYS) присвячено деформації і стійкості ряду пружних ізотропних плоских замкнутих конічних оболонок під дією зовнішнього тиску. Фіксація краю оболонок періодично дискретна (секції рухомої опори чергуються з секціями шарнірної нерухомої опори однакової довжини). При навантаженні тип кріплення оболонок викликає періодично нерівномірний напружено-деформований стан в окружному напрямку. Періодичність докритичного напружено-деформованого стану дорівнює числу фіксованих ділянок, які варіюються в широких межах. Було виявлено явище «статичного резонансу» для конічних оболонок. Ефект полягає в такому: мінімальний граничний тиск геометрично нелінійного аналізу відповідає періодичності напружено-деформованого стану конічної оболонки, яка збігається з напівсумою періодичності першої моди власних коливань ненавантаженої оболонки і першої власної моди лінійної задачі стійкості оболонки з однорідним шарнірно нерухомим закріпленням при зовнішньому тиску.

*Ключові слова: полого тонкостінна оболонка, періодично дискретне закріплення, неоднорідний напружено-деформований стан, програмний комплекс ANSYS.*

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГИХ КОНИЧЕСКИХ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ И ПЕРИОДИЧЕСКИ ДИСКРЕТНОМ ОПИРАНИИ

Бессмертный Я. О., аспирант

*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,  
ул. Чернышевского, 24а, г. Днепр, 49600, Украина*

yaroslavbessmertnyi@gmail.com

Численное исследование (в программном комплексе ANSYS) посвящено деформации и устойчивости ряда упругих изотропных плоских замкнутых конических оболочек, подверженных внешнему давлению. Фиксация края оболочек периодически дискретна (секции подвижной опоры чередуются с секциями шарнирной неподвижной опоры одинаковой длины). При нагружении тип крепления оболочек вызывает периодически неравномерное напряженно-деформированное состояние в окружном направлении. Периодичность докритического напряженно-деформированного состояния равна числу фиксированных участков, которые варьируются в широких пределах. Было обнаружено явление «статического резонанса» для конических оболочек. Суть эффекта заключается в следующем: минимальное предельное давление геометрически нелинейного анализа соответствует периодичности напряженно-деформированного состояния конической оболочки, которая совпадает с полусуммой периодичности первой моды собственных колебаний незагруженной оболочки и первой собственной моды линейной задачи устойчивости оболочки с однородным шарнирно неподвижным закреплением при внешнем давлении.

*Ключевые слова: пологая тонкостенная коническая оболочка, периодически дискретное закрепление, неоднородное напряженно-деформированное состояние, программный комплекс ANSYS.*

### INTRODUCTION

In [1-3] based on experimental studies of deformation and stability of axially compressed elastic isotropic circular cylindrical shells in the presence of a periodically non-uniform stress-strain state (SSS) in the circumferential direction, the phenomenon called “static resonance” was discovered. Non-uniform SSS of smooth shells was caused by periodic longitudinal compressive forces or periodic middle shell surface imperfections (for uniform axial compression or external pressure) [1-3]. Precritical uniform SSS of longitudinally reinforced shell subject to axial compression was caused by versatile arrangement of reinforcements (stringers).

The essence of “static resonance” consisted in the following. The maximal precritical displacements and minimum limit load was realised for static compression of shells when periodicity of non-uniform SSS in the circumferential direction coincided or was closed to periodicity of first eigenvibration mode of a shell without any load. Numerical calculations [4] using ANSYS software also confirmed the presence of “static resonance”.

The analogue of “static resonance” was discovered in the numerical study [5] (ANSYS software) for shallow conical shells under external pressure. Non-uniform SSS of the shells was caused by large (more than 10 thicknesses) periodic mid-surface imperfections in the circumferential direction. Unlike the earlier problems, “static resonance” of conical shells did not appear for the limit pressure. But it revealed itself in the linear buckling problem. As before, this “resonance” was realised when a periodicity of non-uniform SSS coincided with the periodicity of the first eigenvibration mode of a shell.

Note that the calculation improvement of bearing capacity of the shells under external pressure in case of non-uniform SSS is an important and actual task [6-7]. This is especially important for shallow shells which are widely used in practice.

The aim of this work is to study (using ANSYS software) the influence of periodically discrete border fixation of shallow conical shells under uniform external pressure on deformation and buckling, as well as effects that are caused by non-uniform SSS.

We performed three types of analysis: 1) linear bifurcation analysis to determine the critical pressure value  $q^{cr}$  and corresponding eigenmodes; 2) dynamic analysis to determine first transversal eigenvibration modes of a shell without any load; 3) geometrically nonlinear analysis to determine SSS of a shell, its limit pressure value  $q^{lim}$  and corresponding buckling modes. All analyses were executed both for shells with periodically discrete border fixation (movable-support sections alternate with hinged-support sections of the same length) and for shells with continuous movable support or hinged support. The number of movable and hinged sections ( $n$ ) of the shell edge varied from 0 to 14 in increments of 1.

## MAIN PART

### Methodology of numerical analysis

As already mentioned, the numerical study was carried out within ANSYS software (ANSYS Inc. Academic Research, Mechanical Analysis, Release 13.0 customer 298728). Thin-walled closed flat cones (Fig. 1) had next parameters: shells thickness  $h = 5$  mm; base radius  $R = 2000$  mm; height  $H = 140$  mm. Angle between conical shell generatrix and its base is  $\alpha = 4^\circ$ .

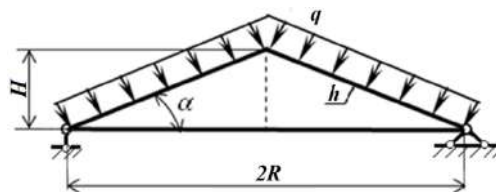


Fig. 1. Shell scheme with movable and hinged support

Material of shells is steel X18H9H (former Soviet Union steel specification) with following mechanical characteristics: modulus of elasticity  $E = 2 \times 10^5$  MPa, Poisson's ratio  $\nu = 0.3$ , yield stress  $\sigma_{02} = 800$  MPa, material density  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup> (the density is taken into account in the analysis 2).

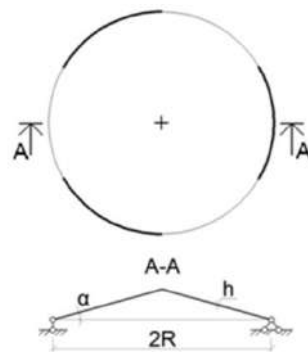


Fig. 2. Schema of conical shell with periodically discrete edge fixation  $n = 3$  (bold line – hinged support, fine line – movable support)

Modelling of the problems was conducted in the following order: 1) spatial geometric model of shells was created by rotation of the generatrix about the axis of symmetry ( $Y$ -axis); 2) models were divided into identical sectors, which number was assumed to be  $2n$  ( $n$  varied from 0 to 14 in increments of 1); 3) the boundary conditions corresponded to alternately movable or hinged support and were set at the edge of the curved portion of each sector; 4) external uniform normal pressure  $q$  was applied; 5) finite element mesh was created using shell finite element (FE) SHELL 281 (from ANSYS standard library). It should be emphasised that hinged support restricted displacements of the edges along three axes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , and movable support of edges confined only vertical displacements along  $Y$ -axis.

FE meshing of the shells was performed by an internal function of ANSYS software that divides the shell surface into finite elements. The main parameters affecting the creation of the FE model were set as: FE size, FE mesh type (mapped or adaptive), FE shape (triangular or rectangular). The



density of a mesh affects the magnitude of shell surface displacements and values of critical  $q^{cr}$  and limit  $q^{lim}$  pressures. FE mesh was refined until pressure values increment became stable, less than 0.5%. As a result, meshed models consisted of FE  $N = 1400..3680$  (depending on the value of  $n$ ).

**RESULTS OF NUMERICAL ANALYSIS**

Critical pressure  $q^{cr}$  and corresponding eigenmodes ( $m$  – a number of waves in the circumferential direction), first eigenvibration modes ( $k$  – a number of waves in circumferential direction) were obtained within analyses 1 and 2 for three types of shells fixation: with periodically discrete edge fixation ( $n = 1 \dots 14$ ), with continuous movable support ( $n = 0$ ) and with continuous hinged support ( $n = \infty$ ). The values of  $q^{cr}$ ,  $m$  and  $k$  for the shells are placed in Table 1.

Table 1 – Results of numerical analyses for shell series ( $R/h = 400, \alpha = 4^\circ, h = 5$  mm)

$n$	0	1	2	3	<u>4</u>	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\infty$
$q^{cr}$ , kPa	2.58	2.13	2.87	2.99	3.05	3.12	3.23	3.26	3.23	3.20	3.19	3.33	3.41	3.44	3.46	3.59
$m$	4	2	4	4	4	5	5	5	4	4	5	5	5	5	5	<u>5</u>
$\omega$ , Hz	16.1	16.5	18.3	19.7	21.2	21.6	21.6	22.2	22.7	22.8	22.9	22.9	23.0	23.1	23.2	23.4
$k$	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	<u>3</u>
$q^{lim}$ , kPa	1.71	2.01	3.53	2.56	<u>2.28</u>	2.75	3.28	3.77	4.23	4.61	4.91	5.16	5.36	5.51	5.62	5.93

The solution of geometrically nonlinear problem was to build dependences of an external pressure on the transverse displacements of a shell surface (first of all, displacement  $w_z$  of the shell top). When pressure value reaches  $q^{lim}$  in case of constant pressure, a shell realises an abrupt transition to a noncontiguous equilibrium mode (reverse to its initial position) that belongs to an up-going stable post-critical branch of equilibrium state. Values of limit pressure  $q^{lim}$  for all types of shell fixation including shells with  $n = 0$  and  $n = \infty$  are shown in Table 1.

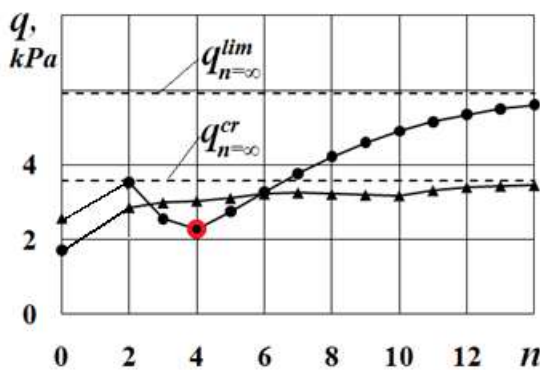


Fig. 3. Dependencies “ $q^{cr}, q^{lim} - n$ ” for conical shells

Visualisation of SSS at various stages of loading shows that for conical shells periodical SSS in the circumferential direction caused by discrete fixation involves almost the entire shell surface.

Using table data for conical and spherical shells, the dependences of critical and limit pressures on number of periodically discrete fixations “ $q^{cr}, q^{lim} - n$ ” has been plotted (Fig. 3). On the graphs, triangles represent critical pressure  $q^{cr}$  and circles refer to limit pressure  $q^{lim}$ . We have connected the values of pressure with straight lines for a clear perception. The values of critical ( $q_{n=\infty}^{cr}$ ) and limit ( $q_{n=\infty}^{lim}$ ) pressure of a shell with continuous hinged support are represented by horizontal dashed lines.

Table 1 and dependences in Figure 3 show that for conical shells limit pressures  $q^{\text{lim}}$  lie in the range of  $(q_{n=0}^{\text{lim}} - q_{n=\infty}^{\text{lim}})$  and are much higher than critical pressures  $q^{\text{cr}}$  ( $q_{n=0}^{\text{cr}} - q_{n=\infty}^{\text{cr}}$ ). Moreover, the range of values  $q^{\text{lim}}$  includes the range of values  $q^{\text{cr}}$ . Thus, limit pressure  $q^{\text{lim}}$  is minimum buckling pressure of a conical shell with continuous hinged support. The dependence “ $q^{\text{cr}} - n$ ” is mostly up-going except some fluctuations of distinct points. Increase of critical pressure is comparatively small and corresponds to  $q^{\text{cr}} = 2.58 - 3.59$  kPa. Values of  $q^{\text{cr}}$  for maximum number of discrete hinged supports ( $n = 14$ ) are less than the values for continuous hinged support. The difference is about 3.6%.

The dependence “ $q^{\text{lim}} - n$ ” obtained as a result of geometrically non-linear analysis is more complicated comparing to linear analysis. First of all, this dependence reaches its minimum for continuous movable support ( $q_{n=0}^{\text{lim}}$ ). In addition, it has an intermediate minimum for  $q_{n=4}^{\text{lim}}$ . In this case limit pressure turns out to be lower than critical pressure. The presence of local minimums of limit pressure values changed the situation: limit pressure  $q^{\text{lim}}$  becomes dangerous. And the region where limit pressure is dangerous includes three neighbour sections  $n = 3 - 5$ . As we noted in Introduction, the above-described phenomenon was called “static resonance” in the papers [1-5]. It was discovered in physical and numerical experiments for circular cylindrical [1-4] and conical shells [5] with periodically non-uniform SSS in the circumferential direction. In the case of conical shells the minimum “resonance” value of limit pressure  $q_{\text{min}}^{\text{lim}}$  is the most dangerous for discrete edges fixation. Here, “static resonance” is realised for  $n = 4$  (bigger sign corresponds to the “resonance” in Fig. 3). The value of “resonance” pressure is 25% less than the value of critical pressure  $q^{\text{cr}}$ . The “resonance” values of  $n$  and limit pressure ( $q_{\text{min}}^{\text{lim}}$ ) are bold and underlined in Table 1.

Note that in [1-5] “static resonance” was only associated with a coincidence (or with a proximity) of periodicity of precritical SSS in the circumferential direction and periodicity  $k$  of first eigenvibration mode of an unloaded shell. But for conical shells “static resonance” appears definitely when the periodicity of precritical SSS in the circumferential direction is equal to a half-sum of the periodicity  $k$  of the first eigenvibration mode of an unloaded shell and periodicity  $m$  of the first eigenmode of linear buckling problem of a continuously hinged supported shell subject to external pressure. Values  $m$  and  $k$  for  $n = \infty$  are shown in bold italic in Table 1.

## CONCLUSIONS

The results of the present research let one predict “static resonance” of shallow conical shell subject to external pressure in the case of periodically non-uniform SSS using two simple linear analyses. In particular, “static resonance” appears when periodicity of SSS in the circumferential direction coincides with a half-sum of waves of the first eigenvibration mode of an unloaded shell and waves of the first eigenmode of linear buckling problem of a shell subject to external uniform pressure. In both cases, these calculations must be carried out for continuous hinged support of shell edges.

Note that few values  $q^{\text{lim}}$  are presented in the region of dangerous limit pressures, and they are also dangerous for shells along with minimum (resonance) value of limit pressure  $q_{\text{min}}^{\text{lim}}$ . Therefore, we recommend moving out this region as much as possible by increasing the periodicity of SSS away from “resonance” periodicity i.e. by increasing a number of hinged supports.

Design of shells with small number of periodically discrete edge fixation assumes a choice of analysis. It is necessary to focus on limit pressure obtained in geometrically non-linear analysis for small angles  $\alpha$  (for shallow shells). While for large angles (for deep shells) a dangerous load is critical pressure  $q^{\text{cr}}$  obtained in linear buckling analysis (bifurcation).

## REFERENCES

1. Krasovsky V. L. Nonlinear effects in the behavior of cylindrical shells under nonuniform axial compression. Experimental results. *Proceedings of the 25th Israel Conference on Mechanical Engineering*, Technion City, Haifa, Israel, 1994. P. 623–625.
2. Krasovsky V. L., Varianichko M. A., Nagorny D. V. “Static resonance” phenomena of thin-walled cylindrical shells. *Stability of structures; Proc. intern. symp., Zakopane, 2003*. P. 227–234.
3. Krasovsky V. L., Varyanychko M. A. Effect of a “Static resonance” in elastic thin-walled cylinders. *21st Intern. Congress of Theoretical and Applied Mechanics; Abstracts Book and CD-ROM Proceedings, 2004*. P. 337. Warsaw: IPPT PAN.
4. Krasovsky V. L., Kolesnikov M. V. “Static resonance” in cylindrical shells with periodical non-uniform strain-stress state conditioned by load or initial imperfections. In *Review and Current Trends in Stability of Structures 3 (11)*. P. 289–312. Lodz: LTU.
5. Karasev, A. G. Initial imperfection influence on the buckling load of closed elastic isotropic shallow conical shells. *Mathematics and Mathematics of Solids 21 (4)*. P. 444–453.
6. Kun Xie, Meixia Chen, Naiqi Deng, Wenchao Jia. Free and forced vibration of submerged ring-stiffened conical shells with arbitrary boundary conditions. *Thin-Walled Structures 96*. P. 240–255.
7. Sofiyev A. H. The effect of elastic foundations on the nonlinear buckling behavior of axially compressed heterogeneous orthotropic truncated conical shells. *Thin-Walled Structures 80*. P. 178–191.

УДК: 004.056.55

## ЗАХИСТ ПЕРСОНАЛЬНИХ ДАНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ АЛГОРИТМІВ НЕОДНОЗНАЧНОГО ШИФРУВАННЯ

Гальченко А. В.

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600*

andrem1993@ukr.net

У статті розглядається проблема захисту персональних даних, яка є досить актуальною в сучасному світі. Ця проблема висвітлюється у засобах масової інформації різними державними службами, які займаються питаннями безпеки, і фахівцями у галузі інформаційної безпеки. Автором статті висвітлюється ідея використання засобів неоднозначного шифрування даних для захисту інформації в ІСПДн. У процесі дослідження автор розглянув проблеми захисту персональних даних, зробив аналіз літератури та ресурсів у мережі Інтернет, на яких описано традиційні і сучасні механізми їх захисту, а та також виконав огляд літератури, аналіз алгоритмів неоднозначного шифрування, обрав серед них найбільш адаптований для виконання поставленої задачі та порівняв його ефективність з традиційними і сучасними підходами до захисту інформації в ІСПДн. Для наведення практичних результатів автор виконує шифрування/дешифрування тестової ІСПДн з використанням традиційних, сучасних і неоднозначних засобів шифрування даних. Описані дослідження проводилися аспірантом кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету в рамках дисертаційної роботи «Дослідження інструментальних механізмів заперечуваного шифрування».

*Ключові слова: персональні дані, інформаційна система, деперсоналізація, шифрування, неоднозначне шифрування, примушування, перемішування даних, bigdata.*

## ЗАЩИТА ПЕРСОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ НЕОДНОЗНАЧНОГО ШИФРОВАНИЯ

Гальченко А. В.

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600*

andrem1993@ukr.net

В данной статье рассматривается проблема защиты персональных данных, которая является весьма актуальной в современном мире. Эта проблема освещается и различными государственными службами, которые занимаются вопросами безопасности, в средствах массовой информации и специалистами в области информационной безопасности. В данной статье рассмотрена проблема использования традиционных и современных средств защиты информации в информационных системах персональных данных (далее – ИСПДн). Автором статьи освещается идея использования средств неоднозначного шифрования данных для защиты информации в ИСПДн. В ходе работы автор исследовал проблемы защиты персональных данных, сделал обзор литературы и ресурсов в сети Интернет, на которых описаны традиционные и современные механизмы их защиты, а также выполнил обзор литературы, анализ алгоритмов неоднозначного шифрования, выбрал среди них наиболее адаптированный для выполнения поставленной задачи и сравнил его эффективность с традиционными и современными подходами к защите информации в ИСПДн. Для наведения практических результатов автор выполняет шифрование/дешифрование тестовой ИСПДн с использованием традиционных, современных и неоднозначных средств шифрования данных.

*Ключевые слова: персональные данные, информационная система, деперсонализация данных, шифрование, отрицаемое шифрование, грубая сила, перемешивание данных, bigdata.*

## PROTECTION OF PERSONAL DATA WITH USE ALGORITHMS OF NON-DIGITAL SHIFT

Galchenko A. V.

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

andrem1993@ukr.net

The article deals with the problem of protection of personal data, which is very relevant in the modern world. This problem is covered in the media by various state security services and information security specialists. This article breaks down the problem of using traditional and modern means of protecting information in information systems of personal data (hereinafter - ISPD). The author of the article describes the idea of using the means of deniable data encryption to protect information in the ISPD. In the course of the research, the author studied the problem of personal data protection, made a review of literature and resources on the Internet, which described the traditional and modern mechanisms for their protection, and also conducted a review of literature, analysis of deniable encryption algorithms, selected among them the most adapted to fulfill the task and compared its effectiveness with traditional and modern approaches to protecting information in the ISPD. To provide practical results, the author encrypts / decrypts the test ISPDs using traditional, modern, and deniable data encryption tools. The described researches were carried out by the postgraduate student of the department of software engineering of Zaporizhzhya National University in the framework of the dissertation research «Investigation of instrumental mechanisms of denied encryption».

Prior to conducting the above studies, the following objectives were set: substantiation of the need to protect personal data in the modern information space; an overview of traditional and modern means of information protection in the ISPD; presentation of possibilities of deniable encryption for information protection in ISSPD; substantiation of advantages of the use of means of deniable encryption in comparison with traditional and modern means of information protection in ISPD; giving practical examples of the use of traditional, modern means and means of deniable encryption on the example of a small (theoretical) ISPD; justification for the need to further explore the possibility of using deniable encryption tools.

The novelty of this is that the issue of using deniable encryption tools has not become widespread and practical because of the unlawfulness of the methods of protection that are implemented in them. Thus, the possibilities of its use in various fields of data processing such as protection of personal data, the formation of electronic digital signatures, etc. were not considered before.

As a result of these studies, the following results were obtained: review of traditional and modern encryption tools, as well as presentation of possibilities of deniable encryption tools for protection of information in the ISDF; the necessity of protecting personal data in the modern information space, the advantages of using the means of deniable encryption in front of traditional and modern means of information protection in the ISND is substantiated; practical examples of the use of traditional (on an example of the RSA algorithm), modern means (on the example of the algorithm of personalization depersonalization of personal data) and means of deniable encryption (on the example of the deniable algorithm on the basis of extended cryptographic scheme of Rabin) using arbitrary (test) ISPDs are presented.

*Key words: personal data, information system, depersonalization, encryption, deniable encryption, coercion, operator, mixing data, bigdata.*

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Одним із основних векторів атак на інформаційні системи в сучасному інформаційному просторі є отримання персональних даних (далі – ПДн) про користувачів цих систем і їх оточення. Загалом до ПДн відносяться відомості чи сукупність відомостей про фізичну особу, за допомогою яких вона ідентифікується або може бути однозначно ідентифікована. Такими даними є прізвище, ім'я, ім'я по батькові, дата народження, місце проживання, телефон тощо [1].

Однак у 21 столітті наведений перелік ПДн зазнав суттєвих змін. Через стрімкий розвиток інформаційних технологій, комп'ютеризація проникла майже до усіх ключових для життєдіяльності людини галузей інфраструктури. Унаслідок переміщення діяльності людини до електронного інформаційного простору наведений вище перелік ПДн можна розширити, додавши:

- облікові дані користувачів для доступу до електронної пошти, соціальних мереж і інших інформаційних ресурсів у мережі Інтернет;
- номери кредитних карток, які використовуються для здійснення покупок, оплати праці та різноманітних послуг;
- дані про звички, вподобання та відмітки про місцезнаходження особи;
- фото та відео матеріали, які особа публікує в мережі Інтернет;
- дані про інформаційні ресурси, які відвідує особа.

Указані дані з'являються та оновлюються в мережі щодня. Їх систематичний збір та аналіз дозволяє більш точно здійснити ідентифікацію особи та галузей її діяльності, аніж традиційний перелік ПДн. Додатковий перелік даних дозволяє будь-кому вести спостереження за особою через мережу Інтернет, без використання спеціалізованих засобів знімання та збору інформації.

Значне використання ПДн у мережі, а також їх досить умовний захист, значно полегшує завдання для зловмисників зі збору та аналізу інформації, при підготовці координованих кібератак на об'єкти інформаційної діяльності. У зв'язку з цим безпека ПДн, як одного з вектору кібератак, стає все більш актуальним питанням у галузі інформаційної безпеки.

Для захисту ПДн розроблено безліч заходів [1-3]:

- організаційних (наприклад, створення законів про порядок обробки і захисту ПДн [2], розробка методик і політик з використання та захисту ПДн [1], при роботі з інформаційними системами тощо);
- технічних (наприклад, резервне копіювання та відновлення даних, контроль цілісності та доступу до обладнання інформаційних систем обробки персональних даних (далі – ІСПДн тощо) [3];
- програмних (наприклад, програмні засоби з контролю доступу до даних і їх використання, шифрування даних, деперсоналізація даних [3] тощо).

Проте, в умовах розвитку сучасного інформаційного простору, вказані вище методи захисту втрачають свою ефективність [4].

### АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Проблема захисту ПДн є одним із основних векторів атак на об'єкти інформаційної діяльності (далі – ОІД). Для їх захисту використовуються різноманітні засоби. Але через щоденне використання ПДн людиною для вирішення багатьох задач, від вибору продуктів на сніданок до придбання нерухомості, їх захист є досить складною справою.

Мало не кожний інформаційний ресурс у мережі Інтернет (далі – IP), під приводом покращення сервісів і надання послуг, вимагає від особи надати деяку кількість ПДн, в електронному чи сканованому вигляді. Інші ж взагалі відмовляються надавати будь-які послуги без отримання від особи ПДн і згоди на їх обробку. Отже, поширення ПДн у мережі та на різноманітних носіях інформації стає все більш неконтрольованим з боку особи-власника ПДн.

З огляду на стан проблеми сьогодні [4], для вирішення вказаних вище проблем вже використовуються такі засоби захисту [1-3]:

- шифрування даних;
- використання двофакторної автентифікації (для доступу до IP);
- використання засобів анонімізації (для приховання присутності користувачів на певних IP);
- часті зміни ключів доступу до даних (для виключення можливості їх підбору);
- покращення криптостійкості ключів (дотримання вимог до формування та використання ключів на IP);
- розмежування доступу до ПДн (для обмеження доступу до ПДн).

Усі описані вище засоби захисту є безперечно важливими і ефективними. Але їх застосування в сучасних умовах безпеки інформаційного простору, у зв'язку з відсутністю стандартизації засобів безпеки IP та неможливістю синхронного усунення виявлених у них вразливостей, ускладнює забезпечення усесторонньої безпеки ПДн, які обробляються ними.

Відносно новим, порівняно з указаними вище способами захисту ПДн, є деперсоналізація ПДн. Дослідження у цьому напрямі проводяться в останні роки [5-9] і набувають усе більшої актуальності серед фахівців з інформаційної безпеки. Новий підхід до захисту даних дозволяє забезпечити додатковий рівень захисту, не виходячи за межі обмежень, встановлених діючим законодавством України. Але їх практичне застосування ускладнене через деякі технічні та організаційні тонкощі реалізації, про що свідчить їх незначне застосування для захисту ІСПДн [5-9].

Крім того, власне, особа-власник ПДн не завжди розуміє небезпеку безконтрольного поширення своїх ПДн та є необізнаною в питанні їх захисту [1, 4].

### ВИДІЛЕННЯ НЕВИРШЕНИХ РАНІШЕ ЧАСТИН ЗАГАЛЬНОЇ ПРОБЛЕМИ

Головною проблемою захисту ПДн є неможливість перешкоджання їх безконтрольного поширення як на матеріальних носіях інформації, так і в мережі. Традиційні засоби забезпечення їх конфіденційності передбачають лише розмежування доступу до ІСПДн і використання шифрування даних.

Проте ПДн, на відміну від тимчасових даних, потребують більш тривалого зберігання. Тому на системи захисту ІСПДн накладаються додаткові обмеження (наприклад, розмір ключів шифрування, частота їх зміни, додаткові механізми контролю доступу до ІСПДн).

Окрім того, є безліч проблем, пов'язаних з генеруванням і зберіганням вказаних ключів шифрування даних. Зокрема:

- необхідність використання надійних генераторів ПСП;
- використання додаткових маніпуляцій з ключами для збільшення їх стійкості до зламу (наприклад, обчислення хеш-образу, розширення або поділ ключа).

Для обходу усіх цих механізмів захисту розроблено безліч моделей і програмного забезпечення, які дозволяють імітувати їх роботу та знайти вразливості в них [10]. Але жодний із зазначених механізмів захисту не забезпечує захист від найпростішої атаки шляхом застосування примушування до операторів криптографічних систем, а також використання порушень ними правил із використання ключів.

В основі вказаних вразливостей лежить людський фактор, який жодна система захисту не може передбачити. Звісно, існують складні системи захисту, в основі яких лежить використання нейронних мереж і систем зі штучним інтелектом. Але вартість таких систем пропорційна їх складності, а їх обслуговування потребує особливих навичок від технічного персоналу та фахівців з інформаційної безпеки. Подібним і більш економічним рішенням є винайдення нових підходів до захисту інформації з використанням існуючих механізмів безпеки. Прикладом такого рішення є використання алгоритмів неоднозначного шифрування даних.

### ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Для визначення можливості використання неоднозначного шифрування даних в ІСПДн необхідно:

- сформуванню узагальнену модель ІСПДн і підсистеми шифрування даних;
- виконати аналіз використання традиційних методів шифрування даних, згідно з загальною моделлю;
- внести необхідні зміни в узагальнену модель традиційного захисту даних, які б ураховували можливість використання алгоритмів неоднозначного шифрування;
- перевірити можливість і оцінити ефективність застосування методів неоднозначного шифрування на ряду з традиційними системами шифрування;
- на основі проведених перевірок сформуванню рекомендації щодо можливості застосування методів неоднозначного шифрування для захисту інформації в ІСПДн.

### ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Загалом, згідно з [1], будь-яку ІСПДн можливо представити у вигляді схеми (рис. 1).

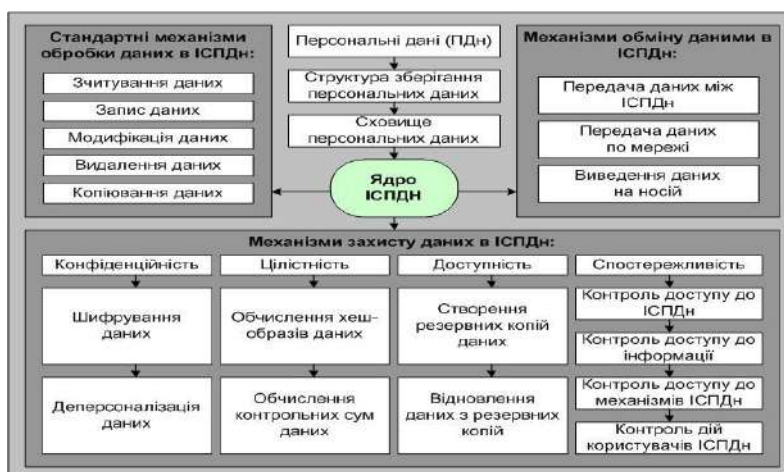


Рис. 1. Загальна схема ІСПДн

Згідно з вище наведеною схемою для забезпечення конфіденційності інформації в ІСПДн переважно використовуються лише механізми шифрування та, як один із нових напрямів, деперсоналізації ПДн.

Механізми шифрування даних в ІСПДн реалізують перетворення відкритих ПДн у нечитабельний вигляд, які забезпечують їх захист від компрометації сторонніми особами. Загалом усі перетворення підсистеми шифрування побудовані на базі симетричних криптографічних систем шифрування даних і передбачають їх довготривале зберігання. Але для обміну даними між іншими ІСПДн та в мережі використовуються асиметричні криптографічні системи шифрування даних. Здебільшого усі механізми шифрування реалізовані у вигляді окремих спеціалізованих бібліотек і мережевих протоколів, з відкритим вихідним кодом (тобто доступні для аналізу будь-кому), які реалізують набір перетворень  $F(x)$ . Тобто, у випадку обходу зловмисниками підсистеми контролю доступу до ІСПДн, підсистема шифрування даних дозволяє захистити їх від компрометації та крадіжки. Усі механізми шифрування побудовані на основі подібних схем перетворень інформації, повний цикл перетворень яких можна описати схемою на рис. 2.

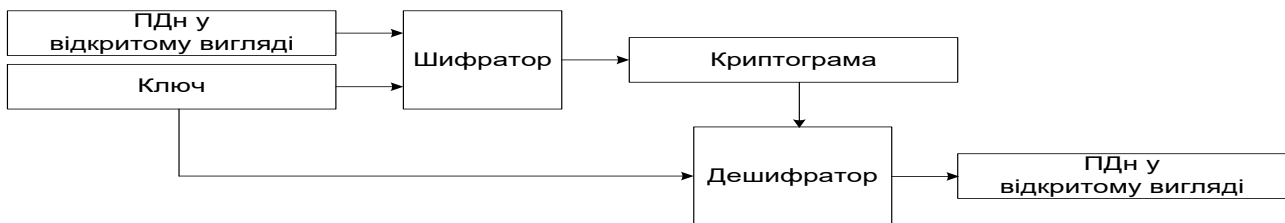


Рис. 2. Схема повного циклу перетворень інформації підсистемою шифрування даних в ІСПДн

*Приклад 1:* виконаємо захист вихідного значення ПДн за допомогою алгоритму RSA. Нехай вихідне повідомлення  $M = 65$ , ключі згенеровані за алгоритмом RSA  $(e, d, N) = (7, 343, 527)$ . Тоді в результаті шифрування повідомлення отримаємо криптограму  $C = M^e \pmod{N} = 65^7 \pmod{527} = 482$ , а при дешифруванні отримаємо вихідне повідомлення  $M' = C^d \pmod{N} = 482^{343} \pmod{527} = 65$ .

Для отримання вихідного повідомлення  $M$  з криптограми  $C$  зловмисникові необхідно виконати факторизацію модуля  $N$  і обчислення секретного ключа  $(d, N)$ . Зі значенням  $N = 527$  ця задача є досить простою, тобто  $t \rightarrow 0$ . Але при використанні, наприклад,  $n$ -бітних ключів ця задача стає досить складною для вирішення за короткий час, тобто  $t \rightarrow \infty$ .

Хоча задача на факторизацію великих чисел досить складна для вирішення та потребує великих обчислювальних потужностей і часу, але при використанні паралельних обчислень та об'єднання потужностей  $n$ -комп'ютерів стає можливою для вирішення за досить прийнятний час (чим більше комп'ютерів поєднано для проведення обчислень, тим менший час їх виконання). Тому надійність таких підсистем захисту втрачає актуальність, особливо останнім часом [4, 10].

З іншого боку механізми деперсоналізації інформації не передбачають складних математичних перетворень вихідних ПДн. В основі роботи підсистеми деперсоналізації даних лежить перемішування даних ІСПДн, у відкритому вигляді, згідно з певним алгоритмом або закономірністю. Такий підхід зручно реалізовувати через те, що в основі усіх баз даних лежить використання табличних структур зберігання даних (рис. 3):

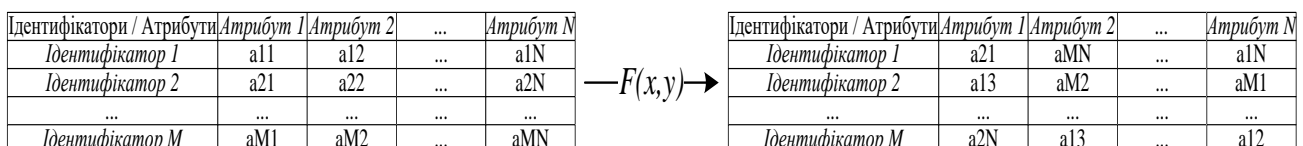


Рис. 3. Загальна схема реалізації деперсоналізації даних в ІСПДн



Приклад 2: виконаємо примітивну деперсоналізацію таблиці з ПДн за допомогою простого алгоритму перемішування даних. Нехай таблиця  $A$  містить вихідні значення ПДн, а таблиці  $\pi$  і  $\pi^{-1}$  закони переміщення даних у вихідній таблиці  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \pi = \begin{pmatrix} (3,3) & (2,1) & (2,3) \\ (1,1) & (3,2) & (1,2) \\ (2,2) & (1,3) & (3,1) \end{pmatrix} \quad \pi^{-1} = \begin{pmatrix} (2,1) & (2,3) & (3,2) \\ (1,2) & (3,1) & (1,3) \\ (3,3) & (2,2) & (1,1) \end{pmatrix}.$$

Тоді в результаті деперсоналізації даних у таблиці  $A$  отримано таблицю  $C$ , а при виконанні зворотних перетворень отримаємо вихідну таблицю  $A'$ :

$$C = \pi(A) = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \pi(C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для отримання вихідної таблиці з відкритими ПДн злоумисникові необхідно отримати доступ до таблиці зворотних перетворень  $\pi^{-1}$  або виконати підбір  $(M \cdot N)!$  комбінацій, з використанням деперсоналізованих ПДн. Окрім того, виконавши аналіз перетворень  $\pi$ , злоумисник може зрозуміти зворотній алгоритм переміщення даних і тим самим отримати вихідну таблицю з ПДн.

Отже, усі описані вище перетворення можна узагальнити схемою (рис. 4), згідно з якою в обох випадках існують схеми зворотних перетворень, при отриманні ключових параметрів яких злоумисник може отримати ПДн у відкритому вигляді без отримання відповідного на те доступу.

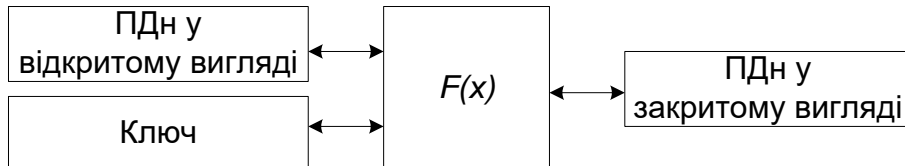


Рис. 4. Узагальнена схема перетворень ПДн в ІСПДн

За результатами аналізу вказаних вище підсистем захисту ІСПДн (шифрування та деперсоналізація даних), у процесі забезпечення конфіденційності даних в ІСПДн, отримано інформацію про їх переваги та недоліки (табл. 1).

Таблиця 1 – Результати аналізу підсистем захисту ІСПДн

Параметри аналізу	Підсистеми захисту	
	Шифрування	Деперсоналізація
Сімейство алгоритму	Симетричні, асиметричні	Симетричні
Схема перетворень	Підстановка, перестановка, розширення ключа, використання виразу $a^x \pmod n$ , циклічні перетворення	Підстановка, перестановка
Наявність ключів шифрування	Так	Так
Стійкість ключів до компрометації	Ні	Ні
Стійкість до підробки ключів	Так	Ні

Продовження табл. 1

Параметри аналізу	Підсистеми захисту	
	Шифрування	Деперсоналізація
Стійкість до підбору ключів	Так	Так
Обчислювальна стійкість	Так	Ні
Стійкість до застосування примусу	Ні	Ні
Стійкість до атак на основі відкритих ПДн	Так	Так/Ні
Стійкість до атак на основі шифрованих ПДн	Так	Так/Ні
Стійкість до атак на основі реверс інжинірингу алгоритму	Так	Так/Ні
Стійкість до атак MITM	Ні	Так

Згідно з наведеними вище даними, основними вразливостями перевірених підсистем є:

- неможливість забезпечення належного зберігання ключів (виникає внаслідок дії людського фактору, але може бути усунуте шляхом використання апаратних ключів і застосування фізичних методів захисту до них);
- нестійкість підсистем до атак із застосуванням примушування до абонента ІСПДн з боку зломисників (виникає внаслідок дії людського фактору та не може бути усунута шляхом використання технічних, організаційних або програмних заходів захисту ІСПДн).

Указані вище проблеми є наслідком того, що будь-яка інформація має свою ціну, а в разі застосування до неї засобів шифрування її цінність може стати ще більшою. Отже, з урахуванням зазначених вище проблем узагальнена схема (рис. 4) зазнає певних змін (рис. 5).

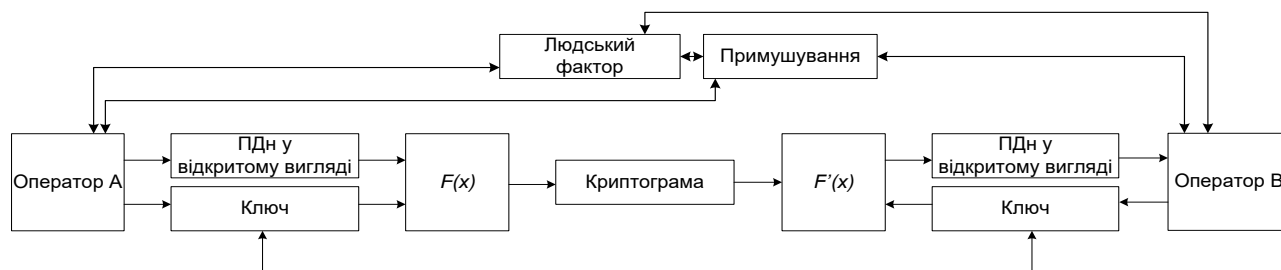


Рис. 5. Узагальнена схема перетворень ПДн в ІСПДн (з урахуванням проблем людського фактору та примушування)

Традиційно вирішення вказаних вище проблем здійснюється при застосуванні організаційних засобів захисту. Проте, як було вказано вище, у випадку впливу людського фактору на роботу підсистем захисту, їх надійність не може бути гарантованою. Тому для вирішення вказаних вище проблем необхідно застосовувати підхід із неоднозначним шифруванням даних, який дозволяє заперечити сам факт їх існування в ІСПДн або підробити їх значення, з метою захисту останніх.

На тему неоднозначного шифрування створено декілька праць [11-16] і програмних засобів [15, 16], які демонструють їх роботу, але вони не отримали широкого застосування через свій теоретичний характер, складність технічної реалізації і обґрунтування законності їх застосування. Оскільки їх надійність ґрунтується на обчислювальній стійкості діючих криптографічних систем шифрування даних, і якщо останні можна зламати з використанням/без використання ключів, то алгоритми неоднозначного шифрування не піддаються зламу (з використанням загально прийнятих методів), оскільки усі дані носять

псевдовипадковий характер. Тобто, без знання тонкощів реалізації алгоритму і ключів шифрування, їх злам ускладнюється в кілька разів. Найбільш відомими серед них є:

- алгоритм неоднозначного шифрування за відкритим ключем на базі розширеної криптографічної схеми Рабіна [11];
- алгоритм неоднозначного шифрування на базі протоколу VCP [12];
- алгоритм неоднозначного шифрування на базі протоколу RD-PKE [13];
- алгоритм неоднозначного шифрування Канетті [14].

З метою визначення можливості застосування методів неоднозначного шифрування для застосування в ІСПДн було проведено оцінку їх характеристик і їх стійкості до вразливостей, наведених вище. Результати аналізу подано в табл. 2.

Таблиця 2 – Результати аналізу засобів неоднозначного шифрування

Параметри аналізу	Алгоритми неоднозначного шифрування			
	Використання фіктивних даних	Використання контейнерів	Комбінація схем шифрування	Побітове шифрування
Сімейство алгоритму	Асиметричні алгоритми	Асиметричні алгоритми	Асиметричні алгоритми	Симетричні, асиметричні Алгоритми
Схема перетворень	$a^x \pmod n$	Інкапсуляція даних у контейнер	$a^x \pmod n$ <i>Діффі-Хеллмана</i>	$x \in \{0,1\}^n \rightarrow \pi(x) = \begin{cases} 0, \text{ умова } 1 \\ 1, \text{ умова } 2 \end{cases}$
Наявність ключів шифрування	Так	Так	Так	Так
Стійкість ключів до компрометації	Так	Так	Так	Так
Стійкість до підробки ключів	Так	Розподіл ключа на частини	Хешування секретних параметрів	Так
Стійкість до підбору ключів	Так	Так	Так	Так
Обчислювальна стійкість	Так	Так	Так	Так
Стійкість до застосування примусу	Так	Так	Так	Так
Стійкість до атак на основі відкритих ПДн	Так	Так	Так	Так
Стійкість до атак на основі шифрованих ПДн	Так	Так	Так	Так
Стійкість до атак на основі реверс інжинірингу алгоритму	Так/Ні (залежить від реалізації)	Так/Ні (залежить від реалізації)	Так/Ні (залежить від реалізації)	Так/Ні (залежить від реалізації)
Стійкість до атак MITM	Так	Так	Так	Так

Згідно з наведеними вище даними випливає, що майже усі алгоритми неоднозначного шифрування ґрунтуються на використанні асиметричних схем перетворення даних, тобто їх використання передбачає наявність 2-х та більше ключів шифрування даних, а отже їх можливо використовувати для вирішення питань мережевої безпеки (переважно). Але їх гнучкість дозволяє реалізовувати неоднозначне шифрування даних на базі симетричних алгоритмів. Загалом майже усі проаналізовані вище схеми перетворень можна описати схемою (рис. 6).

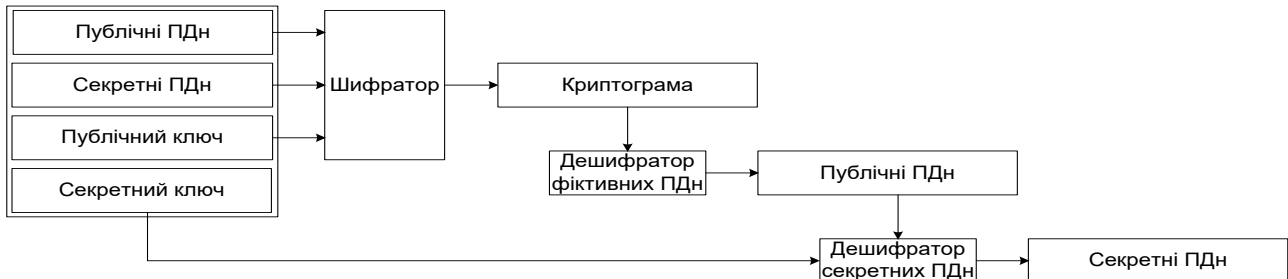


Рис. 6. Загальна схема реалізації неоднозначного шифрування даних з використанням відкритого ключа

Наведена вище схема реалізації механізму заперечування наявності даних в ІСПДн дозволяє вирішити проблеми, пов'язані з впливом людського фактору на роботу підсистем захисту ІСПДн, оскільки вони виконують генерацію  $4 \cdot N$  повідомлень на етапі дешифрування криптограми і для перевірки усіх варіацій даних, у реальних умовах, зловмисникові знадобиться велика кількість часу та спеціалізоване програмне забезпечення для розпізнавання інформативних складових ПДн. Тобто час, необхідний для їх аналізу,  $t \rightarrow \infty$ .

*Приклад 3: застосуємо алгоритм неоднозначного шифрування [12] для захисту інформації в ІСПДн. За секретні дані обрано дані з таблиці  $T$ , а для фіктивних – з таблиці  $M$ .*

*Згідно з алгоритмом були генеровані публічний ключ  $N=247$  і секретний ключ  $(p,q)=(13,19)$ , а також виконано шифрування даних з таблиці  $T$ . У результаті чого отримано криптограму  $C$ :*

$$T = \begin{pmatrix} 171 & 64 & 34 \\ 86 & 240 & 190 \\ 149 & 44 & 23 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 236 & 60 & 152 \\ 44 & 240 & 35 \\ 211 & 16 & 41 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} (201;190) & (228;240) & (184;218) \\ (175;71) & (105;27) & (41;114) \\ (225;44) & (151;17) & (29;37) \end{pmatrix}.$$

*Використовуючи особливості цього алгоритму шифрування, виконаємо дешифрування фіктивних ПДн  $M'$  з криптограми  $C$ , які призначені для отримання зловмисником, у разі застосування ним примушування до оператора ІСПДн:*

$$M' = \begin{pmatrix} (236;106;141;11) & (174;187;60;73) & (152;152;95;95) \\ (70;44;203;177) & (240;45;202;7) & (22;35;212;225) \\ (211;55;192;36) & (231;244;3;16) & (41;54;193;206) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 236 & 60 & 152 \\ 44 & 240 & 35 \\ 211 & 16 & 41 \end{pmatrix}.$$

*З отриманих наборів даних оператор обирає істинні  $M'$  значення та передає їх зловмисникові як секретні ПДн.*

*Для відновлення секретних даних з криптограми  $C$  оператору необхідно виконати додаткову ітерацію алгоритму, яка здійснює дешифрування секретних ПДн  $T'$  з фіктивних  $M'$ . У результаті чого були отримані секретні ПДн  $T'$ :*

$$T' = \begin{pmatrix} (171;171;76;76) & (12;64;183;235) & (34;99;148;213) \\ (86;47;200;161) & (240;45;202;7) & (190;190;57;57) \\ (136;149;98;111) & (70;44;203;177) & (205;23;224;42) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 171 & 64 & 34 \\ 86 & 240 & 190 \\ 149 & 44 & 23 \end{pmatrix}.$$

Якщо у використаному алгоритмі шифрування реалізувати стійкість до атак на основі реверс інжинірингу [17], то отримані зловмисником дані він вважатиме секретними і припинить протиправні дії проти оператора ІСПДн. У протилежному випадку він може продовжити дешифрування даних і з деякою ймовірністю отримає секретні ПДн.

Порівнявши дані з табл. 1-3, які наведено вище, було оцінено рівень надійності вказаних підсистем захисту, у разі їх реалізації в ІСПДн (графічно аналіз надійності підсистем шифрування наведено на рис. 7).

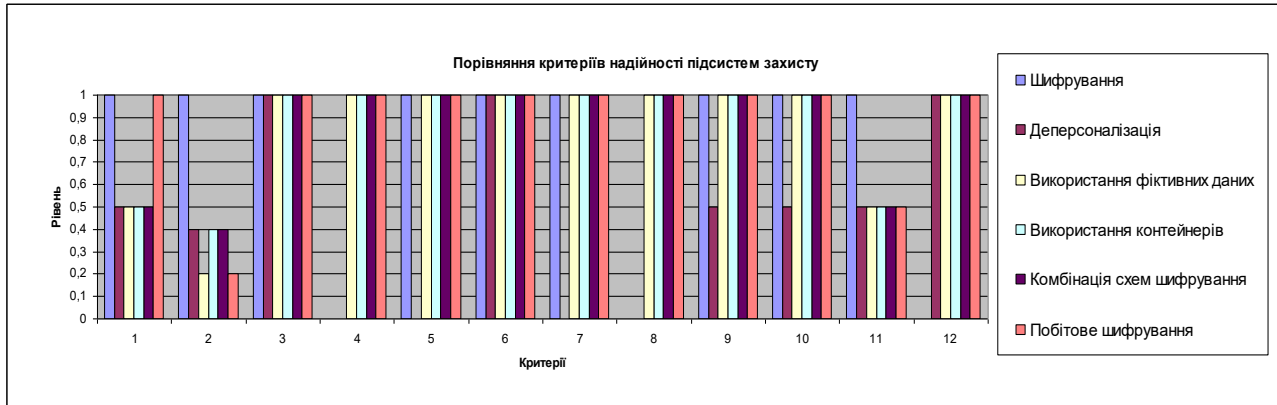


Рис. 7. Порівняння критеріїв надійності підсистем захисту ІСПДн

Порівнявши результати обчислень у прикладах 1-3 і дані гістограми на рис. 7, можна зробити відповідні висновки:

- 1) алгоритми неоднозначного шифрування реалізовані на базі існуючих криптографічних схем перетворення даних, тобто вони володіють їх перевагами та недоліками (стійкість до атак у них така сама);
- 2) до ключів обох типів криптографічних систем висуваються однакові вимоги щодо їх генерації, довжини та зберігання, але, на відміну від традиційних криптографічних систем, компрометація ключів в алгоритмах неоднозначного шифрування не є серйозною загрозою для безпеки ІСПДн, адже в них використовується шифрування двох наборів даних (один для зловмисників, інший для оператора ІСПДн);
- 3) в алгоритмах неоднозначного шифрування присутній надлишок інформації (порівняно з кількістю вхідних даних, кількість вихідних зростає, пропорційно, в N-разів), що може створити значне навантаження на існуючі системи обробки даних;
- 4) в алгоритмах неоднозначного шифрування реалізовано механізм приховування даних, подібно до методів стенографії (тобто наявність прихованих даних досить складно виявити і ще складніше отримати без відповідного ключа та знання особливостей використаного алгоритму шифрування);
- 5) в алгоритмах неоднозначного шифрування реалізована досить незначна кількість схем перетворення даних, що пов'язано з ненабуттям ними поширення, і досить складно реалізувати захист даних з використанням властивостей блочних алгоритмів шифрування (але для зберігання ПДн це не критично).

### ВИСНОВКИ З ДОСЛІДЖЕННЯ І ПЕРСПЕКТИВИ

Отже, використання алгоритмів неоднозначного шифрування має свої переваги та особливості реалізації перед традиційними і сучасними підходами до захисту інформації в ІСПДн. Їх основною перевагою є те, що використання дозволяє виключити можливість впливу людського фактору на роботу підсистем захисту в ІСПДн (на відміну від традиційних засобів). Крім того, вони володіють стійкістю криптографічних схем, на базі яких побудовано усі сучасні механізми захисту інформації, а тому забезпечують, щонайменше, той самий

рівень надійності, що й останні. Але невеликий обсяг досліджень у цьому напрямі не дозволяє повною мірою оцінити їх переваги і недоліки при вирішенні практичних завдань з інформаційної безпеки.

Окрім того, вони мають досить мале коло застосування через малу кількість механізмів, реалізованих у них (їх обмежений функціонал не дозволяє використовувати їх для захисту «bigdata»). Саме тому вони не набули значного поширення для практичного застосування (порівняно з ними, криптографічний алгоритм RSA більш простий для реалізації та застосування).

Для подальших досліджень у цьому напрямі рекомендована робота з таких питань:

- застосування засобів неоднозначного шифрування в системах (наприклад, засоби радіоелектронної боротьби тощо);
- створення електронних цифрових підписів на базі алгоритмів неоднозначного шифрування;
- адаптація алгоритмів неоднозначного шифрування для захисту «bigdata»;
- розробка та реалізація механізмів автоматичного дешифрування секретних і фіктивних даних;
- підвищення продуктивності алгоритмів шляхом їх оптимізації і використання технологій прискорення обробки даних (паралельні обчислення, апаратне прискорення, тощо);
- дослідження можливості застосування неоднозначного шифрування для захисту від квантових алгоритмів зламу;
- розробка програмного комплексу, який реалізує неоднозначне шифрування даних для захисту інформації з поєднанням технічних, програмних і організаційних заходів захисту.

З огляду на те, що надійність засобів неоднозначного шифрування значно більша за надійність традиційних та сучасних криптографічних систем захисту, їх практичне застосування мало досліджене і вони не набули поширення, то подальші дослідження в даному напрямі є актуальними.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Верховна рада України. ЗАКОН УКРАЇНИ «Про захист персональних даних». Законодавство України. URL: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/2297-17> (Дата звернення: 01.01.2017).
2. Кисиль В. Исполнение требований Закона «О защите персональных данных». ЮРИСТ&ЗАКОН. URL: [http://vkr.ua/ru/publications/articles/enforcing\\_the\\_requirements\\_of\\_the\\_personal\\_information\\_protection\\_act/](http://vkr.ua/ru/publications/articles/enforcing_the_requirements_of_the_personal_information_protection_act/) (Дата звернення: 01.01.2017).
3. Трубачева С. И. Основные аспекты защиты персональных данных на предприятии. *Вестник Волжского университета им. В. Н. Татищева*. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/osnovnyye-aspekty-zaschity-personalnyh-dannyh-na-predpriyatii> (Дата звернення: 15.10.2017).
4. Арина Ли. Объем утечек конфиденциальной информации в мире в 2017 году вырос в 8 раз. РБК. URL: [http://www.rbc.ru/technology\\_and\\_media/10/10/2017/59db57549a7947f8d8839](http://www.rbc.ru/technology_and_media/10/10/2017/59db57549a7947f8d8839) ас3 (Дата звернення: 15.10.2017).
5. Мавринская Т. В., Лошкарёв А. В., Чуракова Е. Н. Обезличивание персональных данных и технологии «Больших данных» (bigdata). URL: [http://Scientific Cooperation Center «Interactive plus»](http://ScientificCooperationCenter.com/Interactiveplus) (Дата звернення: 15.10.2017).
6. Шамсутдинов Б. Обезличивание персональных данных и data masking. Криптоанархист. URL: <http://crypto-anarchist.blogspot.com/2013/12/data-masking.html> (Дата звернення: 15.10.2017).
7. Куракин А. С. Алгоритм деперсонализации персональных данных. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. URL: <http://>

cyberleninka.ru/article/n/algorithm-depersonalizatsii-personalnyh-dannyh (Дата звернення: 15.10.2017).

8. Трифонова Ю. В., Жаринов Р. Ф. Возможности обезличивания персональных данных в системах, использующих реляционные базы данных. *Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники*. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/vozmozhnosti-obezlichivaniya-personalnyh-dannyh-v-sistemah-ispolzuyuschih-relyatsionnye-bazy-dannyh> (Дата звернення: 15.10.2017).
9. Бондаренко К. О. Универсальный быстродействующий алгоритм процедур обезличивания данных. *Известия Южного федерального университета. Технические науки*. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/universalnyy-bystrodeystvuyushchiy-algoritm-protsedur-obezlichivaniya-dannyh> (Дата звернення: 15.10.2017).
10. Мелихова О. А., Чумичев В. С., Джамбинов С. В., Гайдуков А. Б. Некоторые аспекты криптографического взлома и повышения надежности алгоритмов шифрования. *Молодой ученый*. 2015. №11. С. 392-394.
11. Молдовян Н. А., Горячев А. А., Вайчикаускас М. А. Расширение криптосхемы Рабина: алгоритм отрицаемого шифрования по открытому ключу. *ФГУП «ВИМИ»*. 2014. №2. С. 12–16.
12. Wang J. A, Meng Bo. Encryption Scheme. *Proceedings of the 2009 International Symposium on Information Processing (ISIP'09)*: (Huangshan: P. R. China, 21–23 August 2009). Huangshan, 2009.
13. Ibrahim H. Receiver-deniable Public-Key Encryption. *International Journal of Internet Security*. 2009. Vol. 8, № 2. P. 159–165.
14. Canetti R., Dwork C., Naor M., Ostronsky R. Deniable Encryption. *Advances in Cryptology*. 1997. P. 90–104.
15. Козіна Г. Л., Гальченко А. В. Заперечуване шифрування. *Тиждень науки*: (Запоріжжя, 13–17 квітня 2015 р.). Запоріжжя, 2015.
16. Гальченко А. В., Козіна Г. Л. Модифікація алгоритму заперечуваного шифрування Менга. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/modifikatsiya-algoritmu-zaperechuvanogo-shifruvannya-menga> (Дата звернення: 15.10.2017).
17. Атака на чёрный ящик. Реверс-инжиниринг виртуализированного и мутированного кода. *Habrahabr*. URL: <http://habrahabr.ru/post/225963/> (Дата звернення: 15.10.2017).

## REFERENCES

1. (2017). ZAKON UKRAJINY «Pro zahyst personalnyh danyh». Verhovna rada Ukrainy. Retrieved from <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/2297-17>.
2. Kisyl, V. (2011). Ispolnenie trebovanij Zakona «O zashchite personalnyh danyh». YURYST&ZAKON. Retrieved from [http://vkr.ua/ru/publications/articles/enforcing\\_the\\_requirements\\_of\\_the\\_personal\\_information\\_protection\\_act](http://vkr.ua/ru/publications/articles/enforcing_the_requirements_of_the_personal_information_protection_act).
3. Trubacheva, S. Y. (2010). Osnovnye aspekty zashchity personalnyh dannyh na predpriyatii. *Vestnik Volzhskogo universiteta im. V.N. Tatyshcheva*. Retrieved from <http://cyberleninka.ru/article/n/osnovnye-aspekty-zashchity-personalnyh-dannyh-na-predpriyatii>.
4. Aryna, Ly (2017). Obiem utechek konfydencyalnoy informacii v mire v 2017 godu vyros v 8 raz. *RBK*. Retrieved from [http://www.rbc.ru/technology\\_and\\_media/10/10/2017/59db57549a7947f8d8839ac3](http://www.rbc.ru/technology_and_media/10/10/2017/59db57549a7947f8d8839ac3).
5. Mavrynskaya, T. V., Loshkarev, A. V. & Churakova, E. N. (2017). Obezlichivanie personalnyh dannyh i tehnologii «Bolshix dannyh» (bigdata). Scientific Cooperation Center «Interactive plus». Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/v/obezlichivanie-personalnyh-dannyh-i-tehnologii-bolshih-dannyh-bigdata>.
6. Shamsutdinov, B. (2013). Obezlichivanie personalnyh dannyh i data masking. *Kryptoanarxyst*. Retrieved from <http://crypto-anarchist.blogspot.com/2013/12/data-masking.html>.
7. Kurakyn, A. S. (2012). Algoritm depersonalizacii personalnyh dannyh. *Nauchno-texnycheskiy vestnik informacionnyh tehnologiy, mexaniki i optiki*. Retrieved from <http://cyberleninka.ru/article/n/algorithm-depersonalizatsii-personalnyh-dannyh>.
8. Tryfonova, Yu. V. & Zharynov, R. F. (2014). Vozmozhnosti obezlichivaniya personalnyh dannyh v sistemah, ispolzuyushchih relyacionnye bazy dannyh. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo unyversyteta system upravlenyya y radyoelektroniky*. Retrieved from

- <http://cyberleninka.ru/article/n/vozmozhnosti-obezhlichivaniya-personalnyh-dannyh-v-sistemah-ispolzuyus-chih-relyatsionnye-bazy-dannyh>.
9. Bondarenko, K. O. (2015). Unyversalniy bystrodejstvuyushhij algorytm procedur obezhlichivaniya dannyh. Izvestiya Juzhnogo federalnogo universiteta. Texnicheskie nauki. Retrieved from <http://cyberleninka.ru/article/n/universalnyy-bystrodejstvuyushchiy-algoritm-protsedur-obezhlichivaniya-dannyh>.
  10. Melihova, O. A., Chumichev, V. S., Dzhambinov, S. V. & Gajdukov, A. B. (2015). Nekotorye aspekty kryptograficheskogo vzloma i povisheniya nadezhnosti algoritmov shifrovaniya. Molodoj uchenyj, No. 11, pp. 392-394 (in Russian).
  11. Moldovjan, N. A., Gorjachev, A. A. & Vajchikauskas, M. A. (2014). Rasshyrenye kryptoshemy Rabina: algoritm otriczaemogo shifrovaniya po otkrytomu kljuchu. VZI. Zhurnal po voprosam zashchyty informacii. FGUP «VYMY», No. 2, pp. 12–16 (in Russian).
  12. Wang, J. A & Meng, Bo. (2009, August). Receiver Deniable Encryption Scheme. Proceedings of the 2009 International Symposium on Information Processing (ISIP'09), (pp. 254–257), Huangshan: P. R. China.
  13. Ibrahim, H. (2009). Receiver-deniable Public-Key Encryption. International Journal of Internet Security, Vol. 8, No. 2, pp. 159–165.
  14. Canetti, R., Dwork, C., Naor, M. & Ostronsky, R. (1997). Deniable Encryption. Proceedings of Advances in Cryptology, pp. 90–104.
  15. Kozina, G. L. & Galchenko, A. V. (2015, April). Zaperechuvane shifruvannja. Tyzhden nauky – 2015: Tezy dopovidej shhorichnoyi nauk.-prakt. konf. vykladachiv, naukociv, molodyh uchenyh, aspirantiv, studentiv ZNTU, Zaporizhzhya.
  16. Galchenko, A. V. & Kozina, G. L. (2016). Modifikacija algorytmu zaperechuvanogo shyfruvannya Menga. Radioelektronika, informatyka, upravlinnya. Retrieved from <http://cyberleninka.ru/article/n/modifikatsiya-algoritmu-zaperechuvanogo-shifruvannya-menga>.
  17. (2014). Ataka na chernij yashhik. Revers-inzhiniring virtualizirovannogo i mutirovannogo koda. Habrahabr. Retrieved from <http://habrahabr.ru/post/225963/>.

УДК 539.3

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ НА БАЗЕ ГИБРИДНОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Грищак В. З., д. т. н., профессор, Дьяченко Н. Н., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

dyachenkonata69@gmail.com

Рассматривается линейная задача устойчивости конической оболочки при комбинированном нагружении тремя усилиями: всесторонним внешним давлением, осевым сжатием и крутящим моментом. Выведено обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, к которому сводится система уравнений в частных производных полубезмоментной теории устойчивости оболочки. Задача решается с помощью ВКБ метода, гибридного ВКБ-Галеркин метода и метода конечных разностей. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных разными методами. Выявлено преимущество асимптотического гибридного метода перед другими методами. Построены линии уровня поверхности устойчивости. Выявлено влияние угла конусности и длины образующей конической оболочки на ее устойчивость.

*Ключевые слова: коническая оболочка, устойчивость оболочки, комбинированное нагружение, поверхность устойчивости, гибридный асимптотический ВКБ-Галеркин метод.*



## ВИЗНАЧЕННЯ ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ НАВАНТАЖЕННІ НА БАЗІ ГІБРИДНОГО АСИМПТОТИЧНОГО ПІДХОДУ

Грищак В. З., д. т. н., професор, Д'яченко Н. М., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

dyachenkonata69@gmail.com

Розглядається лінійна задача стійкості конічної оболонки при комбінованому навантаженні трьома зусиллями: всебічним зовнішнім тиском, осьовим стисненням і крутильним моментом. Виведено звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку, до якого зводиться система рівнянь у частинних похідних напівбезмоментної теорії стійкості оболонки. Задача розв'язується за допомогою ВКБ методу, гібридного ВКБ-Гальоркін методу і методу скінченних різниць. Проведено порівняльний аналіз результатів, отриманих різними методами. Виявлено перевагу асимптотичного гібридного методу перед іншими методами. Побудовано ліній рівня поверхні стійкості. Виявлено вплив кута конусності і довжини твірної конічної оболонки на його стійкість.

*Ключові слова: конічна оболонка, стійкість оболонки, комбіноване навантаження, поверхня стійкості, гібридний асимптотичний ВКБ-Гальоркін метод.*

## STABILITY AREAS DETERMINATION OF THE CONICAL SHELL AT COMBINED MODE LOADING ON A HYBRID ASYMPTOTIC APPROACH BASIS

Gristchak V. Z., D.Sc., professor, Dyachenko N. N., Ph.D. In Physics and Math, associate professor

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhia, 69600, Ukraine*

dyachenkonata69@gmail.com

Stability problem of a conical shell at combined effect of the uniform pressure, axial compression and twisting moment on it is considered. A single or simultaneous action of pairs the specified loadings is considered in the work of N. M. Mushtari [1], P. Seide [2], A. V. Sachenkov [3], A. S. Volmir [4], N. A. Alumyaev [5], V. Z. Gristchak, I. N. Preobrazhensky [6] etc [7-10].

On the the semimembrane theory basis, the stability of conical shell is modeled by partial differential equations system. The wave making form is chosen so that it calculates/considers the waves number in a circumferential/hoop direction, the tangent of wave angle to the cone generatrix. In this case, the stress and deflection function is distinguished that depend on one variable length along the generatrix. This system is integrated by Bubnov-Galerkin method on the arc coordinate position. As a result, the two-dimensional problem is reduced to the one-dimensional. The separation of small parameter allows to simplify the system. After that, the stress function is eliminated, resulting in a single differential equation of the fourth order with respect to the deflection function. The similar equation is contained in the works of A. S. Volmir [4], V. Z. Gristchak, I. N. Preobrazhensky [6] for the cases such as the effect on the conical shell of one loadings or the joint action of external pressure and axial compression. The equation obtained in this work characterizes the simultaneous action of three loads. Such an equation had not been known before.

The decision of this equation is received for shells of the average length on the hypothesis that external pressure is prevailing. een known before. In particular, it means that one half wave is formed along the shell generatrix.

Received differential equation is solved by three methods. Firstly, it is solved by the asymptotic WKB method (Wentzel–Kramers–Brillouin) [11] based on the series solution expansion in reciprocal degrees of the large parameter. Secondly, the equation is solved by the hybrid asymptotic WKB-Galerkin method [8] based on the use of classical WKB perturbation method along with determination principle of the artificial unknown coefficients in asymptotic decomposition using Galerkin orthogonality condition. Thirdly, the numerical finite difference method is used in the work.

Boundary conditions account for rigid clamping of the shell makes it possible to obtain the characteristic equation of conical shell stability with respect to the wave making parameters.

A comparative analysis of the results obtained by different methods is researched. The advantage of hybrid WKB-method in comparison with other methods is revealed. The contour curves of surface stability obtained by notified methods are constructed for different cone angles and different lengths of the cone generatrix.

It is concluded that reducing of the cone angle leads to the increase in the number of waves in the circumferential direction and tangent of wave angle to the cone generatrix. In this case, the cone angle does not substantially affect the dimensionless critical loads for the considered range of the geometric parameters of the shell.

The length increase of cone generatrix leads to the stability decrease.

*Key words: a conical shell, a shell stability, a combined mode loading, a stability surface, the hybrid asymptotic WKB-Galerkin method.*

## ВВЕДЕНИЕ

Конические оболочки широко используются как элементы тонкостенных конструкций в авиации, судостроении, ракетной технике, строительстве и в других областях машиностроения. Обеспечение устойчивости равновесия и несущей способности тонкостенных деформируемых систем являются одной из важнейших задач, решаемых при проектировании летательных аппаратов, конструкций различных машин и других инженерных несущих сооружений.

Теоретические исследования устойчивости изотропных конических оболочек положили свое начало с работ Х. М. Муштари (1935 г.) [1] и получили дальнейшее развитие в работах Р. Seide [2], А. В. Саченкова [3], А. С. Вольмира [4], Н. А. Алумяэ [5], В. З. Грищака, И. Н. Преображенского [6], Э. И. Григолюка [7] и др. и продолжают развиваться в настоящее время [8, 9]. Обзор исследований в этой области проведен в монографии [6], где также проведен анализ методов решения, используемых этими авторами.

Различные задачи механики, в том числе задачи устойчивости оболочек, моделируются или сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, для решения которых эффективно применяются асимптотические методы. В работе [11] изложены теоретические и прикладные основы асимптотического ВКБ метода (Вентцель-Крамерс-Бриллюэн), который базируется на разложении решения в ряд по обратным степеням большого параметра. В монографии [6] этот метод применяется к решению дифференциальных уравнений задач устойчивости конических оболочек и сравнивается с результатами, полученными другими методами. Это первый метод, который используется в данной работе.

Одними из основоположников применения гибридного асимптотического метода к разным классам дифференциальных уравнений стали J. F. Geer, С. М. Andersen [12]. Затем этот метод усовершенствовался для случая сингулярных дифференциальных уравнений в работах В. З. Грищака и его учеников [8, 13]. Вторым методом, который применяется в данной работе, является гибридный ВКБ-Галеркин метод [8, 13], основанный на использовании классического метода возмущений ВКБ в сочетании с принципом определения искусственных неизвестных коэффициентов в асимптотических разложениях с помощью условия ортогональности Галеркина. В работах [8, 13] проведен сравнительный анализ результатов, полученных другими методами, с асимптотическими решениями ВКБ методом и гибридным ВКБ-Галеркин методом. В частности, получено хорошее согласование аналитических решений, полученных этим методом, с численными решениями. Для аналогичного сравнения авторами данной работы выбран численный метод конечных разностей.

В данной работе рассматривается задача устойчивости конической оболочки при комбинированном воздействии на нее всестороннего давления, осевого сжатия и крутящего момента. Одинокое или одновременное действие пар указанных нагрузок рассмотрены в работах [1-10]. Совместное воздействие трех нагрузок на коническую оболочку представляет научный и практический интерес.

Исходными служат уравнения равновесия элемента оболочки и уравнение совместности деформаций, приведенные в работе [4]. Аналогично [4, 6] выбирается форма волнообразования, которая учитывает число волн в окружном направлении, тангенс угла наклона гребня волны к образующей с выделением функций напряжений и прогиба, зависящие от одной переменной вдоль образующей. Интегрирование исходной системы методом Бубнова-Галеркина по дуговой координате позволяет свести двумерную задачу к одномерной. Выделение малого параметра (аналогично [4, 6]) позволяет упростить систему, а после исключения функции напряжения, получить одно дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции прогиба. В работах [4, 6, 8] содержится аналогичное уравнение для случаев воздействия на коническую оболочку одной из нагрузок или совместного действия внешнего давления и осевого сжатия. Отличительной

особенностью уравнения, полученного в данной работе, является зависимость его от тангенса угла наклона гребня волны к образующей. Решение этого уравнения строится для оболочек средней длины и только в том диапазоне нагрузок, в котором преобладающим является внешнее давление.

Построены линии уровня поверхности устойчивости. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных разными методами. Выявлено влияние угла конусности и длины образующей конуса на характеристики волнообразования.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ

С позиции полубезмоментной теории тонких оболочек рассматривается устойчивость жестко закрепленной усеченной конической оболочки кругового сечения при совместном действии всестороннего внешнего нормального давления, осевого сжатия и кручения.

Вводятся следующие обозначения:  $\alpha$  – угол при основании конуса,  $s$  – расстояние по образующей конуса от вершины до точки срединной поверхности,  $l_0$  и  $l_1$  – расстояния до

меньшего и большего оснований соответственно,  $x = \frac{s}{l_1}$ ,  $h$  – толщина оболочки,  $\varphi$  – угол

между аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета,  $n$  – число волн в окружном направлении при выпучивании оболочки,  $w$  – нормальное перемещение точки срединной поверхности при выпучивании,  $f$  – функция усилий,  $q$  – внешнее нормальное давление, действующее как на боковую поверхность, так и на основания оболочки,  $T$  – осевая сила,

перпендикулярная основаниям,  $M$  – крутящий момент,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – жесткость обшивки,

$E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В работе [4] приведены уравнения равновесия элемента оболочки и уравнение совместности деформаций до потери устойчивости:

$$\begin{cases} D\Delta^2 w - \Delta_k f = g, \\ \Delta^2 f + Eh\Delta_k w = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $g$  – фиктивна поперечная нагрузка, равная:

$$g = -(N_1 \kappa_1 + N_2 \kappa_2 + 2 T_{12} \kappa_{12}), \quad (2)$$

где  $N_1, N_2, T_{12}$  – погонные нормальные и касательные усилия в основном состоянии,

$$\kappa_1 = -\frac{1}{l_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = -\frac{1}{l_1^2} \cdot \left( \frac{1}{x^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \kappa_{12} = -\frac{1}{l_1^2 x \cos \alpha} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right); \quad (3)$$

$$N_1 = \frac{q}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{l_0^2}{l_1 x} - x l_1 \right) - \frac{T}{\pi l_1 x \sin 2\alpha}; \quad N_2 = -\frac{q l_1 x}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad T_{12} = \frac{M}{\pi x^2 l_1^2 \cos^2 \alpha}. \quad (4)$$

Операторы  $\Delta$  и  $\Delta_k$  находятся по формулам

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{l_1^2 A_1 A_2(x)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A_2(x)}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{A_1}{A_2(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{l_1^2 A_1 A_2(x)} \left( \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_2(x)}{A_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_1}{A_2(x)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \end{aligned}$$

$$\Delta_k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l_1^3 x} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

где  $A_1, A_2$  – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности оболочки, для конуса равные  $A_1 = 1, A_2(x) = x \cos \alpha$ . Откуда следует, что для функции перемещений операторы  $\Delta^2$  и  $\Delta_k$  даются в виде:

$$\Delta^2 w = \frac{1}{l_1^4} \cdot \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{x} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2}{x^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} - \frac{2}{x^3 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} + \frac{4}{x^4 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{x^4 \cos^4 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right); \quad (5)$$

$$\Delta_k w = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l_1^3 x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Аналогично для функции усилий.

Следуя работам [4, 6], для получения решения системы (1) функция радиальных перемещений и функция усилий представляются в виде:

$$w(x, \varphi) = W(x) \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos(\gamma(1-x) + n\varphi); \quad (7)$$

$$f(x, \varphi) = \Phi(x) \varepsilon^2 l_1 E h \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos(\gamma(1-x) + n\varphi); \quad (8)$$

где

$$\varepsilon = \frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{l_1 \sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad \gamma = \frac{n}{\cos \alpha} \gamma_1, \quad (9)$$

$\gamma_1$  – тангенс угла наклона гребня волны к образующей.

Предполагается, что комбинация внешних нагрузок такова, что в ней превалирующее действие имеет давление. В этом случае волнообразование по длине оболочки выражено намного слабее, чем в окружном. При этом, для оболочек средней длины число волн в окружном направлении таково, что  $n^2 \gg 1$ , а в продольном направлении образуется одна полуволна.

Аналогично [6] и [4] вводятся безразмерные параметры  $\delta = \frac{n^2}{\cos^2 \alpha}$ ,  $p = \varepsilon \delta$  и безразмерные усилия

$$\chi = \frac{q l_1}{E h \varepsilon^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}, \quad \eta = \frac{T \cos \alpha}{2 \pi E h \varepsilon^2 l_1 \sin^3 \alpha}, \quad \lambda = \frac{M}{2 \pi l_1^2 E h \varepsilon^{5/2} \sin^2 \alpha}. \quad (10)$$

Система (1) с учетом (2)-(10) интегрируется по координате  $\varphi$  методом Бубнова-Галеркина, то есть обе части каждого из уравнений системы умножаются на  $\cos(\gamma(1-x) + n\varphi)$  и интегрируются от 0 до  $2\pi$ . Это позволяет избавиться от переменной  $\varphi$  и после преобразований, осуществленных с помощью пакета компьютерной алгебры MAPLE, прийти к системе

$$\left\{ \begin{aligned} & \Phi \gamma^2 - \Phi'' - \frac{\lambda \gamma \sqrt{p}}{x^2} W - \chi p W + \frac{p^2}{x^3} W + \eta(-\gamma^2 W + W'') + \\ & + \varepsilon \left( \left( -\frac{1}{2} x^2 \gamma^2 W + x W' + \frac{1}{2} x^2 W'' \right) \chi + \left( -\frac{4}{x^3} + \frac{2\gamma^2}{x} \right) p W + \frac{2p}{x^2} W' - \frac{2p}{x} W'' \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left( \left( \frac{\gamma^2}{x} + x \gamma^4 \right) W + \left( \frac{1}{x^2} - 6\gamma^2 \right) W' - \left( \frac{1}{x} + 6x\gamma^2 \right) W'' + 2W''' + xW^{IV} \right) + \dots = 0; \\ & -\gamma^2 W + W'' + \frac{p^2}{x^3} \Phi + \varepsilon p \left( \left( -\frac{4}{x^3} + \frac{\gamma^2}{x} \right) \Phi + \frac{2}{x^2} \Phi' - \frac{2}{x} \Phi'' \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left( \left( \frac{\gamma^2}{x} + x \gamma^4 \right) \Phi + \left( \frac{1}{x^2} - 6\gamma^2 \right) \Phi' + \left( -\frac{1}{x} - 6x\gamma^2 \right) \Phi'' + 2\Phi''' + x\Phi^{IV} \right) + \dots = 0. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

В частном случае наличия только внешнего нормального давления аналогичная система приведена в [4], а кручения – в [6]. Следуя [4, 6], учитывая, что  $\varepsilon \ll 1$ , система (11) дается в виде

$$\left\{ \begin{aligned} & \Phi \gamma^2 - \Phi'' - \frac{\lambda \gamma \sqrt{p}}{x^2} W + \frac{p^2}{x^3} W - \chi p W + \eta(-\gamma^2 W + W'') = 0; \\ & -\gamma^2 W + W'' + \frac{p^2}{x^3} \Phi = 0. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Исключение из системы (12) функции  $\Phi(x)$  позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции прогиба  $W(x)$ :

$$W^{IV} + \frac{6}{x} W''' + \left( \frac{6}{x^2} - 2\gamma^2 + \frac{\eta p^2}{x^3} \right) W'' - \frac{6\gamma^2}{x} W' - Q_0(x) W = 0, \quad (13)$$

где

$$Q_0(x) = \frac{\eta p^2 \gamma^2}{x^3} + \frac{\chi p^3}{x^3} + \frac{\lambda \gamma p^{5/2}}{x^5} - \frac{p^4}{x^6} + 6 \frac{\gamma^2}{x^2} - \gamma^4.$$

В случае воздействия на коническую оболочку лишь нормального давления ( $\eta=0, \lambda=0, \gamma=0$ ) уравнение (13) имеет тот же вид, что в [4]. При одновременном воздействии нормального давления и осевого сжатия без кручения ( $\lambda=0, \gamma=0$ ) это уравнение полностью отвечает [6], так же, как и в случае действия только кручения ( $\chi=0, \eta=0$ ). Таким образом, уравнение (13) является обобщением полученных ранее уравнений при указанной комбинации нагрузок. Однако его нельзя получить простым сложением известных ранее уравнений, поскольку функция  $Q_0(x)$  в уравнении (13) содержит слагаемое  $\frac{\eta p^2 \gamma^2}{x^3}$ , которого не было ни в одном из известных уравнений. Это слагаемое характеризует совместность воздействия осевого сжатия и кручения.

### ПРИМЕНЕНИЕ ВКБ МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (13)

Решение ВКБ методом (Вентцель-Крамерс-Бриллюэн) получается в соответствии с [11, 6]. Поскольку  $n^2 \gg 1$ , то  $\delta$  является большим параметром. Указанный метод предполагает представление решения уравнения (13) в виде

$$W(x) = \exp\left(\int_{l_0/l_1}^x \varphi(t) dt\right), \quad (14)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \delta^{1-k}. \quad (15)$$

После подстановки разложения (14) в уравнение (13) и деления полученного уравнения на функцию  $\exp\left(\int_{l_0/l_1}^x \varphi(t) dt\right)$ , уравнение (13) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \delta^4 \left[ (\varphi_0(x))^4 + \frac{\eta \varepsilon^2}{x^3} (\varphi_0(x))^2 \right] - Q_0(x) + \\ & + \delta^3 \left( \frac{\eta \varepsilon^2 \varphi_0'(x)}{x^3} + \frac{6(\varphi_0(x))^3}{x} + 6\varphi_0'(x)(\varphi_0(x))^2 + 4(\varphi_0(x))^3 \varphi_1(x) + \frac{2\eta \varepsilon^2 \varphi_0(x) \varphi_1(x)}{x^3} \right) + \\ & + \delta^2 f_1(x, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) + \delta f_2(x, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + f_3(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_4) + \\ & + \frac{1}{\delta} f_4(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_5) + \frac{1}{\delta^2} f_5(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_6) + \dots = 0. \end{aligned}$$

В нулевом приближении получается алгебраическое уравнение четвертой степени относительно функции  $\varphi_0(x)$ :

$$\delta^4 (\varphi_0(x))^4 + \delta^4 K(x) (\varphi_0(x))^2 - Q_0(x) = 0, \quad (16)$$

где

$$K(x) = \frac{\eta \varepsilon^2}{x^3}.$$

Решениями уравнения (16) являются функции

$$\varphi_{0,1}(x) = F_1(x), \quad \varphi_{0,2}(x) = -F_1(x), \quad \varphi_{0,3}(x) = iF_2(x), \quad \varphi_{0,4}(x) = -iF_2(x), \quad (17)$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{2\delta} \sqrt{-2K(x)\delta^2 + 2\sqrt{K^2(x)\delta^4 + 4Q_0(x)}}, \quad F_2(x) = \frac{1}{2\delta} \sqrt{2K(x)\delta^2 + 2\sqrt{K^2(x)\delta^4 + 4Q_0(x)}}.$$

Поскольку рассматривается решение, отвечающее превалирующему давлению, то это соответствует нагрузкам, удовлетворяющим неравенству

$$\chi > \frac{p}{x^3} - \frac{\eta \gamma^2}{p} - \frac{\lambda \gamma}{x^2 \sqrt{p}} - 6 \frac{\gamma^2 x}{p^3} + \frac{\gamma^4 x^3}{p^3} \quad (18)$$

для всех  $x \in [l_0/l_1, 1]$ .

Если в разложении (15) удерживать только нулевое приближение, то асимптотическим ВКБ-решением уравнения (13) будет функция

$$W(x) = C_1 \operatorname{sh} S_1(x) + C_2 \operatorname{ch} S_1(x) + C_3 \sin S_2(x) + C_4 \cos S_4(x), \quad (19)$$

где

$$S_j(x) = \delta \int_{l_0/l_1}^x F_j(t) dt, \quad j=1,2.$$

Рассматриваются граничные условия жесткого закрепления:

$$W(1) = W\left(\frac{l_0}{l_1}\right) = W'(1) = W'\left(\frac{l_0}{l_1}\right) = 0. \quad (20)$$

Подстановка в равенства (20) функции безразмерного прогиба (19), приводит к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_k, k = \overline{1,4}$ . После приравнивая ее определителя к нулю, получается характеристическое уравнение. Далее определяются минимальные значения параметров волнообразования  $\eta, \lambda, \chi, n, \gamma_1$ , соответствующих решению характеристического уравнения.

### ПРИМЕНЕНИЕ ГИБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЕРКИН МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (13)

Первый шаг гибридного асимптотического подхода предполагает использование метода ВКБ, результатом которого является отыскание конечного числа функций  $\varphi_k(x)$  разложения (15). На втором шаге эти функции используют как координатные для метода Галеркина.

В данном случае в качестве координатной функции  $\varphi_0(x)$  рассматривается умноженная на  $\delta$  любая из функций вида (17), например, функция  $\varphi_{0,1}(x)$  (ее выбор не влияет на результат). Решение уравнения (13) представляется в виде

$$W(x) = \exp\left(\int_{l_0/l_1}^x \Lambda(\delta)\varphi_0(t) dt\right), \quad (21)$$

где  $\Lambda(\delta)$  – неизвестная функция параметра  $\delta$ . Подстановка функции безразмерного прогиба (21) в уравнение (13) приводит левую часть уравнения (13) к виду

$$\exp\left(\int_{l_0/l_1}^x \Lambda(\delta)\varphi_0(t) dt\right) R(\varphi_0, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_0''', \Lambda, x, \delta),$$

где

$$R(\varphi_0, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_0''', \Lambda, x, \delta) = \Lambda^4 Y_4(x) + \Lambda^3 Y_3(x) + \Lambda^2 Y_2(x) + \Lambda Y_1(x) - Q_0(x), \quad (22)$$

$$Y_4(x) = (\varphi_0(x))^4, \quad Y_3(x) = \frac{6}{x}(\varphi_0(x))^3 + 6\varphi_0'(x)(\varphi_0(x))^2,$$

$$Y_2(x) = \frac{\eta \varepsilon^2 \delta^2}{x^3}(\varphi_0(x))^2 - 2\gamma^2(\varphi_0(x))^2 + \frac{18}{x}\varphi_0'(x)\varphi_0(x) + \frac{6}{x^2}(\varphi_0(x))^2 + 4\varphi_0''(x)\varphi_0(x) + 3(\varphi_0'(x))^2,$$

$$Y_1(x) = -\frac{6\gamma^2\varphi_0(x)}{x} - 2\gamma^2\varphi_0'(x) + \varphi_0'''(x) + \frac{\eta \varepsilon^2 \delta^2 \varphi_0'(x)}{x^3} + \frac{6}{x^2}\varphi_0'(x) + \frac{6}{x}\varphi_0''(x), \quad Y_0(x) = Q_0(x).$$

В общем случае функция (21) не удовлетворяет уравнению (13), а функция  $R(\varphi_0, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_0''', \Lambda, x, \delta)$  не обращается в нуль. В соответствии с методом Галеркина, значение  $\Lambda(\delta)$  находится из условия ортогональности функций  $R$  и  $\varphi_0$ , то есть

$$\int_{l_0/l_1}^1 \varphi_0(x) R(\varphi_0, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_0''', \Lambda, x, \delta) dx = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) равносильно уравнению четвертой степени относительно  $\Lambda$ :

$$\Lambda^4 a_4 + \Lambda^3 a_3 + \Lambda^2 a_2 + \Lambda a_1 - a_0 = 0, \quad (24)$$

$$a_s = \int_{l_0/l_1}^1 \varphi_0(x) Y_s(x) dx \quad (s = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Корни (24) обозначаются через  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ . Два из них  $\Lambda_1, \Lambda_2$  являются вещественными, а два  $\Lambda_{3,4} = \xi \pm i\zeta$  – комплексно сопряженными. Таким образом, решение гибридного ВКБ-Галеркин метода имеет вид:

$$W(x) = C_1 e^{\Lambda_1 \varphi_0(x)} + C_2 e^{\Lambda_2 \varphi_0(x)} + e^{\xi \varphi_0(x)} (C_3 \sin \zeta \varphi_0(x) + C_4 \cos \zeta \varphi_0(x)). \quad (25)$$

Учет краевых условий (20) для функции безразмерного прогиба (25), приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \zeta & \xi \\ e^{\Lambda_1 \omega} & e^{\Lambda_2 \omega} & e^{\xi \omega} \sin(\zeta \omega) & e^{\xi \omega} \cos(\zeta \omega) \\ \Lambda_1 e^{\Lambda_1 \omega} & \Lambda_2 e^{\Lambda_2 \omega} & e^{\xi \omega} [\xi \sin(\zeta \omega) + \zeta \cos(\zeta \omega)] & e^{\xi \omega} [\xi \cos(\zeta \omega) - \zeta \sin(\zeta \omega)] \end{vmatrix} = 0, \quad (26)$$

где  $\omega = \int_{l_0/l_1}^1 \varphi_0(x) dx$ .

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (13)

Метод конечных разностей (МКР) предполагает сведение дифференциального уравнения (13) к системе разностных (алгебраических) уравнений относительно значений искомой функции прогиба  $\{W_i\}_{i=0}^N$  в точках разбиения отрезка  $[l_0/l_1; 1]$  на  $N$  равных частей. Такое разбиение имеет шаг  $H = \frac{L}{N}$ . В каждой из внутренних точек  $x_k = a + kH$ ,  $k = \overline{1, N-1}$

указанного отрезка уравнение (13) заменяется приближенным, в котором производные от  $W$  представляются центральными конечными разностями второго порядка

$$\begin{aligned} W'(x_k) &= \frac{1}{12H} (-W_{k+2} + 8W_{k+1} - 8W_{k-1} + W_{k-2}) + \frac{H^4}{18} R_5, \\ W''(x_k) &= \frac{1}{12H^2} (-W_{k+2} + 16W_{k+1} - 30W_k + 16W_{k-1} - W_{k-2}) + \frac{H^4}{54} R_6, \\ W'''(x_k) &= \frac{1}{2H^3} (W_{k+2} - 2W_{k+1} + 2W_{k-1} - W_{k-2}) + \frac{17H^2}{60} R_5, \\ W^{(4)}(x_k) &= \frac{1}{H^4} (W_{k+2} - 4W_{k+1} + 6W_k - 4W_{k-1} + W_{k-2}) + \frac{17H^2}{90} R_6, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $|R_p| < \max_{x \in [l_0/l_1; 1]} |W^{(p)}(x)|$ ,  $p = 5; 6$  [14]. Если в граничных условиях производные представить конечными разностями первого порядка, то это приведет, в случае жесткого закрепления, к уравнениям

$$W_0 = W_N = 0, \quad W_1 = W_{-1}, \quad W_{N-1} = W_{N+1}, \quad (28)$$



используя значения функции прогиба  $W_{-1}$  и  $W_{N+1}$  в точках, лежащих за пределами отрезка  $[l_0/l_1; 1]$ , а также значения  $W_0$ ,  $W_N$  – на концах этого отрезка. Эти же значения содержались и при составлении уравнений с номерами  $k=1$  и  $k=N-1$  во внутренних точках указанного отрезка, откуда их можно исключить, применяя соотношения (28). В результате получается  $N-1$  однородное линейное алгебраическое уравнение с таким же количеством неизвестных. Приравнивание определителя этой системы к нулю, приводит к характеристическому уравнению относительно параметров волнообразования  $\eta, \lambda, \chi, n, \gamma_1$ .

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В результате применения каждого из трех предложенных методов получаются характеристические уравнения относительно пяти параметров волнообразования:

$$\Delta_1(\eta, \lambda, \chi, n, \gamma_1) = 0. \quad (29)$$

При фиксированных значениях  $\eta = \eta_0$ ,  $\lambda = \lambda_0$  уравнение (29) представляет собой неявно заданную функцию относительно трех параметров  $\chi, n, \gamma_1$ :

$$\Delta_2(\chi, n, \gamma_1) = 0, \quad (30)$$

где  $\Delta_2(\chi, n, \gamma_1) = \Delta_1(\eta_0, \lambda_0, \chi, n, \gamma_1)$ . Функция (30) минимизируется по переменным  $n$  и  $\gamma_1$  с целью получения критического значения  $\chi$  в зависимости от  $\eta$  и  $\lambda$ . Поскольку число волн в окружном направлении  $n$  является целым, то перебор значений, при каждом  $n = n_0$ , приводит к неявно заданной функции двух переменных

$$\Delta_3(\chi, \gamma_1) = 0, \quad (31)$$

где  $\Delta_3(\chi, \gamma_1) = \Delta_2(\chi, n_0, \gamma_1)$ . Дальнейшей целью является исследование функции (31).

В случае решения задачи ВКБ приближением и гибридным ВКБ-Галеркин методом левая часть уравнения (31) является трансцендентной функцией, а в случае метода конечных разностей – многочленом двух переменных. Поскольку явно выразить один параметр через другой из уравнения (31) затруднительно, то для каждого из методов построен собственный алгоритм поиска минимума неявно заданной функции (31).

При решении поставленной задачи ВКБ методом (а также методом конечных разностей), с помощью пакета компьютерной алгебры MAPLE, строится график такой функции и находится ее минимум.

При решении ВКБ-Галеркин методом или методом конечных разностей перебор значений  $\gamma_1$  приводит (31) к уравнению относительно одной переменной  $\chi$ . В случае решения методом конечных разностей его можно решить с помощью пакета MAPLE, а в случае гибридного ВКБ-Галеркин метода – с помощью метода половинного деления. Из полученных значений  $\chi$  выбирается наименьшее по перебираемому параметру  $\gamma_1$ .

После отыскания минимума функции (31), находится то значение числа волн в окружном направлении  $\tilde{n}$ , которому соответствует наименьшее значение  $\chi$  по одному из аналитических методов (ВКБ методу или ВКБ-Галеркин методу). Для каждого из них это значение одинаково. Именно для этого  $\tilde{n}$  проводится расчет методом конечных разностей.

На рис. 1 изображены точки, соответствующие минимальному значению  $\chi = \chi_1 \sqrt[4]{12^3}$  функции (31), рассчитанному при

$$v = 0.3, h = 0.1 \text{ см}, l_1 = 182 \text{ см}, \quad (32)$$

$$\frac{l_0}{l_1} = 0.65, \lambda = 1, \eta = 0, \alpha = 60^\circ \text{ гибридным методом.}$$

Для наглядности они соединены линией тренда квадратичного вида. Таким образом, иллюстрируется принцип поиска критического безразмерного нормального внешнего давления. Для указанных исходных данных это значение равно  $\tilde{\chi} = 5.917016552 \sqrt[4]{12^3}$ , а искомое значение числа волн в окружном направлении  $\tilde{n} = 16$ .

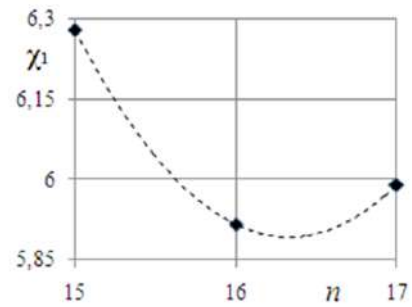


Рис. 1

Множество неотрицательных значений усилий  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$ , которые удовлетворяют неравенству (18), и соответствуют критической нагрузке, образуют границу области устойчивости  $\Gamma(\eta, \lambda, \chi) = 0$ . Такая граница представляет собой поверхность устойчивости в системе координат  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$ . Нагрузки, не превосходящие критические, расположены ниже этой поверхности и образуют область устойчивости  $\Gamma(\eta, \lambda, \chi) \leq 0$ . Согласно теореме Попковича, для линейных систем эта область должна быть выпуклой в сторону неустойчивости (от начала координат). Для цилиндрических оболочек найдены уравнения таких поверхностей, полученных теоретическими и экспериментальными исследованиями [7].

Если зафиксировать одну из нагрузок, то на поверхности образуется линия уровня. Например, при  $\lambda = \lambda_0$  эта линия будет иметь уравнение  $\Gamma(\eta, \lambda_0, \chi) = 0$ . Целью является построение совокупности таких линий при различных фиксированных значениях безразмерного крутящего момента  $\lambda$  и безразмерного осевого усилия  $\eta$ . В частности, совместное действие только пар нагрузок соответствует тому, что третья равна нулю. Парное воздействие нагрузок на коническую оболочку изучено в работах [3, 4, 8].

### АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Расчеты проводятся для оболочек с характеристиками (32). Анализируются результаты расчета для оболочки средней длины, для которой  $\frac{l_0}{l_1} = 0.65$ . При расчетах методом

конечных разностей число  $N$  частей разбиения отрезка  $\left[ \frac{l_0}{l_1}, 1 \right]$  выбиралось равным 33. При этом необходимо вычислять определитель порядка 32, что позволяет сделать пакет компьютерной алгебры MAPLE.

На рис. 2 приведены линии уровня поверхности устойчивости при различных фиксированных значениях безразмерного крутящего момента  $\lambda$ . Они характеризуют зависимость значений  $\chi_1 = \frac{\chi}{\sqrt[4]{12^3}}$ , соответствующих безразмерным критическим давлениям, от безразмерной осевой силы  $\eta$  при тех значениях  $\lambda$ , которые подписаны возле линий уровня. Для  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 0.1$  линии этих зависимостей отличаются незначительно, менее, чем на 0.5%. Поэтому графические результаты для  $\lambda = 0$  отдельно не вынесены.

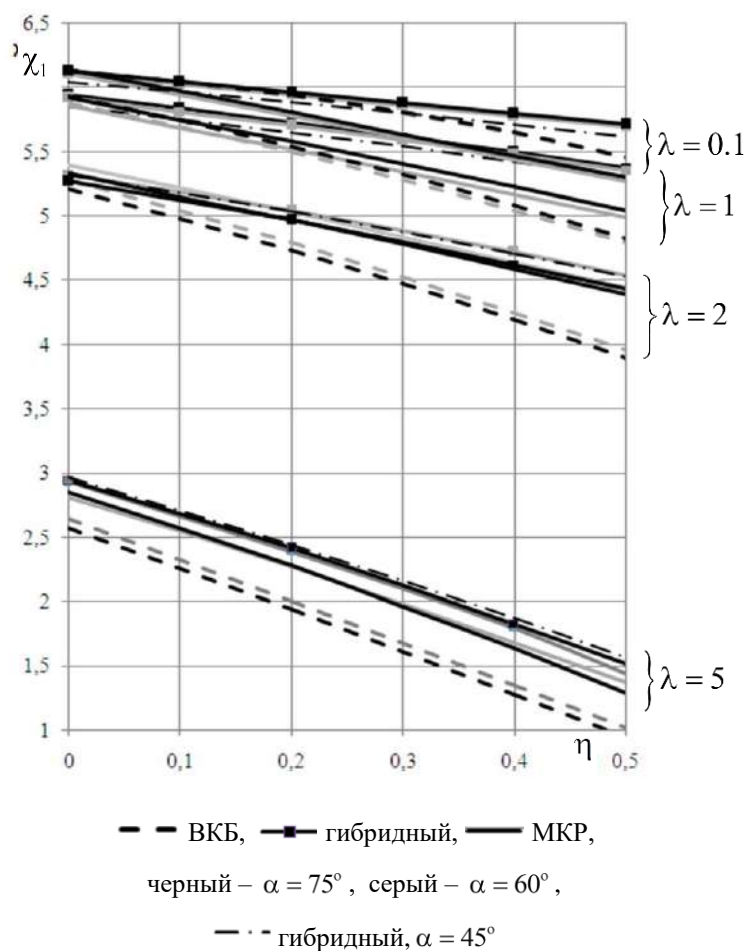


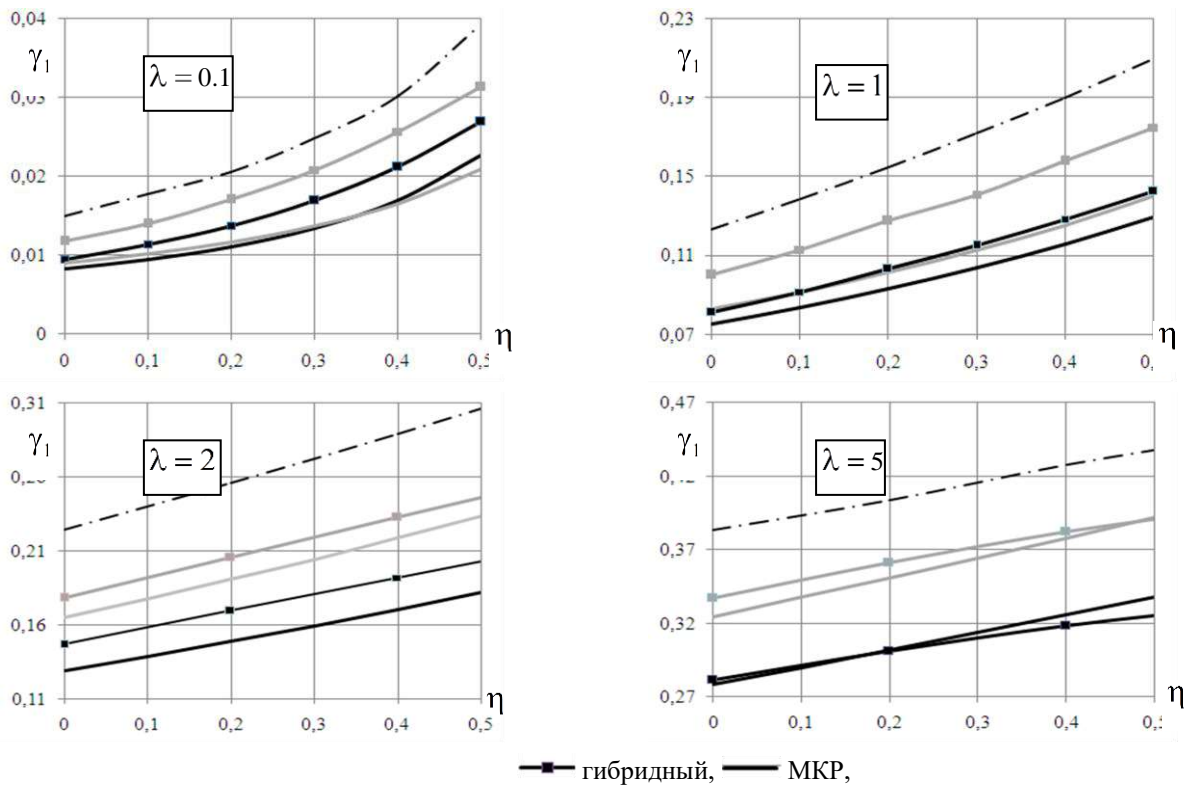
Рис. 2

На рис. 2 проведено сопоставление результатов, полученных с помощью гибридного ВКБ-Галеркин метода, ВКБ метода и метода конечных разностей, а также результатов для разных углов конусности. Аналогичные сопоставления представлены и на рис. 3 с зависимостями значений величины  $\gamma_1$  тангенса угла наклона гребня волны к образующей конической оболочки от  $\eta$  при различных значениях  $\lambda$ .

Что касается сравнения результатов, полученных разными методами, то удовлетворительное согласование с численным решением имеет гибридный ВКБ-Галеркин метод для всех значений крутящего момента. При этом, результаты, полученные ВКБ методом, имеют худшее согласование с другими методами. Именно поэтому зависимости на рисунке 3 построены с помощью только двух методов: гибридного и метода конечных разностей. Приведенные на рис. 2 и рис. 3 зависимости для угла конусности  $\alpha = 45^\circ$  найдены с использованием одного гибридного метода.

Из результатов, приведенных на рис. 3, следует, что тангенс  $\gamma_1$  угла наклона волны к образующей растет при уменьшении угла конусности  $\alpha$ . С увеличением осевого усилия  $\eta$  или крутящего момента  $\lambda$  значения  $\gamma_1$  увеличиваются.

На рис. 4 вынесены линии уровня поверхности устойчивости при фиксированных значениях осевого усилия для угла при основании конуса  $\alpha = 60^\circ$ , полученные с помощью гибридного метода. Представлены зависимости критического параметра внешнего давления от крутящего момента. Если зависимость между осевой сжимающей силой и внешним давлением приближенно имеет линейный характер при всех значениях крутящего момента, то зависимость между крутящим моментом и внешним давлением при фиксированных сжимающих усилиях является нелинейной.



черный –  $\alpha = 75^\circ$ , серый –  $\alpha = 60^\circ$ , - - - гибридный,  $\alpha = 45^\circ$

Рис. 3

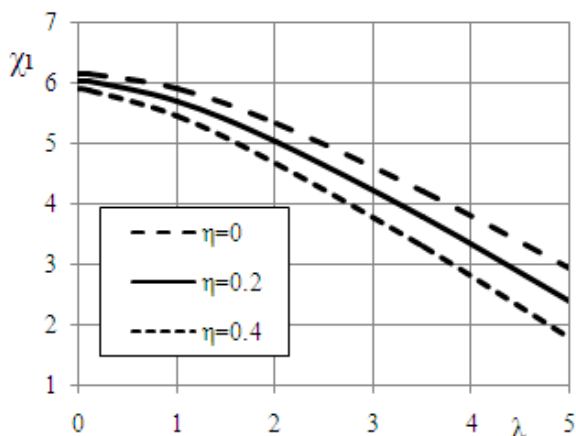


Рис. 4

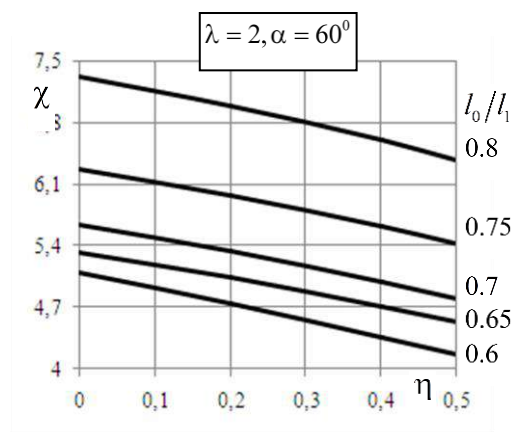


Рис. 5

Анализ результатов, приведенных на рис. 1 и рис. 3 линий уровня, приводит к выводу, что внешнее давление и сжимающее осевое усилие понижает устойчивость оболочки при кручении, а также внешнее давление и крутящий момент понижают устойчивость оболочки при ее сжатии.

Кроме того, для расчетных физических и геометрических данных найдено количество волн в окружном направлении, соответствующее критическим нагрузкам. Для  $\alpha = 75^\circ$  оно изменяется от 10 до 12, для  $\alpha = 60^\circ$  – от 16 до 19, для  $\alpha = 45^\circ$  – от 20 до 23. Таким образом, уменьшение угла конусности приводит к увеличению числа волн в окружном направлении.

Поскольку линии уровня на рис. 2 построены для безразмерных усилий, сопоставляя результаты, полученные для разных углов конусности, можно заметить, что соответствующие линии уровня находятся друг от друга на расстоянии, равном вычислительному отклонению, составляющему менее 3%. Таким образом, можно

утверждать, что угол конусности не существенно влияет на безразмерные критические нагрузки в рассмотренном диапазоне геометрических параметров оболочки.

Для оболочек с разной длиной образующей на рис. 5 приведены линии уровня поверхности устойчивости. Наибольшая длина образующей рассчитанной оболочки соответствует  $l_0/l_1 = 0.6$ . Анализируя полученные результаты, приходим к выводу, что увеличение длины образующей приводит к снижению устойчивости, а также к уменьшению числа волн в окружном направлении.

## ВЫВОДЫ

Рассмотрена задача устойчивости конической оболочки при комбинированном нагружении всесторонним внешним давлением, осевым сжатием и крутящим моментом. Выведено обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции прогиба. Решение получено с помощью гибридного асимптотического метода ВКБ-Галеркина, который базируется на использовании классического метода возмущений ВКБ в сочетании с принципом определения искусственных неизвестных коэффициентов в асимптотических разложениях с помощью условия ортогональности Галеркина. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных этим методом, с результатами, полученными асимптотическим ВКБ методом и методом конечных разностей. Выявлено преимущество гибридного метода.

Построены линии уровня поверхности устойчивости, полученные указанными методами, для разных углов конусности и длин образующих конуса.

Сделан вывод, что уменьшение угла конусности приводит к увеличению числа волн в окружном направлении и к увеличению тангенса угла наклона волны к образующей. При этом, угол конусности не существенно влияет на безразмерные критические нагрузки в рассмотренном диапазоне геометрических параметров оболочки.

Увеличение длины образующей приводит к снижению устойчивости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Об устойчивости тонкостенных конических оболочек кругового сечения при кручении парами. *Сборник научных трудов КАИ*. Казань: Изд-во Казанского авиационного ин-та, 1935. С. 39–40.
2. Seide P. A. A survey of buckling theory and experiment for circular conical shells of constant thickness. *NASSA Technical Note*, D-1510, 1962. P. 401–426.
3. Саченков А. В. Об устойчивости круговой конической оболочки при совместном действии нагрузок. *Исследования по теории пластин и оболочек*. Казань: Изд-во Казанского ун-та. 1964. № 2. С. 57–70.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Наука, 1967. 984 с.
5. Алумяэ Н. А. Теория упругих оболочек и пластинок. *Механика в СССР за 50 лет*. Т. 3. Москва: Наука, 1972. С. 227–266.
6. Преображенский И. Н., Грищак В. З. Устойчивость и колебания конических оболочек. Москва: Машиностроение, 1986. 240 с.
7. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. Москва: Наука, 1978. 260 с.
8. Gristchak V. Z., Dimitrijeva E. M. A Hybrid WRB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems *The scientific journal FACTA UNIVERSITATIS*. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics. 1998. Vol. 2, No 8. P. 709–713.
9. Литвинов В. В., Андреев В. И., Чепурненко А.С. Устойчивость усеченной круговой конической оболочки при осевом сжатии. *Вестник МГСУ. Проектирование и конструирование строительных систем. Проблемы механики в строительстве*. 2012. № 10. С. 95–101.

10. Прокопало Е. Ф., Сиволоб О. А. Експериментальне дослідження стійкості конічних оболонки з круговими отворами. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012. Вип. 19. С. 261–270.
11. Фрёман Н., Фрёман П. У. ВКБ-приближение. Москва: Мир, 1967. 166 с.
12. Geer J. F., Andersen C. M. A hybrid perturbation - Galerkin technique with application to slender body theory. *SIAM J. Appl. Mech.* Vol. 49. 1989. P. 344–361.
13. Gristchak V. Z., Lysenko V. V. A hybrid asymptotic WKB-Galerkin method with application to the correlation analysis of stochastic behaviour of non-linear systems with time-dependend parameters. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> ND-KhPI2010 International Conference on Nonlinear Dynamics*. September 21–24, 2010, Kharkov, Ukraine. P. 290–295.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1971. 576 с.

### REFERENSES

1. Mushtari, Kh. M. (1935). On the stability of thin-walled conic shells of circular cross section with torsion in pairs. Collection of scientific works of KAI. Kazan: Publishing house of the Kazan Aviation Institute, pp. 39–40.
2. Seide, P. A. (1962). A survey of buckling theory and experiment for circular conical shells of constant thickness. NASSA Technical Note, D-1510, pp. 401–426.
3. Sachenkov, A. V. (1964). On the stability of a circular conical shell under the joint action of loads. Studies on the theory of plates and shells. Kazan: Publishing house of Kazan University. No. 2, pp. 57–70.
4. Volmir, A. S. (1967). Stability of deformable systems. Moscow: Nauka.
5. Alomyae, N. A. (1972). The theory of elastic shells and plates. Mechanics in the USSR for 50 years, Vol. 3. Moscow: Nauka, pp. 227–266.
6. Preobrazhensky, I. N. & Grishak, V. Z. (1986). Stability and oscillations of conical shells. Moscow: Mashinostroenie.
7. Grigolyuk, E. I. & Kabanov, V. V. (1978). Stability of shells. Moscow: Nauka.
8. Gristchak, V. Z., & Dimitrijeva, E. M. (1998). A Hybrid WRB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems The scientific journal FACTA UNIVERSITATIS. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 2, No. 8, pp. 709–713.
9. Litvinov, V. V., Andreev, V. I. & Chepurenko, A. S. (2012). Stability of a truncated circular conical shell under axial compression. Bulletin of MGSU. Design and construction of building systems. Problems of mechanics in construction, No. 10, pp. 95–101.
10. Prokopalo E. F. & Sivolob O. A. (2012). Experimentalnoe doslozhenzhennia stійkosti konichnyh shells in the circular gaps. Problems obkshchlyulvalnoye mehaniki i micostnosity konstrukciy. Iss. 19, pp. 261-270.
11. Freeman, N. & Freeman, P. U. (1967). WKB-approximation. Moscow: Mir.
12. Geer, J. F. & Andersen, C. M. (1989). A hybrid perturbation - Galerkin technique with application to slender body theory. *SIAM J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 344–361.
13. Gristchak, V. Z. & Lysenko, V. V. (2010). A hybrid asymptotic WKB-Galerkin method with application to the correlation analysis of stochastic behaviour of non-linear systems with time-dependend parameters. *Proceedings of the 3rd ND-KhPI2010 International Conference on Nonlinear Dynamics*. September 21–24, Kharkov, Ukraine, pp. 290–295.
14. Kamke, E. (1971). Handbook of ordinary differential equations. Moscow: Nauka.

УДК 534.113

**КОРОТКИЙ НАРИС ДОСЛІДЖЕНЬ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ СИСТЕМ  
З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ НЕКЛАСИЧНИМ  
МЕТОДОМ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ****До 170-річчя проблеми**

Дем'яненко А. Г., Гурідова В. О.

*Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет,  
вул. Сергія Єфремова, 25, м. Дніпро, Україна*

anatdem@ukr.net

Наведено короткий огляд досліджень динаміки пружних систем з рухомих інерційних навантажень методом двохвильового подання коливань у вигляді суперпозиції власних та супровідних коливань, який у деяких випадках дозволяє побудувати точні розв'язки задач. Супровідні коливання зумовлені наявністю рухомого інерційного навантаження. Як приклад, розглянуто коливання та стійкість балки Тимошенко за дії рухомого інерційного навантаження.

*Ключові слова:* динаміка, рухоме навантаження, пружні системи.

**КРАТКИЙ ОЧЕРК ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СИСТЕМ  
С ПОДВИЖНОЙ ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКОЙ НЕКЛАССИЧЕСКИМ  
МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ****К 170-летию проблемы**

Демьяненко А. Г., Гуридова В. А.

*Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет,  
ул. Сергея Ефремова, 25, г. Днепр, Украина*

anatdem@ukr.net

Приведен краткий обзор исследований по динамике упругих систем с подвижной инерционной нагрузкой методом двухволнового представления колебаний в виде суперпозиции собственных и сопровождающих колебаний, который позволяет в некоторых случаях построить точные решения задач в рамках исходных предпосылок. Сопровождающие колебания обусловлены подвижной инерционной нагрузкой. В качестве примера рассмотрены колебания и устойчивость балки Тимошенко под действием подвижной инерционной нагрузки.

*Ключевые слова:* динамика, подвижная нагрузка, упругие системы.

**BRIEF SKETCH THE DYNAMICS OF ELASTIC SYSTEMS WITH MOVABLE  
INERTIAL LOAD NONCLASSICAL BY SEPARATION OF VARIABLES****To the 170 anniversary of the problem**

Demianenko A. G., Guridova V. A.

*Dnepropetrovsk State University of Agriculture and Economics of Ukraine,  
Sergey Efremov str., 25, Dnepr, Ukraine*

anatdem@ukr.net

In May 2017, the 170th anniversary were carried out from the day of the first formulation of the problem of the dynamic load influence on elastic structures and buildings that is related to destruction of Chester bridge in May 1847 in United Kingdom. After that, the mechanical engineers asked the question what are the differences between effects from acting of movable and fixed loads applied to the same elastic structure. Gradually the main interest was being moved from the applied aspects of this problem to the area of its physical and mathematical bases and was causing the necessity developing of the respective theory to replace a wide variety of the incomplete problem formulations and solving methods that caused to contradictory, paradoxical

or even incorrect results so frequently. This problem is closely related to the dynamic problems of objects with time-dependent dimensions and some nonholonomic constraints. Masses and velocities of the systems that have been significantly increased in XX-XXI centuries put new tasks before engineers, require their solutions, originates new approaches in mechanics and mathematical modelling combined with on-going development of existing ones to discover quantitative and qualitative properties of kinematical and dynamical characteristics of a system motion. The main features of mathematical models describing the dynamic behavior of the elastic objects under movable inertia loading is the presence of an inertia operator in one of its forms that determines the force influence of the movable inertia loading on the elastic objects. The operator usually depends on intensity and velocity  $v(t)$  of loading stream, elastic strain  $w(x,y,t)$ , and it can be clearly tracked the dependency of the acceleration of the deformation  $w_{tt}(x,y,t)$ , of force influence from both bending velocities  $w_{tx}(x,y,t)$  and from curvature  $w_{xx}(x,y,t)$  of object's surface, so the movable inertia loading is a follower load. It is the second feature of the dynamics of elastic systems in the field of movable inertia loads

The third feature is that the odd – order mixed derivatives by the time should be contained in the system due to the Coriolis' acceleration of the movable load, that makes some difficulties for getting the solution applying of Fourier schema to the variable separation on the field of real numbers. A brief review of research on the dynamics of elastic systems with movable inertia loads solved by method of two-wave superposition of the eigen-oscillations and accompanying oscillations that allows to get analytical solutions for initial hypotheses. Accompanying oscillations are caused by the presence of moving inertia loads. The vibration and stability of the Timoshenko beam on a prism basis compressed by axial forces under moving load is considered. It is shown that the eigenoscillation forms and accompanying oscillations depend on the velocity of motion and the ratio between moving and stationary masses of the system. The dependency of the beam oscillations on the movable loads velocity and the ratio of moving and stationary masses of the system has been researched. Two critical velocities have been discovered and two matched eigenfrequencies for the second critical velocity. We have to note that the above features of the beam behavior cannot be obtained by numeric methods of mathematical physics from simplified models without considering of the Coriolis' inertia forces.

*Key words: dynamic, movable load, elastic systems.*

## ВСТУП

У травні 2017 року виповнюється 170 років із дня виникнення проблеми динамічної дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди, пов'язане з руйнуванням Честерського мосту в Англії у травні 1847 року [17]. Суттєве збільшення мас і швидкостей руху в динамічному XX-XXI сторіччі ставить перед інженерами нові задачі, потребує їх вирішення, викликає появу нових підходів у механічному та математичному моделюванні, нових і удосконалення старих методів їх дослідження з метою більш повно виявити усі кількісні та якісні особливості кінематичних та динамічних характеристик процесу руху таких систем. Спочатку перед інженерної наукою постало питання наскільки результати дії рухомого навантаження на пружні конструкції відрізняються від дії такого ж за інтенсивністю статичного. Згодом інтерес до цієї проблеми з суто прикладної перемістився в область фізико-математичну – вибору і побудови адекватних механічних (розрахункових схем) і відповідних їм математичних моделей, які б найбільш повно враховували і відображали усі реальні фактори, що впливають на динаміку механічної системи – конструкція – рухоме навантаження. Виникаючи при цьому математичні моделі та їх дослідження у свою чергу призводять до розробки нових, уточнення і модернізації існуючих математичних методів, їх обґрунтування, коректності та меж застосування [1-4, 14, 18]. До математичних моделей задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням приходимо також у задачах динаміки об'єктів змінної довжини, пружних тіл, що рухаються у поздовжньому напрямку, в механічних системах з неголономними в'язями та інших [1-5].

## МЕХАНІЧНІ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ХАРАКТЕРНІ ОСОБЛИВОСТІ І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ СИСТЕМ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Залежно від способу схематизації інерційних властивостей елементів, що утворюють систему, існують чотири принципово різних варіанти постановки задач про дію рухомого



навантаження на пружні конструкції [19]. Найбільш складним є четвертий варіант, де враховуються інерційні властивості рухомого навантаження і самої конструкції. Перші важливі результати, де розв'язок задачі представлено у вигляді рядів, відносяться до тридцятих років минулого сторіччя [17, 19]. Детальний огляд досліджень, виконаних у XIX і початку XX століття, наведено Я. Г. Пановко у відомому історичному нарисі розвитку теорії динамічної дії рухомого навантаження до сторіччя постановки проблеми [17]. Як зазначено в цій праці, проблема динамічної дії рухомого навантаження, сторічний ювілей якій виповнився в 1947 році, і, продовжуючи думку Я. Г. Пановко, 170 річний в 2017 році, до наших днів не втратила своєї актуальності. Сучасний інтенсивний розвиток техніки продовжує ставити нові задачі і викликає подальший розвиток експериментальних та теоретичних досліджень. Досить повний огляд досліджень з цієї проблеми першої половини XX століття наведено в роботах Н. З. Якушева [19]. І якщо за часів XIX сторіччя актуальною була проблема динаміки мостів за дії піхоти, кавалерії і артилерії, яка розглянута в праці І. М. Рабиновича [17], то в XXI столітті актуальними проблемами є динаміка мостів за руху потягів TGV зі швидкістю 400 км/год, динаміка трубопроводів в охолоджувальних системах РРД і гідроприводах літальних апаратів, де швидкість рідини досягає 250 км/год, пневмопроводів і повітряних охолоджувальних систем зі швидкістю газів до 750 км/год при тиску до 10 МПа. Як зазначено у працях П. Д. Доценко [14], 50-80% відмов у роботі літальних апаратів відбувається за причини вібрації, втрати стійкості та втомних руйнувань трубопроводів. Основними особливостями математичних моделей, які описують динаміку пружних об'єктів за дії рухомих інерційних навантажень, є:

по-перше, наявність у математичній моделі в тому чи іншому вигляді інерційного оператора

$$L(w) = -\frac{q_0 + q_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2 \frac{q_1 v}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

який визначає силовий вплив рухомого інерційного навантаження на пружний об'єкт. Характерним є той факт, що силовий вплив залежить як від інтенсивності  $q_1(x)$  і швидкості руху  $v$  потоку навантаження, так і від деформації пружного об'єкта  $w(x, y, t)$ , причому, чітко простежується залежність силового впливу від прискорення деформації  $w_{tt}(x, y, t)$ , швидкості кутової деформації  $w_{tx}(x, y, t)$  і зміни кривини поверхні об'єкта  $w_{xx}(x, y, t)$ , тобто рухоме інерційне навантаження носить слідкуючий характер. Це є другою характерною рисою задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень. Третьою особливістю є наявність у математичній моделі непарної за часом змішаної похідної, яка зумовлена прискоренням Коріоліса рухомого навантаження і створює певні труднощі при побудові розв'язку, не дозволяючи відокремити змінні  $x$  і  $t$  за класичною схемою Фур'є в дійсній області шуканих функцій. Багато задач динаміки деформівних систем з рухомим інерційним навантаженням відносяться до неконсервативних [14, 19]. У зв'язку з цим безпосереднє застосування класичних, прямих методів математичної фізики до дослідження динаміки консервативних механічних систем не завжди коректно для дослідження таких механічних систем. Для дослідження задач динаміки будівельної механіки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням найбільш часто застосовують такі математичні методи:

1. Метод Шаленкампа.
2. Метод Інгліса-Болотіна.
3. Метод А. П. Філіппова і С. С. Кохманюка.
4. Метод двохвильового подання коливань.
5. Метод інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є.
6. Метод кінцевих елементів.

Наведемо короткий огляд (який не претендує на повноту) відомих досліджень з динаміки пружних конструкцій і споруд другої половини ХХ і початку ХХІ сторіччя на основі методу двохвильового подання коливань. Відомо, що коливання пружних тіл і систем у класичній теорії є суперпозицією власних коливань. Форма будь-якого власного коливання має вигляд стоячої хвилі, а кожній формі відповідає одна власна частота коливань. Класичний метод відокремлення змінних, який застосовують при дослідженні коливань пружних тіл, дає можливість побудувати форми і визначити частоти власних коливань. Застосування наближених методів типу Гальоркіна/Релея, Ритца й інших для дослідження коливань пружних тіл ґрунтується на модифікації методу розділення змінних, де коливання пружних тіл також представляють у вигляді суперпозиції коливань, форми яких тією чи іншою мірою наближаються до власних коливань досліджуваного пружного тіла. Успіх наближення залежить від того, наскільки вдало здійснено вибір координатних функцій, тобто форм для опису коливань. Однак у багатьох випадках, наприклад, у тілах, закріплених таким чином, що в граничні умови входять сили, які залежать від часу або швидкості [2-4, 15], у пружних тілах з рухомими інерційними навантаженнями, як показують дослідження, коливання мають більш складну структуру, де на кожній частоті тіла або системи здійснюються одночасно два зсунутих по фазі на прямий кут коливання з різними формами, тобто коливання подаються двома групами стоячих хвиль, які, на відміну від класичних, названі двохвильовими. Цілком природно, що для ефективності дослідження динаміки механічних систем з двохвильовою природою процесу руху, виникла необхідність створення нових математичних методів або узагальнення класичних прямих методів математичної фізики типу Гальоркіна, які відображали б двохвильовий характер коливань. Автори [1-16, 18] здійснюють подальший розвиток наближених методів для дослідження задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень і задач, що приводяться до таких математичних моделей. Двохвильове подання коливань, запропоноване і розвинене в працях [1-13], стимулювало розвиток досліджень якісної теорії диференціальних рівнянь у плані узагальнення методу Фур'є в роботах П. І. Каленюка та його учнів [15]. Класичним прикладом механічних систем, коливання яких має двохвильовий характер, є системи з рухомими інерційними навантаженнями. Двохвильовий характер коливань таких систем ілюструється точними рішеннями, отриманими авторами [1-13]. Результати ґрунтовних досліджень з проблеми динаміки пружних систем з рухомим навантаженням, обширна бібліографія та аналіз яких наведені в працях В. В. Болотіна, Я. Г. Пановко, Н. З. Якушева, М. Н. Серазутдінова, А. П. Філіппова, Є. Г. Голоскокова, І. А. Колесника, С. С. Кохманюка, Г. Ф. Кравченко, А. Б. Моргаєвського, І. А. Колесніка, П. Д. Доценко, О. А. Горошко, А. Г. Дем'яненко, С. П. Киби, В. І. Пожуєва, Н. Г. Бондаря, С. І. Конашенко, А. С. Распопова, Wacław Szczesniak. Наразі проблема дослідження якісного та кількісного впливу рухомого навантаження на коливання і стійкість стрижнів, пластин і оболонок ще далека до свого остаточного завершення і привертає увагу інженерів і науковців у багатьох країнах світу, чому сприяють та допомагають ІТ. Однією з перших публікацій із застосування некласичного, модифікованого методу відокремлення змінних до дослідження математичних моделей задач динаміки пружних тіл з рухомим інерційним навантаженням була праця Н. Steuding [20], де розглянуто згинні коливання балки під дією рухомих інерційних навантажень. Другою була робота G. W. Housner [21], де загальний розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними, яке описує коливання пружного об'єкту з рухомим інерційним навантаженням, є лінійною комбінацією часткових розв'язків, які містять симетричні та антисиметричні, зсунуті по фазі на  $90^\circ$  форми коливань. Причому, як наголошено в роботі, антисиметричні форми зумовлені наявністю змішаної похідної непарної за часом, тобто силами інерції Коріоліса рухомого навантаження, і зв'язані через них з симетричними формами. Власне цими роботами та роботою І. І. Гольденבלата [4] було започатковано некласичний метод відокремлення змінних у задачах динаміки пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження, фізична інтерпретація якого вперше наведена професором О. О. Горошко [1]. Загальний розв'язок диференціального рівняння

руху подається у вигляді суми двох рядів, один з яких є класичною частиною розв'язку, а другий – частиною, яка зумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної, зумовленої інерційністю рухомого навантаження, і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи [1-3] названі власними формами, а форми другої групи – супровідними формами коливань пружної системи з рухомим інерційним навантаженням. Супровідні коливання зумовлені і нетривіальні лише за наявності рухомого інерційного навантаження. Сьогодні більш повному та детальному дослідженню задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням методом, який названо методом двохвильового подання коливань, сприяють сучасні інформаційні технології, чого бракувало в часи Н. Steuding, G. W. Housner, Я. Г. Пановко, І. І. Гольденבלата, А. П. Філіпова, Е. Г. Голоскокова. Як приклад застосування методу двохвильового подання, наведемо дослідження коливань одновимірного пружного об'єкту під дією рухомого інерційного навантаження. Механічна модель побудована на основі моделі Тимошенко.

### КОЛИВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ПРУЖНИХ ОБ'ЄКТІВ. МЕХАНІЧНА, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛІ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

На цей час методом двохвильового подання коливань досліджене «узагальнене» рівняння струни, поперечні коливання балок, пластинок, циліндричних оболонок за дії, як рівномірно розподіленого навантаження, так і зосереджених рухомих інерційних навантажень. Існує теоретичний та практичний інтерес дослідження коливань балки Тимошенко [3, 8, 9] за дії рухомого розподіленого інерційного навантаження, де математична модель містить непарну за часом змішану похідну не тільки в основному операторі диференціального рівняння руху, а й у крайових умовах [3, 4]. Математична модель задачі побудована на основі уточненої механічної моделі балки з урахуванням сил інерції повороту поперечних перерізів та деформацій зсуву, сил інерції рухомого навантаження, дії пружної основи, зовнішнього опору та осрової стискаючої сили. Система рівнянь, які описують поперечні коливання балки за уточненою моделлю Тимошенко, має вигляд:

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{GF}{k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = q(x, t), \\ EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{GF}{k} \left( \theta - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Крайові умови для цієї моделі балки візьмемо у вигляді:

$$\begin{cases} u|_{x=0,l} = 0, \\ \left( -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{GF} q(x, t) \right) \Big|_{x=0,l} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

У виразах (1)-(2)  $k = \left( \frac{FS^*}{bI} \right)^2$  – коефіцієнт зсуву, який залежить від форми поперечного

перерізу,  $\theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma$  – повний кут повороту поперечного перерізу балки, де  $\gamma$  – додатковий кут повороту поперечного перерізу балки, який пов'язаний з деформацією зсуву. У випадку врахування сил інерції Коріоліса вираз для дії рухомого масового навантаження запишемо так

$$q(x, t) = -q_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (3)$$

Розглянемо коливання елемента, стиснутого осьюою силою  $N$ , з урахуванням сил опору зовнішнього середовища, пропорційного швидкості поперечного руху перерізу з коефіцієнтом  $\alpha$  та пружної основи з коефіцієнтом жорсткості  $c$ . Математична модель такої задачі зводиться до дослідження системи двох зв'язаних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{GF}{k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + cu = q(x, t), \\ EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{GF}{k} \left( \theta - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Розв'язок цієї системи задовольняємо крайовим умовам (2). У випадку руху навантаження з прискоренням вираз для навантаження  $q(x, t)$  матиме вигляд:

$$q(x, t) = -q_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5)$$

де  $a = \frac{\partial v}{\partial t}$  – прискорення рухомого навантаження.

Математична модель (4)-(2) при використанні виразу (5) є найбільш загальною. Щоб отримати результати часткових випадків, необхідно покласти рівними нулю відповідні доданки у відповідних диференціальних рівняннях математичної моделі. Виключаючи з системи (4) невідому функцію  $\theta(x, t)$  отримуємо одне диференціальне рівняння відносно невідомої функції прогину  $u(x, t)$

$$\begin{aligned} & \left( EI + kN \frac{EI}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left( k\rho \frac{EI}{G} + \rho I + k\rho N \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + k\rho^2 \frac{I}{G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \\ & - \alpha k \frac{EI}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \alpha k \rho \frac{I}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \left( ck \frac{EI}{GF} + N \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \rho F + ck\rho \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ & + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + cu = q(x, t) - k \frac{EI}{GF} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k \frac{\rho I}{GF} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Крайові умови (5) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} u|_{x=0, l} = 0, \\ \left( -GF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - kq(x, t) \right) \Big|_{x=0, l} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Після підстановки в диференціальне рівняння (6) та граничні умови (7) виразу (5) для  $q(x, t)$  матимемо наступну крайову задачу

$$\begin{aligned} & \left( EI + kN \frac{EI}{GF} - kq_0 v^2 \frac{EI}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2kq_0 v \frac{EI}{GF} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} - \\ & - \left( k\rho \frac{EI}{G} + kq_0 \frac{EI}{GF} + \rho I + k\rho N \frac{I}{GF} - k\rho q_0 v^2 \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + 2kq_0 v \rho \frac{I}{GF} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} + \\ & + \left( k\rho^2 \frac{I}{G} + k\rho q_0 \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - kq_0 a \frac{EI}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha k \frac{EI}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + k\rho q_0 a \frac{I}{GF} \frac{\partial^3 q}{\partial x \partial t^2} + \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & +\alpha k \rho \frac{I}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \left( q_0 v^2 - ck \frac{EI}{GF} - N \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2q_0 v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \\
 & + \left( \rho F + q_0 + ck \rho \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_0 a \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + cu = 0, \\
 & \left\{ \begin{aligned} & u|_{x=0,l} = 0, \\ & \left( (kq_0 v^2 - GF) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2kq_0 v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + (k\rho F + kq_0) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kq_0 a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0,l} = 0. \end{aligned} \right. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Функцію прогину  $u(x, t)$ , перейшовши до безрозмірних параметрів, відшукуємо у вигляді [3]:

$$u(z, \tau) = \phi(z) \cos \omega \tau + \varphi(z) \sin \omega \tau. \quad (10)$$

Функції  $\varphi(z)$  та  $\phi(z)$  є формами поперечних коливань балки,  $z$  – безрозмірна координата,  $\varphi(z)$  – форма власних коливань,  $\phi(z)$  – супровідних, для визначення яких отримуємо відповідні системи звичайних зв'язаних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_4 \varphi^{IV} + \alpha_3 \varphi^{III} - \beta_3 \phi^{III} + \alpha_2 \varphi^{II} - \beta_2 \phi^{II} + \alpha_1 \varphi^I - \beta_1 \phi^I + \alpha_0 \varphi - \beta_0 \phi = 0, \\ \alpha_4 \phi^{IV} + \alpha_3 \phi^{III} + \beta_3 \varphi^{III} + \alpha_2 \phi^{II} + \beta_2 \varphi^{II} + \alpha_1 \phi^I + \beta_1 \varphi^I + \alpha_0 \phi + \beta_0 \varphi = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \varphi|_{z=0,1} = 0, \\ \phi|_{z=0,1} = 0, \\ b_0 \varphi^{II} + b_3 \varphi^I + b_1 \omega \phi^I - b_2 \omega^2 \varphi \Big|_{z=0,1} = 0, \\ b_0 \phi^{II} + b_3 \phi^I - b_1 \omega \varphi^I - b_2 \omega^2 \phi \Big|_{z=0,1} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

або, використовуючи комплексну згортку, матимемо:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_4 (\varphi^{IV} + i\phi^{IV}) + (\alpha_3 + i\beta_3) (\varphi^{III} + i\phi^{III}) + (\alpha_2 + i\beta_2) (\varphi^{II} + i\phi^{II}) + \\
 & + (\alpha_1 + i\beta_1) (\varphi^I + i\phi^I) + (\alpha_0 + \beta_0) (\varphi + i\phi) = 0, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \varphi + i\phi|_{z=0,1} = 0, \\ b_0 (\varphi^{II} + i\phi^{II}) + (b_3 - ib_1 \omega) (\varphi^I + i\phi^I) - b_2 \omega^2 (\varphi + i\phi) \Big|_{z=0,1} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Увівши комплексні коефіцієнти  $\gamma_j = \alpha_j + i\beta_j$  та комплексну функцію дійсного аргументу  $\Phi(z) = \varphi(z) + i\phi(z)$ , отримаємо одне звичайне диференціальне рівняння з граничними умовами відносно функції  $\Phi(z)$

$$\sum_{j=0}^4 \gamma_j \frac{d^j \Phi}{dz^j} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{cases} \Phi(z)|_{z=0,1} = 0, \\ b_0 \Phi^{II}(z) + (b_3 - ib_1 \omega) \Phi^I(z) - b_2 \omega^2 \Phi(z) \Big|_{z=0,1} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

розв'язки якого шукаємо у вигляді  $\Phi(z) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{k_j z}$ , де  $k_j$  – корені характеристичного рівняння  $\sum_{j=0}^4 \gamma_j k^j = 0$ , що є алгебраїчним рівнянням четвертого порядку з комплексними коефіцієнтами, розв'язки якого знаходимо за допомогою методу градієнтного спуску Воєводіна.  $C_j$  – невідомі сталі, що визначаються за граничними умовами у вигляді:

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0, \\ \Phi(1) = 0, \\ b_0 \Phi''(0) + (b_3 - ib_1 \omega) \Phi'(0) - b_2 \omega^2 \Phi(0) = 0, \\ b_0 \Phi''(1) + (b_3 - ib_1 \omega) \Phi'(1) - b_2 \omega^2 \Phi(1) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Подальша процедура аналогічна класичному випадку [3].

Остаточно загальний розв'язок задачі має вигляд:

$$u(z, t) = \sum_n a_n \left[ \operatorname{Re}(\Phi_n(z)) \cos(\omega_n t + \alpha_n) + \operatorname{Im}(\Phi_n(z)) \sin(\omega_n t + \alpha_n) \right]. \quad (18)$$

### АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для чисельної реалізації алгоритму методу двохвильового подання при дослідженні динаміки балки під дією рухомого інерційного навантаження була складена програма для ПЕОМ. Метою чисельного експерименту було з'ясування залежності між власними частотами поперечних коливань стержня та швидкістю руху навантаження. Залежність між власними частотами  $\omega$  та швидкістю руху  $v$  наведена на рис. 1.

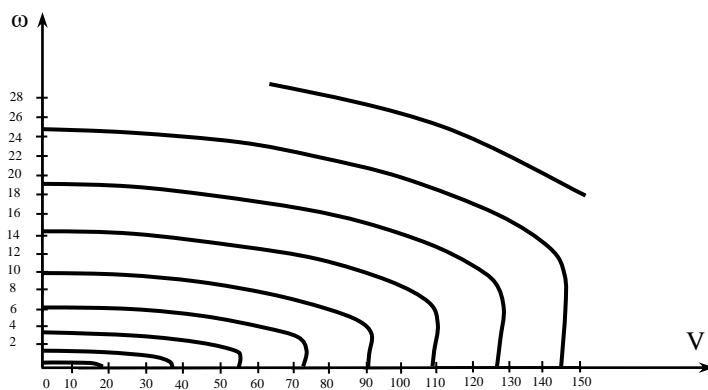


Рис. 1. Залежність власних частот від швидкості рухомого навантаження

На рис. 2 наведено графік для сьомої власної частоти коливань, звідки видно, що при збільшенні швидкості руху навантаження частота зменшується. Але при досягненні швидкості певного значення  $v_1^*$  раптово з'являється нова основна власна частота, і залежність цієї частоти від швидкості вже є зростаючою. На деякому проміжку мають місце початкова та нова власні частоти, і при цьому вони наближуються одна до одної. При  $v_2^*$  вони стають рівними. Значення швидкості  $v_1^*$  назвемо першою критичною швидкістю руху інерційного навантаження для балки Тимошенко, при досягненні якої відбуваються статична втрата стійкості, тобто у балки з'являється нова рівноважна форма, відносно якої в подальшому відбуваються коливання. Значення швидкості  $v_2^*$  назвемо другою критичною швидкістю, при

досягненні якої відбувається динамічна втрата стійкості, коли дві власні частоти співпадають або близькі до цього. Зауважимо, що такий результат якісної поведінки балки не вдається отримати наближеними методами при розгляді спрощених механічних моделей без урахування сил інерції Кориоліса.

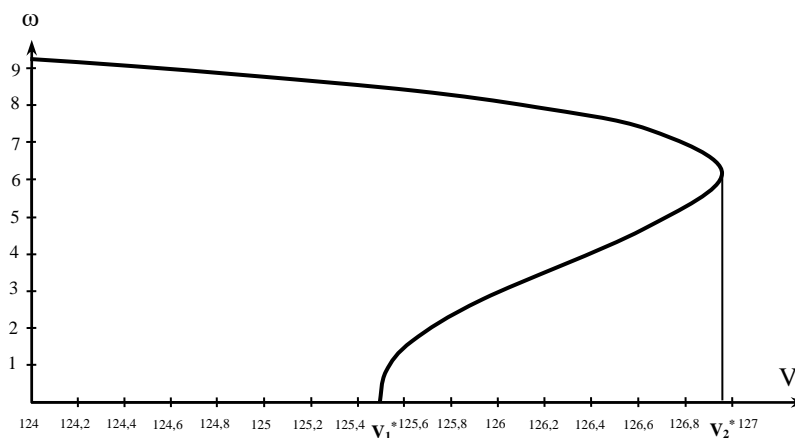


Рис. 2. Залежність власної частоти  $\omega_7$  від швидкості рухомого навантаження

На жаль обмежений обсяг статті не дозволяє навести бібліографію досліджень з проблеми динаміки пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження у повному обсязі, яку можна знайти у працях наведених у бібліографії до цієї роботи.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Горошко О. А. Собственные и сопровождающие колебания в системе с подвижными инерционными нагрузками. *Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям* (Киев, 1970). Киев, 1970. С. 215–219.
2. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1973. 224 с.
3. Горошко О. О., Дем'яненко А. Г., Киба С. П. Двохвильові процеси в механічних системах. Київ: Либідь, 1991. 188 с.
4. Гольденблат И. И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. Москва: Стройиздат, 1947. 135 с.
5. Дем'яненко А. Г., Ключник Д. В. К проблеме динамики упругих систем в поле сил инерции подвижных нагрузок и систем, приводящихся к этой модели. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. 2002. V. 2, N 10. P. 632–638.
6. Дем'яненко А. Г., Киба С. П. Влияние инерции вращения на колебательные свойства движущейся гибкой полосы. *Динамика и прочность машин*. 1979. Вып. 27. С. 119–121.
7. Дем'яненко А. Г., Киба С. П. Об одном обобщении метода разделения переменных и некоторых его приложениях в механике. *VII Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике*. Москва: МГУ, 1991. С. 128.
8. Дем'яненко А. Г., Евстратенко Д. А. Метод двухволнового представления колебаний и его развитие в задачах строительной механики упругих конструкций с подвижной инерционной нагрузкой. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. 2010. № 6. С. 43–50.
9. Дем'яненко А. Г. Механічні та математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2014. № 2(74). С. 12–22.
10. Дем'яненко А. Г. Деякі особливості і аналогії в задачах динаміки пружних стиснутих прямокутних пластинок та пластинок з рухомим інерційним навантаженням. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2015. № 4(80). С. 19–24.
11. Дем'яненко А. Г. Дослідження динаміки підсилених прямокутних пластинок за дії рухомого інерційного навантаження. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2016. № 3(83). С. 35–39.

12. Дем'яненко А. Г. Модифицированные функции Крылова и их применение в задачах динамики упругих систем с подвижной инерционной нагрузкой. *Theoretical Foundation of Civil Engineering*. 2013. V. 21. P. 205–210.
13. Дем'яненко А. Г. Деякі особливості математичних моделей задач динаміки пружних об'єктів з рухомих інерційних навантаженням та їх дослідження на основі неklasичного методу відокремлення змінних. *Збірник матеріалів 12 відкритої конференції ІМФН*. Львів, 2016. С. 68–69.
14. Доценко П. Д. Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку: дис... д-ра физ.-мат. наук / Харьков, 1988.
15. Каленюк П. І., Нитребич З. М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2002. 292 с.
16. Кибя С. П., Дем'яненко А. Г. Узагальнення методу розділення змінних та деякі його застосування в механіці. Київ: НМК ВО МОУ, 1991. 120 с.
17. Пановко Е. Г. Исторический очерк развития теории динамического действия подвижной нагрузки. *Тр. Ленингр. КВВИА*. 1946. Вып. 17. С. 54–69.
18. Серазутдинов М. Н. Действие равномерно распределенной подвижной нагрузки на пластину. *Тр. Семинаров по теории оболочек*. Казань, 1975. С. 156–163.
19. Якушев Н. З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок. Ч.1. Балки, стержни под воздействием подвижных нагрузок. *Исслед. по теории пластин и оболочек*. 1972. № 8. С. 3–21.
20. Steuding H. Die Schwingung von Trägern bei bewegten Lasten. *Jng. Acch*. 1934. P. 275–305.
21. Housner G. W. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. *Journal of Applied Mechanics. Trans ASME*. 1952. Vol. 19, N 2. P. 205–209.
22. Schallenkamp A. Schwingungen von Trager bei bewegten Lasten. *Ing.Arch*. 1937. Vol. 8. P. 35–42.

#### REFERENCES

1. Horoshko, O. A. (1970). Own and accompanying oscillations in a system with moving inertial loads. *Trudi V mezhdunarodnoi konferentsii po nelineynim kolebaniiam*, pp. 215-219.
2. Horoshko, O. A. & Savin, H. N. (1973). Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Naukova dumka.
3. Horoshko, O. O., Demianenko, A. G. & Kiba, S. P. (1991). Two-wave processes in mechanical systems. Kiev: Libid.
4. Holdenblat, I. I. (1947). Modern problems of fluctuations and stability of engineering structures. Moscow: Stroyizdat.
5. Demianenko, A. G. & Kluishvranik, D. V. (2002). To the problem of the dynamics of elastic systems in the field of inertia forces of mobile loads and systems that are brought to this model. *Theoretical Foundation of Civil Engineering*, No. 21, pp. 632-638.
6. Demianenko, A. G. & Kiba, S. P. (1979). Effect of inertia of rotation on the vibrational properties of a moving flexible strip. *Dynamika i prochnost machine*, Vol. 27, pp. 119-121.
7. Demianenko, A. G. & Kiba, S. P. (1991). On a generalization of the method of separation of variables and some of its applications in mechanics. VII Vsesoiuzniy siezd po teoretichesroy i prikladnoiy mehanike. Moscow: MGU, p. 128.
8. Demianenko, A. G. & Eyvstratenko, D. A. (2010). The method of two-wave representation of oscillations and its development in the problems of structural mechanics of elastic structures with a moving inertial load. *Visnyk Prydniprovsk'koyi derzhavnoyi akademiyi budivnytstva ta arkhitektury*, No. 6, pp. 43-50.
9. Demianenko, A. G. (2014). Mechanical and mathematical models of some problems of dynamics of elastic systems with moving inertial loads and their research. *Vibratsiy v tekhnologiiakh*, No. 2(74), pp. 12-22.
10. Demianenko, A. G. (2015). Some features and analogies in problems of elastic compressed rectangular plates and plates with moving inertial load dynamics. *Vibratsiy v tekhnologiiakh*, No. 4(80), pp. 19-24.



11. Demianenko, A. G. (2016). Doslidjennia dynamiky pidsilenih priamokutnih plastinok z rukhomim inertsiionnim navantahzenniam. Vibratsiy v tekhnitsi ta tekhnologiiakh, No. 3(83), pp. 35-39.
12. Demianenko, A. G. (2013). Modified Krylov functions and their application in problems of the dynamics of elastic systems with a moving inertial load. Theoretical Foundation of Civil Engineering, Vol. 21, pp. 205-210.
13. Demianenko, A. G. (2016). Some features of the mathematical models of the problems of the dynamics of elastic objects with moving inertial loads and their research on the basis of the nonclassical method of separating the variables. Zbirnik materialiv 12 vidkritoiy konferensiy IMFS, pp. 68-69.
14. Dotsenko, P. D. (1988). Dynamics of systems carrying a mobile distributed load (Unpublished doktor thesis). Kharkiv.
15. Kalenyuk, P. I. & Nytrebych, Z. M. (2002). Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol metod. L'viv: Vydavnytstvo Natsional'noho universytetu "L'vivs'ka politekhnika".
16. Kiba, S. P. & Demianenko, A. G. (1991). Generalization of the method of separation of variables and some of its application in mechanics. Kyiv: NMK VO MOU.
17. Panovko, Ia. G. (1948). A historical sketch of the development of the theory of the dynamic action of a moving load. Trudi Leningr. KVVIA, Iss. 17, pp. 8-38.
18. Serazutdinov, M. N. (1975). The effect of a uniformly distributed movable load on the plate. Trudi seminaru po teorii obolochek. Kazan, pp. 156-163.
19. Iiakuhev, N. Z. (1972). Dynamics of deformable systems under the influence of moving loads. Part 1. Beams, rods under the influence of moving loads. Issledovaniia po teorii plastin i obolochek, No. 8, pp. 3-21.
20. Steuding, H. (1934). Die Schwingung von Trägern bei bewegten Lasten. Jng. Acch., pp. 275-305.
21. Housner, G. W. (1952). Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics. Trans ASME, Vol. 19, No. 2, pp. 205-209.
22. Schallenkamp, A. (1937). Schwingungen von Trägers bei bewegten Lasten. Ing. Arch., Vol. 8, pp. 35-42

УДК 539.3

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Каиров А. С., д. т. н., профессор, Власов О. И., Латанская Л. А., к. ф.-м. н., доцент

*Национальный университет кораблестроения,  
просп. Героев Украины, 9, г. Николаев, 54025, Украина*

alex-kairov@yandex.ru

Исследованы свободные колебания упругих многослойных ортотропных цилиндрических оболочек вращения с присоединенными твердыми телами. Разработана уточненная математическая модель колебаний, учитывающая конструктивную неоднородность оболочки. Задача решается в линейной постановке методом Ритца. Приведены результаты расчета собственных частот и форм свободных колебаний оболочечной системы. Выполнено сопоставление полученных данных с численными результатами для аналогичных задач.

*Ключевые слова: свободные колебания, цилиндрическая многослойная оболочка, конструктивная неоднородность, присоединенные твердые тела, собственные частоты и формы колебаний, вариационный метод Ритца.*

## ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРІДНИХ БАГАТОШАРОВИХ ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ІЗ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Каіров О. С., д. т. н., професор, Власов О. І., Латанська Л. О., к. ф.-м. н., доцент

*Національний університет кораблебудування,  
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025, Україна*

alex-kairov@yandex.ru

Досліджено вільні коливання пружних багатошарових ортотропних циліндричних оболонок обертання з приєднаними твердими тілами. Розроблена уточнена математична модель коливань, що враховує структурну неоднорідність оболонки. Задача розв'язується в лінійній постановці методом Рітца. Наведено результати розрахунку власних частот і форм вільних коливань оболонкової системи. Виконано порівняння отриманих даних з чисельними результатами для аналогічних задач.

*Ключові слова: вільні коливання, циліндрична багатошарова оболонка, конструктивна неоднорідність, приєднані тверді тіла, власні частоти та форми коливань, варіаційний метод Рітца.*

## FREE VIBRATIONS OF CONSTRUCTIONAL NON-HOMOGENEOUS MULTILAYER ORTHOTROPIC COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS

Kairov A. S., D. Sc. in Engineering, professor, Vlasov O. I., assistant,  
Latanskaya L. A., Ph. D. in Physics and Maths., associate professor

*National University of shipbuilding,  
av. of Heroes of Ukraine, 9, Mykolayiv, 54025, Ukraine*

alex-kairov@yandex.ru

Multilayer composite shells constructions are widespread in modern technic. That is why the problems which deal with the constructional non-homogeneous shells oscillation is rather actual. The presence of attached solid bodies, constructional features and composite orthotropic material creates a local inertial inhomogeneity and essential influence on the shells dynamic characteristics.

The main aim of this work is to investigate the composite orthotropic material, the direction of reinforcing fibers layers and the attached solid bodies influence on the thin rotation shells oscillation forms and frequencies.

The influence of reinforcing fibers orientation on the shells oscillations amplitudes and frequencies has been investigated by means of the new developed calculation method. The solution of this problem has been based on the Ritz method and developed mathematical model usage. The shells stress-strained state has been considered on the base Kirghof-Lyav's linear hypothesis. According to the Ostrogradsky-Hamiltons principle the problems solution is reduced to the variational equality. In this equality the Lagrange's functional for the non-homogeneous shells system consists of the sum of the shell functional and attached solid bodies functions addition. The main problem of the research is simplified by the Kholetsky matrix method usage. Thus the shells system oscillation natural frequencies and forms are calculated by the combination of Kholetsky and Hausholder's matrix method usage for QR reverse iterations. The obtained frequencies have also been compared with the results of calculation, based on ANSYS program and show good convergence.

The numerical results achieved on the base of the developed mathematical model show that the location of orthotropic layers and attached solid bodies sharply influence the thin shells oscillation forms and frequencies. The new dependences and mechanical effects, caused by the shells constructional non-homogeneity are rather important and should be used in practice.

*Key words: free vibrations, cylindrical multilayer shell, constructional non-homogeneity, attached solid bodies, natural frequencies and modes of vibrations, variation Ritz method.*

## ВВЕДЕНИЕ

Многослойные ортотропные оболочки из композиционных материалов в качестве элементов конструкций находят широкое применение во многих отраслях современной техники. Знание динамических характеристик таких объектов позволяет отслеживать резонансные режимы их работы и напряженно-деформированное состояние в условиях воздействия изменяющихся во времени нагрузок и, тем самым, предотвратить возникновение аварийных ситуаций. Учет влияния внутренней структурной неоднородности материала и присоединенных твердых тел

на амплитудно-частотные характеристики собственных колебаний оболочечных элементов является актуальной задачей и требует построения уточненных математических моделей.

Предметом исследования является влияние дискретной структуры материала и присоединенных твердых тел на частоты и формы свободных колебаний тонкостенных многослойных композитных оболочек вращения, армированных однонаправленными высокопрочными волокнами.

Обзор исследований данной проблемы и полученные результаты решения конкретных задач достаточно полно отражены в известных публикациях [1, 3-7, 10, 13, 14]. Решению задач собственных колебаний изотропных оболочек с присоединенными твердыми телами посвящены работы [2, 9]. В [8, 11] приведен обзор результатов экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния и колебаний композитных оболочек из слоистых материалов.

Анализ приведенных работ позволяет сделать вывод, что для исследования колебаний слоистых конструкций чаще всего используются численные методы, а именно метод конечных элементов. С использованием вариационных методов и в аналитическом виде решения таких задач получены только для слоистых пластин и оболочек канонической формы в плане. Следовательно, разработка методов решения динамических задач оболочек неоднородной по толщине структуры со сложной формой плана является актуальной проблемой.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим свободные колебания оболочки вращения постоянной толщины  $h$ , состоящей из произвольного числа жестко связанных между собой ортотропных слоев толщиной  $h_i$ , армированных однонаправленными высокопрочными волокнами, расположенными, в общем случае, под углом  $\psi$  к осям координат. Принята криволинейная ортогональная система координат  $(\alpha_1, \alpha_2, z)$ , где ось  $\alpha_1$  направлена вдоль образующей, ось  $\alpha_2$  – в окружном направлении. На поверхности оболочки в точках  $\Omega_\nu(\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)})$  могут располагаться жестко присоединенные твердые тела с массами  $M_\nu$  ( $\nu = \overline{1, Q}$ ). Предполагаем, что для всей рассматриваемой ортотропной многослойной оболочки выполняется гипотеза прямой нормали. Деформации слоев подчиняются обобщенному закону Гука. В произвольной точке каждого слоя существует плоскость упругой симметрии, параллельная касательной плоскости и координатной поверхности. Главные радиусы и кривизны слоев не изменяются по толщине. Для всех слоев выполняются гипотезы Кирхгофа-Лява.

В качестве базисной принимаем срединную поверхность оболочки, смещение точек которой характеризуется вектором перемещений  $\bar{u}^0 = (u_1, u_2, u_3)$ . Меридиан базисной поверхности описывается уравнением  $R = r(\xi)$ , где  $\xi$  – ось вращения оболочки.

Перемещения и деформации в  $i$ -ом слое рассматриваемой оболочки вдоль координатных линий записываются в виде:

$$u_1^{(i)} = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + z_i \theta_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_2^{(i)} = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + z_i \theta_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_3^{(i)} = u_3(\alpha_1, \alpha_2), \quad (1)$$

$$e_1^{(i)} = e_1(\alpha_1, \alpha_2) + z_i e_4(\alpha_1, \alpha_2), \quad e_2^{(i)} = e_2(\alpha_1, \alpha_2) + z_i e_5(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$e_3^{(i)} = e_3(\alpha_1, \alpha_2) + 2z_i e_6(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2)$$

где  $u_1, u_2, u_3$  – амплитудные значения меридионального, окружного и нормального перемещений точек срединной поверхности ( $z=0$ );  $e_1, e_2, \dots, e_6$  – компоненты перемещений срединной поверхности  $i$ -го слоя оболочки;  $z^i$  – расстояния от базисной поверхности до  $i$ -го слоя;  $\theta_1(\alpha_1, \alpha_2), \theta_2(\alpha_1, \alpha_2)$  – углы поворота нормали к базисной поверхности оболочки относительно координатных осей.

Из обобщенного закона Гука для  $i$ -го слоя оболочки с учетом равенства  $\sigma_z = 0$  и уравнений (1), (2) находим

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(i)} \\ \sigma_{22}^{(i)} \\ \sigma_{12}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(i)} & B_{12}^{(i)} & B_{16}^{(i)} \\ B_{12}^{(i)} & B_{22}^{(i)} & B_{26}^{(i)} \\ B_{16}^{(i)} & B_{26}^{(i)} & B_{66}^{(i)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1^{(i)} \\ e_2^{(i)} \\ e_3^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_{11}^{(i)} &= \frac{E_1^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}, & B_{12}^{(i)} &= \frac{\nu_{12}^{(i)} E_1^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} = \frac{\nu_{21}^{(i)} E_2^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}, \\ B_{22}^{(i)} &= \frac{E_2^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}, & B_{66}^{(i)} &= G_{12}^{(i)}, & B_{16}^{(i)} &= B_{26}^{(i)} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $B_{11}^{(i)}, B_{12}^{(i)}, B_{16}^{(i)}, B_{26}^{(i)}, B_{66}^{(i)}$  – удельные коэффициенты упругости материала ортотропных слоев оболочки;  $\sigma_{11}^{(i)}, \sigma_{22}^{(i)}, \sigma_{12}^{(i)}$  – напряжения в плоскости  $i$ -го слоя;  $E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, \nu_{21}^{(i)}, \nu_{12}^{(i)}, G_{12}^{(i)}, \rho^{(i)}$  – механические характеристики и плотность материала  $i$ -го слоя, для которых выполняются соотношения  $E_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} = E_2^{(i)} \nu_{21}^{(i)}$ .

Аналогичным образом получим выражения усилий и моментов:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ K_{11} & K_{12} & K_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь

$$C_{pq} = \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} B_{pq}^{(i)} dz, \quad K_{pq} = \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} B_{pq}^{(i)} z dz, \quad D_{pq} = \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} B_{pq}^{(i)} z^2 dz \quad (6)$$

$$(p, q = 1, 2, 6),$$

где  $C_{pq}, K_{pq}, D_{pq}$  – обобщенные коэффициенты упругости;  $N_{11}, N_{22}, N_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}$  – внутренние усилия и моменты многослойной оболочки. При этом из (4) и (6) следует, что  $C_{16} = C_{26} = 0, K_{16} = K_{26} = 0, D_{16} = D_{26} = 0$ . Для оболочки симметричного строения  $K_{pq} = 0$ .

Соотношения упругости в форме (6) записываются также и для оболочек, у которых главные направления упругости повернуты вокруг оси  $z$  на угол  $\psi$  и не совпадают с направлениями

координатных линий  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . В этом случае характеристики ортотропного материала  $i$ -го слоя записываются в виде [1, 12]:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{11}^{(i)} &= B_{11}^{(i)} \cos^4 \psi + 2(B_{12}^{(i)} + 2B_{66}^{(i)}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi + B_{22}^{(i)} \sin^4 \psi, \\ \bar{B}_{12}^{(i)} &= B_{12}^{(i)} + [B_{11}^{(i)} + B_{22}^{(i)} - 2(B_{12}^{(i)} + 2B_{66}^{(i)})] \sin^2 \psi \cos^2 \psi, \\ \bar{B}_{22}^{(i)} &= B_{11}^{(i)} \sin^4 \psi + 2(B_{12}^{(i)} + 2B_{66}^{(i)}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi + B_{22}^{(i)} \cos^4 \psi, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{B}_{66}^{(i)} = B_{66}^{(i)} + [B_{11}^{(i)} + B_{22}^{(i)} - 2(B_{12}^{(i)} + 2B_{66}^{(i)})] \sin^2 \psi \cos^2 \psi.$$

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Согласно принципа Остроградского-Гамильтона, решение сводится к вариационному уравнению [2]

$$\delta \mathcal{E}(\alpha_1, \alpha_2, z) = 0. \quad (8)$$

Интегрируя выражение для функционала энергии  $\mathcal{E}$  по толщине  $i$ -го слоя и суммируя полученные результаты по всему пакету слоев оболочки, получим двумерную форму вариационного уравнения Лагранжа (8)  $\delta \mathcal{E}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ .

Для входящих в функцию Лагранжа  $\mathcal{E} = K - \Pi$  потенциальной и кинетической энергий в общем случае получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \iint_S \{ C_{11} e_1^2 + 2C_{12} e_1 e_2 + C_{22} e_2^2 + C_{66} e_3^2 + \\ &+ 2[K_{11} e_1 e_4 + K_{12} (e_1 e_5 + e_2 e_4) + K_{22} e_2 e_5 + 2K_{66} e_3 e_6] + \\ &+ D_{11} e_4^2 + 2D_{12} e_4 e_5 + D_{22} e_5^2 + 4D_{66} e_6^2 \} A_1 A_2 \partial \alpha_1 \partial \alpha_2, \\ K &= \frac{\omega^2}{2} \left( \sum_{i=1}^N \rho^{(i)} h_i \iint_S \sum_{k=1}^3 (u_k^{(i)})^2 A_1 A_2 \partial \alpha_1 \partial \alpha_2 + \sum_{\nu=0}^Q \left\{ M_\nu \sum_{k=1}^3 [u_{k\nu}(\Omega_\nu)]^2 \right\} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $A_1, A_2$  – коэффициенты первой квадратичной формы;  $S$  и  $\omega$  – площадь интегрируемой поверхности и круговая частота собственных колебаний оболочки.

Компоненты перемещений базовой поверхности аппроксимируются системой линейно независимых координатных функций  $\varphi_{mn}^{(k)}$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$u_k = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn}^{(k)} \varphi_{mn}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (10)$$

где  $C_{mn}^{(k)}$  – коэффициенты собственных форм колебаний;  $t$  – текущее время.

Деформации оболочки запишутся в виде

$$e_p = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn}^{(k)} \Phi_{pmn}^{(k)} \quad (p = \overline{1, 6}). \quad (11)$$

Базисные функции деформаций  $\Phi_{pmn}^{(k)}$  зависят от геометрических параметров оболочки [9].

После применения процедуры Рунге к системе (8), преобразования соотношений (9) с учетом зависимостей (1)-(7), (10), (11) и разделения переменных, получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 C_{mn}^{(k)} \left( A_{mn}^{(\eta k)} - \lambda^2 B_{mn}^{(\eta k)} \right) = 0 \quad (\eta = \overline{1,3}). \quad (12)$$

Здесь  $A_{mn}^{(\eta k)}$ ,  $B_{mn}^{(\eta k)}$  – интегральные операторы оболочечной системы [9], при вычислении которых применяется численное интегрирование с использованием квадратурных формул Гаусса.

Система уравнений (11) позволяет свести задачу (8) к бесконечной последовательности одномерных задач на собственные значения, из решения которых определяются собственные частоты и формы колебаний. Собственные значения и собственные вектора задачи (12) определяются комбинированным методом Хаусгольдера-QR-обратных итераций с помощью разложения Холецкого [15].

Из приведенного решения следует, что техника построения разрешающих уравнений задачи о собственных колебаниях ортотропных слоистых оболочек и методика решения этих уравнений аналогичны соответствующим приемам для случая изотропных оболочек [9]. Однако здесь имеются некоторые особенности, связанные с многослойностью и ортотропией материала, которые играют важную роль при решении конкретных задач.

### АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численные расчеты частот и форм свободных колебаний проводились для ортотропной цилиндрической оболочки вращения с относительными характерными размерами  $R/h = 125$ ,  $L/R = 2,3$ , выполненной в виде монослоя из однонаправленного углепластика Р-313 с волокном Торнелл-300 [10]. Общая толщина пакета слоев составляет ( $h = 0,6$  мм). Для  $E_1 = 142$  ГПа;  $E_2 = 9,13$  ГПа;  $\nu_1 = 0,32$ ;  $\nu_2 = 0,02$ ;  $G_{12} = 5,49$  ГПа;  $\rho = 1,55 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

На рис. 1 для различных граничных условий представлены графики, характеризующие изменения значения безразмерного частотного параметра  $\bar{\omega} = \omega(\psi) / \omega(0)$  от угла армирования ортотропных слоев. При этом  $\omega(\psi)$  соответствует низшей частоте колебаний оболочки, армированной под углом  $\psi$ . Приведенные зависимости соответствуют следующим граничным условиям: 1 – шарнирное опирание, 2 – шарнирное опирание – жесткое закрепление, 3 – жесткое закрепление, 4 – консольное закрепление. Минимальной частоте консольно закрепленной оболочки соответствует волновое число в окружном направлении  $n = 4$ , остальным граничным условиям –  $n = 6$ . Расхождение результатов счета с использованием предложенной расчетной методики с данными, полученными пакетом прикладных программ ANSYS, не превышает 3,4%. Рис. 2 характеризует зависимость влияния угла армирования на величину приведенных упругих характеристик  $b_{pq} = \bar{B}_{pq} / E_1$  для жестко закрепленной оболочки. Приведенные кривые соответствуют следующим характеристикам: 1 –  $b_{11}$ , 2 –  $b_{22}$ , 3 –  $b_{12}$ , 4 –  $b_{66}$ . Как следует из приведенных данных, максимум первой частоты для жестко закрепленной оболочки соответствует углу  $\psi = 44^\circ$ , который, как показал анализ энергетического состояния, характеризуется равенством энергий, связанных с деформациями растяжения-сжатия и сдвига. Минимальной низшей собственной частоте соответствует  $\psi = 0^\circ$  и  $n = 7$ . Для всех значений углов армирования возрастание первой частоты колебаний сопровождается уменьшением волнового числа  $n$ .

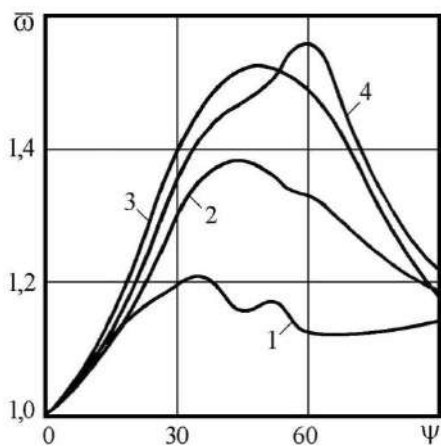


Рис. 1. Влияние угла армирования на величину относительного частотного параметра  $\bar{\omega}$

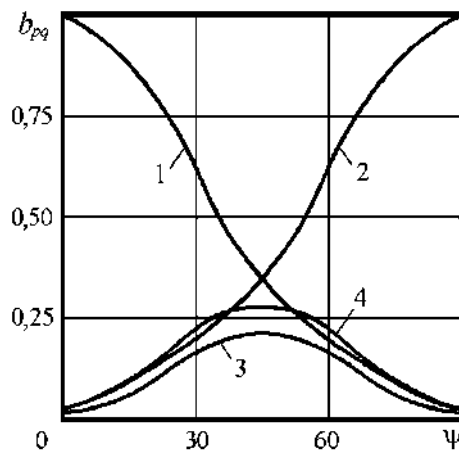


Рис. 2. Влияние угла армирования на величину приведенных упругих характеристик  $b_{pq}$

На рис. 3 для рассмотренных выше граничных условий приведены графики изменения параметра  $\bar{\omega}$  в зависимости от значения отношения модулей упругости  $\alpha = E_1/E_2$ . Как следует из рис. 3, для оболочки, составленной из трех слоев при  $\psi = 0^\circ$  для внутреннего слоя и  $\psi = 90^\circ$  для наружных, частотный параметр составляет  $\bar{\omega} = 1,515$ , для пяти слоев –  $\bar{\omega} = 1,252$ , для семи слоев –  $\bar{\omega} = 1,444$ . При этом суммарные толщины слоев обоих направлений равны. Проведенные исследования показывают, что даже сравнительно тонкие слои армированного углепластика оказывают существенное влияние на частотные характеристики оболочки.

На рис. 4 представлены зависимости изменения частотного параметра  $\omega_* = \omega R \sqrt{\rho(1 - \nu_1 \nu_2)} / E_1$ , характеризующего низшую частоту колебаний, от волнового числа  $n$  двухслойной оболочки, полученной перекрестной намоткой слоев ( $\psi = \pm 45^\circ$ ), с жестко присоединенным на наружной поверхности твердым телом (кривая 4), масса которого  $M_1 = 0,037$  кг. Торцевые контуры оболочки жестко заземлены. Кривые 1-3 соответствуют случаям незагруженной оболочки, для которой угол  $\psi$  равен соответственно  $0^\circ, \pm 45^\circ, \pm 90^\circ$ . Из данных рис. 4 видно, что аналогично изотропному материалу [9], наличие присоединенного тела существенно понижает значение низшей частоты колебаний. Более высокие частоты колебаний изменяются незначительно и близки к частотам незагруженной оболочки. Деформации поверхности локализованы в окрестности крепления присоединенного тела.

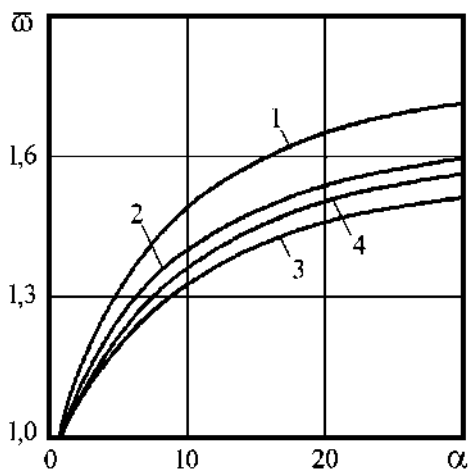


Рис. 3. Зависимость частотного параметра  $\bar{\omega}$  от показателя анизотропии  $\alpha$

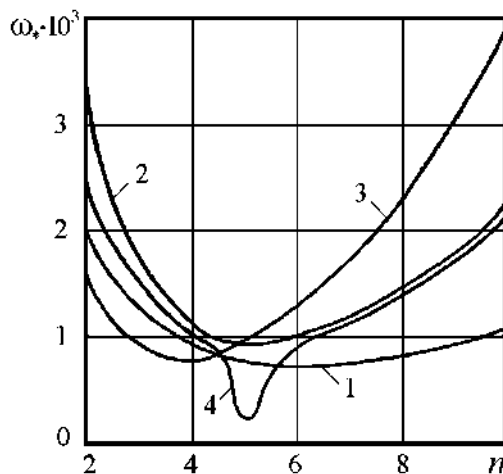


Рис. 4. Зависимость частотного параметра  $\omega_*$  от волнового числа  $n$

Таким образом, уровень частот и формы собственных колебаний можно регулировать посредством варьирования угла армирования, количества слоев и состава композита, граничных условий и геометрии оболочки.

### ВЫВОДЫ

Методом Ритца решена задача определения частот и форм свободных колебаний упругих многослойных композитных цилиндрических оболочек вращения с присоединенными твердыми телами. Рассматриваемые оболочки состоят из ортотропных армированных слоев. Расчетная математическая модель построена на основе линейной теории тонких упругих оболочек в рамках гипотез Кирхгофа-Лява. Получены результаты численного анализа зависимости амплитудно-частотных характеристик оболочек для различных композиционных материалов и граничных условий с учетом дискретно неоднородной по толщине структуры. Выявлено существование влияния присоединенных твердых тел, ортотропии и количества слоев, ориентации армирующих волокон на значения низших частот и формы колебаний.

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974. 446 с.
2. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Ревуцкий В. Н. Колебания ребристых оболочек вращения. Киев: Наук. думка, 1988. 172 с.
3. Бабич Д. В., Воробей В. В., Тарасюк В. И., Хорошун Л. П. Собственные колебания оболочек вращения из термочувствительных композиционных материалов. *Прикл. механика*. 1992. Т. 28, № 4. С. 8–16.
4. Богданович А. Е., Заруцкий В. А. Собственные колебания ортотропных ребристых цилиндрических оболочек. *Прикл. механика*. 1991. Т. 27, № 10. С. 83–90.
5. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение, 1980. 376 с.
6. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. Москва: Машиностроение, 1988. 288 с.
7. Заруцкий В. А. Стационарные волны в многослойных ортотропных ребристых цилиндрических оболочках. В кн.: Механика композитов: В 12 т. Т. 9. Динамика элементов конструкций. Киев: А.С.К., 1999. С. 44–82.
8. Заруцкий В. А. О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек. *Прикл. механика*. 2001. Т. 37, № 8. С. 38–67.
9. Каиров А. С., Шевченко В. П. О собственных колебаниях подкрепленных оболочек с присоединенными телами. *Збірник наукових праць Укр. державного морського технічн. ун-ту*. 2000. № 5(371). С. 121–130.
10. Васильев В. В., Протасов В. Д., Болотин В. В. и др. Композиционные материалы: Справочник. Васильев В. В., Тарнопольский Ю. М. (ред.). Москва: Машиностроение, 1990. 512 с.
11. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С. Экспериментальные исследования колебаний и динамической устойчивости оболочек из слоистых композитных материалов. *Прикл. механика*. 2009. Т. 45, № 5. С. 53–79.
12. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука, 1977. 416 с.
13. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Т. 2. Механика элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1983. 464 с.
14. Механика композитов. Т. 9. Динамика элементов конструкций. Кубенко В. Д. (ред.). Киев: АСК, 1999. 379 с.
15. Уилкинсон Д. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Москва: Наука, 1970. 564 с.

### REFERENCES

1. Ambarcumyan, S. A. (1974). General theory of anisotropic shells. Moscow: Nauka.
2. Amiro, I. Ya., Zarutskiy, V. A. & Revutskiy, V. N. (1988). Vibrations of ribbed shells of revolution. Nauk. dumka, Kiev.



3. Babich, D. V., Vorobey, V. V., Tarasyuk, V. I. & Khoroshun, L. P. (1992). Free vibrations of shells of rotation from temperature-sensitive composite materials. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 28, No.4, pp. 8-16.
4. Bogdanovich, A. E. & Zarutskiy, V. A. (1991). Free vibrations of ribbed orthotropic cylindrical shells. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 27, No. 10, pp. 83-90.
5. Bolotin, V. V. & Novichkov, Yu. N. (1980). *Mechanics of multilayered structures*. Moscow: Mashinostroyeniye.
6. Grigolyuk, E. I. & Kulikov, G. M. (1988). *Multilayer reinforced shell: Calculation of pneumatic tires*. Moscow: Mashinostroyeniye.
7. Zarutskiy, V. A. (1999). Stationary waves in multilayer orthotropic ribbed cylindrical shells. "Mechanics of composites". *Dynamics of structural elements (vol. 9)*. Kiev: ASK, pp. 44-82.
8. Zarutskiy, V. A. (2001). On the comprehensive experimental studies of stability and vibrations of structurally inhomogeneous shells. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 37, No. 8, pp. 38-67.
9. Kairov, A. S. & Shevchenko, V. P. (2000). Of natural vibrations of supported shells with attached bodies. *Zbirnyk nauk. prac' Ukr. Derjavnogo Mors'kogo Tekhnichn. un-tu*, No. 5(371), pp. 121-130.
10. Vasil'ev, V. V., Protasov, V. D., Bolotin, V. V. & oth. (1990). *Composite materials: Handbook*. Vasil'ev, V. V. & Tarnopol'skiy, Yu. M. (Eds.). Moscow: Mashinostroyeniye.
11. Kubenko, V. D. & Kovalchuk, P. S. (2009). Experimental study of vibrations and dynamic stability of shells made of laminated composite materials. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 45, No. 5, pp. 53-79.
12. Lehnitskiy, S. G. (1977). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Moscow: Nauka.
13. Guz', A. N., Grigorenko, Ya. M., Babich, I. Yu. & oth. (1983). *Mechanics of composite materials and structural elements*. Vol. 2. *Mechanics of structural elements*. Kiev: Nauk. dumka.
14. Kubenko, V. D. (Eds.). (1999). *Mechanics of composites*. Vol. 9. *Dynamics of structural elements*. Kiev: ASK.
15. Wilkinson, D. H. (1970). *The algebraic problem of eigenvalues*. Moscow: Nauka.

УДК 539.3

## **ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ШАРІРНО ОПЕРТОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ З П'ЄЗОСЕНСОРАМИ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ТА ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ**

<sup>1</sup>Карнаухов В. Г., д. ф.-м. н., професор, <sup>1</sup>Козлов В. І., д. ф.-м. н., професор,

<sup>2</sup>Карнаухова Т. В., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

<sup>2</sup>*Національний технічний університет «КПІ»,  
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна*

karn@inmech.kiev.ua

Представлена модель вимушених резонансних коливань і вібророзігріву в'язкопружних пластин з п'єзосенсорами з урахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву. Методом Бубнова-Гальоркіна одержано наближений аналітичний розв'язок сформульованої задачі для прямокутної шарірно опертої пластини. Подано аналіз впливу геометричної нелінійності, зсувних деформацій і температури на ефективність роботи п'єзосенсорів.

*Ключові слова:* резонансні коливання, геометрична нелінійність, деформації зсуву, температура, п'єзосенсори.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЬЕЗОСЕНСОРАМИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

<sup>1</sup>Карнаухов В. Г., д. ф.-м. н., профессор, <sup>1</sup>Козлов В. И., д. ф.-м. н., профессор,

<sup>2</sup>Карнаухова Т. В., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина*

<sup>2</sup>*Национальный технический университет «КПИ»,  
просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина*

karn@inmech.kiev.ua

Представлена модель вынужденных резонансных колебаний и виброразогрева вязкоупругих пластин с пьезосенсорами с учетом геометрической нелинейности и деформаций поперечного сдвига. Методом Бубнова-Галеркина получено приближенное аналитическое решение сформулированной задачи для прямоугольной шарнирно опертой пластины. Представлен анализ влияния геометрической нелинейности, деформаций поперечного сдвига температуры на эффективность работы пьезосенсоров.

*Ключевые слова: резонансные колебания, геометрическая нелинейность, деформации сдвига, температура, пьезосенсоры.*

## FORCED VIBRATIONS AND VIBROHEATING OF VISCOELASTIC PLATE WITH PIEZOSENSORS WITH TAKING INTO ACCOUNT GEOMETRICAL NONLINEARITY AND SHEAR STRAINS

<sup>1</sup>Karnaykhov V. G., D.Sc. in Physics and Math., Professor,

<sup>1</sup>Kozlov V. I., D.Sc. in Physics and Math., Professor,

<sup>2</sup>Karnaykhova T. V., Ph. in Physics and Math., Associate Professor,

<sup>1</sup>*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine,  
Nesterova str., 3, Kiev, 03056, Ukraine*

<sup>2</sup>*National Technical University of Ukraine «Ihor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,  
Ave. Victory, 37, Kiev, 03056, Ukraine*

karn@inmech.kiev.ua

With oscillations, the piezosensors have hysteresis losses. These losses are significantly increased for inelastic materials. Sometimes this lead to a significant increase in temperature of dissipative warming up. This temperature affects the performance of the sensors. If temperature reaches the Curie value of the material, the sensor loses its functional purpose due to depolarization of the material. Due to the resonance oscillations of not enough thin plates and an anisotropy of the material, it is necessary to take into account a geometric nonlinearity and deformation of the transverse displacement in the study of their resonant oscillations and dissipative warming.

The article studies a three-layer plate. The plate is composed of an orthotropic viscoelastic core-layer and two outer transversally isotropic layers (facesheets). The core is passive without piezoelectric effect, and facesheets are piezoelectric. Facesheets are opposite polarized. The plate is loaded by pressure. Pressure is uniform and harmonic over time. A frequency of pressure is close to the resonance. The visco-elastic properties of a material are described by Voltaire's operators.

We developed Based a model of forced resonant oscillations of flexible viscoelastic rectangular plates with piezoelectric sensors. In the model, refined hypothesis of S. Timoshenko are employed. Using the Bubnov-Galerkin method, the problem is reduced to a nonlinear integro-differential equation with cubic nonlinearity of the transverse deflection. We use asymptotic methods of nonlinear mechanics solving this equation. We obtain a cubic algebraic equation where the unknown is the square power of the transverse oscillations' amplitude. Using the obtained solution of the problem of electromechanics, a dissipative function is obtained. Finally, an analytical solution of the heat equation with a known heat source is also obtained.

*Key words: resonant vibrations, geometrical nonlinearity, shear strains, temperature, piezosensors.*

## ВСТУП

Для експериментального дослідження вимушених резонансних коливань пластин і їх активного демпфування широко використовуються п'єзосенсори. Усі матеріали при коливаннях мають певні гістерезисні втрати, які суттєво збільшуються для непружних матеріалів. За деяких умов вони призводять до значного підвищення температури дисипативного розігріву, яка може помітно вплинути на ефективність роботи сенсорів. Так, наприклад, якщо температура досягає точки Кюрі матеріалу, то сенсор втрачає своє функціональне призначення через деполяризацію матеріалу. За резонансних коливань не досить тонких пластин та за суттєвої анізотропії матеріалу виникає необхідність враховувати геометричну нелінійність та деформації поперечного зсуву при дослідженні їх резонансних коливань і дисипативного розігріву. У нашій роботі представлена уточнена модель вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву ортотропних в'язкопружних пластин з використанням гіпотез С. П. Тимошенка та адекватних їм гіпотез про розподіл електричних польових величин і температури по товщині пластини.

## МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається тришарова пластинка, складена з середнього пасивного (без п'єзо ефекту) ортотропного в'язкопружного шару товщиною  $h_0$  і двох зовнішніх шарів товщиною  $h_1$  з трансверсально-ізотропних п'єзоелектричних шарів з товщиною поляризацією. Усі властивості п'єзошарів однакові, але вони мають протилежну поляризацію. Пластинка навантажена рівномірним поверхневим гармонічним за часом тиском з частотою, близькою до резонансної. Використана декартова система координат  $(x, y, z)$ , при цьому вісь  $Oz$  направлена по товщині пластинки. Для моделювання електромеханічних коливань пластинки приймаються уточнені гіпотези, наведені в [4, 5, 7, 13]. Тоді одержимо спрощені визначальні рівняння електров'язкопружності, представлені в [1, 7]. Для пасивного пружного матеріалу спрощені визначальні рівняння при використанні гіпотез С. П. Тимошенка наведено в [1, 7, 13]. З них на основі принципу відповідності [9] знайдемо визначальні рівняння для в'язкопружного матеріалу. З використанням спрощених визначальних рівнянь для активних і пасивних шарів, шляхом інтегрування по повній товщині пластинки одержимо визначальні рівняння зусиль і моментів:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2, \dots, M_{xx} = D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2, \dots \\ Q_x &= K_s A_{55}\varepsilon_{13}, Q_x = K_s A_{44}\varepsilon_{23}. \end{aligned} \quad (1)$$

Жорсткі характеристики  $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$  наведено в [7]. Для в'язкопружного матеріалу вони є операторами Вольтера.

Для уточненої моделі С. П. Тимошенка компоненти вектора зміщень апроксимуємо лінійним законом:

$$w = w(s, \theta), \quad u(s, \theta, z) = u_0(s, \theta) + z\varphi_x(s, \theta), \quad v = v_0(s, \theta) + z\varphi_y(s, \theta). \quad (2)$$

Величини  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  характеризують незалежний поворот нормалі до пластинки.

Вирази для деформацій пластинки  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_{12}$  через  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w$  представлено, наприклад, у [7].

Універсальні рівняння уточненої теорії пластин (рівняння руху, кінематичні співвідношення, граничні й початкові умови) мають такий же вигляд, як і в механічній теорії пластин [1, 7, 13]. Специфічні особливості поведінки матеріалу описуються наведеними вище визначальними рівняннями. Використовуючи універсальні й визначальні рівняння, одержимо рівняння через зміщення й кути повороту, які співпадають з рівняннями термопружності пластин (10.1.31)-(10.1.35) з монографії [13], у яких необхідно лише

модифікувати жорсткісні характеристики і дати іншу інтерпретацію температурним членам. Зберігаючи сили інерції лише в нормальному напрямі, представимо ці рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} L_1(u, v, w) = 0; \quad L_2(u, v, w) = 0; \quad L_3(u, v, w, u_1, v_1) + q_0 = I_0 \ddot{w}; \\ L_4(u_1, v_1, w) = 0; \quad L_5(u_1, v_1, w) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де вирази для операторів  $L_i$  ( $i=1-5$ ) наведено в [13]. У них слід усі пружні характеристики замінити на інтегральні оператори Вольтера з використанням алгебри операторів [9]. Наприклад, оператор  $L_1$  співпадає з рівнянням (10.1.31), де пружні константи необхідно замінити на оператори Вольтера так, що

$$\begin{aligned} L_1(u, v, w) = A_{11} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Оператор  $L_2(u, v, w)$  одержимо з (4) за допомогою таких замін:

$$u \rightarrow v, \quad v \rightarrow u, \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow x, \quad A_{11} \rightarrow A_{22}.$$

Оператор  $L_4$  є лінійним і має вигляд:

$$L_4 = D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) - K_s A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right). \quad (5)$$

Оператор  $L_5$  одержимо з (5) шляхом замін:

$$\varphi_x \rightarrow \varphi_y, \quad \varphi_y \rightarrow \varphi_x, \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow x, \quad D_{11} \rightarrow D_{12}, \quad A_{55} \rightarrow A_{44}.$$

Оператор  $L_3$  має вигляд:

$$L_3 = K_s A_{55} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + K_s A_{44} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + N(u, v, w) + q(x, y, t) - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Тут при врахуванні сил інерції тільки в поперечному напрямку

$$N = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

Для короткозамкнутих електродів заряд  $Q$ , який знімається з них, розраховується за формулою [3-5, 10-11]:

$$Q = \gamma_{31} (h_0 + h_1) \iint_{(s)} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) dx dy. \quad (8)$$

Отже, для визначення показників сенсора необхідно розв'язати задачу електромеханіки і виразити  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  через поперечний прогин. Тоді за формулою (8) можна знайти прогин через показники сенсора.

### НАБЛИЖЕНИЙ АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТА ЙОГО АНАЛІЗ

Оператори  $L_4$ ,  $L_5$  є лінійними відносно  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w$ . Розглянемо резонансні коливання шарнірно опертої пластини в околі деякої (наприклад, першої) резонансної частоти коливань прямокутної пластини з розмірами  $a \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$ . Для шарнірного опирання представимо розв'язок задачі та навантаження у вигляді:

$$\begin{aligned} w &= W_{mn} \sin k_m x \sin p_n y; \quad \varphi_x = \varphi_{1mn} \cos k_m x \sin p_n y; \\ \varphi_y &= \varphi_2 \sin k_m x \cos p_n y \quad (k_m = m\pi/a; \quad p_n = n\pi/b); \\ q_0 &= q_{mn} \sin k_m x \sin p_n y. \end{aligned} \quad (9)$$

Підставляючи ці вирази в оператори  $L_4$ ,  $L_5$  і розв'язуючи отримані рівняння, матимемо:

$$\varphi_{1mn} = w_{1mn} W_{mn}, \quad \varphi_{2mn} = w_{2mn} W_{mn}. \quad (10)$$

Тут коефіцієнти при  $W_{mn}$  є операторами Вольтера, які виражаються через електромеханічні властивості матеріалів. Підставляючи (9), (10) в оператори  $L_1$ ,  $L_2$ , приходимо до лінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь відносно  $u$  і  $v$ :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= (C \sin 2kx \cos 2py + C_1 \sin kx) W^2, \\ A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= (D \cos 2kx \sin 2py + D_1 \sin py) W^2, \end{aligned} \quad (11)$$

де зірочки опущено, а

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{4} A_{11} k^3 - \frac{1}{4} A_{12} k p^2 - \frac{1}{2} A_{66} k p^2, \quad C_1 = \frac{1}{4} A_{11} k^3 - \frac{1}{4} A_{12} k p^2, \\ D &= -\frac{1}{4} A_{22} p^3 - \frac{1}{4} A_{12} k^2 p - \frac{1}{2} A_{66} k^2 p, \quad D_1 = \frac{1}{4} A_{22} p^3 - \frac{1}{4} A_{12} k^2 p. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничні умови для  $u$  і  $v$  вибираємо у вигляді:

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (x = 0; a); \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (y = 0; b). \quad (13)$$

Тоді розв'язок системи (11) вибираємо у вигляді:

$$u = W^2 (A \cos 2py + A_1) \sin 2kx; \quad v = W^2 (B \cos 2kx + B_1) \sin 2py. \quad (14)$$

Використовуючи одержані розв'язки для  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $u$ ,  $v$  через  $W(t)$ , з третього рівняння системи (1) методом Бубнова-Гальоркіна одержимо нелінійне інтегро-диференціальне рівняння з кубічною нелінійністю

$$I_0 \ddot{W} + D \cdot \dot{W} + (K \cdot w)(G \cdot W^2) = q. \quad (15)$$

За допомогою асимптотичних методів нелінійної механіки зведемо рівняння (15) до нелінійного диференціального рівняння

$$\ddot{W} + 2\tilde{\mu}_1 \dot{W} + \omega_0^2 W + K_1 w^3 = q_1, \quad q_1 = q/I_0. \quad (16)$$

Розв'язок цього рівняння і детальний його аналіз наведено в [1].

При вимушених коливаннях з частотою, близькою до резонансної,

$$\omega = \omega_0 + \delta, \quad \delta/\omega_0 \ll 1 \quad (17)$$

квадрат амплітуди коливань  $X = |W|^2$  знаходиться з кубічного рівняння [1]:

$$X \left[ \left( \delta - \frac{3K_1}{8\omega_0} X \right)^2 + \tilde{\mu}_1^2 \right] = \frac{q_1^2}{4\omega_0^2}. \quad (18)$$

Після визначення  $W$  з (10), (14) знаходимо  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $u$  і  $v$ . Потім з (14) знаходяться  $u$  і  $v$ . Знаючи  $w$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $u$ ,  $v$ , знайдемо деформації, а з визначальних рівнянь – зусилля і моменти. З (8) знаходимо

$$Q_{mm} = -4(h_0 + h_1) \gamma_{31} \left( \frac{\varphi_{1mm}}{p_n} + \frac{\varphi_{2mm}}{k_m} \right). \quad (19)$$

Підставляючи в (19) вирази (14), одержимо

$$Q_{mm} = -4(h_0 + h_1) \gamma_{31} \left( \frac{w_{1mm}}{p_n} + \frac{w_{2mm}}{k_m} \right) w_{mm}. \quad (20)$$

Задача електромеханіки розв'язана. З цього рівняння видно, що поведінка модуля заряду з частотою повторює поведінку модуля амплітуди коливань.

Для ортотропного матеріалу стаціонарна температура дисипативного розігріву знаходиться з розв'язку рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке збігається з дисипативною функцією

$$\bar{\lambda}_{11} \theta_{xx} + \bar{\lambda}_{22} \theta_{yy} - (2\delta/h) \theta + D/h = 0 \quad (21)$$

за відповідних граничних умов для температури.

Утримуючи в дисипативній функції члени, пропорційні квадрату амплітуди поперечного зміщення, матимемо:

$$D = \frac{\omega}{2} \left\{ D_{11}'' \left| \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right|^2 + 2D_{12}'' \left| \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right| + D_{22}'' \left| \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right|^2 + 2D_{66}'' \left| \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right|^2 + K_s A_{44}'' \left| \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right|^2 + K_s A_{55}'' \left| \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right|^2 \right\}. \quad (22)$$

Підставляючи в (22) одержаний розв'язок задачі електромеханіки, матимемо

$$D = |W|^2 (D_0 + D_1 \cos 2k_m x + D_2 \cos 2p_m y + D_{12} \cos 2k_m x \cos 2p_m y). \quad (23)$$

Для випадку теплоізоляованих торців пластини розв'язок рівняння теплопровідності (21) з урахуванням (23) знаходиться у вигляді:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos 2kx + \theta_2 \cos 2py + \theta_3 \cos 2kx \cos 2py. \quad (24)$$

Констант  $\theta_i$  ( $i=0-3$ ) легко знаходяться підстановкою (24) в рівняння (21) і прирівнюванням коефіцієнтів при  $1$ ,  $\cos 2kx$ ,  $\cos 2py$ ,  $\cos 2kx \cos 2py$ . Через їх громіздкість вирази для них не наводяться. Ці константи пропорційні квадрату амплітуди  $|W|^2$ :

$$\theta_0 = \psi_0 |W|^2, \quad \theta_1 = \psi_1 |W|^2, \quad \theta_2 = \psi_2 |W|^2, \quad \theta_3 = \psi_3 |W|^2. \quad (25)$$

Детальний аналіз поведінки амплітуди коливань з частотою, яка описується кубічним рівнянням (21), наведено в [1]. Ця характеристика має типовий для нелінійних жорстких систем вигляд. Поведінка температури дисипативного розігріву аналогічна амплітудно-частотній характеристиці.

З виразу (24) та з фізичних міркувань випливає, що при коливаннях по першій моді максимальна температура досягається в центрі пластини, коли  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ , і дорівнює

$$\theta_{\max} = |\theta_0| + |\theta_1| + |\theta_2| + |\theta_3| = |W|^2 \tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta} = (|\psi_0| + |\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3|). \quad (26)$$

Прирівнюючи максимальну температуру температурі, яка відповідає точці деградації матеріалу  $\theta_k$ , знайдемо критичне механічне навантаження, при досягненні якого сенсор перестав виконувати своє функціональне призначення. З використання (26) критична амплітуда коливань визначається зі співвідношення

$$|W_{kr}|^2 = X_{kr} = \theta_k / \tilde{\theta}. \quad (27)$$

Підставляючи (27) в (18), одержимо критичне механічне навантаження

$$(q_1)_{kr} = 2\omega_0 \left( \frac{\theta_k}{\tilde{\theta}} \right)^{1/2} \left[ \left( \delta - \frac{3K_1}{8\omega_0} \frac{\theta_k}{\tilde{\theta}} \right)^2 + \tilde{\mu}_1^2 \right]. \quad (28)$$

При досягненні механічним навантаженням критичного значення п'єзосенсор деполаризується і сенсор припиняє виконувати своє функціональне призначення.

## ВИСНОВКИ

У статті на основі уточнених гіпотез С. П. Тимошенка, доповнених адекватними їм гіпотезами відносно розподілу електричних польових величин, розроблено модель вимушених резонансних коливань гнучких в'язкопружних прямокутних пластин з п'єзоелектричними сенсорами. Методом Бубнова-Гальоркіна задача зведена до нелінійного інтегро-диференціального рівняння з кубічною нелінійністю відносно поперечного прогину. Для його розв'язку застосовано методи нелінійної механіки. Одержано кубічне алгебраїчне рівняння відносно квадрата амплітуди поперечних коливань. З використанням одержаного розв'язку задачі електромеханіки знайдена дисипативна функція і знайдено аналітичний розв'язок рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла. Досліджено теплове руйнування п'єзосенсора в результаті досягнення температурою дисипативного розігріву точки Кюрі й деполаризації п'єзоактивного матеріалу. Знайдено критичне механічне навантаження, після досягнення якого має місце вказаний тип теплового руйнування.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974. 446 с.
2. Булат А. Ф., Дырда В. И., Карнаухов В. Г., Звягильский Е. Л., Кобец А. С. Прикладная механика упруго-наследственных сред. Т. 4. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. Киев: Наук. думка, 2014. 520 с.
3. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 290 с.
4. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1986. 222 с.
5. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 4. Электротермовязкоупругость. Киев: Наук. думка, 1988. 328 с.
6. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. Житомир: ЖГТУ, 2005. 428 с.

7. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2015. № 95. С. 75–95.
8. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. Киев: Выща школа, 1976. 589 с.
9. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва: Наука, 1977. 384 с.
10. Шульга Н. А., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. Киев: Наук. думка, 2008. 272 с.
11. Gabbert U., Tzou H. S. Smart Structures and Structronic Systems. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Pub., 2001. 384 p.
12. Karnaukhov V. G., Karnaukhova T. V., McGillicaddy O. Thermal failure of flexible rectangular viscoelastic plates with distributed sensors and actuators. *Journal of Engineering Mathematics*. 2013. 78, N 1. P. 199–212.
13. Reddy J. N. Theory and analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton-London-New York, 2007. 547 p.

### REFERENCES

1. Ambartsumyan, S. A. (1974). General theory of anisotropic shells. Moskow: Nauka.
2. Bulat, A. F., Dyrda, V. I., Karnaukhov, V. G., Zvyagil'skiy, E. L. & Kobets A. S. (2014). Applied mechanics of elastic-hereditary media. (vol. 4) Forced oscillations and dissipative heating of inelastic bodies. Kiev: Nauk. dumka.
3. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shul'ga, N. A. (1989). Mechanics of bound fields in structural elements. (vol. 5) Electroelasticity. Kiev: Nauk. dumka.
4. Karnaukhov, V. G. & Kirichok, I. F. (1986). Related problems of the theory of viscoelastic plates and shells. Kiev: Nauk. dumka.
5. Karnaukhov, V. G. & Kirichok, I. F. (1988). Mechanics of bound fields in structural elements. (vol. 4) Electrothermal viscoelasticity. Kiev: Nauk. dumka.
6. Karnaukhov, V. G. & Mikhaylenko, V. V. (2005). Nonlinear thermomechanics of piezoelectric inelastic bodies under monoharmonic loading. Zhitomir: ZhGTU.
7. Karnaukhov, V. G., Kozlov, V. I. & Karnaukhova T. V. (2015). Influence of displacement deformations on the efficiency of piezoelectric sensors and actuators during active damping of resonant oscillations of inelastic plates and membranes. *Opir materialiv i teoriya sporud*, No. 95, pp. 75-95.
8. Mitropol'skiy, Yu. A. & Moseenkov, B. I. (1976). Asymptotic solutions of partial differential equations. Kiev: Vyshcha shkola.
9. Rabotnov, Yu. N. (1977). Elements of hereditary mechanics of solids. Moskow: Nauka.
10. Shul'ga, N. A. & Karlash, V. L. (2008). Resonant electromechanical oscillations of piezoelectric plates. Kiev: Nauk. dumka.
11. Gabbert, U. & Tzou, H. S. (2001). Smart Structures and Structronic Systems. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Pub.
12. Karnaukhov, V. G., Karnaukhova, T. V. & McGillicaddy, O. (2013). Thermal failure of flexible rectangular viscoelastic plates with distributed sensors and actuators. *Journal of Engineering Mathematics*, 78, No. 1, pp. 199-212.
13. Reddy, J. N. (2007). Theory and analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton-London-New York.



УДК 539.3

## ВИМУШЕНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ВІБРОРОЗІГРІВ ГНУЧКОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ З П'ЄЗОСЕНСОРАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ

Киричок І. Ф., д. ф.-м. н., Сенченков І. К., д. ф.-м. н., Червінко О. П., к. ф.-м. н.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна*

term@inmech.kiev.ua

Розглянута задача про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно закріпленої в'язкопружної гнучкої балки з п'єзоелектричними сенсорами. Ураховується деформація поперечного зсуву й інерція повороту його нормального елемента. Досліджено вплив деформації зсуву, геометричної нелінійності та умов теплообміну на амплітудно-частотні характеристики прогинів, температури вібророзігріву, електричного показника сенсора та критичні значення амплітуд механічного навантаження з частотою першого резонансу, за яких температура вібророзігріву досягає точки деградації системи.

*Ключові слова: балка, п'єзоелектричний сенсор, дисипативний розігрів.*

## ВЫНУЖДЕННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОРАЗОГРЕВ ГИБКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ С ПЬЕЗОСЕНСОРАМИ ПРИ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

Киричок І. Ф., д. ф.-м. н., Сенченков І. К., д. ф.-м. н., Червінко О. П., к. ф.-м. н.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
ул. Нестерова, 3, г. Київ, 03057, Україна*

term@inmech.kiev.ua

Рассмотрена задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно закрепленной вязкоупругой гибкой балки с пьезоэлектрическими сенсорами. Учитывается деформация поперечного сдвига и инерция поворота его нормального элемента. Исследовано влияние деформации сдвига, геометрической нелинейности и условий теплообмена на амплитудно-частотные характеристики прогибов, температуры виброразогрева, электрического показателя сенсора и критические значения амплитуд механической нагрузки с частотой первого резонанса, при которых температура виброразогрева достигает точки деградации системы.

*Ключевые слова: балка, пьезоэлектрический сенсор, диссипативный разогрев.*

## FORCED RESONANT VIBRATIONS AND VIBROHEATING OF A FLEXIBLE VISCOELASTIC ROD WITH PIEZOSENSORS WITH REGARD TO THE SHEAR DEFORMATION

Kirichok I. F., D.Sc. in Physics and Maths, Senchenkov I. K., D.Sc. in Physics and Maths, Chervinko O. P., Ph.D. in Physics and Maths

*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,  
Nesterova str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

term@inmech.kiev.ua

The problem of forced resonance oscillations and dissipative heating of a hinged three-layer viscoelastic flexible beam with piezoelectric sensors as outer layer is considered. The deformation of the transverse shear and the inertia of rotation of its normal element are taken into account. The material of middle layer is considered as transversally-isotropic linear viscoelastic one, and outer layers are made of ЦТСтБс-2 viscoelastic piezoceramic. Vibrations are excited by harmonic transversal loading. Harmonical expansion is used to reduce the solution to the set of nonlinear ordinary differential equation. For steady vibration processes considered electromechanical material properties as well as electromechanical field parameters are supposed to be complex quantities. The method of

quasilinearization is used to obtain linearized problem. The set of governing equations is presented in normal form then the problem is solved by using of standard computer code. The calculations are carried out in vicinity of the first resonance. An influence of geometrical nonlinearity, transversal shear strain and inertia rotation on the amplitude-frequency characteristics of deflections, vibration temperature and the electric index of the sensor is studied. The rigid type of resonance characteristics as a result of geometrical nonlinearity is established. An account for shear strain and inertia of rotation shift frequency characteristics mentioned referred towards the lower frequencies. Shear strain and inertia of rotation are essential for evaluation of vibroheating temperature. A notion of critical value of loading parameter is defined as its value for which the temperature of thermal destruction or piezoceramic depolarization is achieved. The influence of referred above factors on critical value of loading parameters and critical time of system destruction is investigated.

*Key words: beam, piezoelectric sensor, dissipative heating.*

## ВСТУП

В останні роки для контролю вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій типу балок, пластинок і оболонок з пружних і непружних матеріалів широко застосовуються п'єзоелектричні включення, одні з яких виконують роль збуджувачів або гасителів коливань (актуатори), а інші дають інформацію про механічний стан системи (сенсори) [1, 2]. У багатьох випадках такі системи працюють в умовах інтенсивних гармонічних навантажень, які супроводжуються високим рівнем механічних напружень, прогинів та вібророзігріву. Тому є необхідним у задачах про їх електротермомеханічну поведінку враховувати геометричну нелінійність та деформації поперечного зсуву. Побудова на основі класичних і уточнених гіпотез типу С. П. Тимошенка електротермомеханічних двомірних моделей динамічної поведінки тонкостінних елементів із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності та розв'язок конкретних задач представлені в монографіях [3-5] та багатьох журнальних працях, частину яких відображено в обзори [6].

У нашій статті розглядаються вимушені резонансні коливання і вібророзігрів тришарової гнучкої балки, складеної із в'язкопружних внутрішнього пасивного і зовнішніх п'єзоактивних шарів, які виконують роль сенсора. Ураховуються деформація поперечного зсуву і геометрична нелінійність кутів повороту в квадратичному наближенні. Досліджується вплив указаних факторів на динамічні і температурні характеристики, електричні показники п'єзосенсора та критичні значення амплітуд механічного навантаження, за яких температура вібророзігріву досягає точки деградації системи.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо тришарову гнучку балку ширини  $b$  і довжини  $l$ , внутрішній шар якої товщини  $h_0$  виготовлений із пасивного трансверсально ізотропного матеріалу, а зовнішні – однакової товщини  $\delta$  – із п'єзокераміки. Балку віднесено до прямокутної системи координат, так що  $0 \leq x \leq l$ ,  $|y| \leq b/2$ ,  $|z| \leq H/2$  ( $H = h_0 + 2\delta$ ). Матеріали шарів вважаємо в'язкопружними. П'єзошари поляризовані за товщиною в протилежних напрямках. Приймаємо, що верхній ( $z \geq h_0/2$ ) і нижній ( $z \leq -h_0/2$ ) п'єзошари характеризуються п'єзомодулями  $-d_{31}$  і  $d_{31}$ , відповідно. Внутрішні ( $z = \pm h_0/2$ ) поверхні п'єзошарів покриті суцільними електродами, на яких задано електричний потенціал  $\varphi(\pm h_0/2) = 0$ . Їх зовнішні ( $z = \pm H/2$ ) поверхні електродовані на участках, що виконують роль сенсора. При цьому, при розімкнутих електродах сенсора на ділянці  $s^\pm = \pm b\Delta_x$  ( $\Delta_x = x_1 - x_0$ ) виконуються такі електричні граничні умови:

$$\iint D_z^\pm ds = 0 \quad (x_0 \leq x \leq x_1), \quad D_z^\pm = 0 \quad (0 \leq x \leq x_0; \quad x_1 \leq x \leq l), \quad (1)$$

де  $D_z^\pm$  – нормальна складова електричної індукції в п'єзошарах.

На балку діє поверхневий тиск  $q_z = q \cos \omega t$ , що гармонічно змінюється за часом  $t$  з частотою  $\omega$ , близькою до резонансної. У результаті, на розімкнутих електродах на поверхнях  $s^\pm$  сенсора виникають електричні потенціали з невідомими значеннями амплітуд  $\pm V_s = \varphi(\pm H/2)$ . Торці балки шарнірно закріплені, а поверхні знаходяться в умовах конвективного теплообміну з оточуючим середовищем.

Моделювання електромеханічної поведінки такої балки ґрунтується на справедливості за пакетом шарів гіпотези прямої лінії для механічних величин [2]. Відносно електричних змінних приймаємо, що складовими  $D_x$ ,  $D_y$  вектора індукції можна знехтувати, а  $D_z = const$  є постійною по товщині п'єзошару. При цьому рівняння електростатики задовольняються тотожно, а складові  $E_x$ ,  $E_y$  вектора електричної напруженості знаходяться із визначальних рівнянь  $D_x = 0$ ,  $D_y = 0$ .

Урахування геометричної нелінійності реалізується утриманням у співвідношеннях Коші квадратів кутів повороту. Рівняння руху також є нелінійними. Температуру вібророзігріву приймаємо постійною по товщині пакету шарів. В'язкопружні властивості матеріалів описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності [3] типу

$a * b = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau$ , які для гармонічних процесів деформування зводяться до множення комплексних величин [4]  $a * b = (a' + ia'')(b' + ib'')$ .

На основі прийнятих гіпотез тривимірні визначальні співвідношення п'єзокераміки [4], наприклад, для нижнього шару мають вигляд:

$$\sigma_x = c_{11}^E * \varepsilon_x - b_{31} * E_z; \quad \sigma_{xz} = c_{44}^E * \varepsilon_{xz}; \quad D_z = b_{31} * e_x + b_{33} * E_z; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Тут  $c_{11}^E = 1/s_{11}^E$ ;  $b_{31} = d_{31}/s_{11}^E$ ;  $b_{33} = \varepsilon_{33}^T - d_{31}^2/s_{11}^E$ ;  $c_{44}^E = 1/(s_{44}^E - d_{15}^2/\varepsilon_{11}^T)$ ;  $s_{kk}^E$ ,  $d_{ik}$ ,  $\varepsilon_{kk}^T$  – ізотермічні комплексні податливості, п'єзомодулі і діелектричні проникливості, відповідно. Для верхнього п'єзошару  $d_{31}$  в (2) необхідно замінити на  $-d_{31}$ . Для пасивного шару справедливі перші дві залежності із (2), де  $b_{31} = 0$ ;  $c_{11}^E = E$ ;  $c_{44}^E = G_{13}$  ( $E$  і  $G_{13}$  – комплексні модулі Юнга і поперечного зсуву). Далі в (2) зірочку спускаємо.

Співвідношення між параметрами деформації  $e_x$ ,  $e_{xz}$  і поздовжнього  $u$  та поперечного  $w$  переміщень записуються так:

$$e_x = \varepsilon_x + z\kappa_x, \quad \varepsilon_x = \partial u / \partial x + \mathcal{G}_x^2 / 2, \quad \kappa_x = \partial \psi_x / \partial x, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{xz} = \psi_x - \mathcal{G}_x, \quad \mathcal{G}_x = -\partial w / \partial x,$$

де  $\psi_x$  – кут повороту спочатку недеформованого нормального елемента.

Зі співвідношень (2), (3), з урахуванням умов  $\varphi(H/2) = V_s$ ,  $\varphi(h_0/2) = 0$ , наприклад, для верхнього п'єзошару, отримаємо:

$$\sigma_x = (c_{11}^E + \gamma_{33})(\varepsilon_x + z\kappa_x) - \gamma_{31}D_z^+; \quad D_z^+ = -b_{33}V_s/\delta - b_{31}(\varepsilon_x + \tilde{h}\kappa_x), \quad (4)$$

де  $\gamma_{31} = b_{31}/b_{33}$ ;  $\gamma_{33} = \gamma_{31}b_{31}$ ;  $\tilde{h} = (h_0 + \delta)/2$ .

Задовольняючи  $D_z^+$  із (4) інтегральній умові (1) на поверхні  $S^+$ , знаходимо невідоме значення

$$V_S = -\frac{\gamma_{31}\delta}{\Delta_x} \int_{x_0}^{x_1} (\varepsilon_x + \tilde{h}\kappa_x) dx. \quad (5)$$

Підстановка  $V_S$  із (5) у співвідношення (4) призводить до інтегро-диференційного виразу для  $\sigma_x$ , що значно ускладнює побудову співвідношень для зусиль і моментів розглядуваної балки. Тому при побудові таких співвідношень у виразі (4) для  $\sigma_x$  приймаємо другу умову із (1), яка на  $S^+$  є наближеною.

Уводячи замість напружень  $\sigma_x$ ,  $\sigma_{xz}$  статично еквівалентні зусилля і моменти  $(N_x, Q_x, M_x) = b \int (\sigma_x, \sigma_{xz}, z\sigma_x) dz$  по всьому пакету шарів балки, із (2)-(4) маємо співвідношення

$$N_x = C_{11} * \varepsilon_x, \quad M_x = D_{11} * \kappa_x, \quad Q_x = k_s c_{44} * (\psi_x - \vartheta_x), \quad (6)$$

у яких

$$C_{11} = bh_0 [E + 2\delta_0 (c_{11}^E + \gamma_{33})]; \quad D_{11} = \frac{bh_0^3}{12} [E + 2\delta_*^3 (c_{11}^E + \gamma_{33})],$$

$$C_{44} = bh_0 [G_{13} + 2\delta_0 c_{44}^E]; \quad \delta_0 = \delta/h_0, \quad \delta_*^3 = 3\delta_0 + 6\delta_0^2 + 4\delta_0^3,$$

$k_s$  – коефіцієнт зсуву [2].

Рівняння нелінійних коливань гнучкої балки записується так [2]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho_* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial \hat{Q}_x}{\partial x} + Fq_z - \rho_* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} - \hat{Q}_x - N_x \vartheta_x - \rho_{**} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

У рівняннях (7)  $\hat{Q}_x = Q_x - N_x \vartheta_x$ ,  $F = bH$  – площа поперечного перерізу балки;  $\rho_{**} = bh_0^3 (\rho_0 + 2\rho_1 \delta_*^3) / 12$ ;  $\rho_* = bh_0 (\rho_0 + 2\rho_1 \delta_0)$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  – питомі густини пасивного і п'єзоактивного матеріалів.

Механічні граничні умови вільно опертої балки мають вигляд

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad (x = 0, l). \quad (8)$$

Усереднене за період коливань і в площині поперечного перерізу рівняння теплопровідності розглядуваної балки таке:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_s (b+H)}{\lambda F} (T - T_c) + \langle W \rangle, \quad (9)$$

де

$$\langle W \rangle = \frac{\omega b}{\lambda F} \int_{(H)} (\sigma_x'' e_x' - \sigma_x' e_x'' + \sigma_{xz}'' e_{xz}' - \sigma_{xz}' e_{xz}'') dz \quad (10)$$

– усереднена швидкість дисипації;  $\alpha_s = (\alpha_+ + \alpha_-) / 2$ ,  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$  – коефіцієнти теплообміну на поверхнях  $z = \pm H/2$ ;  $\lambda$ ,  $a$  – усереднені коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності;  $T_c$  – температура зовнішнього середовища.

Початкова і граничні теплові умови на краях балки мають вигляд

$$T = T_0 \quad (t = 0), \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \pm \alpha_{0,l} (T - T_c) \quad (x = 0, l). \quad (11)$$

### ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

При побудові розв'язку поставленої задачі розв'язувальні рівняння електров'язкопружності (3), (6), (7) подамо у вигляді шуканих величин  $u$ ,  $w$ ,  $\psi_x$ ,  $N_x$ ,  $\hat{Q}_x$ ,  $M_x$ , записавши їх у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= \rho_* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; & \frac{\partial \hat{Q}_x}{\partial x} &= \rho_* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Fq_z; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} &= \hat{Q}_x + N_x \psi_x - J_{SD} * (\hat{Q}_x N_x) + \tilde{\rho}_* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= J_c * N_x - \frac{1}{2} \psi_x^2 + J_{SD} * (\psi_x \hat{Q}_x); \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} &= J_D * M_x; & \frac{\partial w}{\partial x} &= -\psi_x + J_{SD} * \hat{Q}_x, \end{aligned} \tag{12}$$

де  $J_c = 1/c_{11}$ ;  $J_D = 1/D_{11}$ ;  $J_{SD} = 1/(k_s c_{44})$ .

При навантаженні типу  $q_z = q' \cos \omega t - q'' \sin \omega t$  ( $q'' = 0$ ), нехтуючи перехідними процесами, наближений розв'язок нелінійних рівнянь (12) побудуємо у вигляді гармонічного ряду за часом [3]. Обмежимося побудовою розв'язку в одночастотному наближенні для змінних  $A = \{w, \psi_x, \hat{Q}_x, M_x\}$ , які характеризують згин балки, і при утриманні членів до другої гармоніки включно в рядах для змінних  $B = \{u, N_x\}$  плоского деформування балки так, що

$$A = A' \cos \omega t - A'' \sin \omega t, \quad B = B^0 + \sum_{k=1}^2 \left( B^k \cos k\omega t - B''^k \sin k\omega t \right). \tag{13}$$

Застосовуючи викладений в [3] підхід, з рівнянь (12) і граничних умов (8) відносно коефіцієнтів представлення (13) одержуємо систему нелінійних диференціальних рівнянь  $N = 18$  порядку. Лінеаризуючи отриману систему методом квазілінеаризації [3], приходимо до послідовних розв'язків лінійних крайових задач вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Y}^{n+1}}{dx} &= A(J(k\omega), \vec{Y}^n) \vec{Y}^{n+1} + \vec{F}(q, M_E, \vec{Y}^n), \\ B_1 \vec{Y}^{n+1}(0) &= 0, \quad B_2 \vec{Y}^{n+1}(l) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \tag{14}$$

де  $\vec{Y} = \left\{ u', u'', u', u'', w', w'', \psi_x', \psi_x'', N_x', N_x'', N_x', N_x'', \hat{Q}_x', \hat{Q}_x'', M_x', M_x'', u, N_x \right\}$  – вектор-стовбець

шуканих функцій;  $A$  и  $\vec{F}$  – квадратична матриця  $N$ -го порядку системи диференціальних рівнянь і вектор-стовбець її правих частин, елементи яких через громізdkість не виписуємо;  $B_1, B_2$  – прямокутні матриці, які визначаються із умов (8). Дисипативна функція (10) у термінах шуканих величин записується так:

$$\langle W \rangle = \frac{\omega}{2\lambda F} \left\{ \sum_{k=1}^2 k \left( N_x^k \varepsilon_x' - N_x^k \varepsilon_x'' \right) + M_x'' \kappa_x' - M_x' \kappa_x'' + Q_x'' \varepsilon_{xz}' - Q_x' \varepsilon_{xz}'' \right\}. \tag{15}$$

Для розв'язку крайової задачі (14) використовувалась типова програма для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь [2]. Задача теплопровідності (9), (11) з урахуванням (15) розв'язується методом кінцевих різниць з використанням явної схеми.

## РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Числові результати одержано для балки з суцільно електродованими вздовж її довжини зовнішніми поверхнями п'єзошарів і геометричними розмірами  $l=0,4\text{ м}$ ,  $h_0=0,1\cdot 10^{-5}\text{ м}$ ,  $b=H$ . Пасивний шар виготовлено з полімеру з такими в'язкопружними характеристиками:

$$\begin{aligned} E^k &= E^0(k\omega)^p; & E'' &= E^k \cdot \beta(k\omega)^q \quad (k=1,2); & G_{13} &= 0,025E; \\ E^0 &= 0,308 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; & \beta &= 0,16; & q &= -0,145; & p &= 0,076; \\ \nu' &= 0,35; & \nu'' &= 0; & \rho_0 &= 2,77 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; & \lambda &= 0,45 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}. \end{aligned}$$

Сенсори виготовлено із в'язкопружної п'єзокераміки ЦТСтБС-2 [1], параметри комплексних модулів якої такі:

$$\begin{aligned} s'_{11} &= 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ н/м}^2; & s'_{55} &= 39,7 \cdot 10^{-12} \text{ н/м}^2; & d'_{31} &= -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; & d'_{15} &= 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; \\ \epsilon'_{33} &= 21 \cdot 10^2 \epsilon_0; & \epsilon'_{11} &= 18,5 \cdot 10^2 \epsilon_0; & \epsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; & \delta_{11}^s &= 0,16 \cdot 10^{-2}; & \delta_{55}^s &= 0,14 \cdot 10^{-2}; \\ \delta_{31}^d &= 0,4 \cdot 10^{-2}; & \delta_{15}^d &= 0,35 \cdot 10^{-2}; & \delta_{33}^e &= 0,35 \cdot 10^{-5}; & \delta_{11}^e &= 0,5 \cdot 10^{-2}; \\ \nu_E &= \nu'_E = 0,37 \quad (\nu''_E = 0), & \rho_0 &= 7,52 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; & \lambda &= 0,47 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}; & T_0 &= T_c = 20^\circ \text{ C}. \end{aligned}$$

При урахуванні деформації поперечного зсуву приймається, що  $K_s = 5/6$  [2]. Розрахунки проведено для найбільш енергоємної моди згинальних коливань балки в околі першої резонансної частоти при повністю покритих поверхнях балки п'єзошарами сенсора.

На рис. 1 і рис. 2 наведені криві частотних залежностей максимальних значень амплітуд  $\tilde{w} = |w(0,5l)|/h_0$  прогину (АЧХ) і електричних потенціалів  $\pm |V_s|$  на електродах сенсора, які розраховані для амплітуди поперечного тиску  $q_0 = 0,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

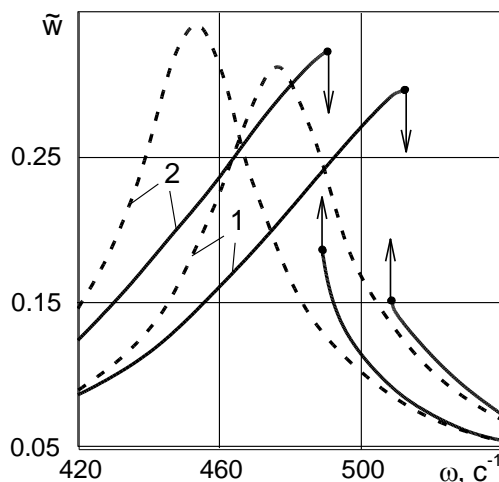


Рис. 1. Частотні залежності амплітуд прогину

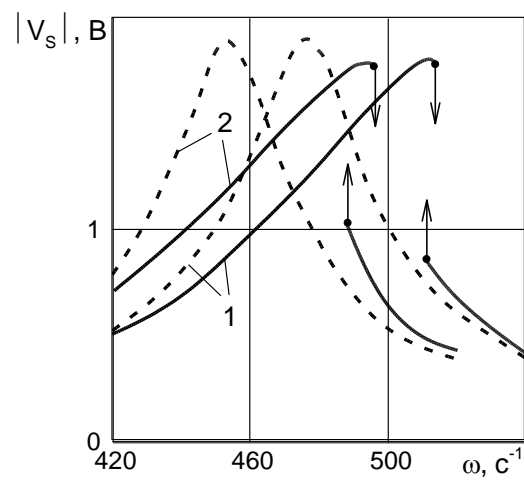


Рис. 2. Частотні залежності електричних потенціалів

При цьому штрихові криві отримані на основі розв'язку лінійної задачі, а суцільні – при урахуванні геометричної нелінійності. Криві 1 відповідають розв'язку задачі у класичній постановці, а криві 2 – при урахуванні деформації поперечного зсуву й інерції повороту.

Аналогічні частотні залежності усталеної ( $\tau = at/l^2 = 0,1$ ) температури  $\Delta T = T(0,5l) - T_0$  (ТЧХ), розраховані при  $q_0 = 0,6 \cdot 10^6 \text{ Па}$  і  $\alpha_s = 15 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$ , показані на рис. 3.

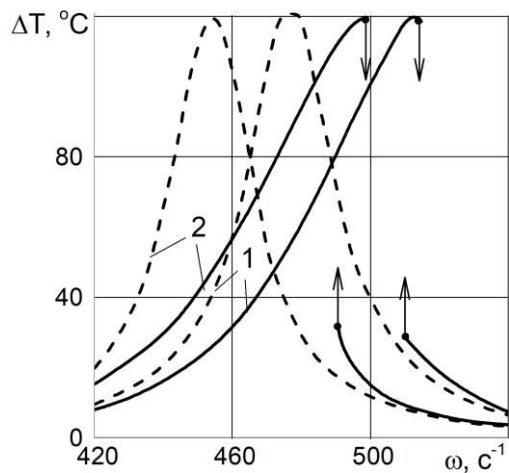


Рис. 3. Частотні залежності температури вібророзігріву

Аналіз кривих на рис. 1-3 та проведені числові розрахунки показують, що врахування геометричної нелінійності як у класичній, так і в уточненій постановках задачі з ростом амплітуди навантаження призводить до трансформації частотних залежностей амплітуд прогину, показника сенсора і температури вібророзігріву (штрихові лінії) у нелінійні характеристики жорсткого типу (суцільні криві) аж до появи неоднозначних ділянок. Урахування деформації поперечного зсуву (криві 2) супроводжується зміщенням частотних характеристик розглядуваних величин у бік зменшення відносно класичного резонансу (криві 1) системи. При цьому абсолютні величини амплітуд електричного потенціалу  $|V_s|$  сенсора на класичному і уточненому резонансах практично не відрізняються.

Температура дисипативного розігріву в'язкопружних елементів із пасивних і п'єзоактивних складових при відповідних рівнях гармонічного навантаження в умовах теплообміну може досягати критичного значення  $T_{кр}$ , при якому відбувається теплове руйнування системи через розм'якшення пасивного матеріалу або деполяризації п'єзокераміки (точка Кюрі). При цьому необхідно визначити амплітуду критичного навантаження  $q_{кр}$ , що відповідає стаціонарній температурі  $T_{кр}$ , та критичний час  $\tau_{кр}$  дії навантаження, яке перевищує  $q_{кр}$ . На рис. 4 подано криві 1-3 залежності максимального значення (стаціонарної) усталеної температури вібророзігріву  $T_m$  у середній точці балки від амплітуди механічного навантаження  $q_0$ , розраховані на уточненій частоті  $\omega = 454 \text{ c}^{-1}$  з коефіцієнтами теплообміну  $\alpha_s = (5; 10; 15) \text{ Bm}/(\text{m}^2 \cdot \text{град})$ , відповідно.

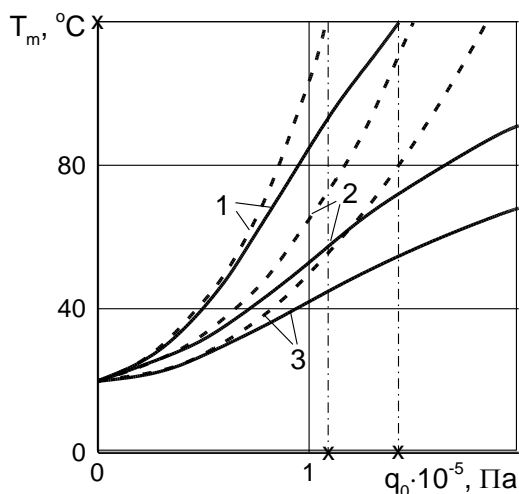


Рис. 4. Залежності максимальної температури вібророзігріву  $T_m$  від амплітуди механічного навантаження  $q_0$

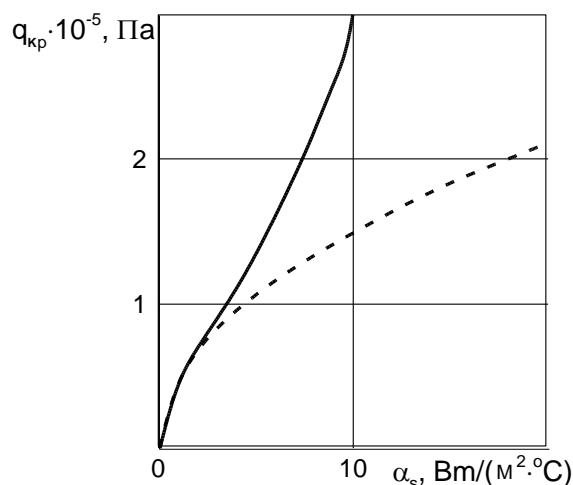


Рис. 5. Залежність критичного навантаження  $q_{кр}$  від коефіцієнта теплообміну  $\alpha_s$

Прийmemo за точку деградації, позначену хрестиком на осі ординат, температуру  $T_m = T_{кр} = 120^\circ\text{C}$ , за якої настає втрата працездатності розглядуваної системи. Цій

температурі на осі абсцис відповідає позначене хрестиком критичне значення амплітуди критичного навантаження. Залежність  $q_{кр}$  від коефіцієнта теплообміну  $\alpha_s$  показана кривими на рис. 5. Аналіз кривих на рис. 4, 5 показує, що при гармонічному збудженні розглядуваної балки на уточненій резонансній частоті урахування геометричної нелінійності призводить до зниження рівня вібророзігріву  $T_m$  та збільшення амплітуди критичного навантаження  $q_{кр}$ . Цей ефект посилюється з ростом коефіцієнту теплообміну  $\alpha_s$ .

На рис. 6 кривими 1-3 показана еволюція максимальної температури вібророзігріву  $T_m$  за часом  $\tau$ , відповідно розрахована для амплітуд навантаження  $q = (1,0; 1,08, 1,2) \cdot 10^5 \text{ Па}$  з параметром теплообміну  $\alpha_s = 5 \text{ Вм}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$ . Хрестиками на осі ординат і абсцис позначені точки деградації і критичного часу  $\tau_{кр}$ , відповідно. Видно, що для амплітуд  $q < q_{кр} = 1,08 \cdot 10^5 \text{ Па}$  значення усталеної температури вібророзігріву (крива 1) не досягає  $T_{кр}$  і теплове руйнування не настає. При  $q > q_{кр}$  (криві 2, 3) настає момент часу  $\tau \geq \tau_{кр}$ , за якого вібророзігрів досягає точки деградації матеріалу.

На рис. 7 для коефіцієнтів теплообміну  $\alpha_s = (5; 10) \text{ Вм}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$  наведені криві 1, 2 залежності амплітуди навантаження  $q > q_{кр}$  (значення  $q_{кр}$  показані хрестиком) від критичного параметра часу  $\tau_{кр}$ , після якого настає теплове руйнування розглядуваного об'єкта. Подані на графіках криві, які є аналогом кривих Велера із теорії циклічного руйнування, при тепловому руйнуванні суттєво залежать від коефіцієнта теплообміну на поверхні балки.

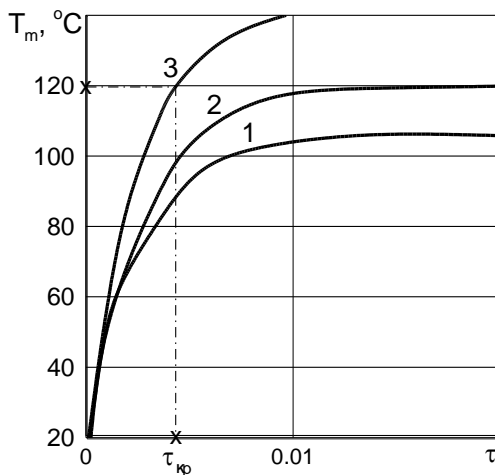


Рис. 6. Еволюція максимальної температури вібророзігріву  $T_m$  за часом  $\tau$

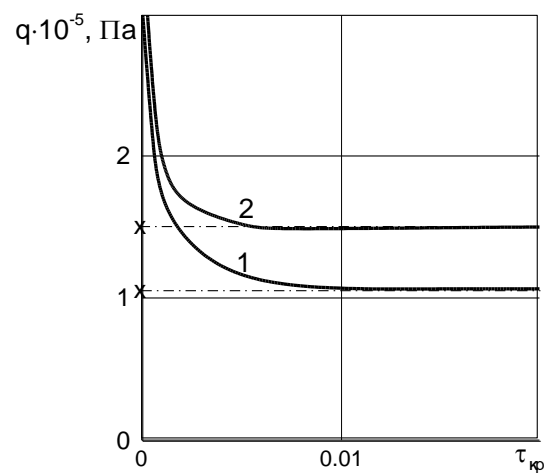


Рис. 7. Залежності амплітуди навантаження  $q$  від критичного параметра часу  $\tau_{кр}$

## ВИСНОВКИ

Представлені постановка і розв'язок задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружної балки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні деформації поперечного зсуву і геометричної нелінійності в квадратичному наближенні. Для найбільш енергоємної моди коливань досліджено вплив указаних факторів і умов теплообміну на частотні залежності максимальних амплітуд прогину, температури вібророзігріву, електричні показники сенсора та критичні значення амплітуд механічного навантаження, за яких температура досягає точки деградації і система втрачає працездатність.



## ЛІТЕРАТУРА

1. Болкисев А. М., Карлаш В. Л., Шульга Н. А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры. *Прикладная механика*. 1984. 20, № 7. С. 70–74.
2. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1981. 516 с.
3. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1986. 222 с.
4. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций. *Электротермовязкоупругость*. Т. 4. Киев: Наук. думка, 1988. 320 с.
5. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. Житомир, 2005. 428 с.
6. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Термомеханика неупругих тонкостенных элементов конструкций с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при гармоническом нагружении (Обзор). *Прикладная механика*. 2017. 53, № 1. С. 9–74.
7. Стивенс К. Поперечные колебания вязкоупругого стержня с начальной кривизной под действием периодической осевой силы. *Прикладная механика, сер. Е. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков*. Москва: Мир, 1969. №. 4. С. 168–173.
8. Gabbert U., Tzou H. S. Smart structures and structropic systems. Dordrecht: Kluver Acad. Publ., 2001. 384 p.
9. Blaguenon A., Lene F., Bernadou M. Active control of a beam using a piezoceramic element. *Smart Mater. Struct.* 1999. 8. P. 116–124.

## REFERENCES

1. Bolkisev, A. M., Karlash, V. L. & Shul'ga, N. A. (1984). On the dependence of the properties of piezoceramic materials on the temperature. *Prikladnaya mekhanika*, 20, No. 7, pp. 70-74.
2. Grigorenko, YA. M. & Vasilenko, A. T. (1981). The theory of shells of variable rigidity. Kiev: Nauk. dumka.
3. Karnaukhov, V. G. & Kirichok, I. F. (1986). Related problems of the theory of viscoelastic plates and shells. Kiev: Nauk. dumka.
4. Karnaukhov, V. G. & Kirichok, I. F. (1988). Mechanics of bound fields in structural elements. *Electrothermal viscoelasticity*. Vol. 4. Kiev: Nauk. dumka.
5. Karnaukhov, V. G. & Mikhaylenko, V. V. (2005). Nonlinear thermomechanics of piezoelectric inelastic bodies under monoharmonic loading. *Zhitomir*.
6. Karnaukhov, V. G., Kirichok, I. F. & Kozlov, V. I. (2017). Thermomechanics of inelastic thin-walled structural elements with piezoelectric sensors and actuators under harmonic loading (Review). *Prikladnaya mekhanika*, 53, No. 1, pp. 9-74.
7. Stivens, K. (1969). Transverse vibrations of a viscoelastic rod with initial curvature under the action of a periodic axial force. *Prikladnaya mekhanika, ser. Ye. Tr. Amer. ob-va inzhenerov-mekhanikov*. Moscow: Mir. No. 4, pp. 168-173.
8. Gabbert, U. & Tzou, H. S. (2001). Smart structures and structropic systems. Dordrecht: Kluver Acad. Publ.
9. Blaguenon, A., Lene, F. & Bernadou, M. (1999). Active control of a beam using a piezoceramic element. *Smart Mater. Struct.*, 8, pp. 116-124.

УДК 539.3

## ТЕРМОПРУЖНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА З КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ТРАНСТРОПНИМ ВОЛОКНОМ

Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. М., д. т. н., доцент,  
Богуславська А. М., аспірант

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

gsm1212@ukr.net

У роботі отримано компоненти напружено-деформованого стану порожнистого циліндра з волокнистого композиту, що знаходиться під дією температурного та силового навантаження. При розв'язку задачі проведено гомогенізацію термопружних характеристик композиційного матеріалу. Матеріал матриці вважався ізотропним, а матеріал волокна – трансверсально-ізотропним. Розглядалися три осесиметричні схеми армування волокнами: в осевому, радіальному та тангенціальному напрямках. Проаналізовано вплив об'ємного вмісту волокна на напружено-деформований стан порожнистого циліндра.

*Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, температурні коефіцієнти лінійного розширення, порожнистий циліндр.*

## ТЕРМОУПРУГАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ТРАНСТРОПНЫМ ВОЛОКНОМ

Клименко М. И., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. Н., д. т. н., доцент,  
Богуславская А. М., аспирант

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

gsm1212@ukr.net

В работе получены компоненты напряженно-деформированного состояния полого цилиндра из волокнистого композита, находящегося под воздействием температурной и силовой нагрузки. При решении задачи проведена гомогенизация термоупругих характеристик композиционного материала. Материал матрицы считался изотропным, а материал волокна – трансверсально-изотропным. Рассматривались три осесимметричные схемы армирования волокнами: в осевом, радиальном и тангенциальном направлениях. Проанализировано влияние объемного содержания волокна на напряженно-деформированное состояние полого цилиндра.

*Ключевые слова: композиционный материал, матрица, волокно, температурные коэффициенты линейного расширения, полый цилиндр.*

## THERMAL TASK FOR A HYPER CYLINDER FROM TRANSSTROPIC FIBER COMPOSITE MATERIAL

Klymenko M. I., PhD in Math and Physics, Associate Professor,  
Grebenuk S. M., PhD in Engineering, Associate Professor,  
Boguslavskaya A.M., postgraduate student

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky st., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

gsm1212@ukr.net

In the technique, structural elements of composite materials are widely used. In this connection, it is necessary to take into account the changes in their physical and mechanical properties under the influence of temperature fields. For the study of such structures on the strength, it is necessary to take into account the effect of thermal stresses. For the study of such structures on the strength, it is necessary to take into account the effect of thermal stresses. Approximate methods are most often used to calculate them. In modern research, homogenization is widely used. It is based on solving special problems of the theory of elasticity on the periodicity cell of a composite. The application of this method in solving the problems of thermoelasticity of composites has its own peculiarities. In particular, the

application of the asymptotic averaging method for composite materials allows us to find effective coefficients of linear thermal expansion and technical constants of thermoelasticity of composites.

In solving problems of mechanics of a deformable solid for composite materials, in most cases the inhomogeneous composite material is modeled by a homogeneous transversally isotropic material with an isotropic plane perpendicular to the direction of the fiber.

In the article the stress-deformed state of a hollow cylinder from a fibrous composite under influence of temperature and force loading is received. In solving the problem, homogenization of the thermoelastic characteristics of the composite material was carried out. In this problem, the material of the matrix was considered isotropic, and the fiber material is transversally isotropic. Three axially symmetric schemes of fiber reinforcement were considered: in axial, radial and tangential directions. The solution of the problem for radial displacements is obtained. The maximum deformation of the cylinder occurs at radial reinforcement, and the minimum – at tangential. The influence of volumetric fiber content on the stress-strain state of the hollow cylinder is analyzed. It should be noted that the increase in the volumetric content of the fiber, more rigid compared to the matrices, for all three reinforcement schemes reduces the amount of deformations in the floor cylinder.

*Key words: composite material, matrix, fiber, temperature coefficients of linear expansion, hollow cylinder.*

## ВСТУП

Широке використання конструкційних елементів з композитних матеріалів у техніці потребує необхідності врахування зміни їх фізико-механічних властивостей під дією температурних полів. Для дослідження таких конструкцій на міцність необхідно враховувати дію термонапружень. Для розрахунку термонапружень необхідною є інформація про коефіцієнти лінійного теплового розширення композиційних матеріалів. Для їх розрахунку найчастіше застосовують наближені методи [1-3]. У сучасних дослідженнях, спрямованих на визначення ефективних характеристик композитів, широко застосовується метод гомогенізації. Він ґрунтується на розв'язанні спеціальних задач теорії пружності на комірці періодичності композиту. Особливості застосування цього методу при розв'язанні задач термопружності композитів розглянуті у [4-6], зокрема, у [4] запропоновано варіант методу асимптотичного усереднення для композиційних матеріалів, що дозволяє знаходити ефективні коефіцієнти лінійного теплового розширення та технічні константи термопружності композитів. У монографії [7] здійснюється дослідження локальних полів напружень у задачах градієнтної термопружності для багатошарових композитів. Робота [8] спрямована на розробку математичних моделей прогнозування коефіцієнтів лінійного теплового розширення та теплопровідності для металовуглецевих композитів. Монографія [9] висвітлює основні математичні методи розв'язання задач термопружності композитів регулярної структури. У [10] досліджено ефективні термопружні характеристики композитів стохастичної структури. Методи визначення граничних навантажень для оболонкових конструкцій з композиційних матеріалів, що знаходяться в умовах температурних полів різних типів, розглянуто в [11]. Основні методи розв'язання квазістатичних, динамічних та зв'язаних задач термопружності розглянуті у [12, 13].

## ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА З КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо температурну осесиметричну задачу при плоскій деформації. Об'єктом дослідження є порожнистий циліндр з волокнистого композиту. Вважатимемо, що циліндр знаходиться під внутрішнім тиском та защемленою зовнішньою циліндричною поверхнею. Загальний аналітичний розв'язок плоскої задачі для однорідного ортотропного матеріалу наведено в роботі [14].

Отримаємо розв'язок аналогічної температурної задачі для однорідного ортотропного матеріалу. За умови, що об'ємні сили відсутні, рівняння рівноваги в полярній системі координат для цієї задачі матиме вигляд:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (1)$$

Закон Гука для осесиметричної задачі з ортотропного матеріалу з урахуванням впливу температури  $T$  запишеться у вигляді:

$$\sigma_r = \frac{E_r \varepsilon_r + E_\theta \nu_{r\theta} \varepsilon_\theta}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}} - \frac{T(E_r \alpha_r + E_\theta \nu_{r\theta} \alpha_\theta)}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}, \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_r \nu_{\theta r} \varepsilon_r + E_\theta \varepsilon_\theta}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}} - \frac{T(E_r \nu_{\theta r} \alpha_r + E_\theta \alpha_\theta)}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}, \quad (3)$$

де  $E_r, E_\theta$  – модулі пружності,  $\alpha_r, \alpha_\theta$  – температурні коефіцієнти лінійного розширення та  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  – лінійні деформації ортотропного матеріалу в радіальному і тангенціальному напрямках відповідно;  $\nu_{r\theta}, \nu_{\theta r}$  – коефіцієнти Пуассона.

Підставимо співвідношення Коші між деформаціями і радіальним переміщенням:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$

а також формули (2), (3) у рівняння рівноваги (1), отримуємо диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} E_r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{E_r}{r} \frac{du}{dr} - \frac{E_\theta}{r^2} u = \\ = \frac{dT}{dr} (E_r \alpha_r + E_\theta \nu_{r\theta} \alpha_\theta) + \frac{T(E_r \alpha_r (1 - \nu_{\theta r}) - E_\theta \alpha_\theta (1 - \nu_{r\theta}))}{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Оскільки температура  $T$  стала, то розв'язок рівняння запишеться у вигляді:

$$u_r = Ar \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + B / r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + \psi Tr, \quad (5)$$

де

$$\psi = \frac{E_r \alpha_r (1 - \nu_{\theta r}) - E_\theta \alpha_\theta (1 - \nu_{r\theta})}{E_r - E_\theta}.$$

Сталі  $A$  та  $B$  визначимо з граничних умов:

$$\sigma_r(r_1) = -q, \quad u_r(r_2) = 0, \quad (6)$$

де  $r_1, r_2$  – внутрішній та зовнішній радіус циліндра,  $q$  – внутрішній тиск.

З першої рівності (6) маємо:

$$B = \frac{q(1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}) r_1 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + A r_1^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \left( \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + \nu_{\theta r} \right) + T r_1 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} (\psi (1 + \nu_{\theta r}) - \alpha_r - \nu_{\theta r} \alpha_\theta)}{\left( \sqrt{E_r E_\theta} - E_\theta \nu_{r\theta} \right) \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - \nu_{\theta r}}.$$

Отриманий вираз підставимо в друге рівняння (6), отримаємо:

$$A = \frac{-q r_1 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} (1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r})}{\left( r_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} (\sqrt{E_r E_\theta} - E_\theta \nu_{r\theta}) + r_1^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} (\sqrt{E_r E_\theta} + E_\theta \nu_{r\theta}) \right)} +$$

$$r_1 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r} + 1} (\alpha_r + \nu_{\theta r} \alpha_\theta - \psi (1 + \nu_{\theta r})) - r_2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r} + 1} \psi \left( \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - \nu_{\theta r} \right) + \frac{r_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \left( \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - \nu_{\theta r} \right) + r_1^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \left( \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} + \nu_{\theta r} \right)}{T}. \quad (7)$$

Оскільки з (6) також випливає, що

$$B = -Ar_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - \psi Tr_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r} + 1},$$

то в результаті маємо:

$$u_r = A \left( r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} - r_2^2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} / r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \right) + \psi T \left( r - r_2 \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r} + 1} / r \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \right). \quad (8)$$

Оскільки при розв'язанні задач механіки деформівного твердого тіла для композиційних матеріалів у більшості випадків неоднорідний композиційний матеріал моделюється однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом з площиною ізотропії, перпендикулярною напрямку волокна, визначимо термопружні сталі такого матеріалу.

Подовжній модуль  $E_1$ , поперечний модуль  $E_2$  та коефіцієнти Пуассона  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{23}$  обчислимо за формулами [16]:

$$\nu_{12} = \frac{(\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ)\nu_{12}^* + 2E_2^\circ f(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ + 2f\nu_{21}^*E_2^\circ(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}, \quad (9)$$

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2\nu_{12}^\circ\beta)E_1^*(1-f) + (\alpha - 2\nu_{12}^*\beta)E_1^\circ f}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^\circ + 2f\nu_{21}^*E_2^\circ(\nu_{12}^\circ - \nu_{12}^*)}, \quad (10)$$

$$E_2 = \frac{2\alpha E_2^*}{\left( \alpha \left( (1 + \nu_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2) \right) + \delta + \eta_1\eta_2 \right)}, \quad (11)$$

$$\nu_{23} = \frac{\left( \alpha \left( (1 + \nu_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2) \right) - (\delta + \eta_1\eta_2) \right)}{\left( \alpha \left( (1 + \nu_{23}^*) + 4(\gamma - 2E_2^*)(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*)(f\chi_1 + \chi_2) \right) + (\delta + \eta_1\eta_2) \right)}, \quad (12)$$

де

$$\alpha = E_2^*(1-f)(1-\nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(f(1-\nu_{23}^*) + (1+\nu_{23}^*)),$$

$$\beta = \nu_{21}^\circ E_2^*(1-f) + \nu_{21}^* f E_2^\circ, \quad \gamma = E_2^*(1-\nu_{23}^\circ) + E_2^\circ(1+\nu_{23}^*), \quad \delta = f(1+\nu_{23}^*)(\gamma - 2E_2^\circ) + \gamma(1-\nu_{23}^*),$$

$$\eta_1 = 2E_1^\circ E_1^*(f-1) \cdot f \left( \nu_{21}^* \gamma - 2\nu_{21}^\circ E_2^* \right)^2, \quad \eta_2 = 1 / \left( E_2^* \left( \alpha \left( E_1^\circ f + E_1^*(1-f) \right) - 2\beta \left( \nu_{12}^* E_1^\circ f + \nu_{12}^\circ E_1^*(1-f) \right) \right) \right),$$

$$\chi_1 = \frac{(d_{11} - d_{21})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \quad \chi_2 = \frac{(d_{22} - d_{12})}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \quad d_{11} = E_2^\circ \left( (4f - 3 - 1/f^2)(1 + \nu_{23}^*) - \right.$$

$$\left. - 4f(1 - \nu_{21}^*\nu_{12}^*) \right) - E_2^* \left( (4f - 1/f^2 - 3)(1 + \nu_{23}^\circ) + 4(1/f^2 - f)(1 - \nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{12} = E_2^\circ \left( (1/f - f)(1 + \nu_{23}^*) - 4(1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) - E_2^* \left( (1/f - f)(1 + \nu_{23}^\circ) + 4(1 - 1/f)(1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{21} = E_2^\circ \left( 4f(1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) + (2f + 1/f^2 - 3)(1 + \nu_{23}^*) \right) - E_2^* \left( (2f + 1/f^2 - 3)(1 + \nu_{23}^\circ) + \right.$$

$$\left. + 4(f - 1/f^2)(1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right), \quad d_{22} = E_2^\circ \left( (2 - f - 1/f)(1 + \nu_{23}^*) - 4(1 - \nu_{21}^* \nu_{12}^*) \right) -$$

$$- E_2^* \left( (2 - f - 1/f)(1 + \nu_{23}^\circ) + 4(1/f - 1)(1 - \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right).$$

Для розрахунку температурних коефіцієнтів лінійного розширення композиту з трансверсально-ізотропним волокном та ізотропною матрицею використовуємо формули [17]:

$$\alpha_{11} = \frac{\gamma f d^*}{(d^\circ + f(d^* - d^\circ))(d_1 - d_2)} + \frac{2fE_2^\circ \nu^* (\alpha_{22}^\circ - \alpha^*)}{d_1 - d_2} + \alpha^*,$$

$$\alpha_{22} = -\frac{\gamma f}{(d_1 - d_2)(d^\circ + f(d^* - d^\circ))} \left( 2\nu_{21}^\circ (1 - f) + \frac{\nu^* (2fE_2^\circ + d_1 - d_2)}{E^*} \right) + \frac{2fE_2^\circ (\alpha^* - \alpha_{22}^\circ)}{d_1 - d_2} + \alpha^*, \quad (13)$$

де

$$\gamma = \frac{2\nu_{21}^\circ d_1 (\alpha_{22}^\circ - \alpha^*)}{(1 - \nu_{23}^\circ)} + (d_1 - d_2) \alpha_{11} + 2\nu^* f E_2^\circ (\alpha^* - \alpha_{22}^\circ) - \alpha^* (d_1 - d_2),$$

$$d_1 = E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^\circ), \quad d_2 = E_2^\circ (f(1 - \nu^*) + (1 + \nu^*)),$$

$$d^\circ = \frac{E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) - E_2^\circ (f(1 - \nu^* - 2\nu_{12}^\circ \nu^*) + (1 + \nu^*))}{E_1^\circ},$$

$$d^* = \frac{E^* (f - 1)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^* \nu_{12}^\circ) - E_2^\circ (f(1 - \nu^* - 2(\nu^*)^2) + (1 + \nu^*))}{E^*}.$$

Розв'яжемо задачу деформування порожнистого циліндра при різних схемах армування. Для осесиметричної задачі можливі три випадки армування:

– у тангенціальному напрямі, тоді у формулах (7), (8) необхідно прийняти  $E_r = E_2$ ,  $E_\theta = E_1$ ,  $\nu_{r\theta} = \nu_{21}$ ,  $\nu_{\theta r} = \nu_{12}$ ,  $\alpha_r = \alpha_2$ ,  $\alpha_\theta = \alpha_1$ ;

– в осьовому напрямі, тоді у формулах (7), (8) необхідно прийняти  $E_r = E_2$ ,  $E_\theta = E_3$ ,  $\nu_{r\theta} = \nu_{23}$ ,  $\nu_{\theta r} = \nu_{32}$ ,  $\alpha_r = \alpha_2$ ,  $\alpha_\theta = \alpha_3$ ;

– у радіальному напрямі, тоді у формулах (7), (8) необхідно прийняти  $E_r = E_1$ ,  $E_\theta = E_2$ ,  $\nu_{r\theta} = \nu_{12}$ ,  $\nu_{\theta r} = \nu_{21}$ .

Розв'яжемо задачу для композитних полімерних матеріалів на основі високомодульних вуглецевих волокон [15]. Символом  $^\circ$  позначимо термопружні сталі, які відносяться до матеріалу волокна, а символом  $*$  – до матеріалу матриці. Матеріал волокна: модуль пружності  $E_1^\circ = 225,63$  ГПа,  $E_2^\circ = 7,55$  ГПа, коефіцієнти Пуассона  $\nu_{12}^\circ = 0,3$ ,  $\nu_{21}^\circ = \frac{\nu_{12}^\circ \cdot E_2^\circ}{E_1^\circ}$ ,

$\nu_{23}^\circ = 0,2$ , температурні коефіцієнти лінійного розширення  $\alpha_{11}^\circ = 0,5 \cdot 10^{-6} (^\circ\text{C})^{-1}$ ,

$\alpha_{22}^{\circ} = \alpha_{33}^{\circ} = 19 \cdot 10^{-6} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$ . Матеріал матриці: модуль пружності  $E_1^* = E_2^* = 3$  ГПа, коефіцієнти Пуассона  $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = \nu_{23}^* = 0,35$ , температурні коефіцієнти лінійного розширення  $\alpha_{11}^* = \alpha_{22}^* = \alpha_{33}^* = 45 \cdot 10^{-6} (\text{ }^{\circ}\text{C})^{-1}$ .

Внутрішній радіус прийемо рівним  $r_1 = 0,1$  м, зовнішній радіус  $r_2 = 0,15$  м, внутрішній тиск  $q = 0,2$  МПа, температуру  $T = 100$  °С. Підставивши константи складових композита у формули (9)-(13) та скориставшись формулою (8), отримаємо залежності для різних типів армування, зображені відповідно на рис. 1, 2 та 3.

Отже, отримано аналітичний розв’язок задачі про напружено-деформований стан порожнистого циліндру з волокнистого композиту при дії температурного та силового навантаження. З аналізу розв’язків трьох осесиметричних задач для різних схем армування волокнами – в осевому, радіальному та тангенціальному напрямку – можна зазначити, що максимальне деформування циліндра відбувається при радіальному армуванні, а мінімальне – при тангенціальному. Збільшення об’ємного вмісту волокна, більш жорсткого порівнянно з матрицею, при всіх трьох схемах армування зменшує величину деформацій у порожнистому циліндрі.

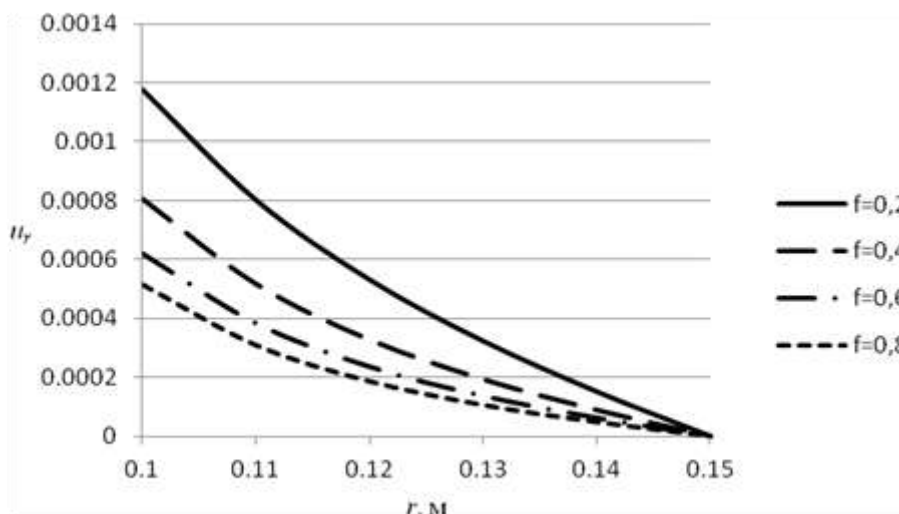


Рис. 1. Зміна функції  $u_r$  від об’ємного вмісту волокна  $f$  при тангенціальному армуванні

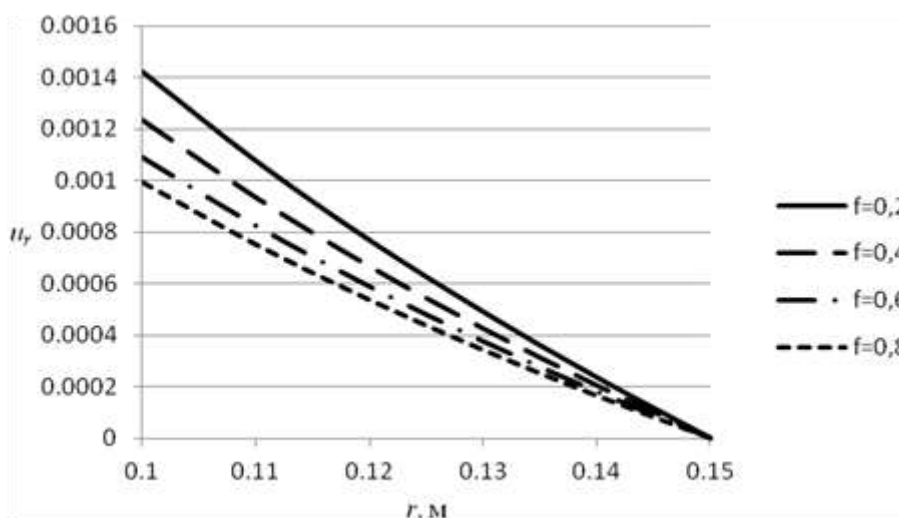


Рис. 2. Зміна функції  $u_r$  від об’ємного вмісту волокна  $f$  при армуванні вздовж осі

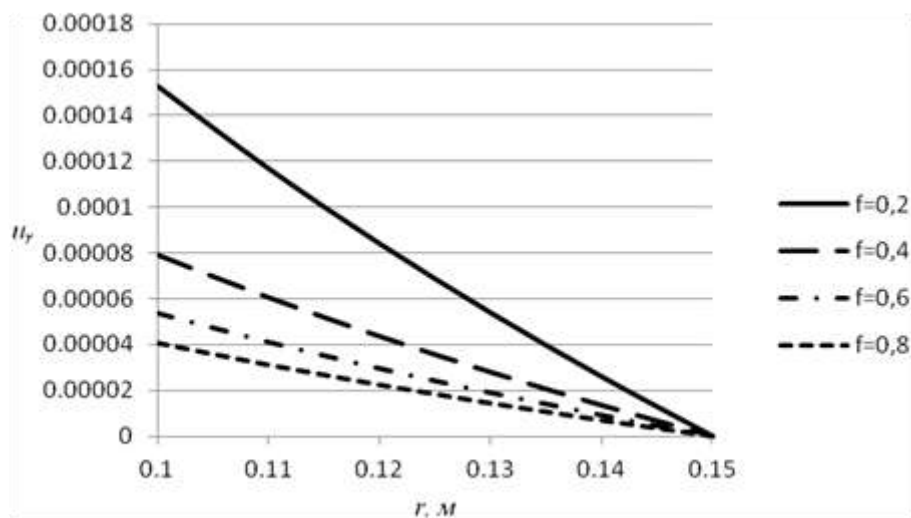


Рис. 3. Зміна функції  $u_r$  від об'ємного вмісту волокна  $f$  при радіальному армуванні

### ЛІТЕРАТУРА

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. Москва: Мир, 1982. 336 с.
2. Зарубин В. С., Кувыркин Г. И., Савельева И. Ю. Оценка методом самосогласования температурного коэффициента линейного расширения с дисперсными включениями. *Наука и образование*, 2015. № 2. С. 197 – 215.
3. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. Пространственно-армированные композиционные материалы. Москва: Машиностроение, 1987. 223 с.
4. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Сборщиков С. В. Численное моделирование теплового расширения композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2015. Вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1452.html>. (Дата звернення: 15.11.2017).
5. Димитриенко Ю. И., Кашкаров А. И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки*. 2002. № 2. С. 95 – 108.
6. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
7. Лурье С. А., Дудченко А. А., Нгуен Д. К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры. *Электронный журнал «Труды МАИ»*. Вып. 75. URL: [www.mai.ru/science/trudy](http://www.mai.ru/science/trudy). (Дата звернення: 14.11.2017).
8. Скачков В. А., Баглюк Г. А., Веденникова О. С., Иванов В. И. О прогнозировании коэффициентов теплопроводности и линейного теплового расширения многокомпонентных композитов. *Проблемы трибологии*. 2012. № 2. С. 108 – 111.
9. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. Москва: Едиториал УРСС, 2003. 376 с.
10. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикун Е. И., Назаренко Л. В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. Т 3. Механика композитов. Киев: Наукова думка, 1993. 390 с.
11. Белозеров Л. Г., Киреев В. А. Композитные оболочки при силовых и температурных воздействиях. Москва: Физматлит, 2003. 388 с.
12. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термоупругости. Киев: Наукова думка, 1982. 260 с.
13. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 215 с.
14. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Киев: Наук. думка, 2002. 655 с.



15. Крегерс А. Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов. *Механика композит. материалов*. 1988. № 3. С. 433 – 441.
16. Гребенюк С. М. Напряжено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів: автореф. дис. д-ра техн. наук. Запоріжжя, 2016. 35 с.
17. Клименко М. И., Гребенюк С. Н., Богуславская А. М. Термомеханические характеристики волокнистого композиционного материала с изотропной матрицей и трансверсально-изотропным волокном. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 179 – 189.

## REFERENCES

1. Kristensen, R. (1982). Introduction to the mechanics of composites. Moscow: Mir.
2. Zarubin, V. S., Kuvyirkin, G. I. & Saveleva, I. Yu. (2015). Estimation by the method of self-agreement of the temperature coefficient of linear expansion with dispersed inclusions. *Nauka i obrazovanie*, No. 2, pp. 197-215 (in Russian).
3. Tarnopolskiy, Yu. M., Zhigun, I. G. & Polyakov, V. A. (1987). Space-reinforced composite materials. Moscow: Mashinostroenie.
4. Dimitrienko, Yu. I., Gubareva, E. A. & Sborschikov, S. V. (2015). Numerical modeling of thermal expansion of composite materials on the basis of the asymptotic averaging method. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, Iss. 12. Retrieved from: <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1452.html>.
5. Dimitrienko, Yu. I. & Kashkarov, A. I. (2002). Finite Element Method for Calculating Effective Characteristics of Space-Armored Composites. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Estestvennyie nauki*, No. 2, pp. 95-108 (in Russian).
6. Pobedrya, B. E. (1984). Mechanics of composite materials. Moscow: Izd-vo MGU.
7. Lure, S. A., Dudchenko, A. A. & Nguen, D. K. Gradient model of thermoelasticity for a layered composite structure. *Elektronnyi zhurnal «Trudy MAI»*, Iss. 75. Retrieved from: <https://www.mai.ru/science/trudy>.
8. Skachkov, V. A., Baglyuk, G. A., Vedennikova, O. S. & Ivanov, V. I. (2012). On prediction of coefficients of thermal conductivity and linear thermal expansion of multicomponent composites. *Problemi tribologiyi*, No. 2, pp. 108 – 111 (in Russian).
9. Bardzokas, D. I. & Zobnin, A. I. (2003). Mathematical modeling of physical processes in composite materials of periodic structure. Moscow: Editorial URSS.
10. Horoshun, L. P., Maslov, B. P., Shikula, E. I. & Nazarenko, L. V. (1993). Statistical mechanics and effective properties of materials. (vol. 3) *Mechanics of composites*. Kiev: Naukova dumka.
11. Belozеров, L. G. & Kireev, V. A. (2003). Composite shells under power and temperature influences. Moscow: Fizmatlit.
12. Karnauhov, V. G. (1982). Related problems of thermoelasticity. Kiev: Naukova dumka.
13. Kovalenko, A. D. Thermoelasticity. Kiev: Vischa shkola.
14. Kirichevskiy, V. V. Finite Element Method in the Mechanics of Elastomers. Kiev: Nauk. dumka.
15. Kregers, A. F. (1988). Mathematical modeling of thermal expansion of spatially reinforced composites. *Mehanika kompozit. materialov*, No. 3, pp. 433-441 (in Russian).
16. Grebenyuk, S. M. (2016). Stress-deformed state of spatial structures on the basis of homogenization of fibrous composites: author's abstract. (Extended abstract of Doctor thesis). Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine (in Ukrainian).
17. Klimenko, M. I., Grebenyuk, S. N. & Boguslavskaya, A. M. (2017). Thermomechanical characteristics of a fibrous composite material with isotropic matrix and transversally isotropic fiber. *Vіsник Zaporізького національного університету. Фізико-математичні науки*, No. 1, pp. 179-189 (in Ukrainian).

УДК 539.3

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛАСТИЧНОГО ЦИЛИНДРА С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЖЕСТКОЙ ПОСАДКЕ

Кострова М. М., аспирант

*Национальная металлургическая академия Украины,  
просп. Гагарина, 4, г. Днепр, 49005, Украина*

mariya.kostrova.91@gmail.com

Представляем результаты решения задачи о деформировании кусочно-однородного цилиндра под воздействием вращения при жесткой посадке. Цилиндр образован эластичной матрицей как основным материалом с двоякопериодическим расположением кольцевых волокон квадратного сечения из более жесткого эластичного материала. Задачу решали по модели кусочно-однородной среды на основе общих уравнений нелинейной теории упругости. Применяли метод конечных разностей с использованием конечно-разностных соотношений второго порядка точности, решение продолжали по скорости вращения цилиндра.

*Ключевые слова: цилиндр кусочно-однородный, волокна кольцевые, деформирование нелинейное, вращение.*

## ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛАСТИЧНОГО ЦИЛІНДРА З КІЛЬЦЕВИМИ ВОЛОКНАМИ ПІД ВПЛИВОМ ОБЕРТАННЯ ПРИ ЖОРСТКІЙ ПОСАДЦІ

Кострова М. М., аспірант

*Національна металургійна академія України,  
просп. Гагаріна, 4, м. Дніпро, 49005, Україна*

mariya.kostrova.91@gmail.com

Представляємо результати вирішення задачі про деформацію кусочно-однорідного циліндра під впливом обертання під час жорсткої посадки. Циліндр утворений еластичною матрицею як основним матеріалом з двоякоперіодичним розташуванням кільцевих волокон квадратного перетину з більш жорсткого еластичного матеріалу. Завдання вирішували за моделлю кусочно-однорідного середовища на основі загальних рівнянь нелінійної теорії пружності. Застосовували метод кінцевих різниць з використанням кінцево-різницевої співвідношень другого порядку точності, вирішення тривало за швидкістю обертання циліндра.

*Ключові слова: циліндр кусочно-однорідний, волокна кільцеві, деформування нелінійне, обертання.*

## DEFORMING THE ELASTIC CYLINDER WITH RING FIBERS UNDER THE ACTION OF ROTATION AT THE HARD SITTING

Kostrova M. M., Graduate student

*National Metallurgical Academy of Ukraine,  
Gagarin ave. 4, Dnepr, Ukraine*

mariya.kostrova.91@gmail.com

We represent the results of the solution of the problem of deformation of a body about their axis of symmetry. Fibers of square cross-section are located in the matrix. The cylinder was modeled as an assembly of annular elements. Ring elements are presented in the form of rings of square cross-section from the matrix material, including ring fibers of square cross-section as their reinforcing core.

The axisymmetric deformation corresponding to macroscopically flat deformation was studied when the length of the cylinder remained unchanged. Because of the symmetry conditions, the problem was solved for a half disk layer. Such a layer is enclosed between the cross sections of the cylinder, one of which passes through the axial lines of the fibers, and the other passes through the matrix between the fibers, with a distance between sections equal to half the reinforcement period along the axial direction.

A distinctive feature for moving cylinders of elastic components is the effect on centrifugal forces

affecting the matrix and fiber, changes in the distances from their material points to the axis of the cylinder.

We used a model of a piecewise homogeneous medium, which methodologically most accurately reflects the behavior of the body of a fibrous structure. Exodus from geometric, physical equations and equilibrium equations of the nonlinear mechanics of the deformable body of the body. The relationship between physical and physical processes. This system of equations was solved on the basis of the Newton discrete method. The uniqueness of the solution of the boundary value problem was ensured on the basis of the continuation of the solution with respect to the angular velocity of rotation of the cylinder.

*Key words: piecewise homogeneous cylinder, circular fibers, non-linear deformation, rotation.*

## ВВЕДЕНИЕ

В [1] дан обзор основных публикаций, отражающих исследования однородных и армированных цилиндров под воздействием вращательного движения. Рассмотрено деформирование свободно вращающегося эластичного цилиндра, матрица которого армирована кольцевыми волокнами квадратного сечения с двоякопериодическим расположением. Исследование цилиндра производили на основе общих нелинейных уравнений теории упругости по модели кусочно-однородной среды. Задачу решали методом конечных разностей, использовали конечно-разностные соотношения второго порядка точности, решение продолжали по угловой скорости вращения цилиндра. В настоящей работе подход применили для изучения деформационного поведения кусочно-однородного цилиндра данного строения при вращении в условиях жесткого соединения с недеформируемым валом по внутренней поверхности.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследовали деформацию эластичного цилиндра из матрицы и кольцевых волокон под воздействием сил инерции вращения вокруг его оси симметрии при жесткой посадке по внутренней поверхности. Волокна квадратного сечения располагаются в матрице цилиндра по схеме квадратной упаковки. Цилиндр формально рассматривали как сборку кольцевых элементов. Кольцевые элементы представляют собой кольца квадратного сечения из матричного материала, включающие кольцевые волокна квадратного сечения как их армирующую сердцевину.

На рис. 1 показано осевое сечение недеформированного цилиндра с внутренним радиусом  $r = a$  и внешним  $r = b$ . Цилиндр включает цилиндрические слои толщиной  $h$ , армированные кольцевыми волокнами квадратного сечения с длиной сторон  $\delta$ .

Изучали осесимметричную деформацию цилиндра при макроскопически плоском деформировании, когда длина цилиндра оставалась неизменяемой. В силу условий симметрии задачу решали для правой половины дискового слоя толщиной  $h/2$ . Такой половинный слой заключен между поперечными сечениями цилиндра, одно из которых проходит через осевые линии волокон, а другое – через матрицу посередине между волокнами.

Применяли систему материальных цилиндрических координат  $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$ , из которых  $\hat{\theta}^1$  – осевая,  $\hat{\theta}^2$  – окружная,  $\hat{\theta}^3$  – радиальная координаты. В отсчетной конфигурации цилиндра данные координаты обозначаем как  $t, \varphi, r$  соответственно. Осевую координату  $t$  отсчитывали от центрального сечения, проходящего через осевые линии волокон в дисковом слое. Наряду с радиальной координатой  $r$  используем координату  $z = r - a$ , отсчитываемую от внутренней поверхности цилиндра. Величины, относящиеся к матрице и волокнам, отмечали индексом  $n$  при значении  $n = 0$ , отвечающем матрице, и значениях  $n = 1, \dots, n_{\max}$ , как отвечающих волокнам в их нумерации по направлению от внутренней к внешней поверхности. В некоторых случаях для большей «наглядности» выражений величины

описания матрицы отмечаем отдельно индексом  $m$ . При четкой принадлежности индексы компонентов обычно упускаем.

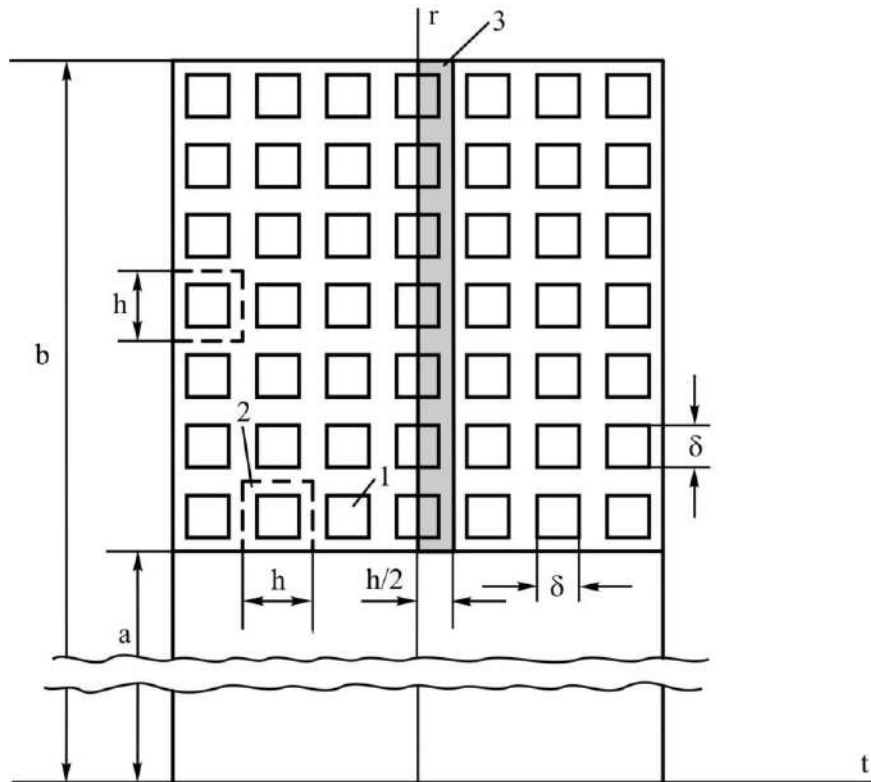


Рис. 1. Осевое сечение цилиндра в исходном состоянии: 1 – волокно квадратного сечения, 2 – кольцевой элемент, 3 – половина дискового слоя справа от центрального сечения

Применяли геометрические и физические уравнения и уравнения равновесия в нелинейной теории упругости [2] для описания деформации рассматриваемого кусочно-однородного цилиндра. Особенностью решаемой задачи является влияние на центробежные силы, воздействующие на матрицу и волокна, изменений расстояний от их материальных точек до оси вращения цилиндра. В используемых уравнениях задавали радиальную компоненту плотности массовых сил, воздействующих на составляющие (компоненты) цилиндра при его вращении, в виде

$$F_{n(3)} = (r + u_{n(3)})\omega^2, \quad n = 0, 1, \dots, n_{\max},$$

где  $u_{n(3)}$  – радиальная компонента вектора перемещения в  $n$ -ом компоненте;  $\omega = 2\pi \cdot f$  – угловая скорость вращения;  $f$  – число оборотов вращения в секунду.

Граничные условия для каждого из компонентов цилиндра, при которых решали краевую задачу, выражают отсутствие осевых перемещений в поверхностях  $t=0$  и  $t=h/2$  и поперечных сдвигов из этих поверхностей:

$$u_{n(1)}|_{t=0} = 0, \quad q_{n(13)}|_{t=0} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max};$$

$$u_{n(1)}|_{t=h/2} = 0, \quad q_{n(13)}|_{t=h/2} = 0, \quad n = 0.$$

Для внутренней граничной поверхности цилиндра, ограничивающей нижний покровный слой связующего и жестко связанной с поверхностью недеформируемого вала, задавали равными в ней нулю компоненты вектора перемещения:

$$u_{m(1)}|_{r=a} = 0, \quad u_{m(3)}|_{r=a} = 0,$$

где относящиеся к матрице величины отметили индексом  $m$  (вместо  $n=0$ ). При свободной от нагрузок внешней поверхности цилиндра, ограничивающей верхний покровный слой связующего, принимали в ней равными нулю компоненты несимметричного тензора Пиола-Кирхгофа:

$$t_{m(31)=0}\Big|_{r=b} = 0, \quad t_{m(33)=0}\Big|_{r=b} = 0.$$

Условия совместного деформирования задавали, исходя из равенств компонент векторов перемещений и напряжений для матрицы и волокон между собой в границах их раздела. Эти условия приводим, отметив величины, относящиеся к матрице, индексом  $m$ . В цилиндрических поверхностях раздела матрицы с  $n$ -волоконном

$$u_{m(1)}(t, r) = u_{n(1)}(t, r), \quad u_{m(3)}(t, r) = u_{n(3)}(t, r),$$

$$t_{m(31)}(t, r) = t_{n(31)}(t, r), \quad t_{m(33)}(t, r) = t_{n(33)}(t, r),$$

$$0 \leq t \leq \delta/2, \quad z = nh - (h + \delta)/2, \quad z = nh - (h - \delta)/2, \quad n = 1, 2, \dots, n_{\max}.$$

В поперечной плоскости  $t = \delta/2$  раздела  $n$ -волокон с матрицей

$$u_{m(1)}(t, r) = u_{n(1)}(t, r), \quad u_{m(3)}(t, r) = u_{n(3)}(t, r),$$

$$t_{m(11)}(t, r) = t_{n(11)}(t, r), \quad t_{m(13)}(t, r) = t_{n(13)}(t, r),$$

$$t = \delta/2, \quad nh - (h + \delta)/2 \leq z \leq nh - (h - \delta)/2, \quad n = 1, \dots, n_{\max}.$$

Производные первого порядка от искомым величин по осевой и радиальной координатам  $t$  и  $r$  в уравнениях задачи аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности [3]. Вместе с привлечением граничных условий и условий совместного деформирования матрицы и волокон формируется система нелинейных уравнений относительно основных искомым величин в узловых точках двумерной области  $0 \leq t \leq h/2, a \leq r \leq b$ . Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона [4]. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по угловой скорости вращения цилиндра.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Представляем результаты для цилиндра, включающего 100 цилиндрических слоев с кольцевыми волокнами в них. Цилиндр рассматриваем как совокупность дисковых слоев, в сборках каждого из которых по 100 кольцевых элементов. Внутренний радиус цилиндра  $a = 100$  мм, внешний радиус  $b = 200$  мм. Волокна в кольцевых элементах с длиной стороны квадратного сечения  $\delta = 0,6$  мм, квадратная упаковка волокон с расстояниями между осевыми линиями смежных волокон  $h = 1$  мм, коэффициент наполнения волокнами  $k_f = \delta^2/h^2 = 0,36$ . Материалы матрицы и волокон задавали с помощью трехконстантного потенциала Левинсона-Буржеса и двухконстантного потенциала Блейтца соответственно [5]. Для матрицы принимали значения упругих параметров  $E_m = 4$  МПа,  $\nu_m = 0,46, \beta_m = 1$ ; для волокон –  $E_f = 68$  МПа,  $\nu_f = 0,4$ . Плотность материалов матрицы и волокон принимали одинаковой  $\rho = 1,1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Результаты получили на основе сетки узловых точек конечно-разностной схемы, для которой на отрезках  $0 \leq t \leq 0,3$  мм и  $0,3$  мм  $\leq t \leq 0,5$  мм по 7-мь равноотстоящих узловых точек, две из которых на границах раздела совпадают между собой. На протяжениях по  $z$  в волокнах и между волокнами брали по 13-ть узловых точек при сдвоенных узлах на границе раздела

компонентов. На рис. 3 показаны координатные линии, отвечающие данной сетке узловых точек.

На рис. 2 представлены контурные линии цилиндра в исходном и при угловой скорости  $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$  состояниях и график изменения радиального перемещения  $u_{(3)}$  в поперечном сечении цилиндра в зависимости от радиальной координаты  $r$ . Радиальное перемещение для центрального сечения  $t=0$  изменяется от значения  $u_{(3)} = 0$  при  $r = a = 100$  мм до  $u_{(3)} = 17,28$  мм при  $r = b = 200$  мм. Для крайнего сечения  $t = h/2 = 0,5$  мм радиальное перемещение во внешней поверхности  $u_{(3)} = 17,26$  мм. Внешний радиус цилиндра в деформированном состоянии при  $t=0$   $b^* = b + u_{(3)}|_{t=0, r=b} = 217,28$  мм, а по месту крайнего сечения  $b^* = b + u_{(3)}|_{t=h/2, r=b} = 217,26$  мм.

Толщина цилиндра по месту центрального сечения при этом  $H^*|_{t=0} = b^* - a^* = 117,28$  мм вместо прежней  $H = b - a = 100$  мм ( $a^* = a$ ).

Радиальные перемещения  $u_{(3)}(r)$  не вполне монотонно изменяется по толщинной координате. Перемещение при  $z = 86,2$  мм достигает своего максимального значения  $u_{(3)} = 17,68$  мм, очень слабо уменьшается при дальнейшем возрастании  $z$  и на внешней поверхности  $z = 100$  мм принимает ранее указанное значение  $u_{(3)} = 17,28$  мм.

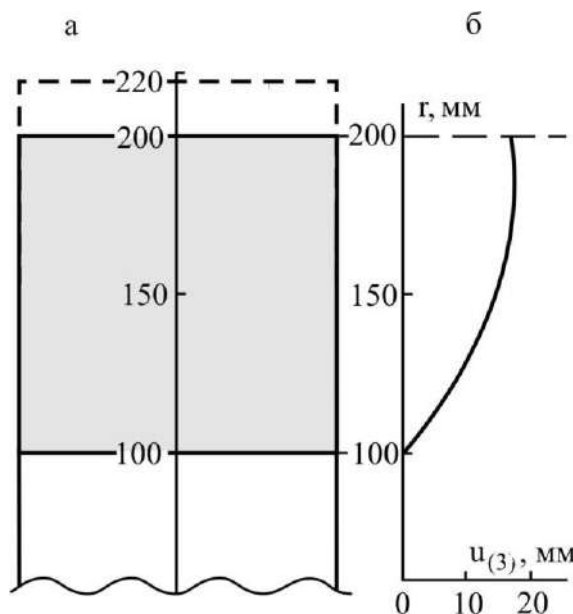


Рис. 2. Контур осевого сечения цилиндра в исходном (—) и при вращении  $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$  (---) состояниях (а) и распределение радиальных перемещений в поперечных сечениях цилиндра (б)

На рис. 3 изображены конфигурации осевых сечений для четырех половинборок кольцевых элементов, расположенных в цилиндре справа от центрального сечения. Каждая из данныхборок включает три концентрически расположенных кольцевых элемента. Перваяборка выделена из недеформированного цилиндра, конфигурация ее осевого сечения не зависит от места сборки в цилиндре, приведена для сопоставления с ней деформированныхборок.

Остальные сборки выделены из деформированного цилиндра при  $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$ . Втораяборка включает 1-й, 2-й и 3-й кольцевые элементы, примыкающие к внутренней поверхности цилиндра, ограничена поверхностями  $z = 0$  и  $z = 3h$ . Третьяборка образована

из внешней половины 49-го элемента, 50-го, 51-го элементов и внутренней половины 52-го элемента, расположена между поверхностями  $z = 48,5h$  и  $z = 51,5h$ . Четвертая сборка из примыкающих к внешней поверхности цилиндра 98-го, 99-го и 100-го элементов между поверхностями  $z = 97h$  и  $z = 100h$ .

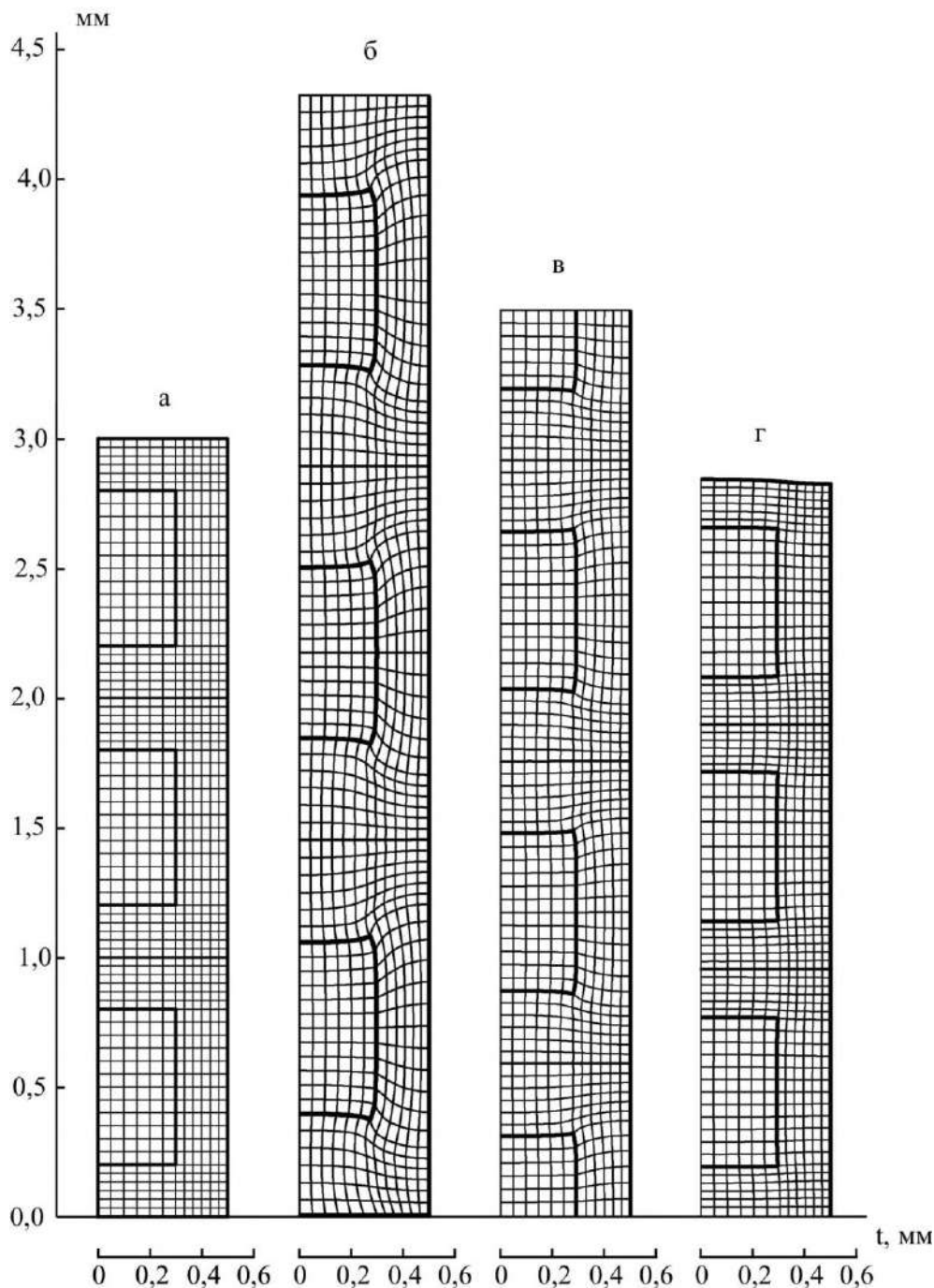


Рис. 3. Конфигурации осевых сечений сборок кольцевых элементов цилиндра: а) – сборка из трех элементов без вращения цилиндра; б), в) и г) – сборки при вращении  $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ c}^{-1}$ , включающие 1-й, 2-й, 3-й элементы, половину 49-го, 50-й, 51-й, половину 52-го элемента и 98-й, 99-й, 100-й элементы соответственно

Конфигурации осевых сечений кольцевых элементов в сборках представлены сетками координатных линий  $t = t_i$ ,  $z = z_i$ , проходящих через узловые точки  $(t_i, z_i)$  конечно-разностной схемы решения задачи. Они демонстрируют более интенсивное деформирование кольцевых элементов, расположенных ближе к внутренней поверхности цилиндра по сравнению с более удаленными от нее элементами.

Торцевые поверхности волокон, за исключением расположенных возле внешней поверхности цилиндра, приобретают относительно центральной поверхности  $t=0$  выпуклый характер. Цилиндрические ограничивающие поверхности относительно срединных поверхностей волокон становятся вогнутыми. Тогда как в условиях свободного вращения граничные поверхности волокон испытывают обратные искривления. Поперечные сечения волокон возле внутренней поверхности сборки (цилиндра) испытывают небольшие увеличения своей высоты при практически неизменяемой ширине, за исключением окрестностей возле угловых точек. Расстояния между волокнами при этом примерно в два раза больше, чем в отсчетном состоянии. В центральной части сборки размеры поперечных сечений волокон по высоте незначительно больше, а по ширине незначительно меньше по сравнению с недеформированной конфигурацией, при значительном увеличении расстояний между волокнами. На периферии возле внешней поверхности размеры поперечных сечений волокон и расстояния между ними близки по сравнению с исходными.

В областях матричного слоя  $0,3 \text{ мм} \leq t \leq 0,5 \text{ мм}$ , примыкающих к волокнам (между противоположно расположенными волокнами из смежных дисковыхборок), материал испытывает значительно большие растяжения по радиальным направлениям, чем в областях данного слоя между волокнами в сборке.

Деформированные конфигурации осевых сечений 1-го и 2-го кольцевых элементов значительно различаются между собой. Об этом можно судить по отличиям сетки линий конечно-разностной схемы в деформированной конфигурации возле внутренней поверхности  $z=0$  1-го кольцевого элемента от сетки соответствующих линий возле границы  $z=1 \text{ мм}$  его разделения со 2-ым элементом (количественную оценку различия деформированных конфигураций элементов упускаем). Для 2-го, 3-го и последующих элементов до 99-го включительно, различия в конфигурациях смежных элементов выражены незначительно. Тогда как конфигурация 99-го элемента заметно отличается от конфигурации 100-го элемента. Приходим к заключению, что приповерхностный эффект возле обеих граничных поверхностей цилиндра проникает на глубину не более одного периода армирования.

На рис. 4 и 5 даны распределения осевых  $p_{11}$  и окружных  $p_{22}$  напряжений в центральном сечении  $t=0$  при  $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$ . Распределения напряжений даны на протяжениях  $0 \leq z \leq 3h$ ,  $48,5h \leq z \leq 51,5h$ ,  $97h \leq z \leq 100h$  трех включаемыхборок кольцевых элементов, деформированные конфигурации которых представлены на рис. 3, б-г. Данные напряжения претерпевают скачки на поверхностях раздела матрицы с волокнами. С переходом от одного элемента к другому, по направлению ко внешней поверхности цилиндра (с увеличением номера идентификации), осевая и окружная компоненты вектора напряжений в связующем уменьшаются, при этом абсолютные различия между ними достаточно малые. Напряжения  $p_{11}$  в волокнах также постепенно уменьшаются при переходе между волокнами от внутренней поверхности к наружной. Иной характер изменения с переходом между волокнами окружного напряжения, которое увеличивается от 1-го волокна до 32-го включительно, а затем уменьшается на последующих волокнах. Напряжение посередине 32-го волокна  $p_{22} = 12,5 \text{ МПа}$  почти равно максимальному напряжению в связующем  $p_{22} = 12,2 \text{ МПа}$ , которое достигается по месту заделки. Это объясняется с одной стороны уменьшением радиальных, а с другой – увеличением окружных деформаций в волокнах с приближением к внешней поверхности цилиндра.

Распределения радиальных напряжений  $p_{33}$  в сечении  $t=0$  для указанных вышеборок кольцевых элементов показаны на рис. 6. Распределения напряжений отражаются кривыми линиями, которые изламываются при переходах между матрицей и волокнами. Это заметно для сборки из 1-го, ..., 3-го элементов, в которых данные напряжения достигают достаточно больших величин (в масштабе изображения). Графики дляборок из срединных и концевых элементов представляют собой слабо искривленные линии с малым наклоном по отношению к оси  $z$ , который демонстрирует их плавное уменьшение до нуля во внешней поверхности с переходом между смежными блоками.



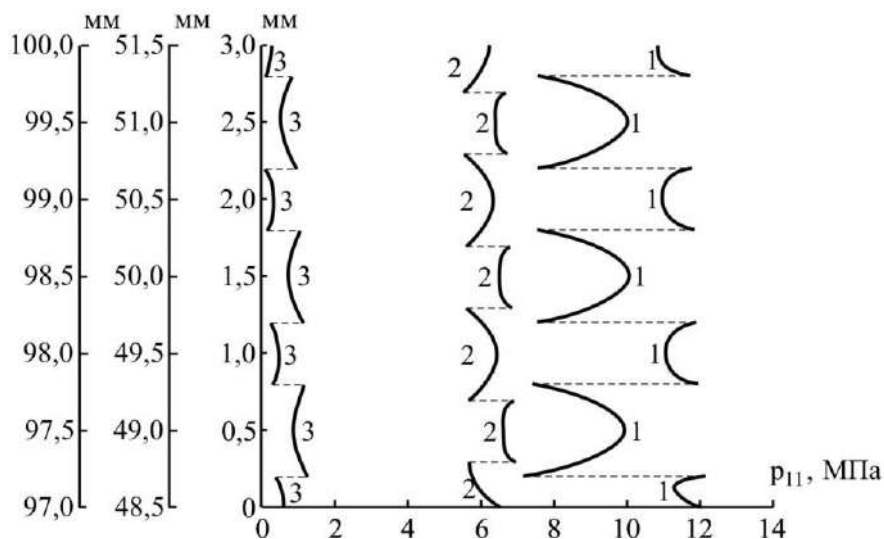


Рис. 4. Распределения осевых напряжений  $p_{11}$  в центральном сечении  $t = 0$  на протяжениях  $0 \leq z \leq 3$  мм,  $48,5 \text{ мм} \leq z \leq 51,5 \text{ мм}$ ,  $97 \text{ мм} \leq z \leq 100 \text{ мм}$  трех сборок кольцевых элементов в цилиндре

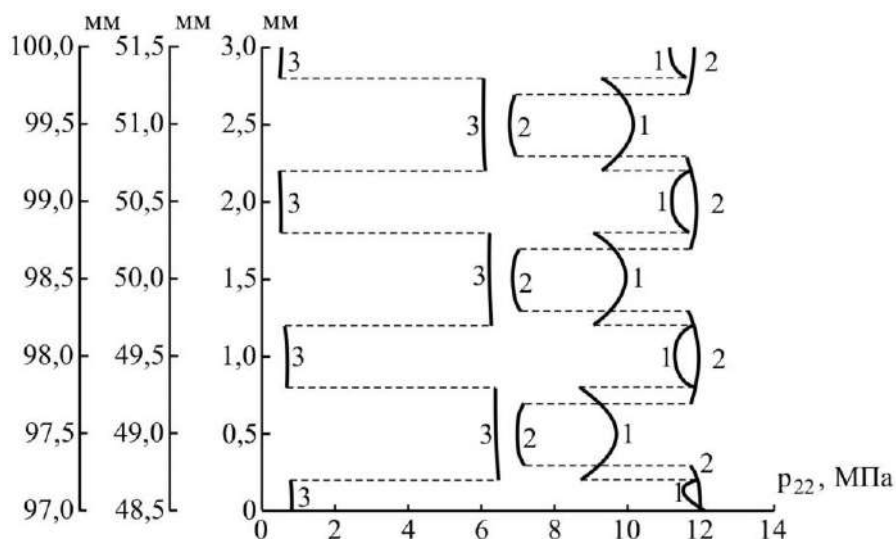


Рис. 5. То же для  $p_{22}$

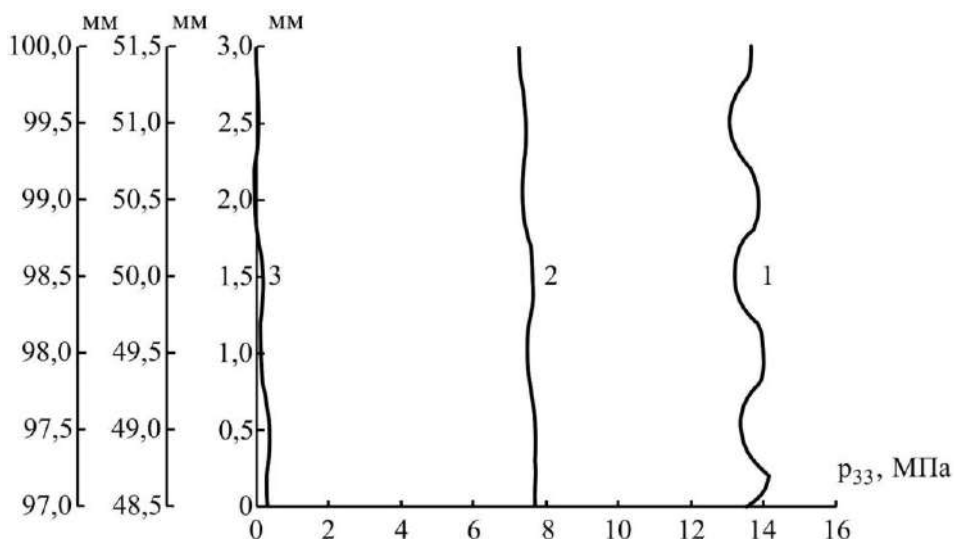


Рис. 6. То же для  $p_{33}$

Напряжения  $p_{33}$  по месту заделки и для кольцевых элементов, примыкающих к ней, превосходят наибольшие из осевых  $p_{11}$  и окружных  $p_{22}$  в цилиндре (дисковой сборке).

Так, для связующего по месту заделки ( $z=0$ )  $p_{33}=13,6$  МПа, во внутренней поверхности раздела связующего с первым волокном ( $z=0,2$  мм)  $p_{33}=14,2$  МПа.

Распределения напряжений в краевом сечении  $t=0,5$  мм, для рассматриваемыхборок из 3-х элементов, представлены на рис. 7-9. Данное сечение приходится только на связующий материал в сборках. Поэтому напряжения в нем отображаются для всех трехборок непрерывными без изломов кривыми их зависимостей от координаты  $z$ .

Отметим существенно более высокий уровень напряжений  $p_{22}$  и  $p_{33}$  в сечении  $t=0$  по сравнению с соответствующими напряжениями в сечении  $t=0,5$  мм. Осевые напряжения  $p_{11}$  в указанных сечениях для каждого из колец в сборках по своим максимальным и минимальным значениям различаются менее значительно, чем это имеет место для напряжений  $p_{22}$  и  $p_{33}$ .

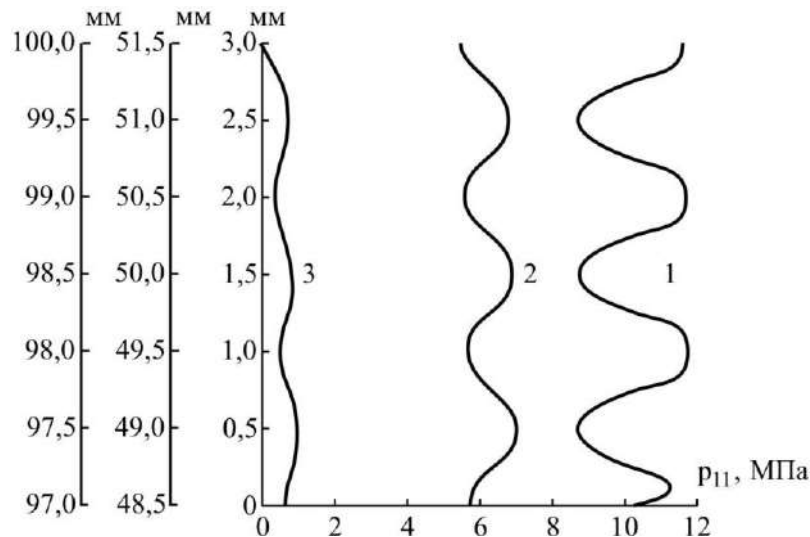


Рис. 7. Распределение осевых напряжений  $p_{11}$  в краевом сечении  $t=0,5$  мм на протяжениях  $0 \leq z \leq 3$  мм,  $48,5 \text{ мм} \leq z \leq 51,5 \text{ мм}$ ,  $97 \text{ мм} \leq z \leq 100 \text{ мм}$  трехборок кольцевых элементов в цилиндре

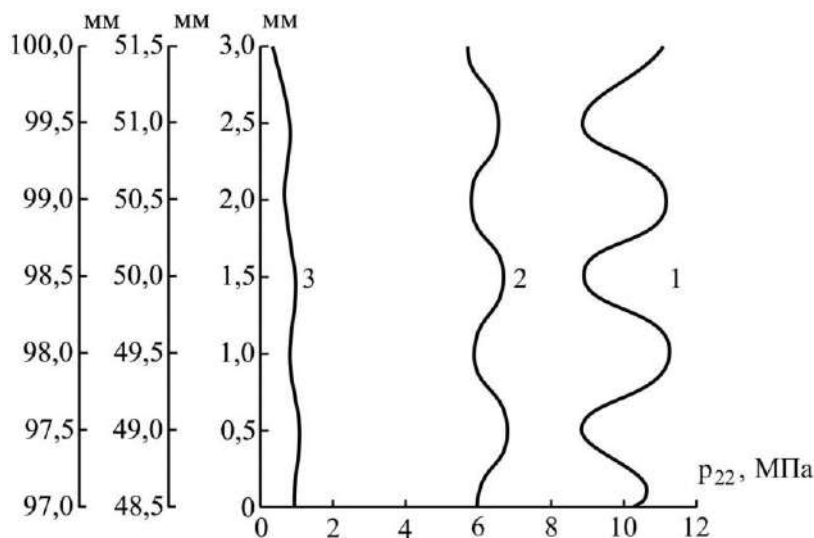


Рис. 8. То же для  $p_{22}$

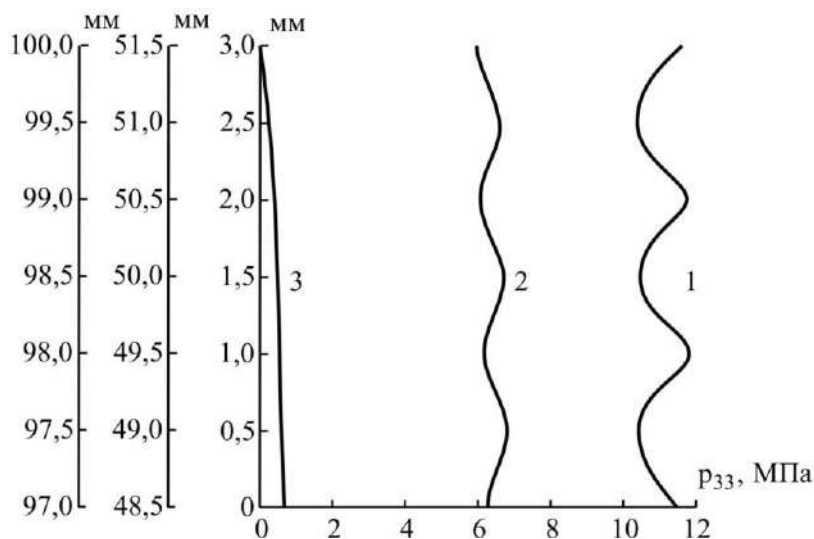


Рис. 9. То же для  $p_{33}$

На рис. 10 представлены зависимости радиальных перемещений  $u_{(3)}$  во внешней поверхности  $r=b$  от скорости вращения  $\omega/2\pi$  для пяти цилиндров с разными наполнениями волокнами и однородного цилиндра. Схема строения цилиндров с волокнами и условия решения задачи для них такие же, как и для исследуемого цилиндра с наполнением  $k_f = 0,36$  (см. рис. 1).

Цилиндры отличаются величинами квадратных сечений кольцевых волокон. Стороны сечений волокон в цилиндрах  $\delta = 3, 4, 5, 6$  и  $7$  мм, при которых их наполнения волокнами  $k_f = 0,09, 0,16, 0,25, 0,36, 0,49$  соответственно. Однородный цилиндр рассчитывали по отдельному алгоритму решения одномерной задачи, так и по общему алгоритму для цилиндров волокнистого строения с принятием для материала волокна параметров матрицы (при 201-ой точке дискретизации для одномерной задачи ее результаты решения совпали с результатами решения двухмерной задачи в пяти первых значащих цифрах представлений этих результатов). При используемом масштабе изображения кривые зависимостей отражают изменения внешних радиусов поперечных сечений цилиндров для всего интервала их положений  $0 \leq t \leq h/2$ . Расстояния между кривой и осевой горизонталью вдоль вертикального направления определяют увеличение толщины стенки цилиндра соответствующего наполнения с увеличением скорости его вращения.

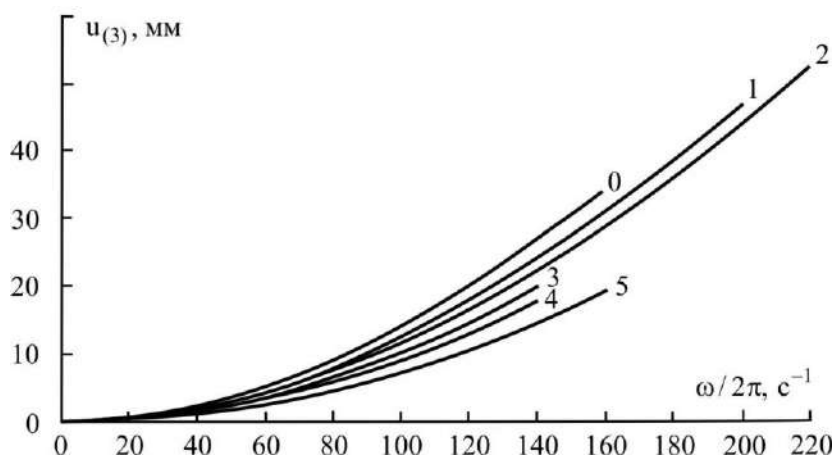


Рис. 10. Зависимости радиальных перемещений  $u_{(3)}$  во внешней поверхности цилиндра с жесткой посадкой от скорости вращения  $\omega/2\pi$  при наполнениях волокнами  $k_f = 0$  (0),  $0,09$  (1),  $0,16$  (2),  $0,25$  (3),  $0,36$  (4),  $0,49$  (5)

Отметим намного меньшее влияние наличия армирующих волокон на развитие конфигурации цилиндров и соответствующее изменение их кинетической энергии под воздействием вращения по сравнению с цилиндрами со свободной посадкой [1]. Например, радиальные перемещения во внешней поверхности однородного цилиндра и цилиндра с наполнением волокнами  $k_f = 0,36$  при  $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$  относятся между собой как

$$\frac{u_{(3)}[k_f = 0]}{u_{(3)}[k_f = 0,36]} = \frac{26,3 \text{ мм}}{17,3 \text{ мм}} = 1,5.$$

Тогда как в случае свободной посадки отношения радиальных перемещений во внешней и внутренней поверхностях для данных цилиндров при  $\omega = 2\pi \cdot 35 \text{ с}^{-1}$ , соответственно,

$$\frac{u_{(3)}[k_f = 0]}{u_{(3)}[k_f = 0,36]} \cong \frac{118 \text{ мм}}{7 \text{ мм}} \cong 17$$

и

$$\frac{u_{(3)}[k_f = 0]}{u_{(3)}[k_f = 0,36]} \cong \frac{82 \text{ мм}}{5 \text{ мм}} \cong 16.$$

Сравнительно слабое влияние волокон на развитие конфигурации цилиндра с жесткой заделкой по внутренней поверхности объясняется достаточно высоким сопротивлением материала матрицы при соответственно заданных граничных условиях (3.1)-(3.4). Цилиндр может деформироваться только в той мере, в какой материалы его матрицы и волокон являются сжимаемыми.

## ВЫВОДЫ

Представили результаты исследования эластичного цилиндра, периодически армированного кольцевыми волокнами квадратного сечения под воздействием вращения при жесткой посадке по внутренней поверхности. Цилиндр изучали при макроскопически плоском деформировании на основе модели кусочно-однородной среды. Конфигурация цилиндра при деформировании изменяется в той мере, в какой материалы его матрицы и волокон являются сжимаемыми. Установили наибольшее развитие деформаций связующего между волокнами в матрично-волоконном слое и в областях матричного слоя, примыкающих к волокнам. Выявили характер локального изменения напряжений в матрице и волокнах в характерных сечениях цилиндра. Определили глубину проникновения приповерхностного эффекта возле внутренней и внешней поверхностей цилиндра в пределах одного кольцевого элемента для каждой из них.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кострова М. М., Ахундов В. М. Деформирование эластичного цилиндра с кольцевыми волокнами под воздействием вращения при свободной посадке. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 205–212.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
3. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
4. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
5. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Ленинград: Машиностроение, 1986. 336 с.

## REFERENCES

1. Kostrov, M. M. & Ahundov, V. M. (2017). Deformation of an elastic cylinder with annular fibers under the influence of rotation during a free landing. Visnyk Zaporizhzhya National University. Physics and mathematics, No. 1, pp. 205-212.
2. Lur'e, A. I. (1980). Nonlinear theory of elasticity. Moscow: Nauka.
3. Korn, G. A. & Korn, T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. New-York: General Publ. Company.
4. Ortega, Dzh. & Rejnboldt, V. (1975). Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many unknowns. Moscow: Mir.
5. Chernyh, K. F. (1986). Nonlinear theory of elasticity in machine-building calculations. Leningrad: Mashinostroenie.

УДК 624.03

**ПОРІВНЯННЯ АЛГОРИТМІВ ОПТИМІЗАЦІЇ В ДЕЯКИХ ЗАДАЧАХ  
БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ**

Коструб Р. В., аспірант

*Український державний хіміко-технологічний університет,  
просп. Гагаріна, 8, Дніпро, Україна*

kostrub.r.v@gmail.com

У статті порівняно швидкодію алгоритмів оптимізації в задачі оптимального проектування шарнірно-стрижневих систем, які функціонують в агресивному середовищі. Задача оптимізації має обмеження у вигляді алгоритму, а простір розв'язків – неметричний, тому використовуватимуться алгоритми оптимізації, що не потребують градієнта. Наведено результати порівняння, які показують вищу швидкодію генетичного алгоритму.

*Ключові слова: генетичний алгоритм, випадковий пошук, агресивне середовище, корозія, шарнірно-стрижнева система.*

**СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

Коструб Р. В., аспірант

*Украинский государственный химико-технологический университет,  
просп. Гагарина, 8, Днепр, Украина*

kostrub.r.v@gmail.com

В статье представлено сравнение быстродействия алгоритмов оптимизации в задаче оптимального проектирования шарнирно-стержневых систем, функционирующих в агрессивной среде. Задача оптимизации имеет ограничения в виде алгоритма, а пространство решений – неметрическое, поэтому будут использоваться алгоритмы оптимизации, не требующие градиента. Приведены результаты сравнения, которые показывают более высокое быстродействие генетического алгоритма.

*Ключевые слова: генетический алгоритм, случайный поиск, агрессивная среда, коррозия, шарнирно-стержневая система.*

## COMPARISON OF OPTIMIZATION ALGORITHMS IN SOME TASKS OF STRUCTURAL MECHANICS

Kostrub R. V., Ph. D student

*Ukrainian State University of Chemical Technology,  
Gagarina Ave., 8, Dnipro, Ukraine*

kostrub.r.v@gmail.com

In this paper author compared speed of optimization algorithms in task of truss structure sizing optimization. Sizing optimization of truss structures working in corrosive environments is computational heavy task, especially when dealing with large number of elements, thus speeding up algorithm witch used for optimization is important scientific task. Optimization process consists of following parts: use corrosion model to get damage depth, use finite element method to get structure parameters, check constraints, if structure doesn't fit constraints repeat optimization procedure for different structure parameters. Algorithm stops when either feasible parameter set is found or when too many iterations of optimization algorithm passed without result. Structure optimization method used in this paper have couple parts that can be optimized: 1. Process of computing of constraints functions; 2. Algorithm used to solve system of differential equations that models process of damage accumulation in structure; 3. Optimization algorithm used to solve overall task. This paper focused on latter problem. There are many optimization algorithms known, but approach used in this work have constrains, such as: search space consist of indexes in 3 dimensional table filled with parameters of standardized bars, and constraints function represented by algorithm. Therefore, we cannot use gradient methods because search space is non metric. Possible solutions to this problem is use of zero order methods such as random search, or heuristic methods for example genetic algorithm. Described truss structure optimization method were implemented and tested with use of random search algorithm and genetic algorithm. Five truss structures with different number of bars optimized using suggested algorithm. Results show that genetic algorithm have speed advantage over random search algorithm.

*Key words: genetic algorithm, random search, corrosive environment, corrosion, truss structure.*

Сучасну промисловість неможливо уявити без використання металевих конструкцій. Часто такі конструкції функціонують в агресивному середовищі (АС), що призводить до корозії – руйнування поверхневого шару металу. Корозія у свою чергу може призвести до значних економічних втрат. Ці втрати можуть бути як прямими: заміна обладнання, яке вийшло з ладу внаслідок корозії, так і непрямими: втрата сировини, яка перероблялась під час виходу обладнання з ладу, можливе забруднення навколишнього середовища, у деяких випадках – навіть втрата людських життів. За даними NACE [1], у країнах, де проводились дослідження вартості корозії, втрати від неї оцінюються від 2% до 5% валового національного продукту. Одним із можливих способів зменшити втрати від корозії є ремонт або заміна конструкції перед тим, як вона втратить свою несучу здатність, що потребує надійного способу прогнозування часу, коли така конструкція вийде з ладу.

Отже, прогнозування довговічності конструкцій, що функціонують в агресивному середовищі — це цікава практична та наукова задача. Крім того, отримання розв'язку такої задачі оптимальним шляхом є окремою науковою проблемою.

Однією з передумов отримання оптимальної конструкції є наявність адекватної моделі накопичення пошкоджень. Існує багато способів моделювання: для цієї роботи математичне моделювання видається найбільш придатним, оскільки може використовуватись для різних типів корозії, на відміну від фізичного моделювання (крім випадку водневої корозії). Відомо багато математичних моделей корозійного процесу, зокрема моделі, наведені у працях Цикермана, Петрова, Овчинникова [2-4]. Але вони не враховують вплив напруженого стану на швидкість корозії. Однією з моделей, що враховує цей вплив, є модель, запропонована у працях Долинського [5].

Параметри елементів конструкції можна отримати, розв'язавши задачу напружено-деформованого стану (НДС). Для отримання параметру пошкодження у випадку статично визначеної конструкції можливо використати аналітичні формули, отримані для моделі Долинського. У статично невизначеній конструкції зусилля у стрижні залежить від зусиль у

всіх інших елементах конструкції, тому для визначення пошкодження конструкції потрібно розв'язати систему диференціальних рівнянь (СДР).

Для розв'язання задачі НДС доцільно використати метод скінченних елементів (МСЕ), оскільки він може працювати з довільними параметрами конструкції.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У загальному вигляді задача оптимізації має такий вигляд: функція цілі  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  та функції обмежень  $g_j(x) = 0, j = 1, \dots, m; g_j(x) \leq 0, j = m + 1, \dots, p$ , які визначають множину допустимих розв'язків  $X$ . Потрібно знайти мінімум цільової функції на множині  $X$ , тобто таку точку  $x^* \in X$ , що:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \tag{1}$$

де

$$X = \left\{ x \left| \begin{array}{l} g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad m < n, \\ g_j(x) \leq 0, \quad j = m + 1, \dots, p. \end{array} \right. \right\}$$

Як цільова функція використовується об'єм отриманої конструкції (2)

$$V(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N A_i(\bar{x}) \cdot L_i \rightarrow \min, \tag{2}$$

де  $\bar{x}$  – вектор варійованих параметрів,  $N$  – кількість елементів в ШСК,  $A_i, L_i$  – площа та довжина  $i$ -го стержня.

Як обмеження виступають співвідношення:

$$\begin{cases} g_1: [\sigma] - \sigma_i(\bar{x}, t^*) \geq 0; & i = \overline{1, N}; \\ g_2: \sigma_j^*(\bar{x}, t^*) - \sigma_j(\bar{x}, t^*) \geq 0; & j \in J; \\ x_k \in [x_k^1; x_k^2; \dots; x_k^n]; & k = \overline{1, K}, \end{cases} \tag{3}$$

де  $K$  – кількість варійованих параметрів,  $J$  – множина стержнів що працюють на стиснення,  $\sigma_i, \sigma_j^*, [\sigma]$  – напруження, критичне напруження втрати стійкості, граничне значення напруження,  $t^*$  – заданий термін служби.

Для обчислення значень функцій обмежень використаємо модель поведінки кородуючої конструкції, яка складається з:

Система рівнянь метода скінченних елементів (МСЕ) (1.4):

$$\begin{cases} \bar{u} = K^{-1} \cdot \bar{R}, \\ \bar{\varepsilon} = D \cdot \bar{u}, \\ \bar{\sigma} = E \cdot \bar{\varepsilon}, \end{cases} \tag{4}$$

де  $\bar{R}, \bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}$  – вектори навантажень, переміщень, деформацій та напружень.

Система диференціальних рівнянь (ДР), що описує корозійний процес:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = V_0 \psi(\sigma_i(\bar{\delta})) : \delta_i|_{t=0} = 0, \tag{5}$$

$$\psi|_{\sigma=0} = 1,$$

$$\delta_i^s = \delta_i^{s-1} + hV_0 \psi(\sigma_i^{s-1}(\bar{\delta}^{s-1})), \tag{6}$$

де  $\delta$  – глибина корозійного пошкодження,  $t$  – час,  $V_0$  – швидкість корозії за відсутності напруження,  $\sigma$  – абсолютна величина напруги,  $\psi$  – деяка відома функція.

Вираз (5) – це модель корозійного процесу, отримана В. М. Долинським у праці [6], де параметр пошкодження лінійно залежить від величини напруження. Розв'язати це рівняння можна тільки чисельно, наприклад, методом Ейлера (6). Оцінити похибку чисельного методу можна за допомогою аналітичної формули (7), яка використовується у випадку статично визначеної конструкції:

$$t^* = t_0 - \frac{2kQ}{v_0 \cdot |d|} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{2a\delta - P_0}{|d|} + \operatorname{arctg} \frac{P_0}{|d|} \right\}, \quad (7)$$

де  $P_0$  – периметр перерізу в початковий момент часу,  $Q$  – величина осьового зусилля,  $t_0 = \frac{\delta^*}{v_0}$ ,  $a$  – коефіцієнт форми перерізу.

### ОПИС АЛГОРИТМУ ОПТИМІЗАЦІЇ

Оскільки простір розв'язків неметричний, ми не можемо використовувати градієнтні методи для оптимізації конструкції. Одним із варіантів вирішення цієї проблеми є використання генетичного алгоритму (ГА) – еволюційного алгоритму пошуку, що базується на механіці природного відбору, яка зустрічається в генетиці. Такі алгоритми комбінують у собі принцип виживання найпристосованішого та структурованого, але водночас випадкового обміну інформацією. Кожна особина – це можливий розв'язок задачі оптимізації, закодований певним чином. У кожному поколінні для створення нового набору особин використовуються частини найкращих особин зі старого покоління. Для оцінки особини використовується так звана фітнес-функція, яка є нашою функцією мети. Генетичні алгоритми використовують дані про минулі покоління, щоб отримати нові точки для пошуку, в яких очікуються покращення результату [7].

Генетичні алгоритми відрізняються від класичних методів оптимізації такими особливостями [7]:

ГА працює з закодованими значеннями параметрів, а не з самими параметрами.

ГА веде пошук у популяції точок, а не в одній точці.

ГА використовує інформацію про цільову функцію, а не про її похідну або якусь іншу додаткову інформацію.

ГА використовує імовірнісні правила переходу від однієї особини до іншої, а не детерміновані.

Для отримання нових особин використовуються генетичні оператори кросоверу та мутації.

Кросовер – аналог біологічного кросоверу, з двох батьківських особин створюються дві нові дочірні особини, які ймовірно матимуть краще значення фітнес-функції. Існує багато методів вибору батьківських особин, але майже завжди в якомусь розумінні це «найкращі» особини. У цій праці використовувався турнірний відбір: довільно береться група особин і вибирається та, що має найкраще значення фітнес-функції. Існують також різні типи кросоверу: найпростіший або одноточковий, двоточковий, багатоточковий кросовери. При одноточковому кросовері в батьківських особинах буде одна точка розриву і відповідно дві ділянки, де відбудеться обмін генетичною інформацією, при двоточковому будуть дві такі точки тощо. У нашому дослідженні використовувався одноточковий кросовер.

Мутація – це генетичний оператор, призначений для збереження генетичної різноманітності в популяції. Використання оператора мутації може допомогти оминати локальний мінімум. Його дія полягає у випадковій зміні гену випадкової особини з деякою вірогідністю.

Оскільки генетичний алгоритм не може безпосередньо враховувати обмеження, автор використав метод штрафних функцій для переходу від задачі з обмеженнями до задачі без обмежень. Навіть при невеликому порушенні обмежень на значення фітнес-функції



накладається штраф, і особина, де відбувається таке порушення, не потрапить до наступної популяції.

Для кодування особин популяції використовувався тривимірний масив, зображений на рис. 1.

До нього занесені відомості про розміри перерізів деяких фасонних профілів та їх типорозміри. Особина складається з генів, кожному елементу конструкції відповідає два гени, ними кодується тип та типорозмір профілю. Варто наголосити, що в генах використовуються не власне значення параметрів, а індекси в масиві, тобто простір розв'язків неевклідовий. Тому для розпізнання збіжності популяції – одного з критеріїв зупинки алгоритму – було використано умову порівняння до нуля відстані Хеммінга між «найкращою» та «найгіршою» особинами популяції. Іншим можливим критерієм зупинки алгоритму є такий стан популяції, коли впродовж декількох епох не відбувається значних змін значення фітнес-функції «найкращої» особини або була досягнута гранична кількість популяцій.

Іншим варіантом вирішення проблеми є використання методу випадкового пошуку. У деяких випадках методи нульового порядку є єдиними які можна використати для оптимізації. Такими, наприклад, є випадки, коли функція задана неявно або має розриви та ін.

	В	Н	Д	Т
Розмір №1	100	200	52	84
Розмір №2	110	220	52	84
	...	...	...	...
	...	...	...	...
	...	...	...	...
	...	...	...	...
Розмір №N	135	300	65	102

Кутник рівнополичний

Кутник нерівнополичний

Швеллер

Двутавр

Рис. 1 – Масив розмірів фасонних профілів

Звичайно методи нульового порядку застосовуються, коли неможливе визначення градієнта цільової функції, наприклад, функція задана алгоритмом. Методи випадкового пошуку відрізняються від детермінованих методів оптимізації навмисним введенням елемента випадковості. Це означає, що в одній і тій же ситуації рішення про направлення робочого кроку, прийняте за методом випадкового пошуку, буде різним.

### ЧИСЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Для кожного алгоритму розв'яжемо задачу оптимізації деяких шарнірно-стержневих систем, зокрема 5-елементної, 10, 15, 25, 50, елементних конструкцій з параметрами:  $P = 200$  кН,  $L = 500$  см,  $t = 2.5$  роки,  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа,  $k = 0.003$  МПа<sup>-1</sup>,  $[\sigma] = 240$  МПа,  $V_0 = 0.1 \frac{\text{см}}{\text{рік}}$ .

Для проведення чисельного експерименту використовувався комп'ютер з процесором Intel Core i5 2.4 GHz та 8 гігабайтами ОЗУ.

Результати порівняння наведені в табл. 1

Таблиця 1 – Результати чисельних експериментів

Конструкція	Кількість елементів	$t$ , обчислення ГА с.	$t$ , обчислення ВП с.	$t^*$ , років
1	5	2.43	7.38	2.52
2	10	3.97	12.14	2.67
3	15	7.79	14.79	2.73
4	20	9.68	19.17	2.77
5	25	15.78	25.45	2.84

З таблиці 1 можна зробити висновок, що генетичний алгоритм є більш ефективним за швидкістю.

### ВИСНОВКИ

Порівняно два алгоритми оптимізації в задачі оптимального проектування шарнірно-стрижневих конструкцій, які функціонують в агресивному середовищі. Задачу розв'язано за допомогою генетичного алгоритму та методу випадкового пошуку. Одержані розв'язки ілюстративної задачі оптимального проектування деяких ШСК. Результати чисельного експерименту показують, що генетичний алгоритм дає розв'язок швидше, ніж метод випадкового пошуку. Для покращення методу пропонується збільшити швидкість обчислення фітнес-функції генетичного алгоритму, оскільки вона обчислювально складна та застосовується велику кількість разів, це дасть великий поштовх швидкодії методу. Запропонований метод може бути використаний для зниження вартості елементів обладнання хімічних підприємств при збереженні несучої здатності конструкції, що може дати значну економію коштів.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Biezma M. V., Cristóbal J. R. S. Letter to the editor: Is the cost of corrosion really quantifiable? *Corrosion*. 2006. Т. 62, №. 12. С. 1051–1055.
2. Цикерман Л. Я, Штурман Я. Г. Прогноз опасности грунтовой коррозии для стальных сооружений. *Защита металлов*. 1967. № 2. С. 243–244.
3. Петров В. В., Овчинников И. Г., Шихов Ю. М. Расчёт элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. Саратов: Сарат. ун-т, 1987. 288 с.
4. Овчинников И. Г, Петров В. В. Математическое моделирование процесса взаимодействия элементов конструкций с агрессивными средами. *Деформирование материалов и элементов конструкций в агрессивных средах*. 1983. С. 3–11
5. Долинский В. М. Изгиб тонких пластин, подверженных коррозионному износу. *Динамика и прочность машин*. 1975. №. 21. С. 16–19.
6. Долинский В. М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии. *Исследования по теории оболочек*. 1976. №. 7. С. 37–42.
7. Golberg D. E. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA, USA, 1989. 432 с.

### REFERENCES

1. Biezma, M. V. & Cristóbal J. R. S. (2006). Letter to the editor: Is the cost of corrosion really quantifiable? *Corrosion*, Vol. 62, No. 12, pp. 1051-1055.
2. Tsikerman, L. Ya. & Shturman, Ya. G. (1967). Forecast of the danger of soil corrosion for steel structures. *Zaschita metallov*, No 2, pp. 243-244.
3. Petrov, V. V, Ovchinnikov, I. G. & Shikhov, Yu. M. (1987). Calculation of structural elements interacting with an aggressive environment. *Saratov: Sarat. University*.

4. Ovchinnikov, I. G. & Petrov, V. V. (1983). Mathematical modeling of the interaction of structural elements with aggressive environments. Deformirovaniye materialov i elementov konstruksiy v agressivnykh sredakh, Saratov, pp. 3-11.
5. Dolinsky, V. M. (1975). Bending of thin plates subject to corrosive wear. Dinamika i prochnost' mashin, No. 21, pp. 16-19.
6. Dolinsky, V. M. (1976). Calculation of elements of structures subject to uniform corrosion. Issledovaniya po teorii obolochek, No. 7, pp. 37-42.
7. Golberg, D. E. (1989). Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA, USA.

УДК: 539.3:539.37:535.55

## **ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРОДОВЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КРУГЛИХ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ**

Кудін О. В., к. ф.-м. н., Борисовська Ю. О., аспірант

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

avk256@gmail.com

Запропоновано рівняння рівноваги тришарових круглих пластин симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами і нелінійно-пружним ізотропним заповнювачем. Описано методику розв'язання задачі визначення деформованого стану, яка включає послідовне застосування методу Рітца та методу продовження розв'язку за параметром. Як чисельний приклад, розглянуто задачу визначення деформованого стану тришарової круглої пластини в нелінійно-пружній за Каудерером постановці, виконано порівняння отриманого розв'язку з іншими відомими дослідженнями.

*Ключові слова: тришарова симетрична пластинка, кругла пластинка, нелінійно-пружний заповнювач, метод продовження розв'язку за параметром.*

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРУГЛЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Кудин А. В., к. ф.-м. н., Борисовская Ю. А., аспирант

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

avk256@gmail.com

Предложены уравнения равновесия трехслойных круглых пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и нелинейно-упругим изотропным наполнителем. Описана методика решения задачи определения деформированного состояния, которая включает последовательное применение метода Ритца и метода продолжения решения по параметру. В качестве численного примера, рассмотрена задача определения деформированного состояния трехслойной круглой пластины в нелинейно-упругой по Каудереру постановке, выполнено сравнение полученного решения с другими известными работами.

*Ключевые слова: трёхслойная симметричная пластинка, круглая пластинка, нелинейно-упругий наполнитель, осесимметричный изгиб, метод продолжения решения по параметру.*

## STRAIN DEFINITION OF SANDWICH CIRCULAR PLATES WITH NONLINEAR ELASTIC CORE USING PARAMETER CONTINUATION METHOD

Kudin O. V., Borysovska Ju. O.

Zaporizhzhya National University,  
Zhykovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

avk256@gmail.com

Composite materials (composites) and layered materials are one of the great technological advances of modern engineering. By the term layered materials we usually refer to materials that are combinations of two or more organic or inorganic layers. Layered materials allow to optimize some physical and mechanical properties of constructions. Sandwich structures are widely used in the aircraft and shipbuilding industries, the aerospace industry, civil engineering, electronics and other industries. Thus the stress-strain state analysis of sandwich structural elements is urgent. Herein study of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material has been investigated by parameter continuation methods. Currently, there are many experimental and theoretical works devoted to sandwich structures. Well known articles reviews devoted to sandwich structures. However, bending of circular sandwich plates with nonlinear elastic core still less investigated. In this paper it is derived the total potential energy equation of symmetric sandwich plates bending with isotropic face sheets and nonlinear elastic core material by H. Kauderer. The problem of developing effective methods for determining the stress-strain state of sandwich structural elements is urgent. There is a need in summarizing the classical theories using the improved models, reflecting the behavior of modern materials.

The paper describes bending equations of circular sandwich plates with isotropic face sheets and nonlinear elastic core. Parameter continuation method is described. Linear equations are solved by Ritz method. There are compared results of the analytical model with results of other works, using two problems. The effect of accounting nonlinear elastic core material on the bending is described.

The introduction section of the article contains an overview of previous researches.

The first section contains equation of total potential energy of circular sandwich plate.

Parameter continuation method of sandwich circular plates with nonlinear elastic core is described in the second section.

Results of the developed model are compared with results of other scientific researches.

Conclusions and prospects for the future research are represented in the last section. Small amount of computation is an advantage of the developed model.

Prospects for further research related to the consideration of the problems of nonlinear dynamics and stability of sandwich structural elements.

*Key words: sandwich symmetrical plate, circular plate, nonlinear-elastic core, buckling load, parameter continuation method.*

### ВСТУП

Розробка підходів до розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих елементів конструкцій є досить актуальною задачею. Це зумовлено широким застосуванням, зокрема, тришарових пластин та оболонок в авіа- та суднобудуванні, космічній промисловості, цивільному будівництві, радіоелектроніці та інших галузях народного господарства. Актуальною є проблема розробки ефективних підходів до розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла з урахуванням фізичної нелінійності матеріалів шарів.

На даний момент опубліковано значну кількість досліджень з теорії тришарових пластин та оболонок. Одними з перших публікацій в області моделювання тришарових конструкцій є роботи [21, 22, 24], які присвячено визначенню деформування та критичних навантажень тришарових пластин.

Посилання на роботи з моделювання тришарових елементів конструкцій можна знайти в оглядах [6, 13, 23]. Детальний аналіз класичних та уточнених моделей розрахунку тришарових і багатошарових конструкцій проводиться в статтях [14, 15, 17, 18, 20].

У більшості робіт з розрахунку тришарових елементів конструкцій розглядається той чи інший варіант лінійної теорії. Однак, існує широка область деформацій, у якій геометрична лінеаризація ще зберігає значення, оскільки вона забезпечує точність, що задовольняє технічним вимогам, тоді як лінійний закон пружності вже не може бути застосований. Для

багатьох конструкційних матеріалів (високоміцних сталей, сплавів кольорових металів, полімерних матеріалів і ін.) зі збільшенням інтенсивності зовнішнього навантаження діаграма залежності між напруженнями і деформаціями відхиляється від лінійної. У такому випадку формулюється нелінійний закон пружності, наприклад, в формі Г. Каудерера [5].

Постановці і розв'язанню нелінійно-пружних задач присвячені монографії [5, 11]. Задачі згину й стійкості тришарових пластин, виконаних з нелінійно-пружних матеріалів, досліджуються в роботах [2, 3, 7, 9, 10, 19].

Отже, виходячи з аналізу проблемної області, можна зробити висновок, що порівняно невелика кількість робіт присвячена моделюванню шаруватих елементів конструкцій з урахуванням фізично нелінійних матеріалів. Це пов'язано з необхідністю розв'язання достатньо складних систем нелінійних диференціальних рівнянь. Одним з методів розв'язання таких систем може бути метод продовження розв'язку за параметром та його варіації, більш докладно про застосування цього методу в нелінійних задачах пластин та оболонки йдеться в роботах [1, 8, 12, 16].

У статті запропоновано підхід на базі методу Рітца та методу послідовних навантажень В.В. Петрова для визначення деформованого стану круглої тришарової пластини з нелінійно-пружним заповнювачем під дією розподіленого поперечного навантаження.

### ФУНКЦІОНАЛ ПОВНОЇ ЕНЕРГІЇ КРУГЛОЇ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ

Розглядається задача визначення деформованого стану круглої тришарової пластини під дією розподіленого поперечного навантаження  $q$ . Вважається, що зовнішні шари однакової товщини  $\delta$  виготовлені з ізотропного матеріалу з модулем Юнга  $E$ , коефіцієнтом Пуассона  $\mu$  та підкоряються закону Гука, приймаються гіпотези Кірхгофа. Середній шар товщини  $2h$  виготовлено з нелінійно-пружного у формі Г. Каудерера ізотропного матеріалу та приймається гіпотеза про лінійний закон розподілення тангенціальних напружень по товщині заповнювача.

Напруження в середньому шарі визначається виразами [5, 19]:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r &= 3\tilde{K}(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2)(\tilde{\varepsilon}_r - \varepsilon_0), \\ \tilde{\sigma}_\varphi &= 3\tilde{K}(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2)(\tilde{\varepsilon}_\varphi - \varepsilon_0), \\ \tilde{\tau}_{r\varphi} &= \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \tilde{\varepsilon}_{r\varphi}, \quad \tilde{\tau}_{rz} = \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \tilde{\varepsilon}_{rz}, \quad \tilde{\tau}_{\varphi z} = \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \tilde{\varepsilon}_{\varphi z}, \end{aligned} \tag{1}$$

де  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{K}$  – модулі зсуву та об'ємної пружності матеріалу;  $\varepsilon_0$ ,  $\psi_0$  – середнє відносне подовження і інтенсивність деформацій зсуву.

Параметр  $\gamma_2$  характеризує зміну форми елемента конструкції в нелінійно-пружній стадії деформації і визначається експериментально [5, 11]; параметр  $\chi_2$  характеризує зміну об'єму елемента, далі вважаємо  $\chi_2 = 0$ .

Основні рівняння теорії пружності для даної задачі наведено в статті [19]. Наведемо далі функціонал повної енергії в загальному вигляді відносно невідомих функцій: переміщення в площині пластини  $u(r)$  та прогину  $w(r)$

$$E = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \int_h^{h+\delta} \frac{EI1\left(\frac{1}{r} + \mu I2\right)}{2r(1-\mu^2)} + \frac{EI2\left(\frac{\mu I1}{r} + I2\right)}{2(1-\mu^2)} dz + \int_{-h-\delta}^{-h} \frac{EI3\left(\frac{1}{r} + \mu I4\right)}{2r(1-\mu^2)} + \frac{EI4\left(\frac{\mu I3}{r} + I2\right)}{2(1-\mu^2)} dz + \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-h}^h \frac{I5}{8rh} \left( 2\tilde{G}I12(I13\gamma_2 + 1) + 3\tilde{K}I14 \right) + \frac{I10}{2} \left( 2\tilde{G}I15(I16\gamma_2 + 1) + 3\tilde{K}I14 \right) + \\
& \left. + \frac{\tilde{G}}{32h^2} I8^2 (I13\gamma_2 + 1) dz - qw(r) \right) r dr d\varphi. \quad (2)
\end{aligned}$$

В (2) використовуються наступні позначення

$$\begin{aligned}
A1 &= \frac{2}{3} \frac{9\tilde{K}^2 - 4\tilde{G}^2}{(3\tilde{K} + \tilde{G})(\tilde{K} + 2\tilde{G})}, \quad I1 = u(r) + \frac{dw(r)}{dr} \left( z - h - \frac{\delta}{2} \right), \quad I2 = \frac{d^2w(r)}{dr^2} \left( z - h - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{du(r)}{dr}, \\
I3 &= -u(r) + \frac{dw(r)}{dr} \left( z + h + \frac{\delta}{2} \right), \quad I4 = \frac{d^2w(r)}{dr^2} \left( z + h + \frac{\delta}{2} \right) - \frac{du(r)}{dr}, \quad I5 = -2z\delta \frac{dw(r)}{dr} + 4zu(r), \\
I6 &= \frac{z\delta}{2h} \frac{d^2w(r)}{dr^2}, \quad I7 = \frac{du(r)}{dr} \left( 1 - \frac{h-z}{h} \right), \quad I8 = \frac{dw(r)}{dr} (4h - 2\delta) + 4u(r), \\
I9 &= \frac{I5}{4rh} - I6 + I7, \quad I10 = -I6 + I7, \quad I11 = I6 + I7, \quad I12 = I5 + \frac{A1}{6} I9 + \frac{I11}{3}, \quad (3) \\
I13 &= \frac{I5^2}{18r^2h^2} - \frac{2I11I5}{9rh} + \frac{A1}{9rh} I5I9 + \frac{4A1}{9} I9I10 + \frac{I8^2}{24h^2} + \frac{8}{9} I10^2 + \frac{2}{9} A1^2 I9^2, \\
I14 &= \frac{I5}{12rh} - \frac{A1}{6} I9 + \frac{1}{3} I10, \quad I15 = -\frac{I5}{12rh} + \frac{A1}{6} I9 + \frac{2}{3} I10, \quad I16 = I13 + \frac{2}{9rh} I5(I11 - I10).
\end{aligned}$$

В якості апроксимацій переміщень відповідно методу Рітца обрано наступні координатні функції.

Для вільного опирання:

$$w(r) = \sum_{i=1}^n H_{i-1} \cos\left(\frac{(2i-1)r\pi}{2R}\right), \quad u(r) = \sum_{i=1}^n L_{i-1} \sin\left(\frac{(2i-1)r\pi}{2R}\right). \quad (4)$$

Для защемлення на контурі:

$$w(r) = H_0 + \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)^2 \sum_{i=1}^n H_i \left( \frac{r}{R} \right)^{2i}, \quad u(r) = L_0 + \left( 1 - \frac{r}{R} \right) \sum_{i=1}^n L_i \left( \frac{r}{R} \right)^{2i+1}. \quad (5)$$

Тут  $H_i, L_i, i = \overline{0, n}$  – параметри, які визначаються за методом Рітца.

Після підстановки (4) або (5) в функціонал (2) та диференціювання за параметрами координатних функцій, отримаємо в загальному випадку систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно параметрів

$$f_i(H_i, L_i, q) = \frac{\partial E}{\partial H_i} = 0, \quad g_i(H_i, L_i, q) = \frac{\partial E}{\partial L_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (6)$$

Для розв'язання системи (6) застосовується метод продовження розв'язку за параметром, а саме його варіант – метод послідовних навантажень, який був запропонований В. В. Петровим [8] для розв'язку нелінійних рівнянь теорії пластин та оболонок.

Згідно методу послідовних навантажень, система (6) неявно задає залежність виду  $H_i = H_i(q)$ ,  $L_i = L_i(q)$ . Після диференціювання системи (6) за параметром  $q$  отримуємо систему диференціальних рівнянь, лінійних відносно  $\frac{dH_i}{dq}$  і  $\frac{dL_i}{dq}$

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dH_i} \frac{dH_i}{dq} + \frac{df_i}{dL_i} \frac{dL_i}{dq} + \frac{df_i}{dq} &= 0, \\ \frac{dg_i}{dH_i} \frac{dH_i}{dq} + \frac{dg_i}{dL_i} \frac{dL_i}{dq} + \frac{dg_i}{dq} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

У початковому ненавантаженому стані параметри координатних функцій (4), (5) дорівнюють нулю  $H_i(0) = L_i(0) = 0$ .

Згідно з методом послідовних навантажень, розв'язок системи (6) визначається наступною розрахунковою схемою

$$H_{i,j+1} = H_{i,j} + \Delta H_{i,j}, \quad L_{i,j+1} = L_{i,j} + \Delta L_{i,j}, \quad q_{j+1} = q_j + \Delta q_j, \tag{8}$$

де  $\Delta q_j$  – крок навантаження, який задається, а  $\Delta H_{i,j}$  і  $\Delta L_{i,j}$  визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dH_i}(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j) \Delta H_{i,j} + \frac{df_i}{dL_i}(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j) \Delta L_{i,j} + \frac{df_i}{dq_j}(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j) \Delta q_j &= 0, \\ \frac{dg_i}{dH_i}(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j) \Delta H_{i,j} + \frac{dg_i}{dL_i}(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j) \Delta L_{i,j} + \frac{dg_i}{dq_j}(H_{i,j}, L_{i,j}, q_j) \Delta q_j &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Розрахункова схема (8), (9) має порядок точності  $O(\Delta q_j^2)$ . В розрахунковій схемі порядку точності  $O(\Delta q_j^3)$  параметри  $\Delta H_{i,j}$  і  $\Delta L_{i,j}$  визначаються з системи (9) і використовуються для обчислення коефіцієнтів рівнянь (10) відносно параметрів  $\Delta \bar{H}_{i,j}$  і  $\Delta \bar{L}_{i,j}$  [4]

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dH_i} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j \right) \Delta \bar{H}_{i,j} + \frac{df_i}{dL_i} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j \right) \Delta \bar{L}_{i,j} + \\ + \frac{df_i}{dq_j} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j \right) \Delta q_j &= 0, \\ \frac{dg_i}{dH_i} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j \right) \Delta \bar{H}_{i,j} + \frac{dg_i}{dL_i} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j \right) \Delta \bar{L}_{i,j} + \\ + \frac{dg_i}{dq_j} \left( H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, q_j \right) \Delta q_j &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Невідомі параметри на подальших ітераціях визначаються за формулами

$$H_{i,j+1} = H_{i,j} + \Delta \bar{H}_{i,j}, \quad L_{i,j+1} = L_{i,j} + \Delta \bar{L}_{i,j}, \quad q_{j+1} = q_j + \Delta q_j. \tag{11}$$

У літературі також представлені розрахункові схеми більш високого порядку точності [4].

### ЧИСЕЛЬНІ ПРИКЛАДИ

Як чисельний приклад, розглянемо задачу визначення деформованого стану круглої тришарової пластини з такими параметрами: товщина середнього шару  $2h=16\cdot 10^{-3}$  м, товщина зовнішніх шарів  $\delta=1\cdot 10^{-3}$  м, радіус пластини  $R=0,4$  м; модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона зовнішніх шарів –  $G=8\cdot 10^4$  МПа та  $\mu=0,27$  відповідно, модуль зсуву та модуль об'ємної деформації заповнювача –  $\tilde{G}=2,77\cdot 10^4$  МПа,  $\tilde{K}=6\cdot 10^4$  МПа (сплав алюмінію Д16Т).

При врахуванні нелінійної пружності матеріалу Д16Т приймаємо наступні значення коефіцієнтів:  $\gamma_2=-3,878\cdot 10^5$ ,  $\chi_2=0$  [5].

У таблиці 1 наведено значення прогину в центрі пластини, які отримані в роботі [19] за допомогою методу малого параметра та наступного аналітичного розв'язку систем лінійних диференціальних рівнянь. Наводяться дані для лінійного та нелінійно-пружного випадку.

Таблиця 1 – Прогин в центрі пластини. Метод малого параметра

Випадок	$w_{\max} = w(0), 10^{-3}$ м							
	Вільне опирання				Защемлення			
	$q$ , МПа				$q$ , МПа			
	0,05	0,07	0,09	0,11	0,05	0,07	0,09	0,11
Лінійний	1,609	2,253	2,897	3,541	0,391	0,547	0,704	0,860
Нелінійний	1,622	2,289	2,976	3,691	0,396	0,560	0,731	0,910

Значення прогинів таблиці 1 далі використовуються для верифікації результатів, отриманих за допомогою методу Рітца та методу послідовних навантажень.

Значення таблиці 2 ілюструють збіжність методу Рітца при різній кількості членів рядів (4), (5).

Таблиця 2 – Прогин в центрі пластини. Метод Рітца, лінійний випадок

Кількість членів рядів (4), (5)	$w_{\max} = w(0), 10^{-3}$ м							
	Вільне опирання				Защемлення			
	$q$ , МПа				$q$ , МПа			
	0,05	0,07	0,09	0,11	0,05	0,07	0,09	0,11
3	1,588	2,224	2,859	3,495	0,387	0,541	0,697	0,851
4	1,593	2,228	2,867	3,501	0,388	0,544	0,699	0,855
5	1,593	2,230	2,865	3,505	0,391	0,547	0,704	0,860
6	1,593	2,230	2,868	3,506	0,391	0,547	0,704	0,860
7	1,593	2,230	2,868	3,506	0,391	0,548	0,705	0,861
8	1,593	2,230	2,868	3,506	0,391	0,548	0,705	0,861



Таблиця 3 – Прогин в центрі пластини. Метод послідовних навантажень, нелінійний випадок

Кількість членів рядів (4), (5)	$w_{\max} = w(0), 10^{-3} \text{ м}$							
	Вільне опирання				Защемлення			
	$q, \text{ МПа}$				$q, \text{ МПа}$			
	0,05	0,07	0,09	0,11	0,05	0,07	0,09	0,11
3	1,599/ 1,599	2,254/ 2,255	2,926/ 2,927	3,622/ 3,624	0,388/ 0,388	0,544/ 0,544	0,701/ 0,702	0,861/ 0,861
4	1,604/ 1,605	2,261/ 2,262	2,936/ 2,937	3,635/ 3,637	0,389/ 0,389	0,546/ 0,546	0,704/ 0,704	0,864/ 0,861
5	1,611/ 1,612	2,272/ 2,273	2,950/ 2,951	3,652/ 3,655	0,392/ 0,392	0,550/ 0,549	0,709/ 0,709	0,867/ 0,867
6	1,610/ 1,610	2,270/ 2,271	2,947/ 2,948	3,649/ 3,652	0,392/ 0,392	0,550/ 0,550	0,708/ 0,708	0,867/ 0,867
7	1,645/ 1,645	2,319/ 2,320	3,013/ 3,014	3,733/ 3,735	0,392/ 0,392	0,550/ 0,550	0,710/ 0,709	0,870/ 0,871
8	1,649/ 1,649	2,325/ 2,326	3,021/ 3,023	3,745/ 3,747	0,392/ 0,392	0,550/ 0,550	0,709/ 0,709	0,870/ 0,871

Так, в чисельнику табл. 3 наведено значення, розраховані за рівняннями (8), (9), в знаменнику – (10), (11).

### ВИСНОВКИ

Отже, у нашій роботі розв’язано задачу визначення деформованого стану тришарової круглої пластини симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами та нелінійно-пружним ізотропним матеріалом заповнювача за допомогою підходу, який базується на використанні методу Рітца та методу продовження розв’язку за параметром. Результати розрахунків, отриманих з використанням цього підходу, порівнюються з аналітичними розв’язками за методом малого параметра, які опубліковано в попередніх роботах.

Результати порівняння свідчать про задовільну збіжність методів як у лінійній, так і в нелінійній постановці. Так, при вільному опиранні контура пластини спостерігається відхилення значень прогину в центрі пластини до 2% від аналітичних розв’язків, при защемленні – до 4%. Показано, що необхідна порівняно невелика кількість членів координатних функцій методу Рітца для досягнення достатньої точності методу послідовних навантажень (від п’яти до восьми). Використано дві розрахункові схеми методу послідовних навантажень з порядками точності відповідно  $O(\Delta q_j^2)$  та  $O(\Delta q_j^3)$ , однак, показано, що для задачі згину пластини різниця між отриманими за цими схемами результатами несуттєва.

Перспективи подальшого дослідження пов’язані з використанням методу продовження розв’язку за параметром та його варіацій для дослідження нелінійних коливань і стійкості тришарових пластин та оболонок.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Быков В. И., Цыбенова С. Б. Реализация метода продолжения по параметру для системы двух уравнений. *Вычислительные технологии*. 2002. Т. 7, № 5. С. 21–28.
2. Зеленський А. Г. Підхід до побудови уточненої теорії фізично нелінійних шаруватих пластин несиметричної структури. *Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. 2004. Вип. 6. С. 58–67. Донецьк: НОРД-ПРЕСС.

3. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія механіка*. 2012. Т. 20, № 5. С. 60–66.
4. Ильин В. П., Карпов В. В., Масленников А. М. Численные методы решения задач строительной механики: Справ. пособие. Минск: Выш. шк., 1990. 349 с.
5. Каудерер Г. Нелинейная механика. Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
6. Куршин Л. М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек. *Расчет пространственных конструкций*. 1962. № 2. С. 163–192.
7. Неміш Ю. М., Левчук О. І. Аналітичний метод розв'язування тривимірних фізично нелінійних задач статики шаруватих циліндрів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1998. 41, № 3. С. 52–59.
8. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 119 с.
9. Тамуров Ю. Н. Вариант обобщённой теории трёхслойных пологих оболочек с учётом обжатия физически нелинейного заполнителя. *Прикл. механика*. 1990. Т. 26, № 12. С. 39–45.
10. Тамуров Ю. Н. Уравнения изгиба и устойчивости трехслойных оболочек с ортотропными и нелинейно-упругими свойствами материалов. *Исслед. по теор. пластин и оболочек*. 1990. № 20. С. 102–112.
11. Цурпал И. А. Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов. Киев: Техника, 1976. 176 с.
12. Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G. Application of parameter continuation method for investigation of vibroimpact systems dynamic behaviour. Problem state. Short survey of world scientific literature. *Onip матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 93. С. 110–117.
13. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 2003. Vol. 56, No. 3.
14. Carrera E., Brischetto S. A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates. *Applied Mechanics Reviews*. 2009. Vol. 62.
15. Iurlaro L., Gherlone M., Di Sciuva M., Tessler A. Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories. *Composite Structures*. 2013. Vol. 106. P. 777–792.
16. Karpov V., Semenov A. Strength and Stability of Orthotropic Shells. *World Applied Sciences Journal*. 2014. 30(5). P. 617–623.
17. Kien T Nguyen, Tai H. Thai, Thuc PVo. A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *Steel and Composite Structures*. 2015. Vol. 18(1). P. 91–120.
18. Khalili S. M. R., Kheirikhah M. M., Malekzadeh Fard K. Buckling analysis of composite sandwich plates with flexible core using improved high-order theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2015. Vol. 22(4).
19. Kudin A., Choporov S., Tamurov Yu., Al Omari M. A. V. Analytical and numerical modelling of the axisymmetric bending of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *Journal of Solid Mechanics*. 2016. Vol. 8, No 3. P. 590–601.
20. Magnucki K. A., Jasion P. A., Magnucka-Blandzi E. B., Wasilewicz P. A. Theoretical and experimental study of a sandwich circular plate under pure bending. *Thin-Walled Structures*. 2014. Vol. 79. P. 1-7.
21. Marguerre K. The optimum buckling load of a flexible supported plate composed of two sheets joined by a light weight filler when under longitudinal compression. *Deutsche Vierteljahrsschrift für Literalurwissenschaft und Giests Geschichte, D.V.L.* 1945. ZWB UM 1360/2.
22. Hoff N. J., Mautner S. E. Buckling of sandwich-type panels. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1945. Vol. 12(3). P. 285–297.
23. Noor A. K. Computational Models for Sandwich Panels and Shells. *Applied Mechanics Reviews*. 1996. Vol. 49, No. 3. P. 155–199.
24. Reissner E. Finite deflection of sandwich plates. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1948. Vol. 15(7). P. 435–440.

## REFERENCE

1. Byikov, V. I. & Tsyibenova, S. B. (2002). Implementation of the continuation on parameter method for two nonlinear equations. *Vyichislitelnyie tehnologii*, Vol. 7, No. 5, pp. 21-28.
2. Zelens'kyy, A. H. (2004). An approach to the construction of a refined theory of physically nonlinear layered plates of a non-symmetric structure. *Metody rozv'yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdogo tila*, Vol.6, pp. 58-67.
3. Zelens'kyy, A. H. (2012). The method of reducing the order of inhomogeneous differential equations with partial derivatives in the theory of medium thickness plates. *Visnyk Dnipropetr. un-tu. Seriya mekhanika*, Vol. 20, No. 5, pp. 60-66.
4. Yl'yn, V. P., Karpov, V. V. & Maslennykov, A. M. (1990). Numerical methods for solving the problems of building mechanics: Reference book. Minsk: Vyish. shk.
5. Kauderer, G. (1961). Nonlinear mechanics. Moskow: Izd-vo inostr. lit.
6. Kurshin, L. M. (1962). Review of work on the calculation of sandwich plates and shells. *Raschet prostranstvennyih konstruktsiy*, Vol. 2, pp. 163-192.
7. Nemish, Yu. M. (1998). Analytical method of solving three-dimensional non-linear nonlinear static problems of layered cylinders. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya*, Vol. 41, No. 3, pp. 52-59.
8. Petrov, V. V. (1975). The method of successive loads in the nonlinear theory of plates and shells. Saratov: Izd-vo Saratov. un-ta.
9. Tamurov, Yu. N. (1990). An option of the generalized theory of three-layer shallow shells, taking into account the compression of a physically non-linear aggregate. *Prikl. Mexanika*, Vol. 26, No. 12, pp. 39-45.
10. Tamurov, Yu. N. (1990). Equations of bending and stability of three-layer shells with orthotropic and nonlinear-elastic properties of materials. *Issled. po teor. plastin i obolochek*, No. 20, pp. 102-112.
11. Curpal, I. A. (1976). Elasticity, Plasticity and Creep Theory. Kiev: Tekhnika.
12. Bazhenov, V. A. (2014). Application of parameter continuation method for investigation of vibroimpact systems dynamic behaviour. Problem state. Short survey of world scientific literature. *Opir materialiv i teoriya sporud*, No. 93, pp. 110-117.
13. Carrera, E. (2003). Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 56, No. 3, pp. 287-308.
14. Carrera, E. & Brischetto, S. (2009). A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 62, pp. 1-17
15. Iurlaro, L., Gherlone, M., Sciuva, M. Di. & Tessler, A. (2013). Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories. *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 777-792.
16. Karpov, V. & Semenov, A. (2014). Strength and Stability of Orthotropic Shells, *World Applied Sciences Journal*, Vol. 30, No. 5, pp. 617-623.
17. Kien, T. Nguyen, Tai, H. Thai & Thuc, P. Vo. (2015). A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *Steel and Composite Structures*, Vol. 18, No. 1, pp. 91-120.
18. Khalili, S. M. R., Kheirikhah, M. M. & Malekzadeh, Fard K. (2015). Buckling analysis of composite sandwich plates with flexible core using improved high-order theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 22, No. 4.
19. Kudin, A., Choporov, S., Tamurov, Yu. & Al Omari, M. A. V. (2016). Analytical and numerical modelling of the axisymmetric bending of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 8, No. 3, pp. 590-601.
20. Magnucki, K. A., Jasion, P. A., Magnucka-Blandzi, E. B. & Wasilewicz, P. A. (2014). Theoretical and experimental study of a sandwich circular plate under pure bending. *Thin-Walled Structures*, Vol. 79, pp. 1-7.
21. Marguerre, K. (1945). The optimum buckling load of a flexible supported plate composed of two sheets joined by a light weight filler when under longitudinal compression. *Deutsche Vierteljahrsschrift für Literalurwissenschaft und Giests Geschichte*, D.V.L., ZWB UM 1360/2.

22. Hoff, N. J. & Mautner, S. E. (1945). Buckling of sandwich-type panels. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 12, No. 3, pp. 285-297.
23. Noor, A. K. (1996). Computational Models for Sandwich Panels and Shells. Applied Mechanics Reviews, Vol. 49, No. 3, pp. 155-199.
24. Reissner, E. (1948). Finite deflection of sandwich plates. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 15, No. 7, pp. 435-440.

УДК 519.172

## ЕДИНИЧНЫЕ И ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ В ГРАФЕ

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовский М. В.

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

*lilili5050@rambler.ru, m.davidovsky@gmail.com*

В данной работе рассматриваются свойства изометрических циклов в графе. Представлен алгоритм выделения множества изометрических циклов в графе. Для графов с циклическими фрагментами вводится понятие единичного цикла. Представлен алгоритм выделения множества единичных циклов в графе с циклическими фрагментами. Рассмотрены основные свойства единичных циклов. Вычислительная сложность представленных алгоритмов определяется как  $O(m)$ .

*Ключевые слова: неориентированный граф, граф с циклическими фрагментами, изометрические циклы, единичные циклы.*

## ОДИНИЧНІ ТА ІЗОМЕТРИЧНІ ЦИКЛИ У ГРАФІ

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Давидовський М. В.

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

*lilili5050@rambler.ru, m.davidovsky@gmail.com*

У роботі розглядаються властивості ізометричних циклів у графі. У статті представлений алгоритм виділення множини ізометричних циклів у графі. Для графів з циклічними фрагментами вводится поняття одиничного циклу. Представлений алгоритм виділення множини одиничних циклів у графі з циклічними фрагментами. Розглянуто основні властивості одиничних циклів. Обчислювальна складність представлених алгоритмів визначається як  $O(m)$ .

*Ключові слова: неорієнтований граф, граф з циклічними фрагментами, ізометричні цикли, одиничні цикли.*

## UNIT AND ISOMETRIC CYCLES IN GRAPHS

Kurapov S. V., PhD, Associate professor, Davidovsky M. V.

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69096, Ukraine*

*lilili5050@rambler.ru, m.davidovsky@gmail.com*

This article presents a mathematical framework that allows solving a number of important combinatorial problems arising during the design of complex products and systems, the design of flat structures, the analysis of social networks and many other topical applied problems. This framework is based on the concepts of isometric and unit cycles of a graph and their properties. The aim of the presented research is a mathematical description of the properties of graph isometric cycles, as well as the introduction of the concept of unit cycles for graphs with cyclic fragments and the description of their properties. The presented mathematical framework basically follows the topological approach, which consists in the

initial construction of a topological drawing of a graph using the set-theoretic methods without geometric drawing of the graph on the plane. Further, a geometric drawing of the graph is constructed on the basis of the obtained topological drawing using the methods of the theory of rotation taking into account the geometric constraints. The definition of an isometric cycle is given, and the properties of isometric cycles in a graph are examined in the article. For graphs with cyclic fragments, the notion of a unit cycle is introduced and the basic properties of unit cycles are analyzed. Two theorems on the existence of a basis of a linear subspace of quasi-cycles consisting of isometric cycles are proved in the article. The authors propose new algorithms for constructing the set of isometric cycles of a graph and for constructing a set of unit cycles for graphs with cyclic fragments. The computational complexities of the proposed algorithms are of the order  $O(m)$ , where  $m$  is the number of edges in the graph. The mathematical framework presented in this article can serve as a basis for solving such challenging problems in frame of the Graph Theory as constructing a graph with predefined properties, graph planarity testing and finding the maximally flat subgraph of a graph, graph coloring, etc. From the practical point of view, this framework allows effectively solving a number of topical problems in the field of electrical circuits and planar structures design.

*Key words: undirected graph, graph with cyclic fragments, isometric cycles, unit cycles.*

### ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях науки и техники требуется решение задачи визуализации рисунка графа [1-3]. Эта задача может быть решена с помощью математического аппарата, основанного на понятиях изометрических и единичных циклов графа. Сутью этого математического аппарата является топологический подход, который заключается в первоначальном построении топологического рисунка графа  $(G, h)$  с применением теоретико-множественных методов без геометрической прорисовки графа на плоскости [4]. Следующим шагом является построение геометрического рисунка графа с учетом тех или иных геометрических ограничений с использованием методов теории вращения [5]. При этом одним из основных вопросов является построение множества изометрических циклов графа, а для графов с циклическими фрагментами – построение множества единичных циклов. Рассмотрим основные свойства множества таких циклов и способы их выделения.

### МЕТРИКА ГРАФОВ. РАССТОЯНИЕ В ГРАФЕ

Воспользуемся понятием расстояния между двумя вершинами графа [6].

*Расстоянием*  $\rho(x, y)$  в графе  $G$  между вершинами  $x$  и  $y$  графа  $G = (X, U)$  называется длина кратчайшего из маршрутов (и, значит, кратчайшей из простых цепей), соединяющих эти вершины; если  $x$  и  $y$  отделены в  $G$ , то  $\rho(x, y) = +\infty$ . Функция  $\rho = \rho(x, y)$ , определенная на множестве всех пар вершин графа  $G$  и принимающая целые неотрицательные значения (к числу которых мы относим и бесконечное), является метрикой графа, поскольку она удовлетворяет трем аксиомам Фреше:

$$\forall x, y \in X [\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y], \tag{1}$$

$$\forall x, y \in X [\rho(x, y) = \rho(y, x)], \tag{2}$$

$$\forall x, y, z \in X [\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)]. \tag{3}$$

Выполнение первых двух аксиом тривиально, проверим третью (неравенство треугольника).

Если вершины  $x, y$  или вершины  $y, z$  отделены, то, по крайней мере, одна из двух величин  $\rho(x, y)$  и  $\rho(y, z)$  есть  $-\infty$ . Если же ни  $x$  и  $y$ , ни  $z$  и  $y$  не отделены, то пусть

$$x \ u_1 \ x_1 \ u_2 \ x_2 \ \dots \ x_{\rho(x, y)-1} \ u_{\rho(x, y)} \ y \quad \text{и} \quad y \ v_1 \ y_1 \ v_2 \ y_2 \ \dots \ y_{\rho(y, z)-1} \ v_{\rho(y, z)} \ z$$

– какие-либо из кратчайших цепей, соединяющих эти пары вершин. Маршрут

$$x \ u_1 \ x_1 \ u_2 \ x_2 \ \dots \ x_{\rho(x, y)-1} \ u_{\rho(x, y)} \ y \ v_1 \ y_1 \ v_2 \ y_2 \ \dots \ y_{\rho(y, z)-1} \ v_{\rho(y, z)} \ z$$

обладает длиной  $\rho(x, y) + \rho(y, z)$ , значит длина  $\rho(x, z)$  кратчайшей цепи между  $x$  и  $z$  не превышает  $\rho(x, y) + \rho(y, z)$ . В обоих случаях неравенство треугольника выполнено.

Введем следующие понятия, связанные с метрикой графа.

**Определение 1** [7]. *Изометрический подграф* – подграф  $G'$  графа  $G$ , у которого все расстояния внутри  $G'$  те же самые, что и в  $G$ .

На рис. 1 представлен граф  $G$ , имеющий следующую матрицу расстояний:

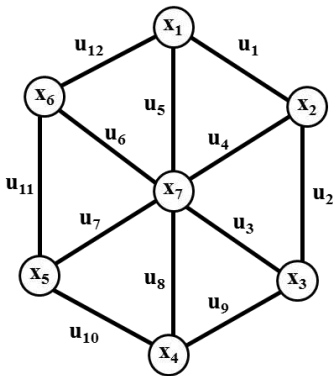
$$\rho = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{matrix} \infty & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & \infty & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & \infty & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \infty \end{matrix} \end{matrix}$$


Рис. 1. Граф  $G$

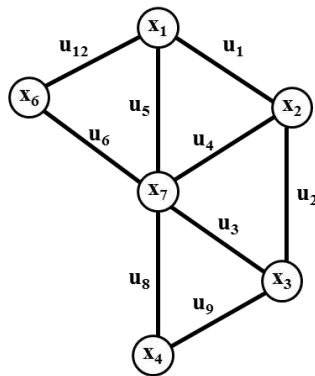


Рис. 2. Изометрический подграф  $G'$

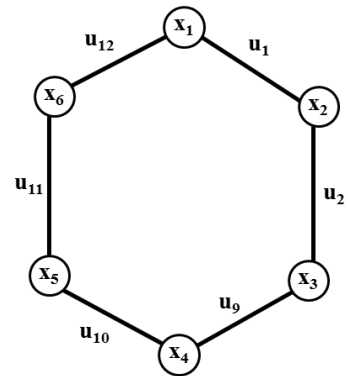


Рис. 3. Неизометрический подграф  $G''$

Подматрица расстояний для изометрического подграфа, представленного на рис. 2.

$$\rho = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_7 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{matrix} \infty & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & \infty & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \infty & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \infty & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \infty \end{matrix} \end{matrix}$$

Подматрица расстояний для неизометрического подграфа, представленного на рис. 3.

$$\rho = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{matrix} \infty & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & \infty & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & \infty & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \infty \end{matrix} \end{matrix}$$

Как видим, матрица расстояний для подграфа на рис. 2 является, а матрица расстояний для подграфа на рис. 3 – не является подматрицей расстояний графа  $G$ .

### МНОЖЕСТВО ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

Мощность подмножества простых циклов в графе меньше мощности множества квазициклов. Подмножество простых циклов обозначим  $C_R$ :

$$\text{card } C_R \leq \text{card } C. \tag{4}$$

Однако существует подмножество с мощностью еще меньшей, чем подмножество простых циклов, обладающее определенными характерными свойствами.

**Определение 2.** *Изометрический цикл* в графе – это простой цикл, для которого кратчайший путь между любыми двумя его вершинами состоит из ребер этого цикла.

Изометрический цикл – частный случай изометрического подграфа [7]. Или, другими словами, изометрическим циклом в графе называется подграф  $G'$  в виде простого цикла, если между двумя любыми несмежными вершинами данного подграфа в графе  $G$  не существует маршрутов меньшей длины, чем маршруты, принадлежащие данному циклу. Подмножество, состоящее из изометрических циклов, будем называть подмножеством изометрических циклов, и обозначать  $C_+$ . Сказанное поясним на примерах. Рассмотрим суграф, состоящий из ребер  $\{u_1, u_3, u_{13}, u_{15}\}$  графа  $G_a$ , представленного на рис. 4,а. Как видно – это простой цикл. Но в то же время, это не изометрический цикл, так как между вершинами  $x_7$  и  $x_8$  в графе существует маршрут меньшей длины, проходящий по ребру  $u_{14}$ .

Рассмотрим граф  $G_b$ , представленный на рис. 4,б. Пусть цикл состоит из ребер  $u_1, u_2, u_3, u_6, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}$ . Данный суграф есть простой цикл. Однако этот суграф не может быть изометрическим циклом, так как в соответствующем графе между вершинами  $x_2$  и  $x_8$  имеется маршрут меньшей длины (а именно: маршрут, проходящий по ребрам  $u_4$  и  $u_{10}$ ), чем маршруты, принадлежащие этому суграфу (например, маршрут, проходящий по ребрам  $u_1, u_3, u_8, u_9$  или  $u_2, u_6, u_{11}, u_{12}$ ). Следует заметить, что в полных графах множество изометрических циклов совпадает с множеством циклов минимальной длины. Для изучения свойств изометрических циклов нам понадобится следующая теорема.

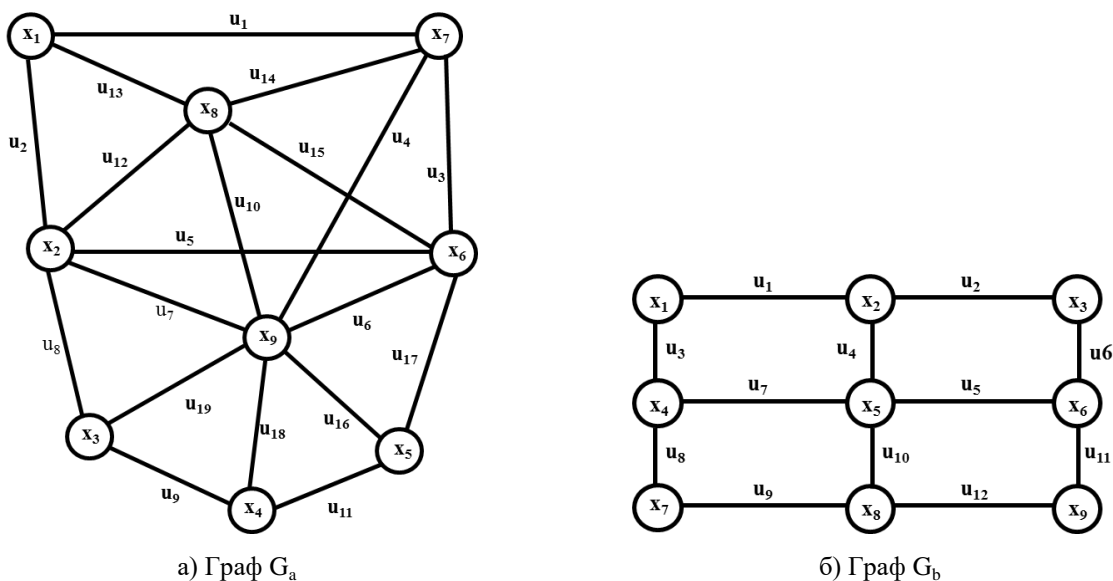


Рис. 4. Графы  $G_a$  и  $G_b$

**Теорема 1.** Для любого несепарабельного графа линейное подпространство квазициклов имеет базис, состоящий из изометрических циклов.





	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	1	2	2	1
$x_2$	1	$\infty$	1	2	2
$x_3$	2	1	$\infty$	1	2
$x_4$	2	2	1	$\infty$	1
$x_5$	1	2	2	1	$\infty$

 $=$ 

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	1			1
$x_2$	1	$\infty$	1		
$x_3$		1	$\infty$	1	
$x_4$			1	$\infty$	1
$x_5$	1			1	$\infty$

Удалим из подматрицы все неединичные элементы (см. подматрицу справа), такую подматрицу впредь будем называть подматрицей с единичными элементами. В результате получим подматрицу, состоящую только из единиц, и представляющую собой матрицу смежностей для выбранного изометрического цикла. Представим каждую строку такой подматрицы в виде записи однострочного структурного числа [8]. Произведем умножение однострочных структурных чисел, в результате получим следующее структурное число:

$x_1$ :	[	$x_2$	$x_5$	]	$=$	$x_1$ :		$x_2$	$x_5$	
$x_2$ :	[	$x_1$	$x_3$	]		$x_2$ :		$x_3$	$x_1$	
$x_3$ :	[	$x_2$	$x_4$	]		$x_3$ :		$x_4$	$x_2$	
$x_4$ :	[	$x_3$	$x_5$	]		$x_4$ :		$x_5$	$x_3$	
$x_5$ :	[	$x_1$	$x_4$	]		$x_5$ :		$x_1$	$x_4$	

Каждый элемент структурного числа (столбец) характеризует ориентированный цикл:

$$c_1 = (x_1, x_2) + (x_2, x_3) + (x_3, x_4) + (x_4, x_5) + (x_5, x_1); c_2 = (x_1, x_5) + (x_5, x_4) + (x_4, x_3) + (x_3, x_2) + (x_2, x_1).$$

Рассмотрим подграф, состоящий из вершин  $\{x_1, x_2, x_5, x_6, x_7\}$ .

	$x_1$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$\infty$	1	1	1	2
$x_2$	1	$\infty$	2	2	1
$x_5$	1	2	$\infty$	1	2
$x_6$	1	2	1	$\infty$	1
$x_7$	2	1	2	1	$\infty$

 $=$ 

	$x_1$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$\infty$	1	1	1	
$x_2$	1	$\infty$			1
$x_5$	1	1	$\infty$	1	
$x_6$	1		1	$\infty$	1
$x_7$		1		1	$\infty$

Представим каждую строку такой подматрицы в виде записи однострочного структурного числа. Произведем умножение однострочных структурных чисел, в результате получим следующее структурное число:

$x_1$ :	[	$x_2$	$x_3$	$x_4$	]	$=$	$x_1$ :		$x_2$	$x_5$	$x_5$	$x_6$	
$x_2$ :	[	$x_1$	$x_5$		]		$x_2$ :		$x_7$	$x_1$	$x_7$	$x_7$	
$x_5$ :	[	$x_1$	$x_2$	$x_4$	]		$x_5$ :		$x_1$	$x_6$	$x_6$	$x_1$	
$x_6$ :	[	$x_1$	$x_3$	$x_5$	]		$x_6$ :		$x_5$	$x_7$	$x_1$	$x_5$	
$x_7$ :	[	$x_2$	$x_4$		]		$x_7$ :		$x_6$	$x_2$	$x_2$	$x_2$	

Элементы структурного числа характеризуются столбцами. Полученные циклы не являются изометрическими циклами (см. рис. 1-3), так как существуют элементы структурного числа, представляющие собой квазициклы.

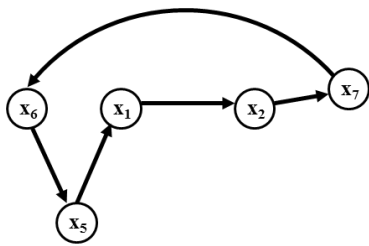


Рис. 6. Цикл для 1-го столбца

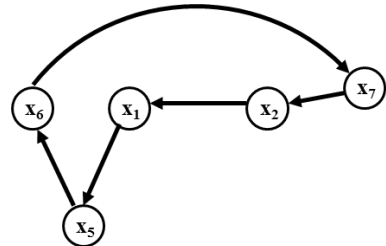


Рис. 7. Цикл для 2-го столбца

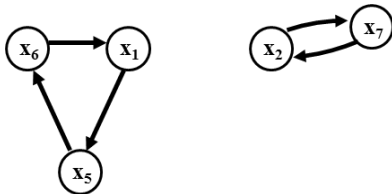


Рис. 8. Квазицикл для 3-го столбца

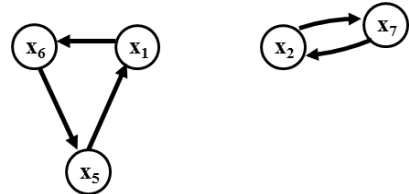


Рис. 9. Квазицикл для 4-го столбца

Рассмотрим подграф, состоящий из вершин  $\{x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}$ .

	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_8$	$x_9$
$x_3$	$\infty$	1	2	1	2
$x_4$	1	$\infty$	1	1	1
$x_5$	2	1	$\infty$	2	1
$x_8$	1	1	2	$\infty$	1
$x_9$	2	1	1	1	$\infty$

 $=$ 

	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_8$	$x_9$
$x_3$	$\infty$	1		1	
$x_4$	1	$\infty$	1	1	1
$x_5$		1	$\infty$		1
$x_8$	1	1		$\infty$	1
$x_9$		1	1	1	$\infty$

Представим каждую строку такой подматрицы в виде записи однострочного структурного числа. Произведем умножение однострочных структурных чисел, в результате получим следующее структурное число:

$$\begin{matrix}
 x_3: [ & x_4 & x_8 & & ] \\
 x_4: [ & x_3 & x_5 & x_8 & x_9 ] \\
 x_5: [ & x_4 & x_9 & & ] \\
 x_8: [ & x_3 & x_4 & x_9 & ] \\
 x_9: [ & x_4 & x_5 & x_8 & ]
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 x_3 & x_4 & x_4 & x_8 & x_8 & x_8 & x_8 \\
 x_4 & x_5 & x_8 & x_3 & x_3 & x_5 & x_9 \\
 x_5 & x_9 & x_9 & x_4 & x_9 & x_9 & x_4 \\
 x_8 & x_3 & x_3 & x_9 & x_4 & x_3 & x_3 \\
 x_9 & x_8 & x_5 & x_5 & x_5 & x_4 & x_5
 \end{matrix}$$

Элементы структурного числа характеризуются столбцами. Полученные циклы также не являются изометрическими циклами, так как существуют элементы структурного числа, представляющие собой квазициклы (например, 2-ой, 4-ый, 5-ый и 6-ой столбцы). Таким образом, изометрические циклы характеризуются еще и тем, что подматрица расстояний подграфа данного цикла, состоящая только из единичных элементов, представляет собой матрицу смежностей. И существуют только два простых цикла с различной ориентацией.

Для изучения свойств изометрических циклов нам понадобится следующая теорема.

**Теорема 2.** Для любого связного простого несепарабельного графа без мостов и петель, без кратных ребер и точек сочленения и без вершин с локальной степенью, меньшей или равной двум, линейное подпространство квазициклов имеет базис, состоящий из изометрических циклов.

*Доказательство.* Будем рассматривать систему фундаментальных циклов, порожденных деревом  $T$ . Пусть вершины  $A_1, A_2, \dots, A_p$  образуют фундаментальный цикл, содержащий

хорду  $(A_p, A_1)$ . Если между несмежными вершинами этого цикла в графе не существует путей, меньшей или равной длины, чем пути принадлежащие циклу, то это есть изометрический цикл. Если в цикле существуют две несмежные вершины графа  $A_i$  и  $A_j$  ( $i < j$ ), путь между которыми минимален и включает хорду, то такой путь  $A_i, B_1, B_2, \dots, B_r, A_j$  содержит количество ребер, меньшее либо равное пути между  $A_i$  и  $A_j$  нашего цикла. Так образуются два цикла, кольцевая сумма которых есть исходный цикл. Отметим, что каждый новый цикл имеет не более, чем  $p-1$  вершин. Оставляем цикл, содержащий хорду, это и есть изометрический цикл. Так как количество фундаментальных циклов определяется цикломатическим числом, то количество изометрических циклов, полученных описанным выше способом, также равно цикломатическому числу графа. Множество изометрических циклов включает все хорды и линейно независимо. *Теорема доказана.*

Ввиду важности вопроса выделения конечного множества изометрических циклов из множества квазициклов, предлагается алгоритм выделения множества изометрических циклов в графе. Построение алгоритма начинается с выделения всех ребер в графе  $G$ . Выберем очередное ребро графа. Одну из вершин выбранного ребра пометим индексом 1, другую – индексом 2. Вершины графа, смежные с вершиной, имеющей индекс 2, и ещё не помеченные, пометим индексом 3. Не помеченные вершины, смежные с вершиной, имеющей индекс 3, пометим индексом 4 и т. д. Число, выражающее индекс последней помеченной вершины (вершин) графа, называется глубиной проникновения волны относительно выбранного ребра. Данный процесс представляет собой разметку вершин графа относительно выбранного ребра волновым алгоритмом (алгоритмом поиска в ширину).

Построим простые циклы, проходящие по выбранному ребру относительно первоначальной ориентации. С этой целью выберем все вершины графа  $G$ , смежные с вершиной, помеченной индексом 1. Будем идти от любой выбранной вершины, имеющей глубину проникновения  $d$ , к вершинам, имеющим глубину проникновения  $(d-1)$ , проходя при этом по ребрам графа. Затем будем идти от вершины  $(d-1)$  к вершинам  $(d-2)$  и т.д. Остановим этот процесс тогда, когда подойдем к вершине, имеющей индекс 2. Пройдя по всем построенным таким образом маршрутам, построим систему циклов, проходящих по выбранному ребру  $j$ . Обозначим такое множество циклов через  $S_j^1$ . Переориентируем направление разметки. Теперь вершина, имевшая индекс 1, будет иметь индекс 2, а вершина, имевшая индекс 2, будет иметь индекс 1. И вновь построим разметку вершин. Описанным выше методом выделим систему циклов. Изометрические циклы, проходящие по выбранному ребру  $j$ , будут образованы как:

$$C_j = C_j^1 \cap C_j^2. \quad (6)$$

Множество изометрических циклов графа  $G$  будет образовано как объединение всех циклов, проходящих по всем ребрам графа:

$$C_\tau = \bigcup_{i=1}^m C_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

### Алгоритм 1. [Выделение множества изометрических циклов методом поиска в ширину]

**Шаг 1.** Выбираем ребро. Если количество ребер исчерпано, то конец работы алгоритма.

**Шаг 2.** Алгоритмом поиска в ширину производим прямую разметку вершин относительно вершины  $s$  выбранного ребра.

**Шаг 3.** Производим формирование множества циклов  $C_s$  при прямой разметке вершин.

**Шаг 4.** Алгоритмом поиска в ширину производим обратную разметку вершин относительно вершины  $t$  выбранного ребра.

**Шаг 5.** Производим формирование множества циклов  $C_t$  при обратной разметке вершин.

**Шаг 6.** Проверяем циклы  $C_s$  и  $C_t$  для выбранного ребра на совпадение. Несовпадающие циклы исключаем из рассмотрения.

**Шаг 7.** Проверяем сформированные на предыдущем шаге циклы с ранее записанными циклами во множестве изометрических циклов и в случае их отсутствия добавляем их во множество изометрических циклов. Идем на шаг 1.

**Пример 1.** В качестве примера рассмотрим граф  $G$  (рис. 10).

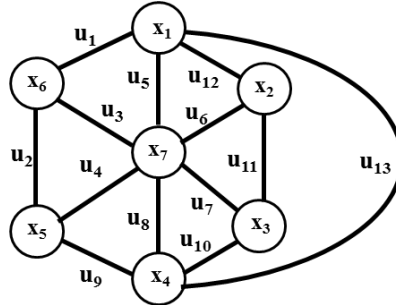


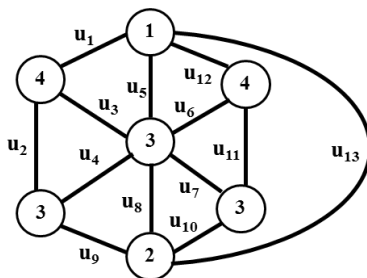
Рис. 10. Граф  $G$

Если в качестве выбранного ребра взять ребро  $u_{13}$ , то процесс разметки вершин имеет вид, представленный на рис. 11. Система циклов, проходящих по ребру  $u_{13}$ , для разметки, показанной на рис. 11,а:

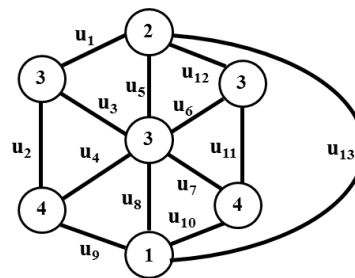
$$C_{13}^1 = \{ \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_3, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_6, u_8, u_{12}, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}.$$

Система циклов, проходящих по ребру  $u_{13}$ , для разметки, представленной на рис. 11,б:

$$C_{13}^2 = \{ \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_4, u_5, u_9, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}, \{u_5, u_7, u_{10}, u_{13}\} \}.$$



а)



б)

Рис. 11. Прямой и обратный процесс разметки вершин для ребра  $u_{13}$

Пересечение множеств  $C_{13}^1$  и  $C_{13}^2$  :

$$C_{13} = C_{13}^1 \cap C_{13}^2 = \{ \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}.$$

Получим следующие соответствия ребер и изометрических циклов:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{ \{u_1, u_3, u_5\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\} \}; & C_2 &= \{ \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\} \}; \\ C_3 &= \{ \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_3, u_5\} \}; & C_4 &= \{ \{u_4, u_8, u_9\}, \{u_2, u_3, u_4\} \}; \\ C_5 &= \{ \{u_1, u_3, u_5\}, \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_5, u_8, u_{13}\} \}; & C_6 &= \{ \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_6, u_7, u_{11}\} \}; \\ C_7 &= \{ \{u_6, u_7, u_{11}\}, \{u_7, u_8, u_{10}\} \}; & C_8 &= \{ \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_3, u_8, u_9\} \}; \\ C_9 &= \{ \{u_4, u_8, u_9\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\} \}; & C_{10} &= \{ \{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}; \\ C_{11} &= \{ \{u_6, u_7, u_{11}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}; & C_{12} &= \{ \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}; \\ C_{13} &= \{ \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}. \end{aligned}$$

Множество изометрических циклов получим как объединение:

$$C_\tau = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7 \cup C_8 \cup C_9 \cup C_{10} \cup C_{11} \cup C_{12} \cup C_{13} = \\ = \{ \{u_1, u_3, u_5\}, \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_4, u_8, u_9\}, \{u_5, u_6, u_{12}\}, \{u_5, u_8, u_{13}\}, \{u_6, u_7, u_{11}\}, \{u_7, u_8, u_{10}\}, \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\}, \\ \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \}.$$

Таким образом, множество изометрических циклов состоит из 9-ти элементов. Цикломатическое число графа  $G$  равно 7. Следовательно, для построения базиса нужно удалить два изометрических цикла. Очевидно, что для любого трехсвязного и более графа  $G$  множество изометрических циклов имеет мощность меньшую, чем мощность множества простых циклов, но большую или равную цикломатическому числу графа:

$$v(G) \leq \text{card } C_\tau \leq \text{card } C_R \leq \text{card } C. \tag{8}$$

Теперь покажем, что построение множества изометрических циклов должно производиться относительно всего множества ребер графа.

Покажем, что построение множества изометрических циклов должно производиться относительно всего множества ребер графа. Может показаться, что можно сократить перебор ребер для выделения всех изометрических циклов, если рассматривать только хорды графа. Следующий пример демонстрирует невозможность получения полного множества изометрических циклов, если построение производится только относительно хорд для выбранного дерева графа.

**Пример 2.** Рассмотрим граф, представленный на рис. 12.

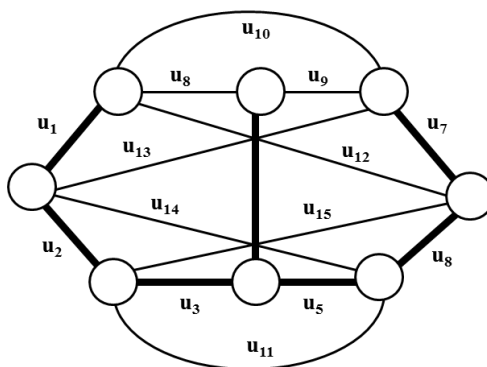


Рис. 12. Граф  $G$  и его дерево

Изометрические циклы относительно 4-го ребра:  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_8\}$ ,  $\{u_3, u_4, u_8, u_{12}, u_{15}\}$ ,  $\{u_4, u_5, u_6, u_8, u_{12}\}$ ,  $\{u_4, u_5, u_6, u_7, u_9\}$ ,  $\{u_2, u_3, u_4, u_9, u_{13}\}$ ,  $\{u_4, u_5, u_9, u_{13}, u_{14}\}$ . Как видно из данного примера, если построение производится только относительно хорд для выбранного дерева графа, то множество изометрических циклов будет не полно. В данном примере в итоговое множество не вошли изометрические циклы, проходящие по четвертому ребру.

Произведя сравнительный анализ, можно утверждать следующее:

- количество изометрических циклов в графе является постоянной величиной, равной или большей цикломатического числа графа, и не зависит от способа их выделения, в то время, как множество фундаментальных циклов в точности равно цикломатическому числу графа и зависит от выбора дерева;
- длина центральных разрезов графа определяет локальные степени вершин.

Рассмотрим основные свойства множества изометрических циклов графа. Введем фундаментальное понятие 0-подмножества изометрических циклов. Так как каждый суграф графа  $G$  представляет собой вектор из пространства суграфов  $L_G$  размерностью  $m$ , то система точек  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$   $m$ -мерного линейного пространства  $L_G$  называется независимой, если система векторов

$$(x_1 - x_0), (x_2 - x_0), \dots, (x_k - x_0) \tag{9}$$

линейно независима. Очевидно, что независимость возможна и при  $k < m$ . Система (9) линейно независима тогда и только тогда, когда из соотношений

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0, \quad (10)$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 0 \quad (11)$$

вытекает:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0. \quad (12)$$

Здесь  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  – действительные числа. Таким образом, порядок нумерации точек не влияет на свойство независимости системы  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$  и если система точек независима, то всякая её подсистема также независима.

Покажем, что если система векторов (9) линейно независима, то из соотношений (10) и (11) вытекает (12). В силу (11) соотношение (10) переписывается в виде:  $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0$ , или иначе:  $\lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) + \dots + \lambda_k(x_k - x_0) = 0$ .

Но так как система (9) линейно независима, то из последнего вытекает  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ , а отсюда, ввиду (11), следует и  $\lambda_0 = 0$ . Покажем теперь, что если из соотношения (10) и (11) вытекает (12), то система (9) линейно независима. Пусть имеет место следующее:

$$\lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) + \dots + \lambda_k(x_k - x_0) = 0. \quad (13)$$

Полагая  $\lambda_0 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$ , мы можем переписать соотношение (13) в виде  $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0$ , причем для  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  выполнено (11). Значит,  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ , т.е. из (13) вытекает  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ , а это означает линейную независимость системы (9).

## ИНВАРИАНТЫ, ПОСТРОЕННЫЕ НА МНОЖЕСТВЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ И ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА

Как мы успели убедиться, запись замкнутого маршрута может быть осуществлена через подмножество ребер или через подмножество вершин графа. Запись цикла через подмножество ребер будем называть реберной записью цикла [3, 4]. Соответственно, вершинная запись цикла состоит из подмножества вершин, принадлежащих рассматриваемому циклу. В основном для записи суграфов и операций с ними применяется реберная запись. Вершинная запись применяется несколько реже и характеризует несколько иные свойства циклов. Имея множество изометрических циклов графа, можно построить вектор количества изометрических циклов, проходящих по ребру (впредь будем называть его вектором циклов по ребрам). Например, для графа G, представленного на рис. 13, множество изометрических циклов в реберной записи имеет вид:

$$c_1 = \{u_1, u_3, u_5\}; c_2 = \{u_2, u_3, u_4\}; c_3 = \{u_4, u_8, u_9\}; c_4 = \{u_5, u_6, u_{12}\};$$

$$c_5 = \{u_5, u_8, u_{13}\}; c_6 = \{u_6, u_7, u_{11}\}; c_7 = \{u_7, u_8, u_{10}\}; c_8 = \{u_1, u_2, u_9, u_{13}\};$$

$$c_9 = \{u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}.$$

И тогда вектор циклов по ребрам можно записать в виде:

$$V_u = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Или в виде  $V_u = (2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 3)$ . Если записать изометрические циклы через вершины:

$$c_1 = \{x_1, x_6, x_7\}; c_2 = \{x_5, x_6, x_7\}; c_3 = \{x_4, x_5, x_7\}; c_4 = \{x_1, x_2, x_7\};$$

$$c_5 = \{x_1, x_4, x_7\}; c_6 = \{x_2, x_3, x_7\}; c_7 = \{x_3, x_4, x_7\}; c_8 = \{x_1, x_4, x_5, x_6\};$$

$$c_9 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

то вектор количества изометрических циклов, проходящих по вершинам графа (впредь будем его называть – вектор циклов по вершинам), запишется в виде:

$$V_x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 5 & 3 & 3 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

или в виде  $V_x = (5,3,3,5,3,3,7)$ .

Но существует запись циклов в виде замкнутого ориентированного маршрута, так как любое неориентированное ребро может быть представлено двумя разнонаправленными ориентированными ребрами. Такая запись циклов (замкнутых маршрутов) характерна только для плоских графов с учетом заданного направления обхода. Например, для графа, представленного на рис. 12, базисная система изометрических циклов и обод, характеризующие плоский граф, могут быть записаны в векторном виде:

$$c_1 = (x_1, x_7) + (x_7, x_6) + (x_6, x_1); \quad c_2 = (x_6, x_7) + (x_7, x_5) + (x_5, x_6);$$

$$c_3 = (x_5, x_7) + (x_7, x_4) + (x_4, x_5); \quad c_4 = (x_1, x_2) + (x_2, x_7) + (x_7, x_1);$$

$$c_6 = (x_2, x_3) + (x_3, x_7) + (x_7, x_2); \quad c_7 = (x_7, x_3) + (x_3, x_4) + (x_4, x_7);$$

$$c_9 = (x_1, x_4) + (x_4, x_3) + (x_3, x_2) + (x_2, x_1); \quad c_0 = c_8 = (x_1, x_6) + (x_6, x_5) + (x_5, x_5) + (x_4, x_1).$$

Инвариант графа – это число (функция) графа  $G$ , которое принимает одно и то же значение на любом графе, изоморфном  $G$ . Пусть  $f$  – функция, относящая каждому графу  $G$  некоторый элемент  $f(G)$  из множества  $M$  произвольной природы (элементами множества  $M$  чаще всего служат числа и системы чисел, векторы, многочлены, матрицы). Эту функцию будем называть инвариантом, если на изоморфных графах её значения совпадают, т.е.

$$\forall G \text{ и } G' \text{ выполняется } G \cong G' \Rightarrow f(G) = f(G'). \tag{14}$$

Подпространства разрезов и циклов являются нормированными пространствами, так как любому их элементу можно поставить в соответствие неотрицательное вещественное число  $\|l\|$ , называемое *нормой*. В данном случае это длины разрезов и циклов соответственно. Введенное понятие удовлетворяет следующим условиям:

- $\|l\| > 0$  при  $l \neq 0$ ,  $\|0\| = 0$ ,
- $\|l_1 + l_2\| \leq \|l_1\| + \|l_2\|$  для любых  $l_1 \in R, l_2 \in R$ ,
- $\|\alpha l\| = |\alpha| \|l\|$  для любого  $l \in R$  и вещественного числа  $\alpha$ .

Множеству центральных разрезов можно поставить в соответствие так называемый вектор локальных степеней, который также будет инвариантом графа:

$$V_s = (p_1 \times l_1, p_2 \times l_2, \dots), \tag{15}$$

где  $p_1$  – количество центральных разрезов во множестве  $S$  длиной  $l_1$ ;  $p_2$  – количество центральных разрезов длиной  $l_2$  во множестве  $S$  и т.д.

Причем  $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots$ , то есть длина циклов расставлена в порядке неубывания.

Множеству изометрических циклов можно также поставить в соответствие вектор вида (2.16), который также будет инвариантом графа:

$$V_c = (p_1 \times l_1, p_2 \times l_2, \dots), \tag{16}$$

где  $p_1$  – количество изометрических циклов во множестве  $C_\tau$  длиной  $l_1$ ,  $p_2$  – количество изометрических циклов длиной  $l_2$  во множестве  $C_\tau$  и т.д. Причем  $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots$ , то есть длина циклов расставлена в порядке неубывания.

**РАССТОЯНИЕ В ГРАФАХ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ ФРАГМЕНТАМИ**

В теории электрических цепей находят применения графы с циклическими фрагментами. Будем рассматривать графы с ориентированными циклами, представляющие фрагменты принципиальной электрической схемы (см. рис. 13).

На рис. 13 представлен граф с циклическими фрагментами, где неориентированные ребра заменены двумя разнонаправленными ориентированными ребрами. Определим расстояния для 1-ой и 2-ой вершин.

$\rho =$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
$x_1$	$\infty$	1	2	2	3	4	3	2	3	1	3	2
$x_2$	2	$\infty$	1	4	2	3	2	3	3	3	2	1

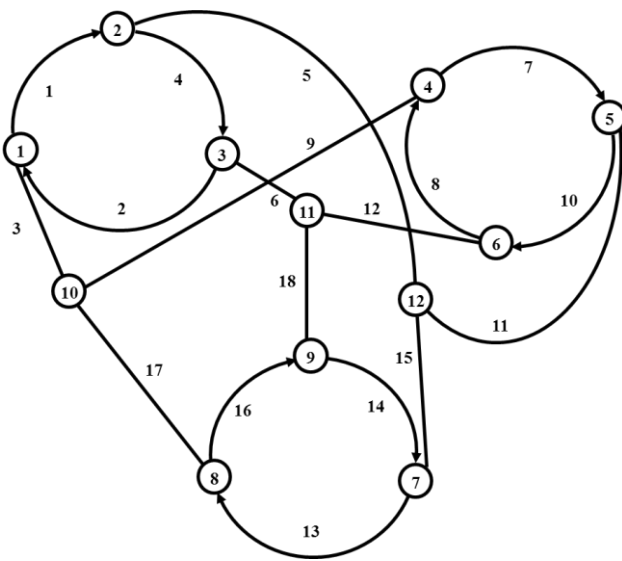


Рис. 13. Граф с циклическими фрагментами

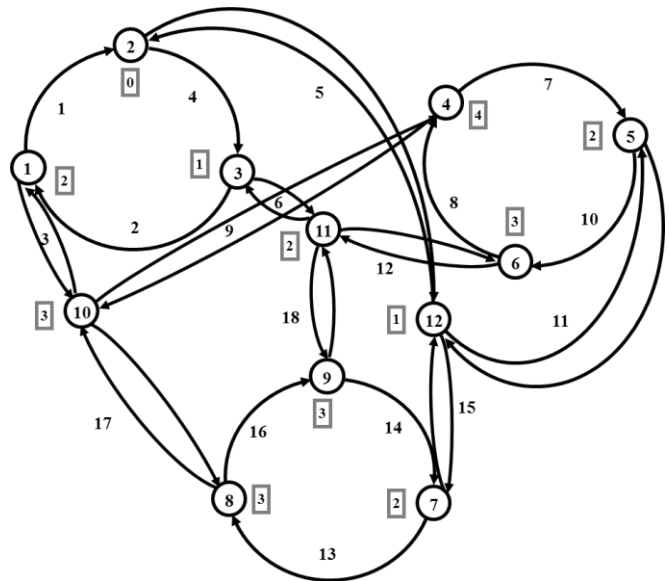


Рис. 14. Расстояния для 2-ой точки

Воспользовавшись рисунком 14, определим расстояние между вершинами графа. Составим матрицу расстояний.

$\rho =$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
$x_1$	$\infty$	1	2	2	3	4	3	2	3	1	3	2
$x_2$	2	$\infty$	1	4	2	3	2	3	3	3	2	1
$x_3$	1	2	$\infty$	3	4	2	3	3	2	2	1	3
$x_4$	2	3	4	$\infty$	1	2	3	2	3	1	3	2
$x_5$	4	2	3	2	$\infty$	1	2	3	3	3	2	1
$x_6$	3	4	2	1	2	$\infty$	3	3	2	2	1	3
$x_7$	3	2	3	3	2	3	$\infty$	1	2	2	3	1
$x_8$	2	3	3	2	3	3	2	$\infty$	1	1	2	3
$x_9$	3	3	2	3	3	2	1	2	$\infty$	3	1	1
$x_{10}$	1	2	3	1	2	3	3	1	2	$\infty$	3	3
$x_{11}$	2	3	1	2	3	1	2	3	1	3	$\infty$	3
$x_{12}$	3	1	2	3	1	2	1	2	3	3	3	$\infty$



### ЦИКЛЫ В ГРАФАХ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ ФРАГМЕНТАМИ

Определим циклы, проходящие по ориентированным ребрам фрагментов (за исключением самого фрагмента).

Таким образом, множество циклов, проходящих по ориентированным ребрам фрагментов, можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \langle X_1, X_{10}, X_8, X_7, X_{12}, X_2, X_1 \rangle; & C_2 &= \langle X_2, X_{12}, X_7, X_9, X_{11}, X_3, X_2 \rangle; \\
 C_3 &= \langle X_3, X_{11}, X_9, X_8, X_{10}, X_1, X_3 \rangle; & C_4 &= \langle X_4, X_{10}, X_8, X_7, X_{12}, X_5, X_4 \rangle; \\
 C_5 &= \langle X_5, X_{12}, X_7, X_9, X_{11}, X_6, X_5 \rangle; & C_6 &= \langle X_6, X_{11}, X_9, X_8, X_{10}, X_4, X_6 \rangle.
 \end{aligned}$$

Предположим, что выделенные циклы образованы в результате применения алгоритма поиска в ширину для неориентированного ребра. Тогда применяется следующий порядок: начальная вершина ребра не принадлежит, а конечная – принадлежит циклическому фрагменту. Тогда по выбранным ребрам проходят следующие циклы: по ребру  $\langle X_{10}, X_1 \rangle - c_1$ ; по  $\langle X_{12}, X_2 \rangle - c_2$ ; по  $\langle X_{11}, X_3 \rangle - c_3$ ; по  $\langle X_{10}, X_4 \rangle - c_4$ ; по  $\langle X_{12}, X_5 \rangle - c_5$ ; по  $\langle X_{11}, X_6 \rangle - c_6$ ; по  $\langle X_{12}, X_7 \rangle - c_1, c_4$ ; по  $\langle X_{10}, X_8 \rangle - c_3, c_6$ ; и по ребру  $\langle X_{10}, X_1 \rangle - c_2, c_5$ . Рассмотрим подграф  $\{X_1, X_{10}, X_8, X_7, X_{12}, X_2\}$ :

$\rho =$

	$X_1$	$X_2$	$X_7$	$X_8$	$X_{10}$	$X_{12}$
$X_1$	$\infty$	1	3	2	1	2
$X_2$	2	$\infty$	2	3	3	1
$X_7$	3	2	$\infty$	1	2	1
$X_8$	2	3	2	$\infty$	1	3
$X_{10}$	1	2	3	1	$\infty$	3
$X_{12}$	3	1	1	2	3	$\infty$

Подматрица расстояний подграфа

$=$

	$X_1$	$X_2$	$X_7$	$X_8$	$X_{10}$	$X_{12}$
$X_1$	$\infty$	1			1	
$X_2$		$\infty$				1
$X_7$			$\infty$	1		1
$X_8$				$\infty$	1	
$X_{10}$	1			1	$\infty$	
$X_{12}$		1	1			$\infty$

Подматрица, состоящая из единиц

$$\begin{array}{l}
 X_1: [ X_2 \quad X_{10} ] \\
 X_2: [ X_{12} \quad ] \\
 X_7: [ X_8 \quad X_{12} ] \\
 X_8: [ X_{10} \quad ] \\
 X_{10}: [ X_1 \quad X_8 ] \\
 X_{12}: [ X_2 \quad X_7 ]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 X_1: X_2 \\
 X_2: X_{12} \\
 X_7: X_8 \\
 X_8: X_{10} \\
 X_{10}: X_1 \\
 X_{12}: X_7
 \end{array}
 .$$

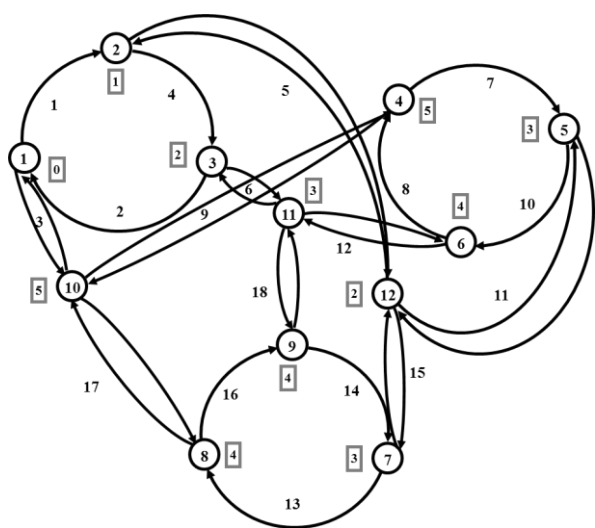


Рис. 15. Циклы для 1-ой дуги

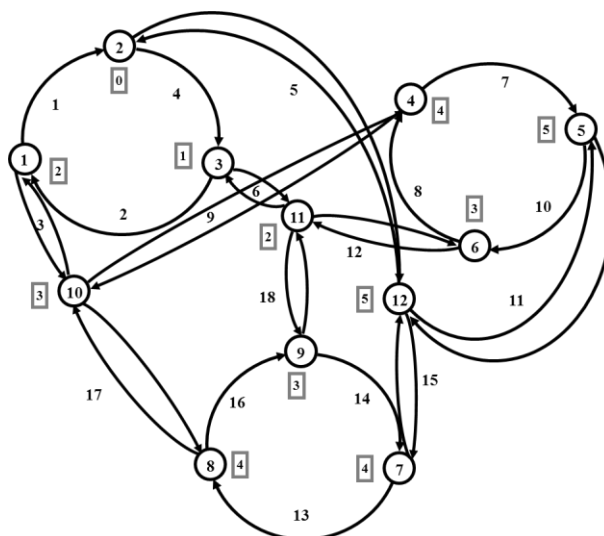


Рис. 16. Циклы для 4-ой дуги

Рассмотрим следующий подграф  $\{x_2, x_{12}, x_7, x_9, x_{11}, x_3\}$ :

$$\rho = \begin{array}{c} \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_7 \\ x_9 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x_2 & \infty & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline x_3 & 2 & \infty & 3 & 2 & 1 & 3 \\ \hline x_7 & 2 & 3 & \infty & 2 & 3 & 1 \\ \hline x_9 & 3 & 2 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ \hline x_{11} & 3 & 1 & 2 & 1 & \infty & 3 \\ \hline x_{12} & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & \infty \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ x_7 \\ x_9 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x_2 & \infty & 1 & & & & 1 \\ \hline x_3 & & \infty & & & 1 & \\ \hline x_7 & & & \infty & & & 1 \\ \hline x_9 & & & 1 & \infty & 1 & 1 \\ \hline x_{11} & & 1 & & 1 & \infty & \\ \hline x_{12} & 1 & & 1 & & & \infty \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_2: [ \quad x_3 \quad x_{12} \quad ] \\ x_3: [ \quad x_{11} \quad ] \\ x_7: [ \quad x_{12} \quad ] \\ x_9: [ \quad x_7 \quad x_{11} \quad x_{12} \quad ] \\ x_{11}: [ \quad x_3 \quad x_9 \quad ] \\ x_{12}: [ \quad x_2 \quad x_7 \quad ] \end{array} = \begin{array}{l} x_2: x_3 \\ x_3: x_{11} \\ x_7: x_{12} \\ x_9: x_7 \\ x_{11}: x_9 \\ x_{12}: x_2 \end{array} .$$

Таким образом, множество единичных циклов для графа с циклическими фрагментами может быть построено алгоритмом поиска в ширину относительно ориентированных ребер циклического фрагмента. В таком применяется следующий порядок: и начальная, и конечная вершины ребра принадлежат циклическому фрагменту. В процессе применения алгоритма образуется множество единичных циклов для графа с циклическими фрагментами. Мы будем называть их единичными циклами, так как матрица смежности такого цикла образуются из подматрицы расстояний подграфа с учетом только единиц.

## ВЫВОДЫ

В представленной работе рассматриваются понятия изометрического и единичного циклов в графе. Приводится формальное математическое определение изометрического цикла и анализируются свойства изометрических циклов в графе. Для построения множества изометрических циклов графа предложен специальный алгоритм, имеющий приемлемую вычислительную сложность, порядок которой оценивается как  $O(m)$ , где  $m$  – количество ребер графа. Также в статье рассматривается особый вид графов, имеющий важнейшее значение в области моделирования электрических цепей и при проектировании плоских конструктивов [3]. В свою очередь, для графов с циклическими фрагментами вводится новая структура – множество единичных циклов графа. Приводится определение понятия единичного цикла и предлагается эффективный алгоритм выделения множества единичных циклов в графе с циклическими фрагментами. В статье также рассмотрены основные свойства единичных циклов и приведены примеры, наглядно иллюстрирующие эти свойства. В заключении следует отметить, что список комбинаторных задач, решаемых с помощью методов, основанных на понятиях и свойствах единичных и изометрических циклов, не ограничивается приведенными примерами, а распространяется на довольно обширные области применения вычислительной математики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Tamassia R. Handbook of Graph Drawing and Visualization. CRC Press, 2014. 866 p.
2. Herman I., Melançon G., Marshall M. S. Graph Visualization and Navigation in Information Visualization: A Survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 2000. №6(1). P. 24–43. doi: 10.1109/2945.841119.
3. Курапов С. В., Давидовский М. В. Два подхода к проведению соединений в плоских конструктивах. *Компоненты и технологии*. 2015. № 7. С. 142–147.

4. Курапов С. В., Толлок А. В. Методы построения топологического рисунка графа. *Автоматика и телемеханика*. 2013. № 9. С. 78–97.
5. Рингель Г. Теорема о раскраске карт. Москва: Мир, 1977. 126 с.
6. Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск: ГРФМЛ, 1963. 542 с.
7. Kavitha T., Liebchen Ch., Mehlhorn K., Michail D., Rizzi R., Ueckerdt T., Zweig K. A. Cycle bases in graphs characterization, algorithms, complexity, and applications. *Computer Science Review*. 2009. Vol. 3, Iss. 4. P. 199–243.
8. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. Москва: Мир, 1972. 332 с.

#### REFERENCES

1. Tamassia, R. (2014). Handbook of Graph Drawing and Visualization. CRC Press.
2. Herman, I., Melançon, G. & Marshall, M. S. (2000). Graph Visualization and Navigation in Information Visualization: A Survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, No. 6(1), pp. 24-43. doi: 10.1109/2945.841119.
3. Kurapov, S. & Davidovsky, M. (2015). Two approaches to making joints in flat structures. *Komponenty i tehnologii*, No. 7, pp. 142-147.
4. Kurapov, S. V. & Tolok, A. V. (2013). The Topological Drawing of a Graph: Construction Methods. *Autom Remote Control*, Vol. 74, Iss. 9, pp. 1494-1509. doi: 10.1134/S0005117913090063.
5. Ringel, G. (2011). Map Color Theorem. Moscow: Mir.
6. Zykov, A. A. (1969). Theory of Finite Graphs. Novosibirsk: Publishing House «Nauka», Academy of Sciences of USSR, Siberian branch.
7. Kavitha, T., Liebchen, Ch., Mehlhorn, K., Michail, D., Rizzi, R., Ueckerdt, T. & Zweig, K. A. (2009). Cycle Bases in Graphs. Characterization, Algorithms, Complexity and Applications. *Computer Science Review*, Vol. 3, Iss. 4, pp. 199-243.
8. Bellert, S. & Wozniacki, G. (1972). Analysis and synthesis of electrical circuits by the method of structural numbers. Moscow: Mir.

УДК 539

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Мамедов Р. А., докторант

*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,  
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

В данной статье исследованы вынужденные колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки в жидкости под действием пульсирующего во времени внутреннего радиального давления. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построена система уравнений для определения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений уравнения движения жидкости, написанного в потенциалах. Получены аналитические формулы для нахождения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с жидкостью.

*Ключевые слова: вынужденные колебания, оболочка, идеальная жидкость, напряжение, подкрепление, принцип вариации.*

## ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПОЗДОВЖНЬО ПІДКРІПЛЕНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ В РІДИНІ

Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Мамедов Р. А., докторант

*Азербайджанський Архітектурно-Будівельний Університет,  
вул. А. Султанова 5, м. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

У статті досліджено вимушені коливання поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки в рідині під дією пульсуючого в часі внутрішнього радіального тиску. На основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона, побудовано системи рівнянь для визначення переміщень точок серединної поверхні поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки при динамічній взаємодії з рідиною. Діючі поверхневі навантаження з боку рідини на поздовжньо підкріплену циліндричну оболонку визначаються з розв'язання рівняння руху рідини, написаного в потенціалах. Отримано аналітичні формули для знаходжень переміщень точок серединної поверхні поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки, що контактує з рідиною.

*Ключові слова: вимушені коливання, оболонка, ідеальна рідина, напруга, підкріплення, принцип варіації.*

## FORCED OSCILLATIONS OF A LONGITUDINALLY ADJUSTED ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL IN A LIQUID

Latifov F. S., doctor of physical and mathematical sciences, professor,

Mamedov R. A., doctoral student

*Azerbaijan Architecture and Construction University,  
Str. A. Sultanova, 5, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*

flatifov@mail.ru

In this article we study the forced oscillations of a longitudinally supported orthotropic cylindrical shell in a liquid under the action of an internal radial pressure pulsating in time. Based on the Ostrogradsky-Hamilton variational principle, a set of equations is constructed for determining the displacement of the points of the middle surface of a longitudinally supported orthotropic cylindrical shell under dynamic interaction with a liquid. The acting surface loads from the liquid side to the longitudinally supported cylindrical shell are determined from the solutions of the fluid motion equation written in potentials. Analytic formulas are obtained for finding the displacements of the points of the middle surface of a longitudinally supported orthotropic cylindrical shell in contact with a liquid.

*Key words: forced oscillations, shell, ideal fluid, stress, reinforcement, principle of variation.*

## ВВЕДЕНИЕ

Для придания большей жесткости оболочки подкрепляются ребрами, при этом незначительное увеличение массы конструкции существенно повышает ее прочность. Такие конструкции могут находиться в контакте с внешней средой и подвергаться не только статическим нагрузкам, но и динамическим. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания таких конструкций играют важную роль при проектировании современных машин и аппаратов. Исследованиям свободных колебаний продольно подкрепленной и подкрепленной перекрестными системами ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами изотропной цилиндрической оболочке, заполненной твердой средой, посвящена работа [1]. С применением вариационного принципа, построено частотное уравнение колебаний подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки, контактирующей со средой и реализовано численно. Свободные колебания ребристых изотропных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии рассмотрены в работе [2]. Причем, подкрепление оболочек проводилось продольно, поперечной и перекрестной системой ребер. В [3] исследована задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами изотропной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Колебание поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью в грунте, рассмотрено в работе [4]. С применением вариационного принципа и модели Пастернака, параметрические

колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой неподкрепленной цилиндрической оболочки с наполнителем исследованы в работе [5]. Вариационно-параметрические исследования, моделирование цилиндрических оболочек ступенчато-переменной толщины при динамическом нагружении приведены в [6]. Отметим, что описанные в литературе решения относятся преимущественно к подкрепленной изотропной цилиндрической оболочке без среды [7]. Колебание гладких цилиндрических оболочек с наполнителем и с жидкостью достаточно полностью исследованы в работах [8, 9]. Колебания продольно подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки с наполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и наполнителя, рассмотрены в работах [10, 11]. Анализ приведенных работ показывает, что поведение тонкостенных конструкций из ортотропного материала, имеющих дискретное расположение ребер, при динамическом взаимодействии с жидкостью исследовано недостаточно. Поэтому разработка математических моделей поведения подкрепленных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследования вынужденных колебаний, контактирующих с жидкостью, являются актуальными задачами.

Данная статья посвящена исследованию вынужденных колебаний продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки в жидкости под действием пульсирующего во времени внутреннего радиального давления. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построена система уравнений для определения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений уравнения движения жидкости, написанного в потенциалах.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной анизотропной оболочки и жестко с ней соединенных по линиям контакта продольных ребер. Принимается, что напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной поверхности  $u$ ,  $\mathcal{G}$  и  $w$ . При этом углы поворота нормальных элементов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  относительно координатных линий  $y$  и  $x$  выражаются через  $w$  и  $\mathcal{G}$  с

помощью зависимостей  $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\mathcal{G}}{R}\right)$ , где  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений ( $u_i$ ,  $\mathcal{G}_i$ ,  $w_i$   $i$ -го продольного стержня), необходимо определить также углы закручивания  $\varphi_{kpi}$ .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); \quad \mathcal{G}_j(x) = \mathcal{G}(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); \quad \varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $h_i = 0,5h + H_i^1$ ,  $h$  – толщина оболочки,  $H_i^1$  – расстояние от осей  $i$ -го продольного стержня до поверхности оболочки,  $x_i$  и  $y_i$  – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой,  $\varphi_i$ ,  $\varphi_{kpi}$  углы поворота и закручивания поперечных сечений соответственно продольных и поперечных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны жидкости могут быть сведены к нормальным составляющим  $q_z$ , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с жидкостью при осевом сжатии получим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергию системы.

Потенциальная энергия упругой деформации ортотропной цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{hR}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ b_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2(b_{11} + b_{12}) \frac{w}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w^2}{R^2} (b_{11} + 2b_{12} + b_{22}) + b_{22} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. - 2(b_{12} + b_{22}) \frac{w}{R} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + 2b_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + b_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + b_{66} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)^2 + 2b_{66} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ;  $b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ;  $b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ,  $b_{66} = G_{12} = G$ ,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки,  $h$  – толщина оболочки,  $u$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $w$  – составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки,  $E_1$ ,  $E_2$  – модули упругости материала оболочки в координатных направлениях,  $G$  – модуль упругости оболочки при сдвиге.

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации  $i$ -го продольного ребра таковы [1]:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \tilde{E}_i F_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{G}_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (3)$$

Здесь  $F_i$ ,  $J_{zi}$ ,  $J_{yi}$ ,  $J_{kpi}$  – площадь и моменты инерции поперечного сечения  $i$ -го продольного стержня соответственно относительно оси  $Oz$  и оси, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении;  $\tilde{E}_i$ ,  $\tilde{G}_i$  – модули упругости и сдвига материала  $i$ -го продольного стержня.

Потенциальная энергия внешних поверхностных нагрузок  $\bar{q}(q_x, q_y, q_z)$  и нагрузок  $q_{zz}$ , действующих со стороны жидкости, приложенных к оболочке, определится как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x + q_y + q_z + q_{zz}) w dx dy. \quad (4)$$

Полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий упругих деформаций оболочки и продольных ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок, действующих со стороны жидкости, и потенциальная энергия от сжимающего напряжения:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{k_1} \Pi_i + A_0. \quad (5)$$

Кинетические энергии оболочки и продольных ребер записываются в виде [6]:

$$K_0 = \rho h \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy, \quad (6)$$

$$K_i = \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx.$$

Здесь  $t$  – временная координата,  $\rho, \rho_i$  – соответственно, плотность материалов, из которых изготовлена оболочка,  $i$ -ый продольный стержень.

Кинетическая энергия продольно подкрепленной оболочки

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{k_1} K_i. \quad (7)$$

Уравнения движения ребристой оболочки получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\delta W = 0, \quad (8)$$

где  $W = \int_{t'}^{t''} \tilde{L} dt$  – действие по Гамильтону,  $\tilde{L} = K - \Pi$  – функция Лагранжа,  $t'$  и  $t''$  – заданные произвольные моменты времени.

В предположении, что оболочка усилена бесконечно большим числом ребер, предельным переходом  $k_1 \rightarrow \infty$  и с учетом (1), и что операции варьирования и дифференцирования перестановочны, уравнение (8) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} & (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ b_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (G_{12} + b_{22}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \mathcal{G} - (b_{12} + b_{22}) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \rho_1 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t_1^2} = \frac{R^2 q_y}{2h}, \\ & - \left[ (b_{11} + b_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] u - (b_{12} + b_{22}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} + \\ & + \left\{ b_{11} + 2b_{12} + b_{22} + a^2 \left[ (b_{11} + \eta_c^{(1)}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(b_{11} + b_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + b_{12} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \right\} w + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} (q_z + q_{zz}). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$a^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \bar{\rho}_c = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad L_1 = x_2 - x_1, \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \gamma_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i}{G} (1 - \nu_{12}^2) \bar{\gamma}_c^{(1)},$$

$$\eta_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i (J_{yi} + h^2 F_i)}{2\pi R^3 h G} (1 - \nu_{12}^2), \quad \rho_1 = 1 + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c^{(1)}, \quad \bar{\gamma}_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i}{2\pi R h}, \quad \delta_c^{(1)} = \frac{h_i}{R} \bar{\gamma}_c^{(1)},$$

$$\theta = \frac{y}{R}, \quad t_1 = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{G_{12}}{(1-\nu^2)\rho R^2}}, \quad \omega_1 = \omega/\omega_0.$$

Поверхностная нагрузка  $q_z$ , действующая со стороны жидкости на продольно подкрепленную оболочку, определяется из решений уравнения движения идеальной жидкости [7]:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

где  $\varphi$  – потенциала возмущенных скоростей,  $a_0$  – скорость распространения возмущений в жидкости.

На контактной поверхности оболочка-жидкость соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки оболочки имеет вид:

$$g_r|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{r=R} = -\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1}. \quad (11)$$

Равенство радиальных давлений со стороны жидкости на оболочку

$$q_{zz} = -p|_{r=R}; \quad q_x = q_y = 0. \quad (12)$$

С помощью (10), (11) и (12) давление со стороны жидкости на оболочку  $p$  можно представить в виде

$$p = \omega_0^2 \Phi_{an} \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2}. \quad (13)$$

Здесь

$$\Phi_{an} = \begin{cases} K_n(\beta r)/K'_n(\beta r), & M_1 < 1; \\ N_n(\beta_1 r)/N'_n(\beta_1 r), & M_1 > 1; \\ \frac{R^n}{nr^{n-1}}, & M_1 = 1. \end{cases} \quad (14)$$

В (14)  $M_1 = \frac{\omega/m}{a_0}$ ,  $\beta^2 = R^{-2}(1-M_1^2)\chi^2$ ,  $\beta_1^2 = R^{-2}(M_1^2-1)\chi^2$ ,  $t_1 = \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{b_{11}}{\rho_0 R^2}}$ ,

$\omega_1 = \sqrt{\frac{\rho_0 R^2 \omega^2}{b_{11}}}$ ,  $\xi = x/L$ ,  $K_n$  – модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка второго рода,  $N_n$  – функции Бесселя или Неймана  $n$ -го порядка второго рода.

Будем предполагать, что продольно подкрепленная ортотропная цилиндрическая оболочка в жидкости находится под действием пульсирующего во времени внутреннего радиального давления  $q_z$ :

$$q_z = q_0 \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1. \quad (15)$$



### РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Далее рассматриваются шарнирно опертые оболочки, т. е. при  $\xi = 0$  и  $\xi = \xi_1$  ( $\xi_1 = L/R$ ) выполняются следующие граничные условия:

$$\mathcal{G} = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0.$$

Компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1; & \mathcal{G} &= \mathcal{G}_0 \sin n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1; \\ w &= w_0 \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1, \end{aligned} \tag{16}$$

где  $u_0, \mathcal{G}_0, w_0$  – неизвестные постоянные.

Используя (9), (12), (13), (15) и (16), задача сводится к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка

$$a_{i1}u_0 + a_{i2}\mathcal{G}_0 + a_{i3}w_0 = q_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{17}$$

где  $q_1 = q_2 = 0, \quad q_3 = q_0$ .

Элементы  $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(b_{11} + \gamma_c^{(1)})m^2R^2 - b_{66}n^2 + \omega_1^2 B_{11}(1 + \rho_1); & a_{12} &= (b_{12} + b_{66})nmR; \\ a_{13} &= -[(b_{11} + b_{12})mR + \delta_c^{(1)}m^3R^3]; \\ a_{21} &= (b_{12} + b_{66})nmR; & a_{22} &= -b_{66}m^2R^2 + (G_{12} + b_{22})n^2 + \omega_1^2 b_{11}; & a_{23} &= n(b_{12} + b_{22}); \\ a_{31} &= -[-(b_{11} + b_{12})mR + \delta_c^{(1)}m^3R^3]; & a_{32} &= -(b_{12} + b_{22})n; & a_{33} &= b_{11} + 2b_{12} + b_{22} - \sigma_x hm^2R^2 + \\ & & & & & -(1 + \rho_1)B_{11}\omega_1^2 + \frac{R^2}{2h}\Phi_{an}B_{11}\rho_m\omega_1^2\omega_0^2 + a^2[(b_{11} + \eta_c^{(1)})m^4R^4 + 2(b_{11} + b_{12})n^2m^2R^2 + b_{12}n^4]. \end{aligned}$$

Так как система (17) неоднородная, из нее получаем для амплитуды перемещений:

$$u_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \mathcal{G}_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad w_0 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= q_0(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}), & \Delta_2 &= q_0(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}), & \Delta_3 &= q_0(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}), \\ \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{aligned}$$

Отметим, что при  $\Delta = 0$  амплитуды перемещений уходят в бесконечность, что соответствует резонансному случаю.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенных выше зависимостей (18) амплитуды перемещений с помощью ЭВМ. Для геометрических и физических параметров, характеризующих материалы оболочки, жидкости и продольных

стержней, были приняты:  $E_i = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н / м}^2$ ,  $\rho = \rho_i = 7800 \text{ кг / м}^3$ ,  $F_i = 3,4 \text{ мм}^2$ ,  
 $J_{yi} = 5,1 \text{ мм}^4$ ,  $\rho_0 / \rho = 0,105$ ,  $\frac{J_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}$ ,  $\frac{J_{zi}}{2\pi R^3 h} = 0,13 \cdot 10^{-6}$ ,  $\frac{J_{kpi}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}$ ,  
 $R = 0,16 \text{ м}$ ,  $h = 0,00045 \text{ м}$ ,  $\nu_2 = 0,19$ ,  $\nu_1 = 0,11$ ,  $L = 0,8 \text{ м}$ ,  $h_i = 1,39 \text{ мм}$ ,  $a_0 = 1350 \text{ м / сек}$ .

На рис. 1 представлены зависимости  $w_0/q$  от частоты  $\omega_1$  для различных отношений  $\frac{E_1}{E_2}$ ,  
 причем сплошным линиям соответствуют  $\frac{E_1}{E_2} = 1,25$ , а пунктирным –  $\frac{E_1}{E_2} = 0,75$ . Из рисунка

видно, что при определенных частотах пики кривых уходят в бесконечность. Эти частоты являются резонансными и определяются из уравнения  $\Delta = 0$ . Кроме того, усиление свойства ортотропии материала оболочки приводит к уменьшению значения прогиба оболочки.

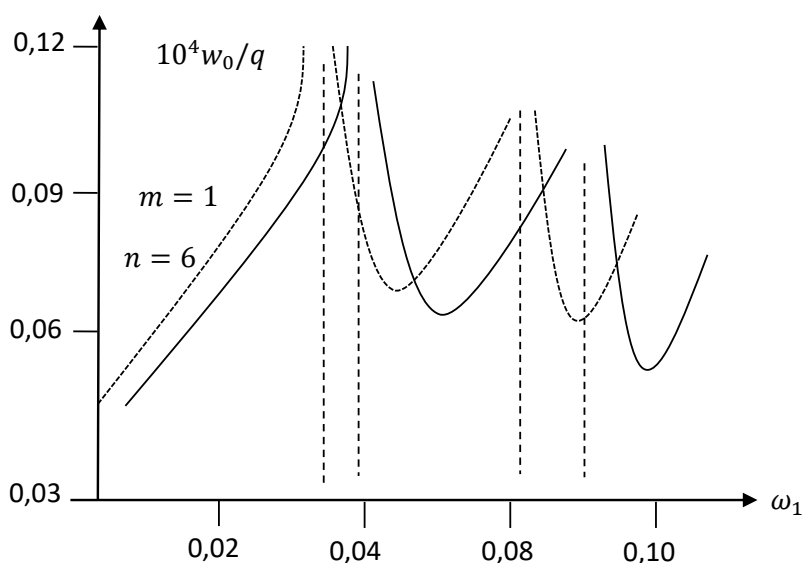


Рис. 1. Зависимость прогиба оболочки от частоты колебаний

## ЛИТЕРАТУРА

1. Латифов Ф. С., Сулейманова С. Г. Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой. *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. 2009. № 1. С. 59–62.
2. Латифов Ф. С., Алиев А. А. Свободные колебания ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии. *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. 2009. № 2. С. 61–63.
3. Латифов Ф. С., Салманов О. Ш. Задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. 2008. № 4(5). С. 45–48.
4. Латифов Ф. С., Искендеров Р. А., Микаилов С. Б. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в среде. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2013. Вып. 21. С. 132–139.
5. Пирмамедов И. Т. Параметрические колебания вязкоупругой оболочки, с учетом повреждаемости, заключенной в вязкоупругую матрицу. *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. 2009. № 1(6). С. 52–55.

6. Босьяков С. М., Чживэй В. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011. № 3(10). С. 24–27.
7. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 367 с.
8. Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. Москва: Наука, 1977. 331 с.
9. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999. 164 с.
10. Латифов Ф. С., Джафарова И. М. Свободные колебания подкрепленных перекрестной системой ребер цилиндрических оболочек с наполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения. *Естественные науки и техники*. 2009. № 5(43). С. 38–44.
11. Джафарова И. М. Задача о свободных осесимметричных колебаниях нагруженной осевыми сжимающими силами ребристых цилиндрических оболочек, заполненных средой и с учетом трения. *Известия Бакинского Государственного Университета. Физико-математическая серия*. 2011. № 3. С. 86–93.

### REFERENCES

1. Latifov, F. S. & Suleymanova, S. Q. (2009). The problem of free oscillations of a reinforced system of cross-by axial compressive strength of cylindrical shells filled with a medium. *Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov*, No. 1, pp. 59-62.
2. Latifov, F. S. & Aliyev, A. A. (2009). Free oscillations of ribbed cylindrical shells filled with fluid under axial compression. *Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov*, No. 2, pp. 61-63.
3. Latifov, F. S. & Salmanov, O. Sh. (2008). The problem of forced axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of the cylindrical shell filled with liquid. *Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov*, No. 4(5), pp. 45-48.
4. Latifov, F. S., Iskenderov, R. A. & Mikailov, S. B. (2013). Fluctuations transversely reinforced orthotropic cylindrical shells with a flowing liquid in a medium. *Problemi vichislitelnoy mexaniki i prochnosti konstrukchiy*, Iss. 21, pp. 132-139.
5. Pirmamedov, I. T. (2009). Parametric oscillations of viscoelastic shell, taking into account of damage, enclosed in a viscoelastic matrix. *Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov*, No. 1(6), pp. 52-55.
6. Bosyakov, S. M., Chjivey, V. (2011). Analysis of free vibrations of a cylindrical shell made of fiberglass with Navier boundary conditions. *Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov*, No. 3(10), pp. 24-27.
7. Amiro, I. Ya. & Zaruchkiy, V. A. (1980). *Theory of Ridge Shells. Methods for Calculation of Shells*. Kiev: Naukova dumka.
8. Ilqamov, M. A., Ivanov, V. A. & Qulin, B. A. (1977). *Strength, Stability and Dynamics of Shells with an elastic filler*. Moskow: Nauka.
9. Latifov, F. S. (1999). *Fluctuations shells with elastic and liquid media*. Baku: Elm.
10. Latifov, F. S. & Djafarova, I. M. (2009). Free oscillations of cylindrical shells reinforced ribs cross-c filler system, under axial compression and taking into account the friction. *Yestestvennie nauki i texniki*, No. 5(43), pp. 38-44.
11. Djafarova, I. M. (2011). The problem of free axisymmetric vibrations of a loaded axial compressive forces ribbed cylindrical shells filled environment and taking into account the friction. *Izvestiya Bakinskogo Qosudarstvennoqo Universiteta. Fiziko-matematicheskaya seriya*, No. 3, pp. 86-93.

УДК 539

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТВЕРДОЙ СРЕДОЙ И ЖИДКОСТЬЮ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Мусаев З. С., к. т. н., доцент,  
Мамедрзаева Ф. Т., докторант

*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,  
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

В данной статье исследованы вынужденные колебания подкрепленной перекрестными системами ребер ортотропной цилиндрической оболочки с твердой и жидкой средой под действием пульсирующего во времени внешнего радиального давления. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построена система уравнения для определения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с твердой средой и жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на твердую среду определяются из решений уравнения движения жидкости, написанного в потенциалах. Получены аналитические формулы для нахождения перемещений точек срединной поверхности продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с жидкостью.

*Ключевые слова: динамическая нагрузка, вынужденные колебания, оболочка, идеальная жидкость, напряжение, подкрепление, принцип вариации.*

## ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПІДКРІПЛЕНОЇ ПЕРЕХРЕСНИМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТВЕРДИМ СЕРЕДОВИЩЕМ І РІДИНОЮ

Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Мусаєв З. С., к. т. н., доцент,  
Мамедрзаєва Ф. Т., докторант

*Азербайджанський Архітектурно-Будівельний Університет,  
вул. А. Султанова 5, м. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

У статті досліджено вимушені коливання підкріпленої перехресними система ребер ортотропної циліндричної оболонки з твердим і рідким середовищем під дією пульсуючого в часі зовнішнього радіального тиску. На основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона побудовано системи рівнянь для визначення переміщень точок срединної поверхні поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки при динамічній взаємодії з твердим середовищем і рідиною. Діючі поверхневі навантаження з боку рідини на тверде середовище визначаються з рішень рівняння руху рідини, написаного в потенціалах. Отримано аналітичні формули для знаходжень переміщень точок срединної поверхні поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки, що контактує з рідиною.

*Ключові слова: динамічне навантаження, вимушені коливання, оболонка, ідеальна рідина, напруга, підкріплення, принцип варіації.*

## FORCED BY FLUIDS OF REFER OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH SOLID ENVIRONMENT AND LIQUID BY CROSS-SIDED SYSTEMS

Latifov F. S., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Musaev Z. S., Ph.D., Associate Professor, Mammadrzaeva F. T., doctoral student

<sup>1</sup>*Azerbaijan Architecture and Construction University,  
Str. A. Sultanova, 5, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*

flatifov@mail.ru

In this paper we study the forced oscillations of an orthotropic cylindrical shell reinforced by a crossover system with a solid and liquid medium under the action of an external radial pressure pulsing in time. Based on the variational principle of Ostrogradskii-Hamilton, systems of equations are constructed for determining the displacement of points of the middle surface of a longitudinally supported orthotropic cylindrical shell, under dynamic interaction with a solid medium and a liquid. The actual surface loads from the liquid to the solid are determined from the solutions of the fluid motion equation written in potentials. Analytic formulas are obtained for finding the displacements of the points of the middle surface of a longitudinally supported orthotropic cylindrical shell in contact with a liquid.

*Key words: dynamic load, forced oscillations, shell, ideal fluid, stress, reinforcement, principle of variation.*

### ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной техники все больше базируется на достижениях фундаментальных и прикладных научных исследований. Инженерные сооружения и конструкции усложняются, поэтому их проектирование трудно представить без предварительного подробного расчета поведения этих конструкций или их элементов в тех или иных условиях.

Изучение колебательных процессов имеет большое значение для современной техники. Развитие ее связано с ростом скоростей движения, давлений, температур, с непрерывным возрастанием мощности и быстроходности машин и механизмов, увеличением аэродинамического воздействия потока протекающей среды. Вместе с тем наблюдается стремление к лучшему использованию несущей способности конструкций и уменьшению их веса. Это влечет за собой увеличение воздействия динамических нагрузок на элементы машин и сооружений.

Отметим, что описание в литературе решения относится преимущественно к свободному колебанию подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки без среды [1]. Колебание гладких изотропных цилиндрических оболочек со средой достаточно полностью исследовано в работах [2, 3]. Поведение деформируемых гладких оболочек с протекающей жидкостью рассмотрено в монографии [4, 5]. Колебание поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек с протекающей идеальной жидкостью в среде исследовано в работе [6]. Собственные колебания в бесконечной упругой среде усиленные перекрестной системой ребер изотропной цилиндрической оболочки с протекающей идеальной жидкостью, рассмотрены в работе [7].

В работе [8] исследуется задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью.

Как следует из приведенного обзора, практически отсутствуют работы, посвященные вынужденным колебаниям анизотропных ребристых оболочек с наполнителем, имеющим центральный канал, заполненный жидкостью. Поэтому исследование вынужденных колебаний ребристых анизотропных цилиндрических оболочек с наполнителем, имеющим центральный канал, заполненный жидкостью, имеет большое практическое значение.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются вынужденные колебания ортотропных ребристых оболочек с заполнителем, имеющим центральный канал, который заполнен идеальной движущейся жидкостью. Исследование задачи о вынужденных колебаниях подкрепленной перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с заполнителем и с протекающей жидкостью, сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек, среды и жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Уравнение движения ребристой оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left[ (b_{11} + \gamma_c^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + b_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u + (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi \partial \theta} - \left[ (b_{11} + b_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] w - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} q_x, \\ & (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ b_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (G_{12} + b_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \mathcal{G} - (b_{12} + b_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial w}{\partial \theta} = \rho_2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t_1^2} + \frac{R^2}{2h} q_\theta, \\ & - \left[ (b_{11} + b_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] u - (b_{12} + b_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} + \\ & \quad + \left\{ b_{11} + 2b_{12} + b_{22} + \gamma_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)} + (\delta_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \quad \left. + a^2 \left[ (b_{11} + \eta_c^{(1)}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(b_{11} + b_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + (b_{12} + \eta_{s1}^{(2)} + \eta_{s2}^{(2)}) \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \right\} w + \rho_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} (q_z + q_{zz} + q_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho_1 = 1 + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c^{(1)}$ ,  $\rho_2 = 1 + \bar{\rho}_s \bar{\gamma}_s^{(2)}$ ,  $\rho_3 = 1 + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c^{(2)} + \bar{\rho}_s \bar{\gamma}_s^{(2)}$ ,  $\bar{\gamma}_c^{(1)} = \varphi_1^1$  ( $\varphi_1^1$  – отношение веса всех ребер к весу оболочки),  $\bar{\gamma}_s^{(2)} = \frac{F_s}{L_1 h}$ ,  $\delta_s^{(2)} = \frac{h_s}{R} \bar{\gamma}_s^{(2)}$ ,  $\gamma_s^{(2)} = \frac{E_s (1 - \nu^2)}{G_{12}} \bar{\gamma}_s^{(2)}$ ,  $\bar{\rho}_c = \frac{\rho_c}{\rho_0}$ ,  $\bar{\rho}_s = \frac{\rho_s}{\rho_0}$  ( $\rho_0$ ,

$\rho_c$ ,  $\rho_s$  – плотности материалов оболочки и ребер, соответственно),  $b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ;  $b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ;  $b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ;  $b_{66} = G_{12} = G$ ,  $\delta_c^{(1)} = \frac{h_c}{r} \gamma_c^{(1)}$ ,  $\gamma_c^{(1)} = \frac{E_c}{E} (1 - \nu^2) \bar{\gamma}_c^{(1)}$ ,  $E$ ,  $\nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки,  $E_s$ ,  $E_c$  – модуль упругости материала ребер,  $a^2 = \frac{h}{12R^2}$ ,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ ,  $\eta_c^{(1)} = \frac{E_c (J_{yc} + h^2 F_c)}{2\pi R^3 h b_{66}} (1 - \nu_{12}^2)$ ,  $\eta_{s2}^{(2)} = \frac{E_s (1 - \nu_{12}^2)}{b_{66}} \bar{\eta}_s^{(2)}$ ,  $\delta_s^{(2)} = \frac{h_s}{R} \bar{\gamma}_s^{(2)}$ ,

$\eta_{s1}^{(2)} = \frac{E_s J_{xs} (1 - \nu_{12}^2)}{b_{66} L_1 R^2 h}$ ,  $\bar{\eta}_s^{(2)} = \left( \frac{h_s}{R} \right)^2 \bar{\gamma}_s^{(2)}$ ,  $L_1$  – длина оболочки,  $J_{xs}$  – момент инерции поперечного сечения ребра относительно оси  $ox$ ,  $F_c$ ,  $F_s$ ,  $J_{yc}$  – площадь и момент инерции поперечного сечения ребра соответственно относительно оси  $oz$ ,  $\xi = \frac{x}{R}$ ,  $\theta = \frac{y}{R}$ ,  $u$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $w$  – составляющие

перемещений срединной поверхности оболочки,  $t_1 = \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{G_{12}}{(1 - \nu_{12}^2) \rho_0 R^2}}$ ,  $q_x$ ,  $q_\theta$ ,  $q_z$ ,  $q_{zz}$  – давление со стороны среды и жидкости на оболочку, соответственно,  $q_0$  – внешняя

поверхностная, пульсирующая во времени нагрузка:  $q_0 = q_{00} \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi} \xi \sin \omega_1 t_1$ . Здесь индексы « $c$ » относятся к продольному, а индексы « $s$ » к поперечному ребер.

Уравнение движения среды имеет вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_x}{\partial \varphi} + 2\mu \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - 2\mu \frac{\partial \omega_r}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \omega_x}{\partial r} - \rho \frac{\partial^2 s_\varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\varphi) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial^2 s_r}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $s_x, s_\varphi, s_r$  – компоненты вектора смещений частиц среды,  $\lambda_s$  и  $\mu_s$  – модули упругости Ламе,  $\rho$  – плотность материала среды.

Объемное расширение  $\theta$  и компоненты вращения  $\omega_x, \omega_\varphi, \omega_r$  определяются из выражений:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{s_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial s_x}{\partial x}; \quad 2\omega_x = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r s_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial s_r}{\partial \varphi} \right]; \\ 2\omega_\varphi &= \frac{\partial s_r}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial r}; \quad 2\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial s_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial s_\varphi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Компоненты  $\sigma_{rx}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rr}$  тензора напряжений определяются следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= \mu \left( \frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right), \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{s_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \varphi} \right], \\ \sigma_{rr} &= \lambda \left( \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r s_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} \right) + 2\mu \frac{\partial s_r}{\partial r}. \end{aligned} \tag{3}$$

Предполагая, что основная скорость потока равна  $U$  и отклонения от этой скорости малы, воспользуемся волновым уравнением для потенциала возмущенных скоростей  $\varphi$  по [4]:

$$\Delta \tilde{\varphi} - \frac{1}{a_0^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{R \partial \xi \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{R^2 \partial \xi^2} \right) = 0. \tag{4}$$

Уравнение движения оболочки (1), среды (2) и жидкости (4) дополняются контактными условиями.

Предположим, что контакт между оболочкой и средой является жестким, т.е. при  $r = R$

Равенство перемещений

$$s_x = u, \quad s_\varphi = v, \quad s_r = w \quad (r = R). \tag{5}$$

Равенство давлений

$$q_x = -\sigma_{rx}, \quad q_\varphi = -\sigma_{r\varphi}, \quad q_r = -\sigma_{rr} \quad (r = R). \tag{6}$$

На контактной поверхности среда–жидкость соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки среды имеет вид [4]:

$$\mathcal{G}_r|_{r=a} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \Big|_{r=a} = - \left( \omega_0 \frac{\partial s_r}{\partial t_1} + U \frac{\partial s_r}{R \partial \xi} \right). \quad (7)$$

Равенство радиальных давлений со стороны жидкости на среду

$$\sigma_{rx} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rr} = -p \quad (r = a), \quad (8)$$

где  $a$  – радиус канала среды.

К контактным условиям (5)-(8) прибавляются граничные условия. Предполагается, что оболочка шарнирно оперта по краям, т.е. при  $\xi = 0$  и  $\xi = \xi_1$  ( $\xi_1 = L_1/R$ ) выполняется

$$\mathcal{G} = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0, \quad (9)$$

а для среды

$$\sigma_{xx} = 0; \quad s_\varphi = s_r = 0. \quad (10)$$

Дополняя контактными условиями (5)-(8) уравнения движения оболочки (1), среды (2) и жидкости (4), приходим к задаче о вынужденных колебаниях подкрепленной перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с упругой средой и с протекающей жидкостью. Другими словами, задача о собственных колебаниях подкрепленной перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с упругой средой и с протекающей жидкостью, сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек, среды и жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

### РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Потенциал возмущенных скоростей  $\varphi$  ищем в виде:

$$\tilde{\varphi}(\xi, r, \theta, t_1) = f(r) \cos n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1. \quad (11)$$

Используя (11), из условия (7), (8) имеем:

$$\tilde{\varphi} = -\Phi_{an} \left( \omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi} \right), \quad (12)$$

$$p = \Phi_{an} \rho_m \left( \omega_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2U \omega_0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \xi \partial t_1} + U^2 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \xi^2} \right),$$

где

$$\Phi_{an} = \begin{cases} I_n(\beta r) / I'_n(\beta r), & M_1 < 1, \\ J_n(\beta_1 r) / J'_n(\beta_1 r), & M_1 > 1, \\ \frac{R^n}{nR^{n-1}}, & M_1 = 1. \end{cases} \quad (13)$$



Здесь  $M_1 = \frac{U + \omega_0 R \omega_1 / \alpha}{a_0}$ ,  $\beta^2 = R^{-2} (1 - M_1^2) \chi^2$ ,  $\beta_1^2 = R^{-2} (M_1^2 - 1) \chi^2$ ,  $I_n$  – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $n$ ,  $J_n$  – функции Бесселя первого рода порядка  $n$ ,  $\omega_1 = \omega / \omega_0$ .

Перемещения оболочки будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin \chi \xi \cos n\varphi \sin \omega_1 t_1; \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cos \chi \xi \sin n\varphi \sin \omega_1 t_1; \\ w &= w_0 \cos \chi \xi \cos n\varphi \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь  $u_0$ ,  $\mathcal{G}_0$ ,  $w_0$  неизвестные постоянные;  $\chi$ ,  $n$  – волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно.

Далее в (1) в качестве  $q_{zz}$  должна быть взята величина  $q_{zz} = -p$ , где  $p$  – давление по (12). С учетом (14) давление  $p$  можно представить в виде:

$$p = \frac{\rho_m \Phi_{an}}{\rho_0 \omega_0^2 h} (\omega_0^2 \omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_1 \chi U + \chi^2 U^2) w. \tag{15}$$

Решение уравнения движения упругого заполнителя (2) будем рассматривать в двух вариантах: а) предполагая, что влияние инерции среды на процесс колебания незначительно; б) предполагая, что влияние инерции движения среды на процесс колебания существенно и им пренебрегать нельзя.

Для перемещений заполнителя имеем [2]:

в случае а)

$$\begin{aligned} s_x &= \left[ \left( -kr \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} - 4(1 - \nu_s) k I_n(kr) \right) A_s + k I_n(kr) B_s + \left( -kr \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4(1 - \nu_s) k K_n(kr) \right) \tilde{A}_s + k K_n(kr) \tilde{B}_s \right] \cos n\varphi \cos \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \\ s_\varphi &= \left[ -\frac{n}{r} I_n(kr) B_s - \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} C_s - \frac{n}{r} K_n(kr) \tilde{B}_s - \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} \tilde{C}_s \right] \sin n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \\ s_r &= \left[ -k^2 r I_n(kr) A_s + \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} B_s + \frac{n}{r} I_n(kr) C_s - k^2 r K_n(kr) \tilde{A}_s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} \tilde{B}_s + \frac{n}{r} K_n(kr) \tilde{C}_s \right] \cos n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1; \end{aligned} \tag{16}$$

в случае б)

$$\begin{aligned} s_x &= \left[ A_s k I_n(\gamma_e r) - C_s \frac{\gamma_t^2}{\mu_t} I_n(\gamma_t r) + \tilde{A}_s k K_n(\gamma_e r) - \tilde{C}_s \frac{\gamma_t^2}{\mu_t} K_n(\gamma_t r) \right] \times \\ &\quad \times \cos n\varphi \cos \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \\ s_\theta &= \left[ -\frac{A_s n}{r} I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s n k}{r \mu_t} I_n(\gamma_t r) - \frac{B_s}{n} \frac{\partial I_n(\gamma_t r)}{\partial r} - \frac{\tilde{A}_s n}{r} K_n(\gamma_e r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{C}_s n k}{r \mu_t} K_n(\gamma_t r) - \frac{\tilde{B}_s}{n} \frac{\partial K_n(\gamma_t r)}{\partial r} \right] \sin n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \end{aligned} \tag{17}$$

$$s_r = \left[ A_s \frac{\partial I_n(\gamma_e r)}{\partial r} - \frac{C_s k}{\mu_t} \frac{\partial I_n(\gamma_t r)}{\partial r} + \frac{B_s n}{r} I_n(\gamma_t r) + \tilde{A}_s \frac{\partial K_n(\gamma_e r)}{\partial r} - \frac{\tilde{C}_s k}{\mu_t} \frac{\partial K_n(\gamma_t r)}{\partial r} + \frac{\tilde{B}_s n}{r} K_n(\gamma_t r) \right] \cos n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1,$$

где  $k$ ,  $n$ ,  $\gamma_e$ ,  $\gamma_t$  – волновые числа, соответствующие волнам сжатия и сдвига, причем имеют место зависимости

$$\gamma_e^2 = k^2 - \mu_e^2, \quad \gamma_t^2 = k^2 - \mu_t^2.$$

Используя (16), (14), (3) и контактные условия (5), (6), получим систему алгебраических уравнений относительно постоянных  $u_0$ ,  $\mathcal{G}_0$ ,  $w_0$ ,  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$ ,  $\tilde{A}_s$ ,  $\tilde{B}_s$ ,  $\tilde{C}_s$ . Эта система имеет громоздкий вид, поэтому здесь ее не приводим. С помощью этой системы постоянные  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$ ,  $\tilde{A}_s$ ,  $\tilde{B}_s$ ,  $\tilde{C}_s$  выражаем через  $u_0$ ,  $\mathcal{G}_0$ ,  $w_0$ :

$$\begin{aligned} A_s &= \Delta^{-1} \left( \Delta_1^{(1)} u_0 + \Delta_1^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_1^{(3)} w_0 \right); & B_s &= \Delta^{-1} \left( \Delta_2^{(1)} u_0 + \Delta_2^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_2^{(3)} w_0 \right); \\ C_s &= \Delta^{-1} \left( \Delta_3^{(1)} u_0 + \Delta_3^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_3^{(3)} w_0 \right); & \tilde{A}_s &= \Delta^{-1} \left( \Delta_4^{(1)} u_0 + \Delta_4^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_4^{(3)} w_0 \right); \\ \tilde{B}_s &= \Delta^{-1} \left( \Delta_5^{(1)} u_0 + \Delta_5^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_5^{(3)} w_0 \right); & \tilde{C}_s &= \Delta^{-1} \left( \Delta_6^{(1)} u_0 + \Delta_6^{(2)} \mathcal{G}_0 + \Delta_6^{(3)} w_0 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $\Delta$  – главный определитель,  $\Delta_i^{(j)}$  – вспомогательные определители названной системы. Подставляя (18) в выражение (3) для напряжений, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[ \left( q_{11} \Delta_1^{(1)} + q_{12} \Delta_2^{(1)} + q_{13} \Delta_3^{(1)} + q_{14} \Delta_4^{(1)} + q_{15} \Delta_5^{(1)} + q_{16} \Delta_6^{(1)} \right) \cdot u_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left( q_{11} \Delta_1^{(2)} + q_{12} \Delta_2^{(2)} + q_{13} \Delta_3^{(2)} + q_{14} \Delta_4^{(2)} + q_{15} \Delta_5^{(2)} + q_{16} \Delta_6^{(2)} \right) \cdot \mathcal{G}_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left( q_{11} \Delta_1^{(3)} + q_{12} \Delta_2^{(3)} + q_{13} \Delta_3^{(3)} + q_{14} \Delta_4^{(3)} + q_{15} \Delta_5^{(3)} + q_{16} \Delta_6^{(3)} \right) \cdot w_0 \right] \cos n\varphi \cos \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \\ \sigma_{r\varphi} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[ \left( p_{11} \Delta_1^{(1)} + p_{12} \Delta_2^{(1)} + p_{13} \Delta_3^{(1)} + p_{14} \Delta_4^{(1)} + p_{15} \Delta_5^{(1)} + p_{16} \Delta_6^{(1)} \right) \cdot u_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left( p_{11} \Delta_1^{(2)} + p_{12} \Delta_2^{(2)} + p_{13} \Delta_3^{(2)} + p_{14} \Delta_4^{(2)} + p_{15} \Delta_5^{(2)} + p_{16} \Delta_6^{(2)} \right) \cdot \mathcal{G}_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left( p_{11} \Delta_1^{(3)} + p_{12} \Delta_2^{(3)} + p_{13} \Delta_3^{(3)} + p_{14} \Delta_4^{(3)} + p_{15} \Delta_5^{(3)} + p_{16} \Delta_6^{(3)} \right) \cdot w_0 \right] \sin n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1, \\ \sigma_{rr} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left[ \left( r_{11} \Delta_1^{(1)} + r_{12} \Delta_2^{(1)} + r_{13} \Delta_3^{(1)} + r_{14} \Delta_4^{(1)} + r_{15} \Delta_5^{(1)} + r_{16} \Delta_6^{(1)} \right) \cdot u_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left( r_{11} \Delta_1^{(2)} + r_{12} \Delta_2^{(2)} + r_{13} \Delta_3^{(2)} + r_{14} \Delta_4^{(2)} + r_{15} \Delta_5^{(2)} + r_{16} \Delta_6^{(2)} \right) \cdot \mathcal{G}_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left( r_{11} \Delta_1^{(3)} + r_{12} \Delta_2^{(3)} + r_{13} \Delta_3^{(3)} + r_{14} \Delta_4^{(3)} + r_{15} \Delta_5^{(3)} + r_{16} \Delta_6^{(3)} \right) \cdot w_0 \right] \cos n\varphi \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_{11} &= (\chi I_n(\chi) + \chi I_n''(\chi) + (5 - 4\nu_s) I_n'(\chi)) \chi^2; & q_{12} &= -2\chi^2 I_n'(\chi); \\ q_{13} &= -n\chi I_n(\chi); & q_{14} &= (\chi K_n(\chi) + \chi K_n''(\chi) + (5 - 4\nu_s) K_n'(\chi)) \chi^2; \\ q_{15} &= -2\chi^2 K_n'(\chi); & q_{16} &= -n\chi K_n(\chi); \\ p_{11} &= -n\chi^2 I_n(\chi); & p_{12} &= 2n(\chi I_n'(\chi) - I_n(\chi)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{13} &= \chi^2 I_n''(\chi) - \chi I_n'(\chi) + n^2 I_n(\chi); & p_{14} &= -n \chi^2 K_n(\chi); \\
 p_{15} &= 2n(\chi K_n'(\chi) - K_n(\chi)); & p_{16} &= \chi^2 K_n''(\chi) - \chi K_n'(\chi) + n^2 K_n(\chi); \\
 r_{11} &= (2(1-2\nu_s)I_n(\chi) + 2\chi I_n'(\chi))\chi^2; & r_{12} &= -2\chi^2 I_n''(\chi); \\
 r_{13} &= 2n(I_n(\chi) - \chi I_n'(\chi)); & r_{14} &= (2(1-2\nu_s)K_n(\chi) + 2\chi K_n'(\chi))\chi^2; \\
 r_{15} &= -2\chi^2 K_n''(\chi); & r_{16} &= 2n(I_n(\chi) - \chi I_n'(\chi)).
 \end{aligned}$$

Используя (19) и контактные условия (6), можно определить контактные напряжения  $q_x$ ,  $q_\theta$ ,  $q_r$ . Их представим в виде

$$\begin{aligned}
 q_x &= (\tilde{C}_{x1}A + \tilde{C}_{x2}B + \tilde{C}_{x3}C) \cos n\varphi \cos \chi\xi \sin \omega_1 t_1, \\
 q_\varphi &= (\tilde{C}_{\theta1}A + \tilde{C}_{\theta2}B + \tilde{C}_{\theta3}C) \sin n\varphi \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1, \\
 q_r &= (\tilde{C}_{r1}A + \tilde{C}_{r2}B + \tilde{C}_{r3}C) \cos n\varphi \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя (14) и (20) в (1), получаем системы неоднородных алгебраических уравнений относительно постоянных  $u_0$ ,  $\mathcal{Q}_0$ ,  $w_0$

$$a_{i1}u_0 + a_{i2}\mathcal{Q}_0 + a_{i3}w_0 = q_i \quad (i=1,2,3), \tag{21}$$

где  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $q_3 = q_{00}$ .

Элементы  $a_{i1}$ ,  $a_{i2}$ ,  $a_{i3}$  ( $i=1,2,3$ ) имеют громоздкие виды, поэтому здесь не приводятся.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенных выше зависимостей. Для геометрических и физических параметров, характеризующих системы, были приняты:  $E_c = E_s = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho_0 = \rho_c = \rho_s = 0,26 \cdot 10^4 \text{ Нс}^2/\text{м}^4$ ,  $F_c = 3,4 \text{ мм}^2$ ,  $J_{yc} = 5,1 \text{ мм}^4$ ,  $h_c = 1,39 \text{ мм}$ ,  $R = 160 \text{ мм}$ ,  $h = 0,45 \text{ мм}$ ,  $h_s = 1,95 \text{ мм}$ ,  $I_{xh} = 19,9 \text{ мм}^4$ ,  $I_{kp.s} = 0,48 \text{ мм}^4$ ,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_l = 2,25a_t$ ,  $a_t = 308 \text{ м/с}$ .

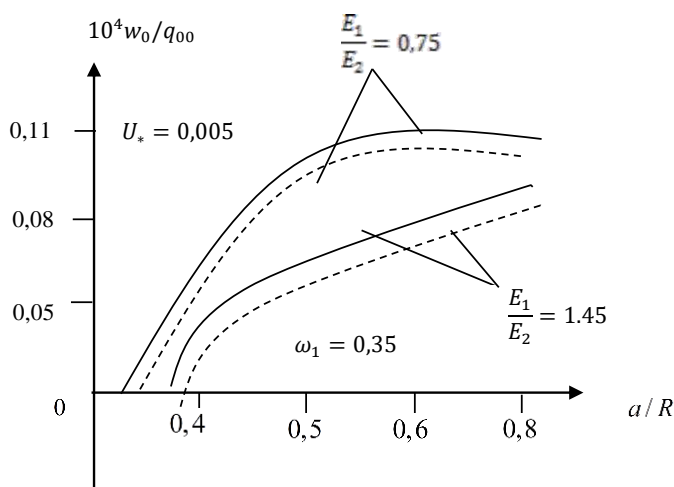


Рис. 1. Зависимость прогиба оболочки от радиуса канала твердой среды

Результаты счета представлены на рис. 1 и на рис. 2. Причем, на рис. 1 и рис. 2 пунктирные кривые соответствуют случаю а), а сплошные кривые соответствуют случаю б). На рис. 1 приведена зависимость прогиба оболочки от радиуса канала среды, а на рис. 2 зависимость прогиба оболочки от плотности жидкости для различных отношений модулей упругости материала оболочки. Счет показывает, что с увеличением радиуса канала среды прогибы оболочки увеличиваются, а с увеличением плотности жидкости прогибы оболочки уменьшаются. Из рисунков видно, что учет инерционных свойств среды приводит к увеличению прогиба. Кроме того, с увеличением отношений  $E_1/E_2$  прогиб оболочки уменьшается.

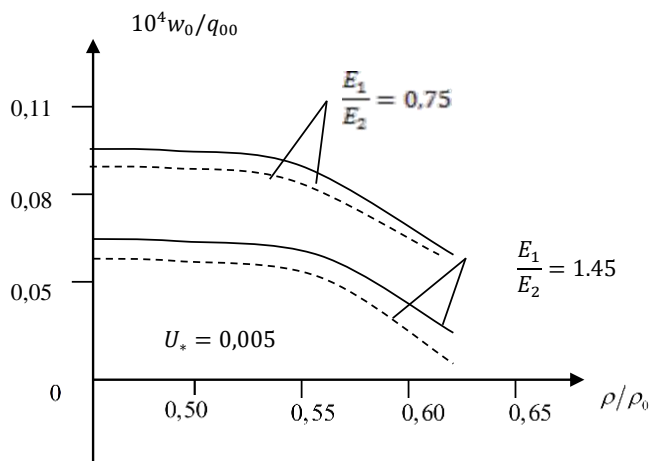


Рис. 2. Зависимость прогиба оболочки от плотности жидкости

### ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 367 с.
2. Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. Москва: Наука, 1977. 332 с.
3. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999. 164 с.
4. Вольмир А. С. Оболочки в протоколе жидкости и газа. Задачи гидроупругости. Москва: Наука, 1979. 320 с.
5. Болотин В. В. Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости. *Инженерный сборник*. 1956. № 24. С. 210–218.
6. Латифов Ф. С., Салманов О. Ш. Задача о собственных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. *Механика и машиностроение*. 2008. № 2. С. 18–20.
7. Салманов О. Ш. Задача о собственных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной жидкостью. *Механика и машиностроение*. 2008. № 1. С. 46–48.
8. Латифов Ф. С., Салманов О. Ш. Задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2008. № 4(5). С. 45–48.

### REFERENCES

1. Amiro, I. Ya, Zarutskiy, V. A. & Polyakov, P. S. (1973). Ribbed cylindrical shell. Kiev: Naukova dumka.
2. Il'gamov, M. A., Ivanov, V. A. & Gulin, B. V. (1977). The strength of the stability and dynamics of shells with elastic filler. Moscow: Nauka.
3. Latifov, F. S. (1999). Fluctuations of shells with elastic and a liquid medium. Baku: Elm.

4. Vol'mir, A. S. (1979). Shell in the minutes of the liquid and gas. Problems hydroelasticity. Moscow: Nauka.
5. Bolotin, V. V. (1956). Oscillations and stability of elastic cylindrical shell in the flow of a compressible fluid. Inzhenernyy sbornik, No. 24, pp. 210-218.
6. Latifov, F. S. & Calmanov, O. SH. (2008). The problem of its own axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with fluid, Mekhanika. Mashinostroenie, No. 2, pp. 18-20.
7. Calmanov, O. SH. (2008). The problem of the natural vibrations of the system of cross-reinforced edges and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with fluid. Mekhanika. Mashinostroenie, No. 1, pp. 46-48.
8. Latifov, F. S. & Calmanov, O. SH. (2008). The problem of forced axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with fluid. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, No. 4(5), pp. 45-48.

УДК 539.3

## КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТВЕРДОЙ СРЕДОЙ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Халилова Э. Н., докторант

*Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет,  
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

В предлагаемой статье исследовано свободное колебание продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой. Используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, построены системы уравнений движения продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой. Неоднородность материала оболочки по толщине учтена, принимая, что модуль Юнга и плотность материала оболочки являются функциями нормальной координаты. При исследовании свободных колебаний продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой, рассмотрены два случая неоднородности: а) линейный; б) квадратичный. Построены частотные уравнения и реализованы численно. Построены характерные кривые зависимости.

*Ключевые слова: подкрепленная оболочка, ортотропная оболочка, вариационный принцип, твердая среда, свободное колебание.*

## КОЛИВАННЯ ПОЗДОВЖНЬО ПІДКРІПЛЕНОЇ НЕОДНОРІДНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТВЕРДИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Халілова Е. Н., докторант

*Азербайджанський Архітектурно-Будівельний Університет,  
вул. А. Султанова 5, м. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

У запропонованій статті досліджено вільне коливання поздовжньо підкріпленої, ортотропної, неоднорідної за товщиною циліндричної оболонки, що контактує з твердим середовищем. Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, побудовані системи рівнянь руху поздовжньо підкріпленої, ортотропної, неоднорідної за товщиною циліндричної оболонки, що контактує з твердим середовищем. Неоднорідність матеріалу оболонки за товщиною

враховано, приймаючи, що модуль Юнга і щільність матеріалу оболонки є функціями нормальної координати. При дослідженні вільних коливань поздовжньо підкріпленої, ортотропної, неоднорідної за товщиною циліндричної оболонки, що контактує з твердим середовищем, розглянуті два випадки неоднорідності: а) лінійний; б) квадратичний. Побудовані частотні рівняння і реалізовані чисельно. Побудовані характерні криві залежності.

*Ключові слова: підкріплена оболонка, ортотропна оболонка, варіаційний принцип, тверде середовище, вільне коливання.*

## OSCILLATIONS OF A PERMANENTLY REINFORCED HETEROGENEOUS ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH A SOLID MEDIUM

Latifov F. S., doctor of physical and mathematical sciences, professor,

Khalilova E. N, doctoral student

*Azerbaijan Architecture and Construction University,*

*Str. A. Sultanova, 5, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*

flatifov@mail.ru

The free oscillation of a longitudinally reinforced, orthotropic, non-uniform in thickness cylindrical shell contacting with a solid medium is investigated in the present paper. Using the Hamilton-Ostrogradsky variational principle, systems of equations of motion of a longitudinally reinforced, orthotropic, inhomogeneous in thickness cylindrical shell contacting with a solid medium are constructed. The inhomogeneity of the shell material over the thickness is taken into account, assuming that the Young's modulus and the density of the shell material are functions of the normal coordinate. When investigating free oscillations of a longitudinally reinforced, orthotropic, inhomogeneous in thickness cylindrical shell contacting with a solid medium, two cases of inhomogeneity are considered: a) linear b) quadratic. Frequency equations are constructed and numerically realized. Characteristic dependency curves are constructed.

*Key words: reinforced shell, orthotropic shell, variational principle, solid medium, free oscillation.*

### ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость, колебания и расчеты на прочность тонкостенных элементов конструкций оболочечного типа, контактирующих со средой, играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Для придания большей жесткости оболочки подкрепляются различными ребрами. Такие конструкции могут находиться в контакте с твердой средой и подвергаться не только статическим нагрузкам, но и динамическим. Однако, поведению неоднородных ортотропных тонкостенных элементов конструкций, имеющих ребра, учет их дискретного расположения, влияния среды исследованы недостаточно. Поэтому разработка математических моделей для исследования поведений подкрепленных неоднородных ортотропных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и колебаний, а также выбора рациональных параметров конструкции, контактирующей с твердой средой, являются актуальными задачами.

Отметим, что в работе [1] с помощью вариационного принципа решена задача о собственном колебании поперечно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с внешней средой и протекающей жидкости. Влияния внешней среды учтены с помощью системы уравнений Ламе в перемещениях. Работа [2] посвящена исследованию свободных колебаний, усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой. В работе [3] приведены результаты исследования свободных колебаний продольно подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки с заполнителем. В работе [4] с помощью асимптотического метода построены частотные уравнения цилиндрических оболочек, контактирующих с твердой и жидкой средой, получены приближенные частоты уравнения и простые расчетные формулы, позволяющие находить значения минимальных собственных частот колебаний рассмотренной системы. Анализ приведенных работ подсказывает, что колебание продольно подкрепленной,

ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с твердой средой, изучены недостаточно.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рибристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной оболочки и жестко с ней соединенных по линиям контакта ребер. Принимается, что напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости. Кроме того, предполагается, что все ребра образуют регулярную систему. Под регулярной системой продольных и кольцевых ребер понимается такая система, в которой жесткости всех ребер, их взаимные расстояния равны, а расстояния от края оболочки до ближайшего к нему ребра равно расстоянию между ребрами.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной поверхности  $u$ ,  $\mathcal{G}$  и  $w$ . При этом углы поворота нормальных элементов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  относительно координатных линий  $y$  и  $x$  выражаются через  $w$  и  $\mathcal{G}$  с помощью зависимостей  $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\mathcal{G}}{R}\right)$ , где  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений ( $u_i$ ,  $\mathcal{G}_i$ ,  $w_i$   $i$ -го продольного стержня), необходимо определить также углы закручивания  $\varphi_{kpi}$ .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$u_i(x) = u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i); \quad \mathcal{G}_i(x) = \mathcal{G}(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \quad w_i(x) = w(x, y_i);$$

$$\varphi_i = \varphi_1(x, y_i); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i).$$

Здесь  $h_i = 0,5h + H_i^1$ ,  $h$  – толщина оболочки,  $H_i^1$  – расстояния от осей  $i$ -го продольного стержня до поверхности оболочки,  $x_i$  и  $y_i$  – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой,  $\varphi_i$ ,  $\varphi_{kpi}$  – углы поворота и закручивания поперечных сечений продольных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны жидкости могут быть сведены к составляющим  $q_x$ ,  $q_y$  и  $q_z$ , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной цилиндрической оболочки с твердой средой получим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Для учета неоднородности по толщине цилиндрической оболочки будем исходить из трехмерного функционала. Существуют различные способы учета неоднородности материала оболочки. Один из них заключается в том, что модуль Юнга и плотность

материала оболочки принимаются функциями нормальной координаты  $z$  [5]:  $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1(z)$ ,  $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_2(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$ . Предполагается, что коэффициент Пуассона постоянный. В этом случае функционал полной энергии цилиндрической оболочки имеет вид:

$$V = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int \int \left( \sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \tau_{xy} e_{xy} + \rho(z) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz. \quad (1)$$

Здесь

$$\sigma_x = b_{11}(z) e_x + b_{12}(z) e_y; \quad \sigma_y = b_{12}(z) e_x + b_{22}(z) e_y; \quad \sigma_{xy} = b_{66}(z) e_{xy}; \quad (2)$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{w}{R}; \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}, \quad (3)$$

где

$$b_{11}(z) = \frac{\tilde{E}_1(z)}{1-\nu_1\nu_2}; \quad b_{22} = \frac{\tilde{E}_2(z)}{1-\nu_1\nu_2}; \quad b_{12}(z) = \frac{\nu_2\tilde{E}_1(z)}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1\tilde{E}_2(z)}{1-\nu_1\nu_2}; \quad b_{66}(z) = G_{12}(z) = G(z).$$

Учитывая (2) и (3) в (1), можно написать:

$$V = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int \int \left[ b_{11}(z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2b_{12}(z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b_{22}(z) \left( \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)^2 + 2w \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + w^2 \right) + b_{66}(z) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)^2 \right) + \rho(z) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz. \quad (4)$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации  $i$ -го продольного ребра таковы [6, 7]:

$$P_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \tilde{E}_i F_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{G}_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (5)$$

Кинетическая энергия ребер записывается в виде [6, 7]:

$$K_i = \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx. \quad (6)$$

В выражениях (4) и (6)  $F_i$ ,  $J_{zi}$ ,  $J_{yi}$ ,  $J_{kpi}$  – площадь и моменты инерции поперечного сечения  $i$ -го продольного стержня соответственно относительно оси  $Oz$  и оси, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении;  $\tilde{E}_i$ ,  $\tilde{G}_i$  – модули упругости и сдвига материала  $i$ -го продольного  $t$  – временная координата,  $\rho_i$  – соответственно плотности материалов, из которых изготовлен  $i$ -й продольный стержень.

Потенциальная энергия внешних поверхностных нагрузок, действующих со стороны твердых сред, приложенных к оболочке, определяется как работа, совершаемая этими



нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_0^L \int_0^{2\pi} (q_x u + q_\theta \vartheta + q_z w) dx dy. \quad (7)$$

Полная энергия системы равна сумме энергий упругих деформаций оболочки и продольных ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок, действующих со стороны твердых сред:

$$J = V + \sum_{i=1}^{k_1} (\Pi_i + K_i) + A_0. \quad (8)$$

Здесь  $k_1$  – количество продольных ребер.

Действующие со стороны среды на продольно подкрепленную оболочку поверхностные нагрузки  $q_x$ ,  $q_y$  и  $q_z$  определяются из решений системы [8, 9]:

$$\begin{aligned} (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} - \frac{2\mu_s}{r} \frac{\partial \omega_x}{\partial \varphi} + 2\mu_s \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial x} - \rho_s \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \varphi} - 2\mu_s \frac{\partial \omega_r}{\partial x} + 2\mu_s \frac{\partial \omega_x}{\partial r} - \rho_s \frac{\partial^2 s_\varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} - \frac{2\mu_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\varphi) + \frac{2\mu_s}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} - \rho_s \frac{\partial^2 s_r}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $s_x$ ,  $s_\varphi$ ,  $s_r$  – продольная, крутильная и радиальная компоненты вектора перемещения среды, соответственно;  $\lambda_s$ ,  $\mu_s$  – коэффициенты Ламе для среды;  $x$ ,  $r$ ,  $\theta$  – продольная, нормальная и окружная координаты.

Объемное расширение  $\tilde{\theta}$  и компоненты вращения  $\omega_x$ ,  $\omega_\theta$ ,  $\omega_r$  определяются из выражений:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{s_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial s_x}{\partial x}; \quad 2\omega_x = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (rS_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial s_r}{\partial \varphi} \right]; \\ 2\omega_\varphi &= \frac{\partial s_r}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial r}; \quad 2\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial s_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial s_\varphi}{\partial x}. \end{aligned}$$

В свою очередь, напряжения посредством функций  $s_x$ ,  $s_\varphi$ ,  $s_r$  выражаются [8, 9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= \mu_s \left( \frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right); \quad \sigma_{r\theta} = \mu_s \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{s_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} \right]; \\ \sigma_{rr} &= \lambda_s \left( \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rs_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu_s \frac{\partial s_r}{\partial r}. \end{aligned} \quad (10)$$

Предположим, что контакт между оболочкой и средой является скользящим, т.е. при  $r = R$

$$w = s_z, \quad (11)$$

$$q_x = -\sigma_{rx} = 0, \quad q_\theta = -\sigma_{r\theta} = 0, \quad q_z = -\sigma_{rr}. \quad (12)$$

Далее рассматриваются шарнирно опертые оболочки, т.е. при  $x = 0$  и  $x = L_1$  выполняются следующие граничные условия:

$$\mathcal{G} = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0.$$

Компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= A \cos n\theta \cos kx \sin \omega t; \quad \mathcal{G} = B \sin n\theta \sin kx \sin \omega t; \\ w &= C \cos n\theta \sin kx \sin \omega t, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $A, B, C$  – неизвестные постоянные,  $\omega$  – искомая частота.

Используя решение системы (9) перемещением точек срединной поверхности оболочки (13) и контактные условия (11), (12), можно определить контактное давление  $q_z$ . Это выражение представим в виде:

$$q_z = q_z^{(0)} C \cos n\theta \sin kx \sin \omega t.$$

Здесь, в случае малых инерционных действий среды на процесс колебаний системы,  $q_z^{(0)}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} q_z^{(0)} &= -\mu_s \Delta^{-1} \left\{ \left( 2(1-2\nu_s) I_n(k^*) + 2k^* I_n'(k^*) \right) k^{*2} \times \right. \\ &\left[ 2k^{*2} (k^{*2} - n^2) \frac{I_n'(k^*)}{I_n(k^*)} + 2n^2 k^* \right] - 2 \left( k^* I_n'(k^*) - (k^{*2} + n^2) I_n(k^*) \right) k^{*3} \times \\ &\left[ 2(3-2\nu_s) k^* \frac{I_n'(k^*)}{I_n(k^*)} - 2n^2 \right] + 2n \left( I_n(k^*) - k^* I_n'(k^*) \right) k^{*3} \times \\ &\left. \times \left[ 2(3-2\nu_s) k^* \frac{I_n'(k^*)}{I_n(k^*)} - 2n^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае, когда инерционные действия среды на процесс колебаний системы существенны,  $q_z^{(0)}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} q_z^{(0)} &= \frac{E_s}{1+\nu_s} I_n(\gamma_l^*) \left[ \frac{I_n(\gamma_l^*)}{I_n(\gamma_l^*)} \left( -\gamma_l^* \frac{I_n'(\gamma_l^*)}{I_n(\gamma_l^*)} + \gamma_l^{*2} + n^2 - \frac{\nu_s}{1-2\nu_s} \mu_l^{*2} \right) \times \right. \\ &\left. - n^2 k^{*2} \mu_t^* + \frac{R^4 k^{*3} \gamma_t^{*2} I_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n^2(\gamma_t^*)} + \frac{2nk^* \gamma_l^* \mu_t^* I_n'(\gamma_l^*)}{I_n(\gamma_l^*)} + \frac{2nk^{*3} \gamma_t^* I_n'(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_t^*)} \right] \times \\ &\times \frac{-\frac{k^{*3} \gamma_l^* \gamma_t^{*2} I_n'(\gamma_l^*) I_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_l^*) I_n^2(\gamma_t^*)}}{-\frac{k^{*3} \gamma_l^* \gamma_t^{*2} I_n'(\gamma_l^*) I_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_l^*) I_n^2(\gamma_t^*)}} + \frac{2nk^* \gamma_l^* \mu_t^* I_n'(\gamma_l^*)}{I_n(\gamma_l^*)} + \frac{2nk^{*3} \gamma_t^* I_n'(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_t^*)} \times \\ &\times \left( -n^2 + n\gamma_t^* \frac{I_n'(\gamma_t^*)}{I_n(\gamma_t^*)} + \frac{\nu_s}{1-2\nu_s} n\gamma_t^* \left( \gamma_t^* - \gamma_t^* \frac{I_n'(\gamma_t^*)}{I_n(\gamma_t^*)} \right) \right) + \\ &\left. + \left( \frac{k^* \gamma_t^* I_n'(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_t^*)} + \gamma_t^{*2} + n^2 - \frac{\nu_s}{1-2\nu_s} \frac{2k^* \gamma_t^{*2}}{\mu_t^*} \right) \cdot \frac{\left[ -\frac{k^{*3} \gamma_l^* \gamma_t^{*2} I_n'(\gamma_l^*) I_n'^2(\gamma_t^*)}{\mu_t^* I_n(\gamma_l^*) I_n^2(\gamma_t^*)} \right]}{2k^{*2} \gamma_l^* \gamma_t^* \frac{I_n'(\gamma_l^*) I_n(\gamma_t^*)}{I_n(\gamma_l^*) I_n(\gamma_t^*)} - 2n^2 k^{*2}} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $I_n$  – модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка первого рода,  $k, n, \gamma_e, \gamma_i$  – волновые числа,  $\gamma_e^2 = k^2 - \mu_e^2, \gamma_i^2 = k^2 - \mu_i^2, k^* = kR, \gamma_i^* = \gamma_i R, \gamma_e^* = \gamma_e R, \mu_i^* = \mu_i R, \mu_e^* = \mu_e R$ .

Дополняя контактными условиями (11), (12) полной энергии системы (8), уравнение движения среды (9), приходим к контактной задаче о колебаниях неоднородной по толщине цилиндрической ортотропной оболочки, подкрепленной продольными ребрами и заполненной средой.

Частотные уравнения ребристой неоднородной оболочки заполненной средой получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\delta W = 0, \tag{16}$$

где  $W = \int_{t'}^{t''} J dt$  – действие по Гамильтону,  $t'$  и  $t''$  – заданные произвольные моменты времени.

Используя (4)-(7), (14) или (15), (13) и (16), задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка

$$a_{i1}u_0 + a_{i2}v_0 + a_{i3}w_0 = 0 \quad (i=1,2,3). \tag{17}$$

Элементы  $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$  ( $i=1,2,3$ ) имеют громоздкий вид, поэтому здесь не приводятся. Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (17) возможно лишь в случае, когда  $\omega_1$  – корень ее определителя. Определение  $\omega_1$  сводится к трансцендентному уравнению, так как  $\omega_1$  входит в аргументы функции Бесселя:

$$\det \|a_{ij}\| = 0, \quad i, j = 1, 3. \tag{18}$$

Частотное уравнение (18) решено численно при следующих исходных данных:  $R = 160 \text{ мм};$

$\tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; h = 0,45 \text{ мм}; L = 800 \text{ мм}; \rho_i = 7,8 \text{ г/см}^3; b_{11} = 18,3 \text{ ГПа}, b_{12} = 2,77 \text{ ГПа},$

$b_{22} = 25,2 \text{ ГПа}, b_{66} = 3,5 \text{ ГПа}, F_j = 5,75 \text{ мм}^2; I_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4; \frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1};$

$\frac{I_{kp,i}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; \frac{I_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}, \alpha = 0,5; a_e = 2,25 a_i; a_i = 308 \text{ м/сек}.$

Рассмотрены два вида законов изменений неоднородности: линейный –

$\tilde{E}_i(z) = \tilde{E}_{0i} \left[ 1 + \alpha \left( \frac{z}{h} \right) \right] \quad \rho(z) = \rho_0 \left[ 1 + \alpha \left( \frac{z}{h} \right) \right]$  и параболический –  $\tilde{E}_i(z) = \tilde{E}_{0i} \left[ 1 + \alpha \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right]$

$\rho(z) = \rho_0 \left[ 1 + \alpha \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right]$ . Здесь  $\tilde{E}_{0i}$  ( $i=1,2$ ) – модуль Юнга,  $\alpha$  – параметр неоднородности.

Отметим, что при линейном законе изменение  $|\alpha| < 1$ , при параболическом изменении  $\alpha$  – произвольная.

Результаты счета представлены на рис. 1 и на рис. 2. На рис. 1 показаны зависимости параметра частоты  $\omega_1$  от относительной плотности среды  $\rho_s/\rho_0$  для различных законов изменений неоднородности по толщине оболочки. Видно, что увеличение плотности среды приводит к снижению частоты колебаний исследуемой системы. Рис. 2 иллюстрирует влияние количества продольных ребер  $k_1$  на параметры частоты  $\omega_1$  колебаний рассмотренной системы. Видно, что с увеличением  $k_1$  параметры частоты  $\omega_1$  колебаний системы сначала увеличиваются, а затем при определенном значении  $k_1$  начинают уменьшаться. Это объясняется тем, что с увеличением  $k_1$  вес стержней увеличивается и это

приводит к существенному влиянию их инерционных свойств на процесс колебаний. Результаты счета показывают, что учет неоднородности приводит к снижению значений собственных частот колебаний рассмотренной системы по сравнению с собственными частотами колебаний этой же системы, когда оболочка однородная. Кроме того, расчеты показывают, что с увеличением жесткости материала оболочки в продольном направлении частоты колебаний системы увеличиваются.

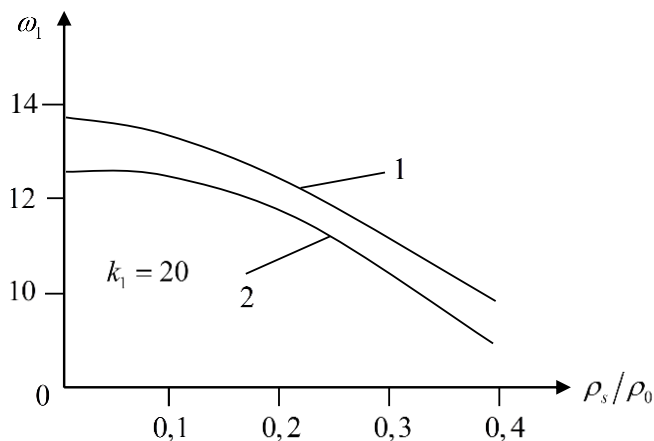


Рис. 1. Зависимость параметра частот колебаний от относительной плотности среды:  
1 – линейный закон, 2 – параболический закон

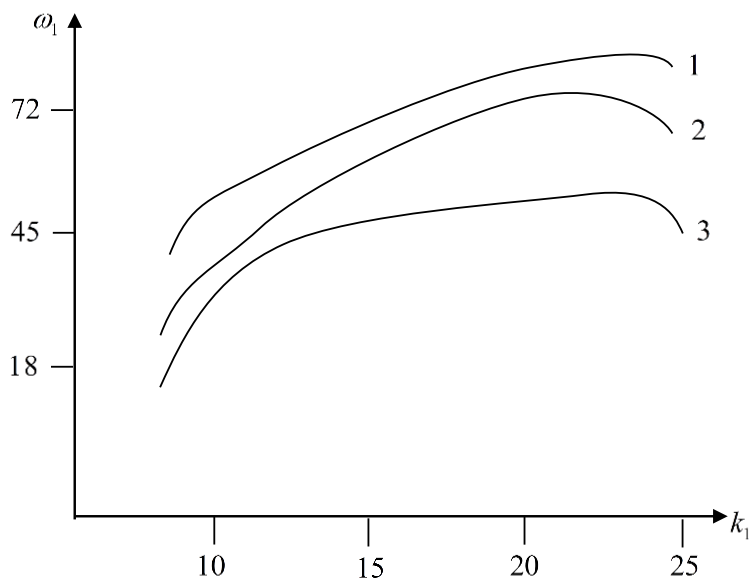


Рис. 2. Зависимость параметра частот от количества продольных ребер:  
1 – однородная оболочка, 2 – линейный закон, 3 – параболический закон

### ЛИТЕРАТУРА

1. Латифов Ф. С., Искендеров Р. А., Микаилов С. Б. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в среде. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2013. Вып. 21. С. 132–139.
2. Латифов Ф. С., Сулейманова С. Г. Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой. *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. 2009. № 1. С. 59–62.
3. Сулейманова С. Г. Свободные колебания продольно подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки с наполнителем. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*. 2007. Vol. XXVII. P. 135–140.
4. Latifov F. S., Seyfullayev F. A. Asymptotic analysis of oscillation eigenfrequency of orthotropic cylindrical shells in infinite elastic medium filled with liquid. *Trans. of NAS. Acad. of Azerb. ser. of physical-technical and mathematical sciences*. 2004. Vol. XVIV, N 1. P. 227–230.

5. Ломакин В. А. Теория неоднородных тел. Москва: Изд-во МГУ, 1975. 355 с.
6. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
7. Абовский Н. П. Ребристые оболочки. Ч. 1. Красноярск: Красноярский политехнический институт, 1967. 64 с.
8. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999. 164 с.
9. Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. В. Прочность устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. Москва: Наука, 1977. 332 с.

#### REFERENCES

1. Latifov, F. S., Isgkenderov, R. A. & Mikailov, S. B. (2013). Fluctuation transversely reinforced orthotropic cylindrical shells with a flowing liquid in a medium. Problemi vichislitelnoy mekhaniki i prochnosti konstrukchiy, Iss. 21, pp. 132-139.
2. Latifov, F. S. & Suleymanova, S. Q. (2009). The problem of free oscillations of a reinforced system of cross-by axial compressive strength of cylindrical shells filled with a medium. Mexanika Mashin, Mexanizmov i Materilov, No. 1, pp. 59-62.
3. Suleymanova, S. G. (2007). Free vibrations longitudinally reinforced and loaded with axial compressive forces of a cylindrical shell with a filler. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, Vol. XXVII, pp. 135-140.
4. Latifov, F. S. & Seyfullayev, F. A. (2004). Asymptotic analysis of oscillation eigenfrequency of orthotropic cylindrical shells in infinite elastic medium filled with liquid. Trans.of NAS. Acad. of Azerb. ser. of physical-technical and mathematical sciences, Vol. XXIV, No. 1, pp. 227-230.
5. Lomakin, V. A. (1975). The theory of heterogeneous bodies. Moscow: Izdatelstvo MGU.
6. Amiro, I. Ya., Zaruchkiy, V. A. & Polyakov, P. S. (1973). Ribbed cylindrical shells. Kiev: Naukova dumka.
7. Abovskiy, N. P. (1967). Ribbed shells. Pt. 1. Krasnoiarstk: Krasnoiarstkii politekhnicheskii institut.
8. Latifov, F. S. (1999). Fluctuations shells with elastic and liquid media. Baku: Elm.
9. Ilqamov, M. A., Ivanov, V. A. & Qulin, B. A. (1977). Strength, Stability and Dynamics of Shells with an elastic filler. Moscow: Nauka.

УДК 531.383

### ВОПРОСЫ МЕТОДОЛОГИИ АНАЛИЗА, УПРАВЛЕНИЯ, РЕГУЛИРОВАНИЯ, ИДЕНТИФИКАЦИИ И НАБЛЮДЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Леонтьева В. В., к. ф.-м. н., доцент, Кондратьева Н. А., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

В статье разработана и представлена методика проведения анализа гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение, которая позволяет систематизировать основные этапы, методы и подходы к получению эффективного алгоритма комплексного исследования и регулирования гироскопических систем в условиях полной и неполной информации об исследуемом объекте. Выделена связь между анализируемыми свойствами систем и рядом задач управления, регулирования, наблюдения, идентификации и адаптации. Предложены отдельные задачи, опирающиеся на результаты разработанной методики, стоящие при основном и/или дополнительном изучении и моделировании гироскопических систем.

*Ключевые слова:* гироскоп, гироскопическая система, методика, анализ, управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость, чувствительность, адаптируемость.

## ПИТАННЯ МЕТОДОЛОГІЇ АНАЛІЗУ, КЕРУВАННЯ, РЕГУЛЮВАННЯ, ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТА СПОСТЕРЕЖЕННЯ ГІРОСКОПІЧНИХ СИСТЕМ

Леонтьєва В. В., к. ф.-м. н., доцент, Кондрат'єва Н. О., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

У статті розроблено і представлено методика проведення аналізу гіроскопічних систем і математичних моделей, що описують їх поведінку, яка дозволяє систематизувати основні етапи, методи та підходи до отримання ефективного алгоритму комплексного дослідження і регулювання гіроскопічних систем в умовах повної та неповної інформації про досліджуваний об'єкт. Виділено зв'язок між аналізованими властивостями систем і рядом задач керування, регулювання, спостереження, ідентифікації та адаптації. Запропоновано окремі задачі, які спираються на результати розробленої методики, ставляться при основному та/або додатковому вивченні й моделюванні гіроскопічних систем.

*Ключові слова: гіроскоп, гіроскопічна система, методика, аналіз, керованість, спостережуваність, ідентифікованість, чутливість, адаптованість.*

## QUESTIONS ABOUT METHODOLOGY OF ANALYSIS, CONTROL, REGULATION, IDENTIFICATION AND OBSERVATION OF GYROSCOPIC SYSTEMS

Leontieva V. V., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Kondratieva N. A., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

The quality of mathematical models and the usefulness of research of gyroscopic systems are fundamentally depends on the chosen methodology for quantitative and qualitative research of such systems and the applied mathematical apparatus. This paper is devoted to the disclosure of the essence and presentation of the main stages of the analysis of the main features of gyroscopic systems and mathematical models describing their behavior.

The general recommendations for the analysis of gyroscopic systems in order to identify the main regularities in the methodology for carrying out such analysis and also in the general methodology for research of gyroscopic systems formulated on their basis is proposed. The relationship between the analyzed properties of systems and a number of such problems as control, regulation, observation, identification and adaptation is obtained in this work. These recommendations are disclosed in the form of an algorithm that realizes the conceptual aspects of the methodology for studying gyroscopic systems. In this case, the above algorithm for analyzing gyroscopic systems and mathematical models describing their behavior is sufficiently enlarged. According to the goal of research, we propose to realize the research of gyroscopic systems and their mathematical models in the following areas: 1) carrying out the analysis for determination of possibility conditions of application of a precession theory and for selection the methods for constructing precessional equations of systems; study of nutation oscillations; 2) implementation of qualitative study of the behavior of solutions of differential equations, which consists in studying the properties of trajectories and their motions in phase space; analysis of the stability of the motion of gyroscopic systems; 3) investigation of the influence of gyroscopic forces on the character and stability of the motion of the studied system and on the stationary motion of gyroscopic systems; 4) determination of conditions for stabilization using gyroscopic forces of unstable potential and non-conservative systems; 5) determination and subsequent analysis of the set of reachability of gyroscopic systems; 6) research of such basic properties of gyroscopic systems as controllability, observability, identifiability, parametric sensitivity and adaptability. Such analysis is also possible in other areas, determined by the direct goal of the control and regulation problems.

In view of the characteristic features of gyroscopic systems that affect the type of mathematical models used to describe their behavior, the selection of methods that perform model analysis of an object and the search for appropriate solutions taking into account these features, as well as the stated goal and problems of the carried out research, some certain problems based on the results of the developed methodology are allocated in this work. Such problems could be used for basic and/or additional study and modeling of gyroscopic systems and are able to allow to synthesize mathematical models of the object and/or algorithms for its control, regulation, observation, identification and adaptation.

In the conclusion it should be noted that proposed methodology allows to systematize the main stages, methods and approaches for obtaining an effective algorithm for the complex investigation and regulation of a gyroscopic systems in conditions of complete and incomplete information about the studied object. The main attention is paid to the conceptual aspects and methodology of research.

*Key words: gyroscope, gyroscopic system, methodology, analysis, controllability, observability, identifiability, sensitivity, adaptability.*

## ВВЕДЕНИЕ

В виду активно развивающихся технологий в области исследования имеющихся и разработки новых гироскопических систем, стремительно совершенствуется и математический аппарат, позволяющий провести качественный анализ их динамических характеристик, а также ряд действий, направленных на получение желаемых результатов исследования. Поскольку гироскопические системы содержат в своей структуре гироскопические элементы (или гироскопы в целом), исследование таких систем зачастую характеризуется трудностями, связанными, прежде всего, с трудоемкостью проведения исследований, вызванных как сложностью используемого математического аппарата, так и рядом особенностей исследуемого объекта и применяемой для этого методологии анализа, управления и регулирования. Вопросам анализа и разработки методов исследования гироскопических систем в последнее время уделяется все большее внимание. Вызвано это, в первую очередь, достаточно широкой областью применения гироскопических систем и приборов в различных сферах науки и техники [1-10]. Так, например, гироскопические системы различной структуры и назначения применяются для автоматического управления движением самолётов, судов, торпед, ракет, космических аппаратов, мобильных роботов, для осуществления целей навигации (указатели курса, поворота, горизонта, сторон света), для измерения угловой ориентации подвижных объектов, в приборостроении, в горнорудной и нефтяной промышленности – при строительстве метрополитенов, прокладке шахт и тоннелей, при бурении скважин и во многих других случаях.

Кроме того, гироскопические системы обладают рядом особенностей, которые влияют как на вид используемых для описания их поведения математических моделей, так и на выбор методов, осуществляющих анализ математических моделей объекта и поиск соответствующих решений с учетом указанных особенностей гироскопических систем, их конструкции, назначения, а также поставленной цели и задач осуществляемого исследования.

В виду этого, данная работа, посвященная выработке общих рекомендаций по проведению анализа гироскопических систем, основанных на общем определении гироскопических сил по В. Томсону и П. Тету [1, 3], с целью выявления основных закономерностей в методологии проведения такого анализа и в сформулированной на их основе общей методологии исследования, является особенно актуальной. Главное внимание при этом уделяется концептуальным аспектам и методологии проведения исследований.

## ЦЕЛЬ, ОБЪЕКТ И ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ

*Целью работы* является разработка общей методологии анализа гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение, с целью выявления основных закономерностей в методологии проведения такого анализа и выделение основных задач, опирающихся на результаты разработанной методологии.

*Объектом исследования* в работе выступают гироскопические системы и математические модели, описывающие их поведение.

*Предметом исследования* являются особенности гироскопических систем, основные свойства и задачи гироскопических систем управления, а также математический аппарат, применяемый для проведения исследования гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение.

## МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ АНАЛИЗА ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

При исследовании гироскопических систем наиболее приоритетными для изучения являются задачи модального, оптимального, программного и адаптивного управления и регулирования. Необходимость в управлении и регулировании таких систем возникает при

отсутствии возможности корректировать входные параметры моделей, описывающих поведение сложных систем, стабилизировать неустойчивые системы, улучшать динамические свойства систем и др., то есть в случаях, когда нужно изменить исследуемый процесс таким образом, чтобы характеризующие его показатели удовлетворяли определенным требованиям.

Практически все эти задачи решаются в условиях наличия полной информации о векторе состояния и структуре математической модели объекта исследования. В том случае, если о состоянии объекта или структуре модели нет полной информации, возникает необходимость в решении дополнительных задач – соответственно, задач наблюдения и идентификации, позволяющих оценить элементы вектора состояния и, тем самым, восстановить его значения, уточнить структуру и параметры моделей с тем, чтобы в дальнейшем использовать полученные результаты для управления и регулирования исследуемых систем. Такой подход к исследованию систем управления, в сущности, позволяет синтезировать математические модели и алгоритмы управления исследуемых систем при невыполнении каких-либо из анализируемых свойств систем управления, расширяя, таким образом, возможности и границы применимости решаемых задач модального, оптимального, программного и адаптивного управления и регулирования. Прежде чем синтезировать алгоритмы управления, наблюдения, идентификации и адаптации, целесообразно рассмотреть принципиальные возможности осуществления этих процессов для заданного объекта или системы. Эти возможности в значительной степени выявляются при изучении таких свойств системы, как управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость и адаптируемость. Указанные свойства принято изучать для исследуемых систем в идеализированных условиях, при отсутствии возмущений и шумов, способных воздействовать на объект соответственно управления, наблюдения, идентификации и адаптации и, тем самым, изменять его динамические характеристики. Также целесообразно исследовать систему и ее математические модели на устойчивость и параметрическую чувствительность. Кроме перечисленных свойств систем управления при проведении анализа исследуемых систем могут быть исследованы также и свойства, связанные с влиянием постоянно действующих возмущающих воздействий (статизм, астатизм, инвариантность по отношению к внешним воздействиям и т.п.) [11, 12].

После тщательного анализа специальной литературы по выделенному направлению исследования с учетом выявленных общих свойств гироскопических систем можно выделить в общем виде следующие основные этапы анализа гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение.

*1 этап. Проведение анализа по определению условий возможности применения прецессионной теории, а также по выбору методов составления прецессионных уравнений систем. Изучение нутационных колебаний.*

Данный этап анализа направлен на упрощение полных уравнений движения гироскопических систем, представляющих собой дифференциальные уравнения второго порядка, путем построения прецессионных уравнений движения гироскопических систем первого порядка, с помощью которых в некоторых случаях удастся получить приемлемое для практики решение. Составление таких прецессионных уравнений может осуществляться стандартными методами [1-3, 8], например, путем замены кинетической энергии системы в уравнениях Лагранжа для определяющих координат линейной частью функций Рауса, составленной для циклических координат; путем исключения циклических скоростей в обычных уравнениях Лагранжа преобразованием Рауса; используя метод моментов и др. Можно использовать также и другие подходы, например, предложенный Л. К. Кузьминой и также позволяющий получить укороченные модели гироскопических систем меньшего порядка [13].

На данном этапе при этом предварительно необходимо провести следующие исследования:



- выбрать и обосновать метод построения прецессионных уравнений;
- проверить приемлемость решений прецессионных уравнений;
- определить условия эквивалентности прецессионных и полных уравнений системы.

Кроме того, на этом этапе проводится исследование изучаемого прецессионного движения под действием внешних сил, то есть ситуаций, когда прецессия перестает быть равномерной (регулярной), а сопровождается нутациями [1-3, 8].

*2 этап. Осуществление качественного исследования поведения решений дифференциальных уравнений, состоящем в изучении свойств траекторий и описывающих их движений в фазовом пространстве. Проведение анализа устойчивости движения гироскопических систем.*

Данный этап исследования систем является особенно важным при проведении анализа математических моделей систем управления и получаемых по ним решений. Вызвано это требованиями областей применения и использования гироскопических систем. При этом исследование устойчивости движения гироскопических систем возможно проводить как стандартными методами [11, 12, 14-17], так и отличными от традиционных, в частности, с использованием подхода декомпозиции матриц системы [5], позволяющим получить более полные выводы об устойчивости и при котором исследование решений нестационарной системы, описывающей поведение изучаемого объекта, сводится к исследованию стационарной системы, полученной в результате применения конструктивного преобразования Ляпунова [14], и к непосредственному исследованию такого преобразования. В данном случае методологические аспекты исследования устойчивости рассмотрены применительно к устойчивости в смысле Ляпунова, в виду ее понимания как внутреннего свойства системы или движения. В таком смысле устойчивость рассматривается как категория, относящаяся как к собственным движениям системы, порождаемым начальными условиями (возмущениями), так и внутренними свойствами системы [11]. Однако, в отдельных практических задачах анализа гироскопических систем, часто ставятся задачи по исследованию устойчивости в других смыслах, позволяющие дополнить результаты исследований устойчивости по Ляпунову, полученные в идеальных условиях без шумов и постоянно действующих воздействий.

Также необходимо отметить, что одним из направлений общей теории устойчивости движения является анализ влияния на исследуемую систему структуры сил, действующих в ней [11, 12]. При этом виды сил классифицируются по ряду формальных признаков на основе системы уравнений возмущенного движения. В таком случае, на основе результатов такого анализа можно, например, выявить дестабилизирующие и стабилизирующие факторы, получить необходимые (или достаточные) условия устойчивости (или неустойчивости) движения исследуемой системы, а также провести выбор значений параметров объекта еще на этапе проектирования, и, таким образом, синтезировать модель, обеспечивающую выполнение желаемых требований. В данном случае исследование влияния гироскопических сил осуществляется на следующем этапе.

*3 этап. Исследование влияния гироскопических сил на характер и устойчивость движения системы, а также на стационарное движение гироскопических систем.*

С учетом того, что гироскопические силы, проявляющиеся в исследуемых системах, зависят от некоторого параметра и обладают рядом отличительных особенностей и свойств, проявляющихся при изменении скоростей собственного вращения, кроме анализа влияния гироскопических сил, необходимо исследовать зависимость свойств таких сил, получаемых решений уравнений движения гироскопических систем и свойств систем от указанного параметра. Также такой анализ позволяет в отдельных случаях качественно оценить влияние гироскопических сил на устойчивость движения системы. Кроме того, на данном этапе анализа необходимо исследовать стационарное движение гироскопических систем, а также

изучить влияния гироскопических сил на такое движение системы. Общие вопросы проведения подобного анализа достаточно полно представлены в работах [1-3, 6, 8].

4 этап. *Определение условий стабилизации с помощью гироскопических сил неустойчивых потенциальных и неконсервативных систем.*

Известно, что в некоторых случаях малые силы трения усиливают динамическую неустойчивость системы (из-за наличия дополнительных позиционных неконсервативных сил). Такое явление, например, может проявляться при моделировании динамики ракетносителей космических аппаратов при исследовании влияния диссипативных сил на устойчивость движения систем, когда система находится под воздействием следящих сил. В таком случае на данном этапе проводится исследование колебаний потенциальных и неконсервативных систем. В общем случае данный этап анализа опирается на общую методологию, наиболее полно описанную в работах [1-3, 8, 10] и позволяет на основе качественного исследования потенциальных и неконсервативных систем выделить и обосновать условия стабилизации указанных неустойчивых систем с помощью гироскопических сил.

5 этап. *Исследование управляемости гироскопических систем.*

Данный этап анализа имеет принципиальное значение при исследовании систем и реализации последующего модального, программного, оптимального, адаптивного и других видов управления и регулирования. Так, на результаты исследования управляемости опирается исследование наблюдаемости, чувствительности, инвариантности, идентифицируемости, а также достижимости и адаптируемости исследуемых систем. В виду этого исследование управляемости имеет определяющее значение при решении указанных задач. При этом понятие «управляемость» тесно связано с понятием «управляемая система». Так, согласно А. И. Егорову [12], под управляемой системой понимается любая совокупность материальных объектов, на поведение которых во времени можно влиять выбором целенаправленных внешних воздействий. Именно возможность такого выбора и определяет управляемую, частично управляемую и неуправляемую систему. Для того чтобы исследовать, имеется ли принципиальная возможность управления объектом исследования, необходимо, прежде всего, провести анализ исследуемой системы на предмет ее управляемости со структурно-качественной стороны. Так, случай, когда система является управляемой, означает, что объект исследования можно перевести из одного (начального) заданного множества состояний в другое (конечное, предписанное) заданное множество состояний, как правило, за конечное время  $(t_1 - t_0)$ . В случае, когда объект исследования оказывается неуправляемым, с помощью методов теории управления возможно добиться полной (или хотя бы частичной) управляемости объекта исследования.

Также важно отметить, что исследование управляемости используется и при решении задачи выбора управляющего воздействия, исходя из различных требований, предъявляемых к изучаемой системе. Такая задача возникает в том случае, когда исследуемая система содержит несколько управляющих воздействий и требуется из них выбрать такое, которое по выбранному критерию управляемости [11] окажется наилучшим. В таком случае исследование управляемости проводится с количественной стороны [12].

Другие понятия управляемости, в частности, понятия относительной, условной и положительной управляемости, возможные к применению при проведении анализа гироскопических систем, достаточно полно изложены в монографии [18]. Такие понятия управляемости, наряду с традиционными, позволяют отразить новые черты управляемых объектов, что также представляет практический интерес при проведении анализа гироскопических систем.

Проводится исследование управляемости в условиях полной информации обо всех переменных состояния исследуемой системы, а также в идеальных условиях без шумов и постоянно действующих воздействий.

6 этап. *Определение и последующий анализ области (множества) достижимости гироскопических систем.*

При исследовании моделей гироскопических систем часто возникает задача построения или оценивания областей достижимости фазовых состояний соответствующих динамических систем в различные моменты времени. Такая задача является одной из фундаментальных задач теории управления динамическими системами, а области достижимости играют важную роль при решении задач управления, наблюдения и прогнозирования. Причем в большинстве практических задач используются численные методы построения области достижимости, в то время как аналитически область достижимости удается построить лишь в простейших случаях. Наиболее полно упомянутые методы отображены в работах [6, 19-22].

Важность осуществления данного этапа анализа объясняется тем, что точное или приближенное знание областей достижимости управляемой системы позволяет оценить предельные возможности системы управления, а также выбрать оптимальное или субоптимальное управление [18, 22]. В случае же исследования системы, подверженной возмущениям, области достижимости позволяют получить оценку разброса траекторий под влиянием этих возмущений, что также является одной из прикладных задач теории гироскопических систем, имеющих важное практическое значение. Обзор важнейших результатов этого направления достаточно полно представлен в [6, 17, 19].

7 этап. *Исследование наблюдаемости гироскопических систем.*

Анализ проблемы наблюдаемости гироскопических систем является первоначальным этапом при решении задачи наблюдения и показывает принципиальную возможность наблюдения системы, то есть возможность восстановления вектора состояния исследуемой системы по измерениям ее наблюдаемой переменной. Общие вопросы методологии исследования наблюдаемости изложены в [11, 12, 23, 24]. Проводится исследование наблюдаемости в идеальных условиях без шумов и постоянно действующих воздействий.

8 этап. *Исследование идентифицируемости гироскопических систем.*

Необходимость в изучении данного вопроса вызвана тем, что при решении задач управления динамическими объектами, к которым относится и класс изучаемых систем, часто возникают ситуации, когда математические модели, описывающие их поведение, не всегда точно отражают исследуемые процессы и ставится задача об уточнении структуры и параметров указанных моделей. В этом случае параметрическая идентификация моделей обеспечивает принципиальную возможность определения параметров математических моделей системы по результатам измерения определенных выходных величин в течение некоторого интервала времени [25, 26]. Проводится исследование идентифицируемости в идеальных условиях без шумов и постоянно действующих воздействий.

9 этап. *Исследование параметрической чувствительности гироскопических систем.*

На данном этапе проводится исследование свойства параметрической чувствительности основных характеристик исследуемой системы к вариациям их параметров, а также анализ влияния вариации параметров на свойства исследуемых систем управления. При этом под чувствительностью, в общем случае, понимается свойство систем изменять свои характеристики при изменении различных внутренних и внешних факторов [27, 28], в качестве которых, при рассмотрении параметрической чувствительности, выступают параметры математических моделей, описывающих поведение исследуемых гироскопических систем [27-30].

10 этап. *Исследование адаптируемости гироскопических систем.*

Анализ адаптируемости гироскопических систем является основным этапом при решении задачи адаптивного управления и показывает принципиальную возможность адаптации системы, то есть показывает, существует ли в рамках заданной структуры регулятора решение задачи адаптации регулятора к изменению параметров объекта управления. Общие вопросы методологии исследования адаптируемости изложены в [7, 31, 32].

Необходимо отметить, что приведенный алгоритм проведения анализа гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение, является достаточно укрупненным. Проведение анализа возможно и по другим направлениям, включающим исследование измеримости тех или иных физических величин, участвующих в описании моделей объекта, определение влияния отдельных составляющих таких моделей на основные свойства систем управления, изучение возможностей и влияния применения декомпозиции модели на основные характеристики и особенности объекта, исследование существенных и несущественных параметров моделей и их влияние на результаты моделирования и управления, изучение вопросов о корректности, адекватности, полноте и т.д. модели, достоверности полученных результатов, а также таких свойств динамических систем, как надежность, точность, инвариантность, робастность и др. Указанные «дополнительные» задачи анализа гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение, проводятся при необходимости и определяются непосредственной целью ставящихся перед исследователем задач управления и регулирования.

### **СВЯЗЬ АНАЛИЗИРУЕМЫХ СВОЙСТВ И ОСОБЕННОСТЕЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ЗАДАЧАМИ УПРАВЛЕНИЯ, РЕГУЛИРОВАНИЯ, ИДЕНТИФИКАЦИИ И НАБЛЮДЕНИЯ**

Необходимо указать, что приведенная в предыдущем пункте статьи последовательность осуществления этапов предлагаемого анализа выбирается исследователем в рамках последовательного выбора решаемых задач, когда необходимо проверить принципиальную возможность осуществления выбранного направления управления и регулирования. В случае невыполнения требуемых в каждой конкретной постановке определенных требований и свойств, предъявляемых к системе исследования, следует ставить дополнительные задачи управления, позволяющие синтезировать математические модели объекта и/или алгоритмы его управления, регулирования, наблюдения, идентификации и адаптации.

В данном пункте статьи приведем основные задачи ставящихся при дополнительном изучении и моделировании гироскопических систем, и находящиеся в непосредственной связи с предложенным анализом гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение.

#### *1. Осуществление программного управления движением гироскопических систем.*

Задача программного управления часто возникает в тех случаях, когда необходимо определить такое управление, которое бы позволило осуществить движение исследуемых гироскопических систем по заранее заданному закону с сохранением требуемых свойств. Одним из подходов, позволяющих реализовать подобное управление, является подход к определению программного управления, основная идея которого основана на концепции обратных задач динамики, исторически возникших в рамках теоретической механики и применяющихся для вычисления сил, действующих на объект, по известной траектории его движения [10, 33-35]. Обратная задача динамики в данном случае может быть сформулирована следующим образом: необходимо осуществить формирование эталонной траектории движения объекта и определить программные управления, реализующие данные траектории. В такой постановке в работе предлагается использовать методику управления движением гироскопических систем, позволяющую исследовать неизвестные и недоступные при использовании прямого моделирования свойства объекта управления, осуществить

построение программной траектории, переводящей исследуемую систему управления из заданного начального положения в предписанное (желаемое) конечное положение и реализующего ее программного управления, а также синтезировать алгоритм управления, обеспечивающий работу гироскопических систем управления с сохранением заданных свойств и достижением требуемых характеристик исследуемых систем. Решение указанной задачи целесообразно проводить в соответствии с алгоритмом, описанным в работе [36].

## *2. Осуществление замкнутого управления движением гироскопических систем.*

Задача подобного вида достигается введением (новой и/или дополнительной) обратной связи в исходную математическую модель объекта с последующим выполнением всех перечисленных в предыдущем пункте данной статьи этапов анализа гироскопических систем и полученных математических моделей с учетом введенной обратной связи [11, 12, 18, 22, 23]. При решении указанной задачи появляется дополнительная возможность корректировки параметров исходной модели, стабилизация неустойчивой системы, корректировка параметрической чувствительности модели, а также возможность улучшения динамических свойств гироскопической системы. Причем, для того, чтобы имелась принципиальная возможность осуществления замкнутого управления, гироскопическая система должна быть управляемой в одном из приведенных смыслах управляемости.

## *3. Осуществление наблюдения за гироскопической системой.*

Задача наблюдения состоит в нахождении вектора состояния системы на основании неполных данных о его компонентах, заданных с помощью выходной функции [23]. Необходимость же в наблюдении таких систем возникает в том случае, когда не все компоненты вектора состояния объекта исследования являются доступными для измерения в силу либо ограниченности измерительных устройств, либо когда проведение измерения переменных состояния не представляется возможным [11, 12, 23, 24]. Решение задачи при этом должно осуществляться при условии соблюдения трех основных условий: адекватности математической модели, наблюдаемости модели и состоятельности алгоритма оценивания параметров модели. Основные результаты теоретических исследований методов и приемов теории наблюдения изложены в работах [11, 12, 23], практические аспекты применения методологии наблюдения за динамическими системами, в том числе и гироскопическими системами, рассмотрены в работах [1, 23, 24].

## *4. Осуществление адаптивного управления движением гироскопических систем.*

Как было изложено выше, в общем случае, при решении задач модального, программного, оптимального управления и регулирования предполагается, что об объекте управления имеется полная информация, то есть предполагается, что математическая модель и вектор состояния соответствующей гироскопической системы являются полностью определенными. В противном случае, в условиях неполной информации об объекте, предлагалось проводить восстановление (оценивание) вектора состояний и самой математической модели объекта путем решения задач наблюдения и, соответственно, идентификации, делая, тем самым, систему доступной для указанных управлений и регулирований. При осуществлении же адаптивного управления необходимо рассматривать задачи управления при условии, что структура математической модели изучаемого объекта уточняется в процессе управления на неограниченном интервале времени путем использования возмущающих воздействий в качестве пробных управляющих сигналов, позволяющих осуществить уточнение математической модели объекта в объеме, минимально необходимом для достижения заданной цели управления. Тем самым, в процессе адаптивного управления объектом ставится задача идентификации и наблюдения за поведением объекта на неограниченном интервале времени.

На сегодняшний день задачи адаптивного управления являются одними из приоритетных, но вместе с тем, наиболее трудно реализуемых в теории управления. Осуществляется

адаптивное управление после проведения исследования адаптируемости объекта управления. Основные результаты теоретических исследований методов и приемов теории адаптивного управления изложены в работах [11, 31, 32], практические аспекты применения методологии адаптивного управления динамическими системами, а том числе и гироскопическими системами, рассмотрены в работах [7, 32].

В данной работе в качестве предложенных задач и анализируемых свойств управляемой системы выбраны основные, необходимые для данного исследования и в рамках выбранного смысла управления и регулирования гироскопических систем. В общем случае, в зависимости от поставленной при проведении исследований задачи и выбранной цели управления, данный перечень задач и анализируемых свойств можно продолжить.

### ВЫВОДЫ

Подводя итог проведенному исследованию, можно выделить следующие результаты.

В работе, по результатам проведенного анализа основных особенностей гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение, предложены общие рекомендации по проведению анализа гироскопических систем с целью выявления основных закономерностей в методологии проведения такого анализа и в сформулированной на их основе общей методологии исследования гироскопических систем. Выделена связь между анализируемыми свойствами систем и рядом задач управления, регулирования, наблюдения, идентификации и адаптации. Указанные рекомендации раскрыты в виде алгоритма, реализующего концептуальные аспекты методологии исследования гироскопических систем. При этом алгоритм проведения анализа гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение, является достаточно укрупненным. Проведение анализа возможно и по другим направлениям, определяющимся непосредственной целью ставящихся перед исследователем задач управления и регулирования.

В виду характерных особенностей гироскопических систем, влияющих на вид используемых для описания их поведения математических моделей, на выбор методов, осуществляющих анализ моделей объекта и поиск соответствующих решений с учетом этих особенностей, а также поставленной цели и задач осуществляемого исследования, в работе выделены отдельные задачи, опирающиеся на результаты разработанной методики, ставящиеся при основном и/или дополнительном изучении и моделировании гироскопических систем и позволяющие синтезировать математические модели объекта и/или алгоритмы его управления, регулирования, наблюдения, идентификации и адаптации. Главное внимание при этом уделено концептуальным аспектам и методологии проведения исследований.

Таким образом, в работе разработана и представлена методика проведения анализа гироскопических систем и математических моделей, описывающих их поведение, которая позволяет систематизировать основные этапы, методы и подходы к получению эффективного алгоритма комплексного исследования и регулирования гироскопических систем в условиях полной и неполной информации об исследуемом объекте.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. Москва: Наука, 1974. 344 с.
2. Бороздин В. Н. Гироскопические приборы и устройства систем управления: учеб. пособие для вузов. Москва: Машиностроение, 1990. 272 с.
3. Пельпор Д. С. Гироскопические системы. Теория гироскопов и гироскопических стабилизаторов: учеб. для вузов. Москва: Высшая школа, 1986. 423 с.
4. Басараб М. А., Кравченко В. Ф., Матвеев В. А. Методы моделирования и цифровая обработка сигналов в гироскопии. Москва: Физматлит, 2008.
5. Каленова В. И., Морозов В. М., Соболевский П. М. Об устойчивости механических систем определенного класса. *Прикладная математика и механика*. 2008. Т. 72, № 2. С. 251–259.

6. Воронов Е. М., Карпунин А. А. Алгоритм оценки границ области достижимости летательного аппарата с учетом тяги. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Приборостроение»*. 2007. № 4(69). С. 81–99.
7. Агамалов Ю. Р. О построении средств измерений на основе принципа адаптации. *Автоматика и телемеханика*. 2007. № 7. С. 166–179.
8. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. Москва: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
9. Саранчин А. И., Завьялов В. В. Системы автоматического управления в навигационных приборах: учеб. пособие. Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2011. 76 с.
10. Ермошина О. В., Крищенко А. П. Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики. *Известия РАН Теория и системы управления*. 2000. № 2. С. 155–162.
11. Справочник по теории автоматического управления: Красовский А. А. (ред.). Москва: Наука, 1987. 712 с.
12. Егоров А. И. Основы теории управления. Москва: Физматлит, 2004. 504 с.
13. Кузьмина Л. К. К задаче о разделении движений в динамике систем гиростабилизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2016. Вып. 9(57). С. 1–14.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1968. 576 с.
15. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. Москва: Наука, 1967. 223 с.
16. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1954. 216 с.
17. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. Москва: Наука, 1979. 336 с.
18. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1971. 508 с.
19. Андреев Ю. Н. Дифференциально-геометрические методы в теории управления. *Автоматика и телемеханика*. 1982. № 10. С. 5–46.
20. Воронов Е. М., Карпенко А. П., Козлова О. Г., Федин В. А. Численные методы построения области достижимости динамической системы. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Приборостроение»*. 2010. № 2(79). С. 3–20.
21. Никольский М. С. Об оценке множества достижимости нелинейного объекта изнутри. *Дифференциальные уравнения*. 1999. Т. 35, № 11. С. 1487–1491.
22. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Физматгиз, 1969. 384 с.
23. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. Москва: Мир, 1977. 656 с.
24. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Наблюдаемость отдельного класса сложных динамических систем. *Проблемы информационных технологий*. 2015. № 18. С. 89–95.
25. Гроп Д. Методы идентификации систем. Москва: Мир, 1979. 304 с.
26. Клейман Е. Г. Идентификации нестационарных объектов. *Автоматика и телемеханика*. 1999. № 10. С. 3–45.
27. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Вклад ленинградских ученых в развитие теории чувствительности систем управления. *Труды СПИИРАН*. 2013. Вып. 25. С. 13–41.
28. Городецкий Ю. И. Функции чувствительности и динамика сложных механических систем. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун.-та им. Н. И. Лобачевского, 2006. 236 с.
29. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Исследование чувствительности в некотором классе сложных динамических систем. *Вісник НТУ «ХПІ»: Серія: «Механіко-технологічні системи та комплекси»*. 2016. № 50(1222). С. 47–54.

30. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Чувствительность гироскопических систем. *Материалу міжнародної конференції «Dynamical System Modeling and Stability Investigation» – DSMSI-2017* (24-26 травня 2017 р., м. Київ). Київ: КНУ ім. Т.Шевченко, 2017. С. 164.
31. Якубович В. А. К теории адаптивных систем. *ДАН СССР*. 1968. Т. 182, № 3. С. 518–521.
32. Balonin N. A., Gusev S. V. Experiments with the regularized adaptive control algorithms. *Proc. of the Second Russian-Swedish Control Conference*. Saint-Petersburg, 1995. P. 70–72.
33. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций: учебное пособие для втузов. Москва: Машиностроение, 2004. 576 с.
34. Петров Б. Н., Крутько П. Д., Попов Е. П. Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики. *Доклады АН СССР*. 1979. Т. 247, № 5. С. 1078–1081.
35. Крищенко А. П. Метод обратной задачи динамики в теории управления. *XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014*: Труды (Москва, 16-19 июня 2014). Москва, 2014. С. 431–437.
36. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Программное управление движением отдельного класса сложных динамических систем. Непрерывный случай. *Вісник ЗНУ*. 2017. № 1. С. 261–276.

### REFERENCES

1. Merkin, D. R. (1974). Gyroscopic systems. Moscow: Nauka (In Russian).
2. Borozdin, V. N. (1990). Gyroscopic instruments and devices of control systems: textbook for technical high schools. Moscow: Mashinostroenie (In Russian).
3. Pelpor, D. S. (1986). Gyroscopic systems. Theory of gyroscopes and gyroscopic stabilizers: textbook for high schools. Moscow: Visshaya shkola (In Russian).
4. Basarab, M. A., Kravchenko, V. F. & Matveev, V. A. (2008). Methods of modeling and digital signal processing in gyroscopes. Moscow: Fizmatlit (In Russian).
5. Kalenova, V. I., Morozov, V. M. & Sobolevskii, P. M. (2008). The stability of a specific class of mechanical systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol.72, No.2, pp. 251-259 (In Russian).
6. Voronov, E. M. & Karpunin, A. A. (2007). The algorithm for estimating the limits of the reachability of an aircraft with allowance for thrust. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Seria «Priborostroenie»*, No. 4(69), pp. 81-99 (In Russian).
7. Agamalov, Yu. R. (2007). On construction of measurement means on the basis of adaptation principle. *Avtomatika i telemekhanika*, No. 7, pp. 166-179 (In Russian).
8. Ishlinsky, A. Yu. (1963). Mechanics of gyroscopic systems. Moscow: USSR Academy of Sciences Publishing House (In Russian).
9. Saranchin, A. I. & Zavyalov, V. V. (2011). Automatic control systems in navigational instruments: Textbook allowance. Vladivostok: Maritime State University (In Russian).
10. Ermoshina, O. V. & Krishchenko, A. P. (2000). Synthesis of program controls by the orientation of the spacecraft by the inverse dynamic problem. *Izv. RAN. Theory and control systems*, No 2, pp. 155-162 (In Russian).
11. Krasovsky, A. A. (Eds.). (1987). A handbook on the theory of automatic control (1987). Moscow: Nauka (In Russian).
12. Egorov, A. I. (2004). Fundamentals of control theory. Moscow: Fizmatlit (In Russian).
13. Kuzmina, L. K. (2016). To the problem of the separation of motions in the dynamics of gyrostabilization systems. *Engineering Journal: Science and Innovation*, No. 9(57), pp. 1-14 (In Russian).
14. Gantmaher, F. R. (1968). The Theory of Matrices. Moscow: Nauka (In Russian).
15. Barbashin, E. A. (1967). Introduction to the theory of stability. Moscow: Nauka (In Russian).



16. Bellman, R. (1954). Stability Theory of differential Equations. Moscow: Izd-vo inostrannoj literatury (In Russian).
17. Voronov, A. A. (1979). Stability, controllability, observability. Moscow: Nauka (In Russian).
18. Gabasov, R. & Kirillova, F. (1971). Qualitative theory of optimal processes. Moscow: Nauka (In Russian).
19. Andreev, Yu. N. (1982). Differential-geometric methods in control theory. *Avtomatika i telemekhanika*, No. 10, pp. 5-46 (In Russian).
20. Voronov, E. M., Karpenko, A. P., Kozlova, O. G. & Fedin, V. A. (2010). Numerical methods for constructing the set of reachability of a dynamical system. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Seria «Priborostroenie»*, No.2 (79), pp. 3-20 (In Russian).
21. Nikolsky, M. S. (1999). On the evaluation of the set of reachability of a nonlinear object from within. *Differential equations*, Vol. 35, No.11, pp. 1487-1491 (In Russian).
22. Pontryagin, L. S., Boltyansky, V. G., Gamkrelidze, R. V. & Mishchenko, E. F. (1969). Mathematical theory of optimal processes. Moscow: Fizmatgiz (In Russian).
23. Kvakernaak, H. & Siwan, R. (1977). Linear Optimal Control Systems. Moscow: Mir (In Russian).
24. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2015). Observability of the certain class of complex dynamical systems. *Problemy informacionnyh tehnologij*, No. 18, pp. 89-95 (In Russian).
25. Grop, D. (1979). Methods of system identification. Moscow: Mir (In Russian).
26. Kleiman, E. G. (1999). Identification of non-stationary objects. *Avtomatika i telemekhanika*, No. 10, pp. 3-45 (In Russian).
27. Rosenwasser, E. N. & Yusupov, R. M. (2013). The contribution of Leningrad scientists to the development of the theory of sensitivity of control systems. *Trudy SPIIRAN*, No. 25, pp. 13-41 (In Russian).
28. Gorodetsky, Yu. I. (2006). Sensitivity functions and dynamics of complex mechanical systems. Nizhny Novgorod: Izd-vo Nizhegorodskogo gos. un.-ta im. N. I. Lobachevskogo (In Russian).
29. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2016). Investigation of sensitivity in some class of complex dynamical systems. *Visnik NTU «HPI»: Serija: «Mehaniko-tehnologichni sistemi ta kompleksi»*, No. 50(1222), pp. 47-54 (In Russian).
30. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2017, may). Sensitivity of gyroscopic systems. *Proc. of the International Conference «Dynamical System Modeling and Stability Investigation» – DSMSI-2017*. Kiev: KNU im. T. Shevchenko, pp. 164 (In Russian).
31. Yakubovich, V. A. (1968). To the theory of adaptive systems. *DAN SSSR*, Vol. 182, No. 3, pp. 518-521 (In Russian).
32. Balonin, N. A. & Gusev, S. V. (1995). Experiments with the regularized adaptive control algorithms. *Proc. of the Second Russian-Swedish Control Conference*. Saint-Petersburg, pp. 70-72.
33. Krutko, P. D. (2004). Inverse problems of dynamics in the theory of automatic control. A series of lectures: a textbook for high schools. Moscow: Mashinostroenie (In Russian).
34. Petrov, B. H., Krutko, P. D. & Popov, E. P. (1979). Construction of control algorithms as the inverse problem of dynamics. *Doklady AN SSSR*, Vol. 247, No.5, pp. 1078-1081 (In Russian).
35. Krischenko, A. P. (2014, June). The method of the inverse problem of dynamics in control theory. Proceedings of the XII All-Russian Meeting on the Control Problems ARMCP-2014, (pp. 431-437), Moscow (In Russian).
36. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2017). Program control of the movement of an certain class of complex dynamical systems. Continuous case. *Visnik ZNU*, No. 1, pp. 261-276 (In Russian).

УДК 539.3

## СИНГУЛЯРНІСТЬ НАПРУЖЕНЬ У БАГАТОКЛИНОВІЙ СИСТЕМІ, З ПОВ'ЯЗАНИМИ МІЖ СОБОЮ ПРУЖНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЇЇ ЕЛЕМЕНТІВ, ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

<sup>1</sup>Махоркін М. І., к. ф.-м. н., доцент, <sup>2</sup>Скрипочка Т. А., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, Україна

<sup>2</sup>Львівський національний аграрний університет,  
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Жовківський р-н, Львівська обл, 80381, Україна

mahorkin@ukr.net

За умов антипласкої деформації розглянуто багатоклинову систему, пружні характеристики елементів якої пов'язані функційною залежністю. Досліджено вплив збільшення кількості клиноподібних елементів системи (при збереженні її початкової геометричної конфігурації) на зміну значень порядку сингулярності напружень. З'ясовано, що системи такого типу правомірно використовувати для математичного моделювання клиновидних тіл з функціонально-градієнтних матеріалів, пружні характеристики яких неперервно змінюються у трансверсальному напрямку.

*Ключові слова:* антипласка задача, багатоклинова система, сингулярність напружень, функціонально-градієнтний матеріал, функційна залежність модуля зсуву.

## СИНГУЛЯРНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОКЛИНЬЕВОЙ СИСТЕМЕ, С ЗАВИСИМЫМИ МЕЖДУ СОБОЙ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ, ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

<sup>1</sup>Махоркин Н. И., к. ф.-м. н., доцент, <sup>2</sup>Скрипочка Т. А., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Научная, 3-б, Львов, 79060, Україна

<sup>2</sup>Львовський національний аграрний університет,  
вул. Володимира Великого, 1, г. Дубляни, Жовковський р-н, Львовська обл, 80381, Україна

mahorkin@ukr.net

При условиях антиплаской деформации рассмотрена многоклиньевая система, упругие характеристики элементов которой связаны функциональной зависимостью. Исследовано влияние увеличения числа клиноподобных элементов системы (при сохранении ее начальной геометрической конфигурации) на изменение значений порядка сингулярности напряжений. Выяснено, что системы такого типа целесообразно использовать для математического моделирования клиновидных тел из функционально-градієнтных материалов, упругие характеристики которых непрерывно изменяются в трансверсальном направлении.

*Ключевые слова:* антиплаская задача, многоклиньевая система, сингулярность напряжений, функционально-градієнтный материал, функциональная зависимость модуля сдвига.

## STRESS SINGULARITY IN MULTIWEDGE SYSTEM WITH INTERCONNECTED ELASTIC CHARACTERISTICS OF ITS ELEMENTS, UNDER ANTIPLANE DEFORMATION

<sup>1</sup>Mykola Makhorkin, Cand. Sc. (Phys.-Math.), associated professor,

<sup>2</sup>Tetiana Skrypochka, Cand. Sc. (Phys.-Math.), associated professor

<sup>1</sup>*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics*

*National Academy of Sciences of Ukraine,*

*3-b, Naukova str., L'viv, 79060, Ukraine*

<sup>2</sup>*Lviv National Agrarian University,*

*1 Volodymyra Velykogo str., Dubliany city, Zhovkva district, L'viv region, 80381, Ukraine*

mahorkin@ukr.net

The work seeks to study the singularity order in multiwedge systems with a large number of elements. The physical-mechanical characteristics of which are connected by a certain law. For this purpose a multiwedge system is studied, the system being under condition of antiplane deformation. The order of stress singularity in such a system is determined using the results of [6], where the characteristic equations are constructed by the method of statement of generalized conjugation problem under the classical boundary conditions for an arbitrary number of heterogeneous wedge-like elements.

For the initial geometric parameters of the system being invariable we study the dependence of the order of stress singularity on the wedge number and relation of maximal and minimal values of the shear modulus for a cyclic, exponential and quadratic laws of change of elastic characteristics of its elements. It is determined that when the number of wedges which compose the system, is enlarged and, respectively, when their apex angle is decreased, the value of order of stress singularity in the system apex vicinity tends to some asymptotic value. We assume that using such systems, the materials can be modeled mathematically. The elastic characteristics of such materials change continuously in a transversal direction, i. e. the materials with an angular functional gradience. With the help of a multicomponent wedge system we modeled mathematically an insert made of functionally graded material (FGM) in a composite wedge (three-component composite wedge, the internal wedge of which is made of functionally graded material). Basing on the model we studied the singularity order in the crack tip vicinity, which emerges from the point of such a system for various values of relation of shear modulus of external wedges. The values obtained are compared to the values of singularity order, calculated by solution of a characteristic equation for a wedge insert made of FGM [11]. As a result we elucidated that having only 20 elements of the system by which the insert is modeled mathematically, a relative error between calculated values of singularity order did not exceed 2%. Hence, it is reasonably to conclude that such multicomponent systems, where elastic characteristics of the elements are connected by a functional dependence, will be admissible to use for mathematical modeling of the wedge bodies, the elastic characteristics of which change in a transversal direction.

*Key words: antiplane problem, multiwedge system, stress singularity, functionally graded material, functional dependence of shear modulus.*

### ВСТУП

Сингулярність поля напружень в околі особливих точок пружних тіл (вершини тріщин чи гострокінцевих включень, таких, як, наприклад, кінці волокон у композиті, злами поверхні поділу матеріалів, точки зміни крайових умов тощо) здавна привертала увагу дослідників. Ці питання розглядалися ще в роботі К. Wieghardt [1] (1907), а подальший розвиток тематика отримала у класичній роботі М. Л. Williams [2]. Такий інтерес безперечно зумовлений тим, що саме околиці цих точок є очевидними осередками руйнування у пружних матеріалах. Тому з'ясування особливостей поведінки поля напружень в околицях таких точок є важливою складовою при прогнозуванні міцності конструкцій та їх елементів.

Детальний огляд праць, що стосуються цієї проблематики, наведено в публікаціях [3-7], при цьому варто зауважити, що околиці особливих точок автори зазвичай моделюють за допомогою багатоклинової системи, елементи якої мають спільну вершину. У згаданих працях розглянуті аналітичні та числові методи з'ясування напружено-деформованого стану в багатоклинових системах та здійснені дослідження для конкретних їхніх конфігурацій [4, 7, 8]. Проте, при аналізі поведінки поля напружень переважно обмежувалися системами, кількість елементів яких не перевищувала чотирьох. Це зумовлено тим, що при використанні аналітичних підходів (використання комплексних потенціалів чи перетворення Мелліна) [3, 4] виникає необхідність розв'язувати систему рівнянь порядку  $2n$  для антиплоскої задачі та  $4n$  для плоскої, а числові методи [5, 8] потребують додаткового удосконалення, особливо при дослідженні систем, що містять елементи з малими кутами розхилу. Цим може пояснюватись те, що зараз відсутні ґрунтовні дослідження поведінки сингулярності поля напружень в околиці вершини багатоклинової системи у випадку, якщо кількість її елементів буде збільшуватися (а міра їх кутового розхилу, відповідно, зменшуватиметься), зберігаючи при цьому початкову геометрію системи.

З огляду на вищесказане, у нашій статті проаналізовано зміну порядку сингулярності поля напружень при збільшенні кількості елементів системи за умови збереження її початкової геометрії. При цьому вважалося, що пружні властивості елементів пов'язані між собою певною функційною залежністю. Для досліджень використано побудовані у [6, 9] характеристичні рівняння для багатоклинової системи, що існує за умов антиплоскої деформації.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо композит, складений із довільної кількості  $n$  зчеплених між собою різнорідних пружних, ізотропних клинів  $S_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) з кутами розхилу при вершині  $\alpha_i$  ( $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 2\pi$ ) та

кутового вирізу  $S_{n+1}$  з кутом розхилу  $\alpha_{n+1} = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 2\pi$  (рис. 1), котрий перебуває в умовах поздовжнього зсуву  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $w=w(r,\varphi)$ . Таку систему віднесено до полярної системи координат  $r, \varphi$ , з центром у точці сходження клинів, де клин  $S_i$  займає область  $\varphi_{i-1} < \varphi < \varphi_i$ ,  $0 < r < \infty$ , а лініям з'єднання клинів відповідають полярні координати  $\varphi_i = \sum_{i=1}^i \alpha_i \leq 2\pi$ . На лініях зчеплення клинів  $\varphi = \varphi_i$  виконуються умови ідеального механічного

контакту, а берегах вирізу  $\varphi_0 = 0$  та  $\varphi_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = 2\pi - \alpha_{n+1}$  – умови першої, другої або змішаної задач теорії пружності. Модуль зсуву відповідного клина задається залежністю  $\mu_i = \mu(\varphi_i)$ .

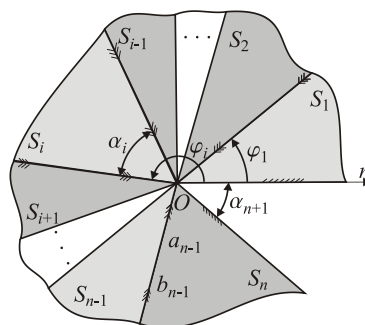


Рис. 1. Багатоклинова система

Згідно з результатами робіт [6, 9] порядок сингулярності поля напружень в околі вершини кутового вирізу, що міститься у цій системі, визначається співвідношенням  $\lambda_i = 1 - \text{Re}(q_i)$ , де  $q_i$  – корені характеристичного рівняння  $\Delta(q) = 0$ , дійсна частина яких належить інтервалу  $\text{Re}(q_i) \in (0; 1)$ . Характеристичне рівняння за антиплоскої деформації, залежно від заданих на берегах вирізу крайових умов, має такий вигляд [9]:

A. 1) за умов першої крайової задачі теорії пружності

$$q \sin(q\varphi_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0; \quad (1)$$

B. 2) за умов другої крайової задачі –

$$\sin(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{i+1}} L_2^i \sin[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0; \quad (2)$$

C. 3) за умов змішаної крайової задачі –

$$\cos(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} L_1^i \sin[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0, \quad (3)$$

D. якщо зусилля задані при  $\varphi = 0$ , а переміщення при  $\varphi = \varphi_n$  та

$$q \cos(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0, \quad (4)$$

E. якщо зусилля задані при  $\varphi = \varphi_n$ , а переміщення при  $\varphi = 0$ .

Зауважимо, що при моделюванні півбезмежної тріщини, півбезмежного абсолютно жорсткого включення або частково відшарованого абсолютно жорсткого включення в (1)-(4) відповідно, слід прийняти  $\varphi_n = 2\pi$  (кутовий виріз вироджується в розріз).

Якщо ж система є суцільним кусково-однорідним тілом, складеним із  $n$  клинів, то вважаємо, що виріз вироджується в тріщину  $\alpha_{n+1} = 0$ , і на її краях задано умови ідеального механічного контакту  $\sigma_{\varphi z}|_{\varphi=0} - \sigma_{\varphi z}|_{\varphi=2\pi} = 0$ ,  $w|_{\varphi=0} - w|_{\varphi=2\pi} = 0$ . У цьому випадку характеристичне рівняння має такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \left( \cos(2\pi q) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} L_1^i \sin[q(2\pi - \varphi_i)] - 1 \right) \times \\ & \times \left[ \mu_n \left( q \cos(2\pi q) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(2\pi - \varphi_i)] \right) - \mu_n q \right] - \\ & - \left( \sin(2\pi q) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} L_2^i \sin[q(2\pi - \varphi_i)] \right) \times \\ & \times \left( -q \sin(2\pi q) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(2\pi - \varphi_i)] \right) \mu_n = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут

$$L_1^k = -q \sin q \varphi_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(\varphi_k - \varphi_i)],$$

$$L_2^k = q \cos q \varphi_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(\varphi_k - \varphi_i)].$$
(6)

Відтак, подання (1)-(6) дають змогу визначити порядок сингулярності в багатоклиновій системі, що складена з довільної кількості елементів з довільними геометричними та механічними характеристиками за умов поздовжнього зсуву.

### ЧИСЛОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ

З метою вивчення поведінки порядку сингулярності в багатокомпонентних композитних клинах, розглянуто різні випадки закону зміни пружних характеристик від клина до клина. Досліджувалась залежність сингулярності напружень у випадку, коли модуль зсуву складових клина змінювався за циклічним (двофазна система рис. 2), експоненціальним [10] та квадратичним [11] законами від значення  $\mu_1$  до  $\mu_2$  (рис. 3). Також було прийнято, що кути розхилу при вершині всіх складових однакові та дорівнюють  $\alpha_i = (2\pi - \alpha_{n+1})/n = \varphi_n/n$ , де  $n$  – кількість компонентів композиту (відповідно, при збільшенні кількості елементів значення їх кутів розхилу зменшується).

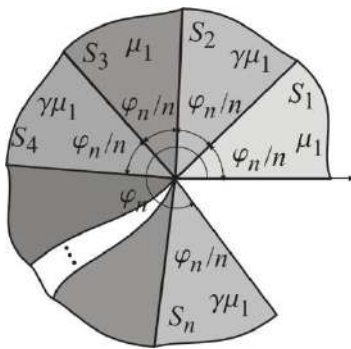


Рис. 2. Двофазна циклічна система

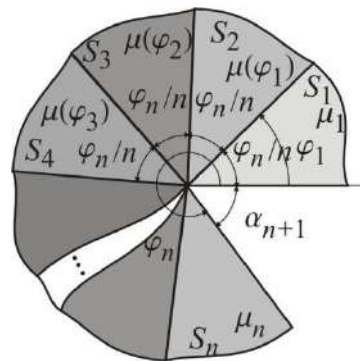


Рис. 3. Система, у якій модулі зсуву клинів пов'язані між собою експоненціальним або лінійним законом

Нижче подані результати досліджень порядку сингулярності напружень для випадку, коли кутівий виріз вироджується в розріз ( $\alpha_{n+1} = 0$ ), на берегах якого задані умови першої, другої або змішаної крайових задач. Також розглянуто випадки суцільного тіла, складеного із клинів та частково відшарованого абсолютно жорсткого включення (умови ідеального контакту берегів розрізу).

**1. Циклічний закон зміни модулів зсуву (двофазна система) заданий такою залежністю:**

$$\mu_i = \mu\gamma^{0.5(1-(-1)^{i-1})} \quad (\mu_i = \mu_{i-1}\gamma^{(-1)^{i-1}}) \quad \mu_i = \mu\gamma^{\sin^2\left[\frac{(i-1)\pi}{2}\right]}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Зважаючи на специфіку двофазної циклічної системи, обчислення порядку сингулярності напружень здійснювалися для випадку парної кількості елементів системи, оскільки саме в цьому випадку зберігається циклічність зміни модулів зсуву.

Результати обчислень сингулярності поля напружень для різних крайових умов, залежно від кількості клинів, що складають систему, та величини відношення модулів зсуву суміжних клинів  $\gamma$ , подано в таблиці 1.

Таблиця 1

$\begin{matrix} n \\ \gamma \end{matrix}$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
<b>Перша крайова задача</b>										
<b>1000</b>	0,5	0,9716	0,9699	0,9692	0,9689	0,9688	0,9687	0,9686	0,9686	0,9686
<b>100</b>	0,5	0,9105	0,9052	0,9033	0,9025	0,9021	0,9018	0,9016	0,9015	0,9014
<b>10</b>	0,5	0,7334	0,7215	0,7175	0,7158	0,7148	0,7142	0,7138	0,7135	0,7134
<b>Друга крайова задача</b>										
<b>1000</b>	0,5	0,9715	0,9698	0,9692	0,969	0,9688	0,9687	0,9686	0,9686	0,9685
<b>100</b>	0,5	0,9105	0,9052	0,9033	0,9025	0,9021	0,9018	0,9016	0,9015	0,9014
<b>10</b>	0,5	0,7334	0,7215	0,7175	0,7157	0,7147	0,7141	0,7137	0,7135	0,7133
<b>Змішана крайова задача</b>										
<b>1000</b>	0,9899	0,9875	0,9865	0,9860	0,9857	0,9855	0,9853	0,9852	0,9851	0,985
<b>100</b>	0,9683	0,9609	0,9578	0,9562	0,9551	0,9544	0,9539	0,9535	0,9531	0,9529
<b>10</b>	0,9024	0,8822	0,8743	0,8701	0,8675	0,8656	0,8643	0,8634	0,8626	0,862

2. Експоненціальний закон зміни модулів зсуву  $\mu_i$  складових системи від  $\mu_1$  (значення модуля зсуву першого клина) до  $\mu_n$  (значення модуля зсуву  $n$ -го клину) заданий таким співвідношенням [10]:

$$\mu_i = be^{a(\varphi_i - 0,5\varphi_n)},$$

де  $a = (\varphi_n)^{-1} \ln \gamma$ ,  $b = \sqrt{\gamma}$ ,  $\mu_1 \gamma = \mu_n$ .

Результати обчислень найвищого порядку сингулярності напружень у цій системі, що містить півбезмежну міжфазну тріщину ( $\alpha_{n+1} = 0$ ), подані в табл. 2 для випадків першої та другої крайових задач, а також для моделі суцільного багатоклинового композиту, залежно від кількості  $n$  клинів, що складають систему та величини відношення модулів зсуву першого та  $n$ -го клинів  $\gamma = \mu_n / \mu_1$ .

Таблиця 2

$\begin{matrix} n \\ \gamma \end{matrix}$	2	4	6	8	10	12	14	16	18
<b>Перша крайова задача</b>									
<b>2</b>	0,5	0,4828	0,4890	0,4922	0,4938	0,4947	0,4953	0,4956	0,4959
<b>10</b>	0,5	0,4256	0,4447	0,4538	0,4584	0,4611	0,4627	0,4638	0,4646
<b>100</b>	0,5	0,3345	0,3530	0,3631	0,3686	0,3718	0,3739	0,3753	0,3762
<b>1000</b>	0,5	0,2569	0,2495	0,2503	0,2516	0,2527	0,2536	0,2542	0,2547

Продовження табл. 2

$n \backslash \gamma$	2	4	6	8	10	12	14	16	18
<b>Друга крайова задача</b>									
<b>2</b>	0,5	0,51	0,5048	0,5018	0,5002	0,4992	0,4987	0,4983	0,4980
<b>10</b>	0,5	0,5024	0,4908	0,4828	0,4780	0,4751	0,4732	0,4719	0,4710
<b>100</b>	0,5	0,4365	0,4185	0,4069	0,3993	0,3943	0,3910	0,3886	0,3870
<b>1000</b>	0,5	0,3511	0,3136	0,2959	0,2853	0,2783	0,2735	0,2701	0,2676
<b>Суцільний багатоклиновий композит</b>									
<b>2</b>	0	0,0805	0,0707	0,0642	0,0608	0,0590	0,0579	0,0573	0,0569
<b>10</b>	0	0,2127	0,2034	0,1903	0,1817	0,1763	0,1728	0,1705	0,1689
<b>100</b>	0	0,2568	0,2554	0,2447	0,2354	0,2286	0,2237	0,2203	0,2177
<b>1000</b>	0	0,2279	0,2095	0,1965	0,1864	0,1788	0,1732	0,1691	0,1660

**3. Квадратичний закон зміни модуля зсуву  $\mu_i$  складових системи від  $\mu_1$  (значення модуля зсуву першого клина) до  $\mu_n$  (значення модуля зсуву  $n$ -го клину), заданий так [11]:**

$$\mu_i = [a(\varphi_i - 0,5\varphi_n) + b]^2,$$

$$\text{де } a = \frac{\sqrt{\mu_n} - \sqrt{\mu_1}}{\varphi_n}, \quad b = \frac{\sqrt{\mu_n} + \sqrt{\mu_1}}{2}, \quad \mu_n = \gamma\mu_1.$$

Найвищий порядок сингулярності напружень поблизу вершини міжфазної півбезмежної тріщини в системі, модулі зсуву компонентів якої змінюються за цим законом, обчислено для випадків першої та другої крайових задач. Також досліджено особливість напружень у суцільному багатоклиновому композиті, елементи якого змінюються згідно з поданим вище квадратичним законом. Результати досліджень залежності порядку сингулярності від кількості  $n$  клинів, що складають систему та величини  $\gamma = \mu_n/\mu_1$  – відношення модулів зсуву першого та  $n$ -го клинів, подані в табл. 3

Таблиця 3

$n \backslash \gamma$	2	4	6	8	10	12	14	16	18
<b>Перша крайова задача</b>									
<b>2</b>	0,5	0,4790	0,4855	0,4889	0,4906	0,4916	0,4922	0,4926	0,4929
<b>10</b>	0,5	0,3991	0,4207	0,4308	0,4358	0,4385	0,4401	0,4411	0,4418
<b>100</b>	0,5	0,3188	0,3475	0,3565	0,3596	0,3606	0,3609	0,3607	0,3604
<b>1000</b>	0,5	0,2980	0,3233	0,3279	0,3273	0,3266	0,3252	0,3238	0,3224
<b>Друга крайова задача</b>									
<b>2</b>	0,5	0,5141	0,5087	0,5055	0,5037	0,5027	0,502	0,5015	0,5012
<b>10</b>	0,5	0,5408	0,5316	0,5225	0,5162	0,5121	0,5093	0,5073	0,5059
<b>100</b>	0,5	0,5471	0,5456	0,5391	0,5328	0,5275	0,5231	0,5195	0,5167
<b>1000</b>	0,5	0,5413	0,5402	0,5358	0,5317	0,5282	0,5254	0,5229	0,5209



Продовження табл. 3

$n \backslash \gamma$	2	4	6	8	10	12	14	16	18
<b>Суцільний багатоклиновий композит</b>									
<b>2</b>		0,0819	0,0717	0,0647	0,061	0,059	0,0578	0,0571	0,0567
<b>10</b>		0,225	0,2197	0,2044	0,1927	0,1848	0,1795	0,1759	0,1734
<b>100</b>		0,2893	0,31	0,3072	0,2996	0,2916	0,2844	0,2783	0,2732
<b>1000</b>		0,2946	0,3188	0,3216	0,3197	0,3166	0,3133	0,3101	0,3072

Аналогічний характер зміни порядку сингулярності поля напружень справедливий також і для інших геометричних параметрів багатоклинових композитів.

### АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ВИСНОВКИ

Результати досліджень продемонстрували, що зі збільшенням кількості елементів багатоклинової системи значення порядку сингулярності прямує до деякого асимптотичного значення, незалежно від закону зміни пружних характеристик.

З'ясовано, що асимптотичне значення порядку сингулярності для системи, у якій модуль зсуву змінюється циклічно від клина до клина (двохфазна система табл. 1), зростає зі збільшенням відношення модулів зсуву суміжних клинів для випадку першої крайової задачі та спадає у випадку другої або змішаної задачі. Асимптотичне значення в системах, де пружні характеристики змінюються за експоненціальним або квадратичним законами, навпаки – спадають зі зростанням відношення крайніх значень модуля зсуву табл. 2, 3 у всіх випадках. Відтак, можна припустити, що складена з клинів достатньо малого розхилу система моделюватиме функціонально-градієнтний матеріал (ФГМ), характеристики якого змінюються неперервним чином, залежно від полярного кута.

З метою з'ясування правомірності зробленого припущення, багатоклиновою системою було змодельовано вставку із ФГМ з квадратичною залежністю в композитному клині [11] (рис. 4 а). Крайні клини мають кут розхилу  $\alpha_1$  та  $\alpha_n$ , вставка із ФГМ моделюється набором клинів із кутами розхилу  $\alpha_i = [\varphi_n - (\alpha_1 + \alpha_n)](n-2)^{-1}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n-1$  (рис. 4 б), модулі зсуву яких змінюються згідно з квадратичним законом:

$$\mu_i = [a(\varphi_i - 0,5\varphi_n) + b]^2,$$

де  $a = (\sqrt{\mu_n} - \sqrt{\mu_1})(\varphi_n)^{-1}$ ,  $b = 0,5(\sqrt{\mu_n} + \sqrt{\mu_1})$ ,  $\gamma = \mu_n / \mu_1$ .

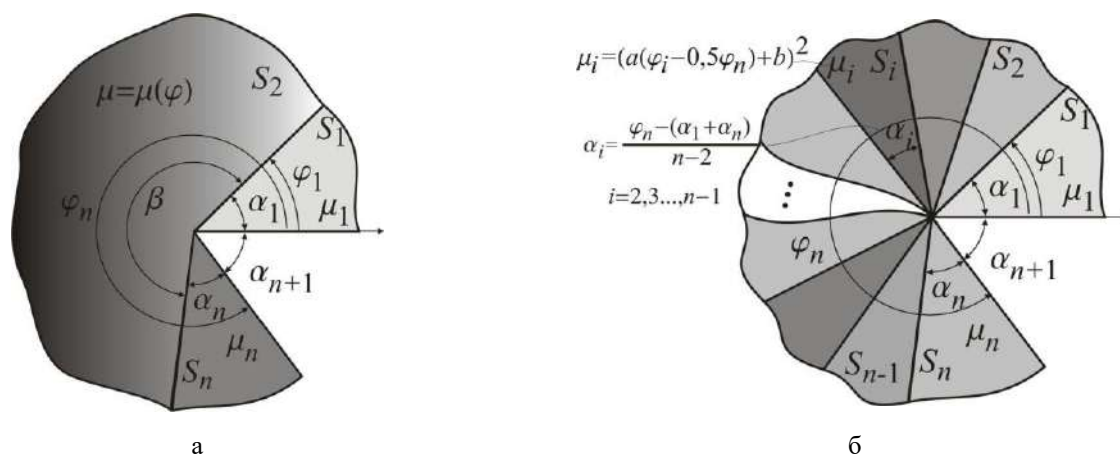


Рис. 4. Композитний клин із вставкою з функціонально градієнтного матеріалу

Результати обчислень порядку сингулярності напружень поблизу вершини тріщини для різних значень відношення модулів зсуву подані в табл. 4, для кутів розхилу крайніх клинів  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_n = 7\pi/6$  відповідно,  $\varphi_n = 2\pi$  та загальної кількості клинів  $n=22$  (вставка змодельована 20-тьма клинами). Тут  $\lambda$  – наближені значення сингулярності, обчислені за допомогою формул (1), (6), а  $\lambda'$  – значення, обчислене за характеристичним рівнянням, що побудоване у [11] для вставки з ФГМ у трикомпонентному композитному клині.

Таблиця 4.

$\gamma$	2	4	6	8	10
$\lambda$	0,3914	0,2944	0,2617	0,2468	0,2398
$\lambda'$	0,3921	0,2937	0,2585	0,2430	0,2359

Як видно, результати для вставки з ФГМ, змодельованої вже лишень 20-ма елементами, відносна похибка становить не більше, ніж 2%, при чому для близьких значень модулів зсуву зовнішніх клинів ( $\gamma < 6$ ) вона не перевищує 1%. Зі збільшенням кількості елементів, що моделюють вставку, точність обчислень порядку сингулярності напружень зростає.

Отже, виявлено, що зі зменшенням кута розхилу елементів системи порядок сингулярності напружень прямуватиме до певного асимптотичного значення, яке можна використовувати для оцінки сингулярності напружень у матрицях із функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), характеристики яких змінюються неперервним чином залежно від полярного кута. Числові дослідження також підтвердили правомірність використання багатоклинової системи із малими кутами розхилу її елементів для математичного моделювання вставок із ФГМ у композитних клинах. Такий підхід до моделювання околів концентраторів напружень, що містяться у ФГМ із кутовою градієнтністю, уможливує дослідження фізико-механічних полів за умови будь-якої функційної залежності модуля зсуву.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Wieghardt K. Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. *Z. Math. Phys.* 1907. Vol. 55. P. 60–103.
2. Williams M. L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. *Journal of Applied Mechanics.* 1952. Vol. 19(4). P. 526–528.
3. Paggi M., Carpinteri A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.* 2008. Vol. 61, No. 2. P. 22.
4. Carpinteri A., Paggi M. Singular harmonic problems at a wedge vertex: mathematical analogies between elasticity, diffusion, electromagnetism, and fluid dynamics. *Journal of Mechanics of Materials and Structures.* 2011. Vol. 6(1-4). P. 113–125.
5. Linkov A. M., Koshelev V. F. Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponents and angular distribution. *Int. J. Solids and Structures.* 2006. Vol. 43. P. 5909–5930.
6. Makhorkin M., Sulym H. On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation. *Civil and environmental engineering reports.* 2010. Vol. 5. P. 235–251.
7. Xiaofei H., Weian Y. Stress singularity analysis of multi-material wedges under antiplane deformation. *Acta Mechanica Solida Sinica.* 2013. Vol. 26, No. 2. P. 151–160.
8. Linkov A., Rybarska-Rusinek L. Numerical methods and models for anti-plane strain of a system with a thin elastic wedge. *Archive of Applied Mechanics.* 2008. Vol. 78, No. 10. P. 821–831.
9. Махоркін М. І., Сулим Г. Т. Асимптотики і поля напружень у клиновій системі за умов антиплоскої деформації. *Машинознавство.* 2007. № 1. С. 8-13.
10. Paggi M., Carpinteri A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.* 2008. Vol. 61. P. 1–22.
11. Tikhomirov V. V. Stress singularity in a top of composite wedge with internal functionally graded material. *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics.* 2015. Vol. 1, No. 3. P. 278–286.

## REFERENCES

1. Wieghardt, K. (1907). Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. Z. Math. Phys., Vol. 55, pp. 60-103.
2. Williams, M. L. (1952). Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. Journal of Applied Mechanics, Vol. 19(4), pp. 526-528.
3. Paggi, M. & Carpinteri, A. (2008). On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. Appl. Mech. Rev., Vol. 61, No. 2, p. 22.
4. Carpinteri, A. & Paggi, M. (2011). Singular harmonic problems at a wedge vertex: mathematical analogies between elasticity, diffusion, electromagnetism, and fluid dynamics. Journal of Mechanics of Materials and Structures, Vol. 6(1-4), pp. 113-125.
5. Linkov, A. M. & Koshelev, V. F. (2006). Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponents and angular distribution. Int. J. Solids and Structures, Vol. 43, pp. 5909-5930.
6. Makhorkin, M. & Sulym, H. (2010). On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation. Civil and environmental engineering reports, Vol. 5, pp. 235-251.
7. Xiaofei, H. & Weian, Y. (2013). Stress singularity analysis of multi-material wedges under antiplane deformation. Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 26, No. 2, pp. 151-160.
8. Linkov, A. & Rybarska-Rusinek, L. (2008). Numerical methods and models for anti-plane strain of a system with a thin elastic wedge. Archive of Applied Mechanics, Vol. 78, No. 10, pp. 821-831.
9. Makhorkin, M. & Sulym, H. (2007). Asymptotics and stress fields in the wedge system under antiplastic deformation conditions.. Mashynoznavstvo, No. 1, pp. 8-13.
10. Paggi, M. & Carpinteri, A. (2008). On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. Appl. Mech. Rev., Vol. 61, pp. 1-22.
11. Tikhomirov, V. V. (2015). Stress singularity in a top of composite wedge with internal functionally graded material. St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics, Vol. 1, No. 3, pp. 278-286.

УДК 539.3

## КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ТОНКОГО ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ З ТРІЩИНАМИ НА ПРОДОВЖЕННІ ЗА ГАРМОНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Мішарін А. С., Попов В. Г.

Національний університет «Одеська морська академія»,  
вул. Дідріхсона, 8, Одеса, Україна

mishandr@ukr.net, dr.vg.popov@gmail.com

Розв'язана плоска динамічна задача теорії пружності про визначення напруженого стану навколо тонкого жорсткого смугового включення з тріщинами на продовженні. Включення вважається повністю зчепленим із зовнішнім середовищем і перебуває під дією сил та моментів, що гармонічно змінюються за часом. Метод розв'язання базується на поданні переміщень і напружень через розривні розв'язки двовимірних рівнянь руху пружного середовища. Після задоволення граничних умов на включенні і тріщинах вихідна задача зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень і напружень. Ця система розв'язується наближено числовим методом, який базується на застосуванні спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів.

*Ключові слова:* коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), система сингулярних інтегральних рівнянь, сила, гармонічні коливання, включення, тріщина.

## КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ТОНКОГО ЖЁСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ТРЕЩИНАМИ НА ПРОДОЛЖЕНИИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Мишарин А. С., Попов В. Г.

*Національний університет «Одесская морская академия»,  
ул. Дидрихсона, 8, Одесса, Украина*

mishandr@ukr.net, dr.vg.popov@gmail.com

Решена плоская динамическая задача теории упругости об определении напряженного состояния возле тонкого жесткого полосового включения с трещинами на продолжении. Включение считается полностью сцепленным с внешней средой и находится под действием сил и моментов, которые гармонически меняются по времени. Метод решения базируется на представлении перемещений и напряжений через разрывные решения двумерных уравнений движения упругой среды. После удовлетворения граничных условий на включении и трещинах исходная задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков перемещений и напряжений. Эта система решается приближенно численным методом, который базируется на применении специальных квадратурных формул для сингулярных интегралов.

*Ключевые слова:* коэффициент интенсивности напряжений (КИН), система сингулярных интегральных уравнений, сила, гармонические колебания, включение, трещина.

## STRESS CONCENTRATION NEAR A THIN RIGID INCLUSION WITH CRACKS ON THE CONTINUATION OF THE INCLUSION UNDER THE HARMONIC LOADING

Misharin A. S., Popov V. G.

*National University "Odessa Maritime Academy",  
Didryhsona str., 8, Odessa, Ukraine*

mishandr@ukr.net, dr.vg.popov@gmail.com

The isotropic elastic medium which is in a state of plane strain is considered. There is a complex defect, in the form of the thin strip inclusion on the continuation of which there are two cracks, in the medium (matrix). This defect in the plane  $Oxy$  occupied the segment  $y=0, |x| \leq a$ .

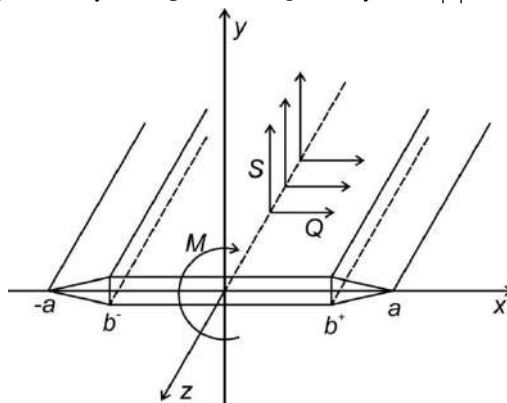


Fig. 1. The inclusion with the cracks on the continuation of it

The inclusion can be under the action of the normal force, shear force or the moment that we denote as follows:

$$S = S_0 e^{-i\omega t}, \quad Q = Q_0 e^{-i\omega t}, \quad M = M_0 e^{-i\omega t}$$

It is required to determine the stresses in the vicinity of the defect at the harmonic loading.

The displacements are determined from the equations of motion of an elastic medium in terms of plane deformation. Boundary conditions are stated in the supposed that the inclusion is fully coupled with the matrix, and surfaces of the cracks are not loaded.

The method of the solution is to present the displacements of the matrix as a superposition of the three discontinuous solutions which are built accordingly to the cracks and the inclusion. Then, because of the satisfaction of the boundary conditions we obtain the system of the singular integral equations concerning the jumps of stresses and displacements on the defect.

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \left[ \frac{\Delta(1+\xi^2)}{2} \ln|\tau-t| + R_l(\tau, t) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) R_{15-l}(\tau, t) d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) R_{25-l}(\tau, t) d\tau = f_l(t), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) R_l^-(\tau, t) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{15-l}^-(\tau, t) \right] d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) R_{25-l}^-(\tau, t) d\tau = 0, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) R_l^+(\tau, t) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) R_{15-l}^+(\tau, t) d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{25-l}^+(\tau, t) \right] d\tau = 0, \end{aligned} \right.$$

$l = 1, 2.$

For the numerical solution of the system the collocation method, which based on the use of the special quadrature formulas for singular integrals and quadrature formulas for the integrals with the regular kernels, is proposed.

The formulas for calculating of the SIF (stress intensity factor) for cracks and the amplitude of the translational motion and the rotation angle of the inclusion are obtained.

In all cases, it is revealed the existence of the frequency at which SIF has the maximum value. Note, that under the action of the shift force, the values of SIF associated with the action of the normal force and torque are equal to 0 or vice versa, by the action of the normal force and moment are equal to 0 values of SIF associated with the effect of the shift force.

The plane problem of dynamic elasticity determination of the stress state around the thin strip absolutely hard inclusion cracked on the continuation is solved. The inclusion is considered fully coupled with the matrix and inclusion is under the action of forces and moments harmoniously change over time. The method of solution is based on the representation of displacements and stresses due to discontinuous solutions of the equations of the motion of 2D elastic medium. After the satisfaction of the boundary conditions on the inclusion and cracks the initial problem is reduced to a system of singular integral equations for the unknown jumps of displacements and stresses. This system is approximately solved by the numerical method, based on the use of special quadrature formulas for singular integrals.

*Key words: stress intensity factor (SIF), a system of singular integral equations, force, harmonic loading, inclusion, crack.*

## ВСТУП

Сучасні елементи будівельних конструкцій і деталі машин досить часто містять конструктивні елементи або технологічні дефекти, які можна розглядати як тонкі включення великої жорсткості. Подібні включення у багатьох випадках також можуть розглядатись як армуючі елементи композитних матеріалів. Але як показують дослідження [1], тонкі жорсткі включення спричиняють до значної концентрації напружень в оточуючому середовищі, яка може привести до утворення тріщин на його продовженні.

В останні роки для відновлення несучої здатності пошкоджених тріщинами будівельних конструкцій є поширеними ін'єкційні технології [2-5]. Ці технології полягають у заповненні тріщин рідкими матеріалами, що утворюють з матрицями міцні зв'язки після кристалізації або полімеризації і таким чином зміцнюють пошкоджену конструкцію. Але у випадку неповного заповнення тріщини ін'єкційним матеріалом у тілі утворюється дефект у вигляді тонкого включення з тріщинами на продовженні.

Отже, визначення напруженого стану в пружних тілах, що містять складні дефекти у вигляді такого включення з тріщинами на продовженні, є актуальною проблемою механіки деформівного тіла і механіки руйнування. На сьогодні вважати, що проблему вирішено, можливо тільки у випадку статичного навантаження тіл з подібними дефектами. Так необмежені і напівобмежені тіла з включеннями, що мають тріщини на продовженні в межах двовимірної теорії пружності, розглянуто у працях [6, 7]. Міцність тіл з тріщинами, залікованими і частково залікованими за ін'єкційними технологіями, досліджені у [3, 8]. Але питання динамічного навантаження, зокрема гармонічного, на складні дефекти у вигляді

тонкого включення з тріщинами на продовженні, не розглядалися. У нашому дослідженні розв'язується задача визначення напруженого стану в тілі з подібним дефектом, що виникає внаслідок дії нормальної та зсувної сили або моменту, що гармонічно змінюються за часом.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається пружне ізотропне середовище (матриця), яке знаходиться у стані плоскої деформації. У цьому середовищі міститься дефект у вигляді тонкого смугового включення зі смуговими тріщинами на продовженні. У площині  $Oxy$  включення займає область  $x \in [b^-, b^+]$ ,  $-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$ . Тріщини, що відходять від включення, у цій площині займають відрізки  $x \in [-a, b^-]$ ,  $x \in [b^+, a]$ .

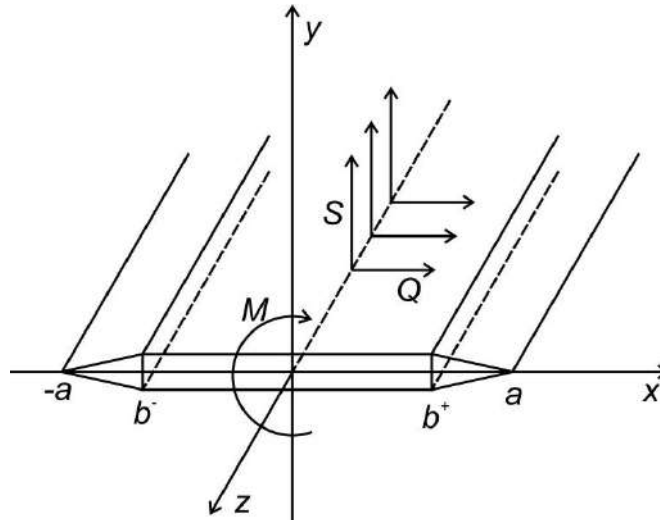


Рис. 1. Включення з тріщинами на продовженні

На включення може діяти нормальна сила, сила зсуву або момент, які ми позначимо відповідно:

$$S = S_0 e^{-i\omega t}, \quad Q = Q_0 e^{-i\omega t}, \quad M = M_0 e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Залежність від часу визначається множником  $e^{-i\omega t}$ , який надалі буде усюди опущений. Відмінні, за плоскої деформації, від нуля переміщення  $u$  і  $v$  задовольняють двовимірним рівнянням руху пружного середовища за гармонічних коливань:

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) \text{grad div} U = -\rho \omega^2 U, \quad U = (u(x, y), v(x, y))^T. \quad (2)$$

Граничні умови з боку матриці на дефекті, внаслідок його малої товщини, сформульовано відносно до його серединної площини. Тоді на включенні, за умови ідеального зчеплення, повинні виконуватися рівності:

$$u(x, 0) = d_1, \quad v(x, 0) = d_2 + \gamma x, \quad (3)$$

де  $d_1$ ,  $d_2$  – амплітуди переміщень включення відносно осей  $Ox$  і  $Oy$ ,  $\gamma$  – кут повороту включення відносно осі  $Oz$ .

Окрім того, на поверхні включення зазнають розриву напруження, стрибки яких позначимо так:

$$\langle \sigma_y \rangle = \chi_1(x), \quad \langle \tau_{yx} \rangle = \chi_2(x), \quad x \in [b^-, b^+]. \quad (4)$$

Невідомі амплітуди переміщень та кута повороту включення визначаються з рівняння руху включення як твердого тіла:

$$\begin{aligned}
 -m\omega^2 d_1 &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(x) dx + Q_0, & -m\omega^2 d_2 &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(x) dx + S_0, \\
 -\omega^2 \gamma I_{in} &= \int_{b^-}^{b^+} x \chi_1(x) dx + M_0.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Поверхні тріщин вважаються незавантаженими, унаслідок чого виконуються рівності:

$$\sigma_y(x, 0) = 0, \quad \tau_{yx}(x, 0) = 0, \quad x \in [-a, b^-], \quad x \in [b^+, a].
 \tag{6}$$

Також на тріщинах зазнають розриву переміщення, стрибки яких позначимо:

$$\langle u \rangle = \chi_4^\pm(x), \quad \langle v \rangle = \chi_3^\pm(x), \quad x \in [-a, b^-], \quad x \in [b^+, a].
 \tag{7}$$

Причому, з умови змикання у зовнішніх вершинах тріщин, мають виконуватися умови

$$\chi_{3,4}^\pm(\pm a) = 0.$$

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Розв'язання сформульованої крайової задачі суттєво базується на використанні розривних розв'язків рівнянь (3). Спочатку будується розривний розв'язок цих рівнянь зі стрибками (4) на поверхні включення. Ці розривні розв'язки і пов'язані з ними напруження визначаються формулами [9, 10]:

$$\begin{aligned}
 u^d(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{41}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{42}(\eta - x, y) d\eta, \\
 v^d(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{31}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{32}(\eta - x, y) d\eta, \\
 \sigma_y^d(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{11}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{12}(\eta - x, y) d\eta, \\
 \tau_{yx}^d(x, y) &= \int_{b^-}^{b^+} \chi_1(\eta) G_{21}(\eta - x, y) d\eta + \int_{b^-}^{b^+} \chi_2(\eta) G_{22}(\eta - x, y) d\eta.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Також будуються розривні розв'язки рівнянь (3) зі стрибками (7), для яких мають місце аналогічні формули:

$$\begin{aligned}
 u^\pm(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^-(\eta) G_{43}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^-(\eta) G_{44}(\eta - x, y) d\eta, \\
 v^\pm(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^-(\eta) G_{33}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^-(\eta) G_{34}(\eta - x, y) d\eta, \\
 \sigma_y^\pm(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^-(\eta) G_{13}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^-(\eta) G_{14}(\eta - x, y) d\eta, \\
 \tau_{yx}^\pm(x, y) &= \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_3^-(\eta) G_{23}(\eta - x, y) d\eta \pm \int_{b^\pm}^{\pm a} \chi_4^-(\eta) G_{24}(\eta - x, y) d\eta,
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

де

$$G_{11} = G_{33} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - 2 \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
G_{12} = G_{43} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - 2 \left( \kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right], \\
G_{13} &= \frac{\mu}{\kappa_2^2} \left[ - \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 r_1 + \left( \kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right], \\
G_{14} = G_{23} &= \frac{2\mu}{\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (r_1 - r_2), \\
G_{21} = G_{34} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2 \left( \kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right], \\
G_{22} = G_{44} &= \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ -2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right], \\
G_{24} &= \frac{\mu}{\kappa_2^2} \left[ 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 r_2 \right], \\
G_{31} = \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \left[ \left( \kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1 - \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right], \quad G_{32} = G_{41} &= -\frac{1}{\mu \kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (r_1 - r_2), \\
G_{42} &= \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \left[ -\frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + \left( \kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right], \\
r_k = r_k(\eta - x, y) &= -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left[ \kappa_k \sqrt{(\eta - x)^2 + y^2} \right], \quad \kappa_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad k = 1; 2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Після цього переміщення і напруження в матриці подамо у вигляді суми розривних розв'язків (8), (9)

$$\begin{aligned}
u &= u^d + u^- + u^+; \quad v = v^d + v^- + v^+; \\
\tau_{yx} &= \tau_{yx}^d + \tau_{yx}^- + \tau_{yx}^+; \quad \sigma_y = \sigma_y^d + \sigma_y^- + \sigma_y^+.
\end{aligned} \tag{11}$$

Щоб остаточно визначити поля переміщень і напружень за формулами (11), необхідно знайти невідомі стрибки напружень і переміщень на дефекті. Для цього слід використати незадовільнені умови (3), (6). Після підстановки (11) у ці рівності приходимо до системи інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків. Ця система після переходу до проміжку  $[-1, 1]$ , відокремлення сингулярних складових ядер і введення нових невідомих функцій

$$\begin{aligned}
\mu \varphi_i(\tau) = \chi_i \left( \frac{b^+ - b^-}{2} \tau + \frac{b^+ + b^-}{2} \right), \quad \varphi_j^\pm(\tau) = \left( \chi_j^\pm \left( \frac{a \mp b^\pm}{2} \tau \pm \frac{a \pm b^\pm}{2} \right) \right)', \\
i = 1, 2, \quad j = 3, 4
\end{aligned} \tag{12}$$

має вигляд:



$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \left[ \frac{\Delta(1+\xi^2)}{2} \ln|\tau-t| + R_l(\tau, t) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) R_{15-l}(\tau, t) d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) R_{25-l}(\tau, t) d\tau = f_l(t), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) R_l^-(\tau, t) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{15-l}^-(\tau, t) \right] d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) R_{25-l}^-(\tau, t) d\tau = 0, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) R_l^+(\tau, t) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^-(\tau) R_{15-l}^+(\tau, t) d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{5-l}^+(\tau) \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-t} + R_{25-l}^+(\tau, t) \right] d\tau = 0. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

$l = 1, 2.$

$$f_1(t) = -\frac{\bar{\rho}}{4\kappa_0^2 \varepsilon \Delta} Q_1 - \frac{3\bar{\rho}}{4\kappa_0^2 \varepsilon q} M_1, \quad f_2(t) = -\frac{\bar{\rho}}{4\kappa_0^2 \varepsilon \Delta} S_1,$$

де  $Q_1 = \frac{Q_0}{a}$ ,  $M_1 = \frac{M_0}{a}$ ,  $S_1 = \frac{S_0}{a}$ ,  $q = \Delta^2 \varepsilon^2 + (\varepsilon^+)^2 + \varepsilon^+ \varepsilon^- + (\varepsilon^-)^2$ ,  $\Delta = 0.5(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)$ .

Ураховуючи поведінку напружень біля кінців включення і вершин тріщин, розв'язок системи (13) слід шукати у вигляді:

$$\varphi_l(\tau) = \frac{\psi_l(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad \varphi_l^\pm(\tau) = (1 \mp \tau)^{-1/2} \psi_l^\pm(\tau), \quad l = 1, 2. \quad (14)$$

Функції  $\psi_l(\tau)$ ,  $\psi_l^\pm(\tau)$  вважаються такими, що задовольняють умовам Гельдера і наближуються наступними інтерполяційними поліномами:

$$\begin{aligned} \psi_l(\tau) &= \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{T_n(\tau)}{T_n'(\tau_m)(\tau - \tau_m)}, \quad \tau_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}, \\ \psi_l^\pm(\tau) &= \sum_{m=1}^n \psi_{lm}^\pm \frac{q_n^\pm(\tau)}{[q_n^\pm(\tau_m^\pm)]'(\tau - \tau_m^\pm)}, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

У формулах (15)  $T_n(\tau)$  – багаточлен Чебишева першого роду,  $q_n^+(\tau) = P_n^{-1/2,0}(\tau)$ ,  $q_n^-(\tau) = P_n^{0,-1/2}(\tau)$  – багаточлени Якобі,  $\tau_m$ ,  $\tau_m^\pm$  – корені вказаних багаточленів. Наближення невідомих функцій, згідно з формулами (14), (15) дає можливість використовувати для сингулярних інтегралів квадратурні формули [11, 12]:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \ln|\tau - \tau_k| d\tau = \sum_{m=1}^n a_m B_{km} \psi_{lm}, \\ & \int_{-1}^1 \frac{\varphi_l^\pm(\tau)}{\tau - \zeta_k^\pm} d\tau = \sum_{m=1}^n \psi_{lm}^\pm \frac{A_m^\pm}{\tau_{lm}^\pm - \zeta_k^\pm}, \quad l = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (16)$$

де  $\zeta_k^\pm$  – корні функцій Якобі  $J_n^{-1/2,0}(\zeta)$ ,  $J_n^{0,-1/2}(\zeta)$ ,

$$B_{km} = -\ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos \frac{j\pi(2m-1)}{2n} \cos \frac{j\pi(2k-1)}{2n}}{j}, \quad a_m = \frac{\pi}{n},$$

$$A_m^\pm = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 - (\tau_m^\pm)^2\right) \left([q_n^\pm(\tau_m^\pm)]'\right)^2}. \quad (17)$$

Квадратурні формули (16), а також формули Гаусса-Чебишева і Гаусса-Якобі для регулярних інтегралів, дають можливість знайти наближений розв'язок системи (13) методом колокації. При цьому, за точки колокації в рівняннях, отриманих з умов на включенні, використовуються корені багаточленів Чебишева  $\tau_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , а в рівняннях, знайдених з умов на тріщинах, корені функції Якобі другого роду  $\zeta_k^\pm$ ,  $k=1,2,\dots,n$ .

У результаті приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функцій  $\varphi_l(\tau)$ ,  $\varphi_l^\pm(\tau)$  в узлах інтерполяції:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{lm} \left[ \frac{\Delta(1+\xi^2)}{2} B_{km} + R_l(\tau_m, \tau_k) \right] + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^- \psi_{5-l,m}^- R_{15-l}^-(\tau_m^-, \tau_k) + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^+ \psi_{5-l,m}^+ R_{25-l}^+(\tau_m^+, \tau_k) = f_l(\tau_k), \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{lm} R_l^-(\tau_m, \zeta_k^-) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^- \psi_{lm}^- \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau_m^- - \zeta_k^-} + R_{15-l}^-(\tau_m^-, \zeta_k^-) \right] + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^+ \psi_{lm}^+ R_{25-l}^+(\tau_m^+, \zeta_k^-) = 0, \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{lm} R_l^+(\tau_m, \zeta_k^+) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^- \psi_{lm}^- R_{15-l}^-(\tau_m^-, \zeta_k^+) + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m^+ \psi_{lm}^+ \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau_m^+ - \zeta_k^+} + R_{25-l}^+(\tau_m^+, \zeta_k^+) \right] = 0, \end{aligned} \right. \quad (18)$$

$$l = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Після розв'язку системи (18) наближене значення цих функцій знаходяться за формулами (15).

Величинами, що визначають можливість розвитку тріщини, є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які в умовах плоскої деформації визначаються формулами:

$$k_1^\pm = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm a \pm 0} \sqrt{\pm x - a} \sigma_y^{\pm 1}(x, 0),$$

$$k_2^\pm = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm a \pm 0} \sqrt{\pm x - a} \tau_{yx}^{\pm 1}(x, 0). \quad (19)$$

Після розв'язання системи (18) безрозмірні значення цих коефіцієнтів можуть бути знайдені за наближеними формулами:

$$k_{0l}^\pm = \frac{k_l^\pm}{\mu\sqrt{a}} = -(1-\xi^2) \sqrt{2\pi\Delta^\pm} \sum_{m=1}^n \psi_{lm}^\pm \frac{q_n^\pm(\pm 1)}{[q_n^\pm(\tau_m^\pm)]' (1 \mp \tau_m^\pm)}, \quad l = 1, 2. \quad (20)$$

### РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

За допомогою формул (15) проведено числове дослідження залежності КІН від безрозмірного хвильового числа в припущенні, що тріщини мають однакову довжину. У цьому випадку  $b^+ = -b^- = b$ ,  $k_{01}^+ = k_{01}^- = k_{01}$ ,  $k_{02}^+ = k_{02}^- = k_{02}$  у силу симетрії. Результати розрахунку КІН

наведені у вигляді графіків на рис. 2-4 відповідно при дії силою зсуву, нормальною силою та моментом. Кожна крива побудована для вказаного значення щодо відносної довжини включення  $\varepsilon = \frac{b}{a}$ .

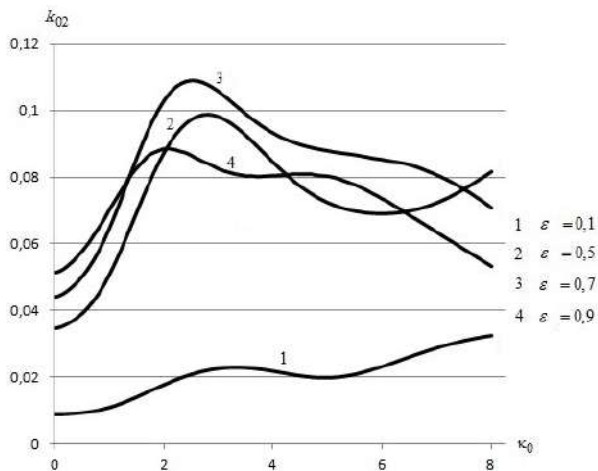


Рис. 2. Залежність КІН від хвильового числа при навантаженні зсувною силою

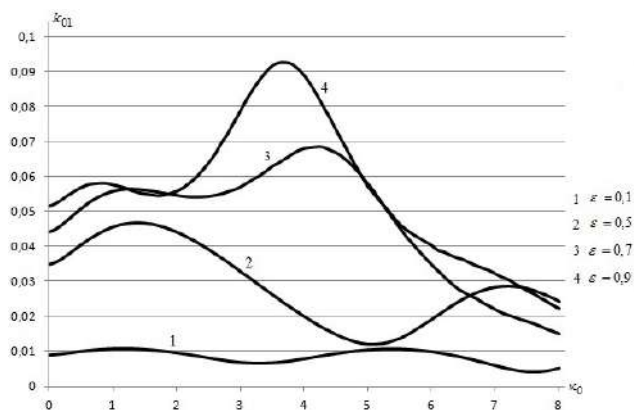


Рис. 3. Залежність КІН від хвильового числа при навантаженні нормальною силою

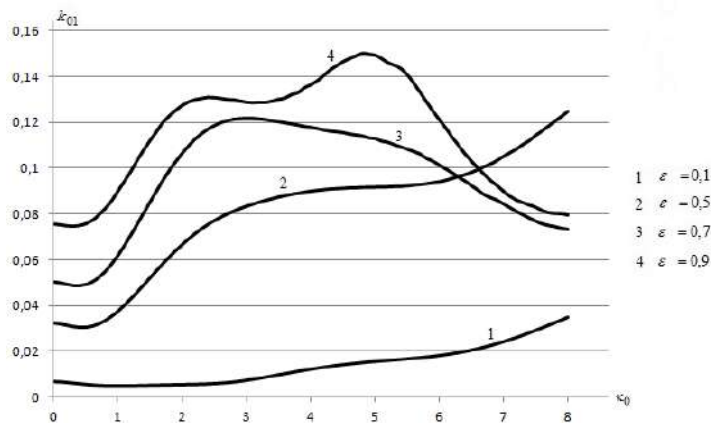


Рис. 4. Залежність КІН від хвильового числа при навантаженні моментом

В усіх випадках виявлене існування частоти, за якої спостерігається максимум КІН. Зауважимо, що при дії силою зсуву, КІН для нормальних напружень дорівнює 0 та навпаки, при дії нормальною силою та моментом, дорівнює 0 КІН дотичних напружень. Також слід зазначити, що у випадку навантаження нормальною силою або моментом, при зменшенні відносних довжин тріщин, збільшуються значення КІН нормальних напружень. У випадку навантаження зсувною силою ця тенденція порушується.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослід.-видав. центр НТШ, 2007. 716 с.
2. Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П. Механіка руйнування та міцність матеріалів: довідниковий посібник. Т. 12. Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. Львів: Сполом, 2009. 260 с.
3. Силованюк В. П., Маруха В. І., Юхим Р. Я., Онищак Н. В. Зміцнення бетону в результаті заповнення пор та порожнин. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2010. Т. 46, № 1. С. 62–66.
4. Силованюк В. П., Маруха В. І., Онищак Н. В. Ресурс міцності відновлених за ін'єкційними технологіями пошкоджених елементів споруд тривалої експлуатації. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій*. Праці VI Міжнар. наук. конфер. (Львів, 2009). Львів, ФМІ НАНУ, 2009. С. 115–124.

5. Силованюк В. П., Ревенко А. В., Онищак Н. В. Вплив повзучости ін'єкційних матеріалів на ефективність заліковування тріщин в бетоні. *Міжвузівський збірник «НАУКОВІ НОТАТКИ»*. Луцьк, 2013. Вип. 41, част. 2. С. 164–169.
6. Акопян В. Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитуцюн», 2014. 323 с.
7. Акопян В. Н., Амirdжанян А. А. Напряженное состояние полуплоскости с выходящим на границу абсолютно жестким включением и трещиной. *Известия национальной академии наук Армении. Механика*. 2015. Т. 68, № 1. С. 25–36.
8. Шацький І. П. Задачі згину пластин з частково залікованою тріщиною. *Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки*. 2014. № 1. С. 91–93.
9. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. Москва: Наука, 1982. 344 с.
10. Попов В. Г., Улановский А. Э. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1995. № 4. С. 99–109.
11. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наук. думка, 1989. 535 с.
12. Андреев А. В. Развитие методов прямого численного решения одномерных интегродифференциальных уравнений механики. *Изв. РАН. МТТ*. 2007. № 2. С. 50–65.

#### REFERENCES

1. Sulym, G. T. (2003). Fundamentals of the mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable bodies with thin inclusions. L'viv: Doslid.-vydav. centr NTSh (in Ukrainian).
2. Maruha, V. I., Panasjuk, V. V. & Sylovanjuk, V. P. (2009). Fracture mechanics and strength of materials. (vol. 12) Injectable technologies for the restoration of the robustness of damaged structures for long-term exploitation. L'viv: Spolom (in Ukrainian).
3. Sylovanjuk, V. P., Maruha, V. I., Juhym, R. Ja. & Onyshhak, N. V. (2010). Strengthening of concrete as a result of filling the pores and cavities. *Fizyko-himichna mehanika materialiv*, Vol. 46, No. 1, pp. 62-66.
4. Sylovanjuk, V. P., Maruha, V. I. & Onyshhak, N. V. (2009). Resource strength restored by the injection technology of damaged buildings long operation. Proceedings of the VI International Scientific Conference Mechanics of material destruction and structural strength, (pp. 115-124), Lviv.
5. Sylovanjuk, V. P., Revenko, A. V. & Onyshhak, N. V. (2013). Effect of creep injecting material efficiency healing of cracks in concrete. *Mizhvuzivskyj zbirnyk "NAUKOVI NOTATKY"*, Iss. 41, Pt. 2, pp. 164-169.
6. Akopjan, V. N. (2014). Mixed boundary value problems of the interaction of solid deformable bodies with different types of stress concentrators. Erevan: Izd. «Gitucjun».
7. Akopjan, V. N. & Amirdzhanjan, A. A. (2015). Stress state of a half-plane with border overlooking the absolutely rigid inclusion and crack. *Izvestija nacional'noj akademii nauk Armenii. Mehanika*, Vol. 68, No 1, pp. 25-36.
8. Shac'kyj, I. P. (2014). The problems of bending plates partially healed crack. *Visnyk Donec'kogo nacional'nogo universytetu. Ser. A: Pryrodnychi nauky*, No. 1, pp. 91-93.
9. Popov G. Ja. (1982), Koncentracija uprugih naprjazhenij vozle shtampov, razrezov, tonkih vključenij i podkreplenij. [The elastic stress concentration near the punches, of sections, thin inclusions and reinforcements], Nauka, Moskva, Russia.
10. Popov, V. G. & Ulanovskij, A. Je. (1995). Comparative analysis of the diffraction fields when passing through the elastic waves of different nature defects. *Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela*, No. 4, pp. 99-109.
11. Nazarchuk, Z. T. (1989). Numerical investigation of the diffraction of waves on cylindrical structures. Kiev: Nauk. dumka.
12. Andreev, A. V. (2007). The development of methods of direct numerical solution of one-dimensional integrodifferential equations of mechanics. *Izv. RAN. MTT*, No. 2, pp. 50-65.

УДК 593.3.

## РОЗТЯГ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ПОВЕРХНЕВИМИ ТРІЩИНАМИ НА ПРЯМОЛІНІЙНІЙ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

<sup>1</sup>Николишин М. М., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор,

<sup>1</sup>Куротчин Л. Р., к. ф.-м. н., м. н. с., <sup>2</sup>Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна*

<sup>2</sup>*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

klesi@i.ua, slobkolia@gmail.com

У роботі з використанням методів теорії функцій комплексної змінної досліджено задачу двовісного розтягу зусиллями на безмежності кусково-однорідної пластини з двома рівними поверхневими тріщинами на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон по їх фронту. Розв'язок задачі здійснено в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон на продовженні тріщин. Для визначення їх довжини використано умову пластичності Мізеса. Побудовано графічні залежності для довжини пластичних зон та розкриття берегів тріщин при різних параметрах задачі.

*Ключові слова: поверхневі тріщини, двовісний розтяг, кусково-однорідна пластина, умова пластичності Мізеса, розкриття берегів тріщин, пластичні зони.*

## РАСТЯЖЕНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ НЕСКВОЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

<sup>1</sup>Николишин М. М., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор,

<sup>1</sup>Куротчин Л. Р., к. ф.-м. н., м. н. с., <sup>2</sup>Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент

<sup>1</sup>*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 3б, г. Львов, 79060, Україна*

<sup>2</sup>*Львовський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, г. Львов, 79000, Україна*

klesi@i.ua, slobkolia@gmail.com

С использованием методов теорий функций комплексного переменного исследована задача о двuosном растяжении усилиями на бесконечности кусочно-однородной пластины с двумя равными несквозными трещинами на прямолинейной границе раздела материалов с учетом пластических зон по их фронту. Решение задачи построено в классе функций, ограниченных в вершинах пластических зон на продолжении трещин. Для определения длины пластических зон использованы условия пластичности Мизеса. Построены графические зависимости длины пластических зон и раскрытия берегов трещин у их вершин от геометрических и силовых параметров задачи.

*Ключевые слова: несквозные трещины, двuosное растяжение, кусочно-однородная пластина, условие пластичности Мизеса, раскрытия берегов трещин, пластические зоны.*

## TENSION OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS ELASTICO-PLASTIC PLATE WITH TWO NON-THROUGH CRACKS ON A STRAIGHT BOUNDARY BETWEEN MATERIAL

<sup>1</sup>Nykolyshyn M. M., D. Sc. in Physics and Maths, professor,

<sup>2</sup>Opanasovich V. K., D. Sc. in Physics and Maths, professor,

<sup>1</sup>Kurotchyn L. R., Ph. D. in Physics and Maths, junior researcher,

<sup>2</sup>Slobodyan M. S., Ph. D. in Physics and Maths, associate professor

<sup>1</sup>*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics  
National Academy of Sciences of Ukraine,  
3b, Naukova St., Lviv, 79060, Ukraine*

<sup>2</sup>*Ivan Franko National University of Lviv,  
1, Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine*

klesi@i.ua, slobkolia@gmail.com

The problem on biaxial tension of an infinite piecewise-homogeneous isotropic plate has been formulated and solved, the plate having a linear interface of materials, where the conditions of perfect mechanical contact are satisfied, and two equal surface cracks. It is assumed that material under cracks changed into plastic state and on the crack prolongation near their tips plastic zones are formed. Mises plasticity conditions are satisfied in the form of a surface plastic layer. Since the cracks are through. The solution of the problem is given in the form of two problems superposition: tension and bending of the plate, having used classical theory of bending. Using the methods of the theory of complex variable and complex potentials of plane problem of elasticity theory and classical theories of the plate bending, solution of the problem is reduced to the problems of linear conjugation, solution of which is obtained in the class of functions, limited in the tops of plastic zones. The formulas to find the stress state on the interface of materials are written out. A system of equations to find the length of plastic zones near the crack tips is obtained. It is solved numerically by means of Newton method. The separation of the crack edges in their tips is determined; where on computing the integrals the method of mechanical quadrature's has been utilized. The influence of load, depth of surface cracks and their mutual location on the length of plastic zones and crack opening near their tips has been analyzed numerically.

*Key words: non-through crack, biaxial tension, piecewise-homogeneous plate, condition plasticity of Mises, crack opening, plastic zones.*

### ВСТУП

Широке застосування пластинчастих елементів конструкцій у багатьох галузях техніки зумовлено їх легкістю та надійністю. Їх дієздатність та експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів, які призводять до руйнування таких конструкцій, знижуючи діапазон допустимого навантаження. У часткових випадках отримано відомі результати для однієї тріщини [1] та двох наскрізних тріщин [2].

### ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо кусково-однорідну ізотропну пластину з прямолінійною межею поділу матеріалів завтовшки  $2h$ , яка знаходиться під дією однорідного поля напружень на нескінченності  $P_1$ ,  $P_2$  і  $q$ . Вважаємо, що на межі поділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту та знаходяться дві поверхневі тріщини завдовжки  $2l$  та заввишки  $h+h_1$  з відстанню між їх центрами рівною  $2s$ , у яких під дією зовнішнього навантаження на продовженні тріщин виникають пластичні зони завдовжки  $w_1$  (між тріщинами) і  $w_2$  (зовні них), крім того, матеріал у перемичках під тріщинами (див. рис. 1) також перейшов у пластичний стан. Поза тріщиною матеріали пластин спаяні. За рахунок наявності поверхневих тріщин розв'язок задачі розбиваємо на дві взаємозв'язані задачі: плоску задачу теорії пружності і задачу згину пластини з використанням класичної теорії.

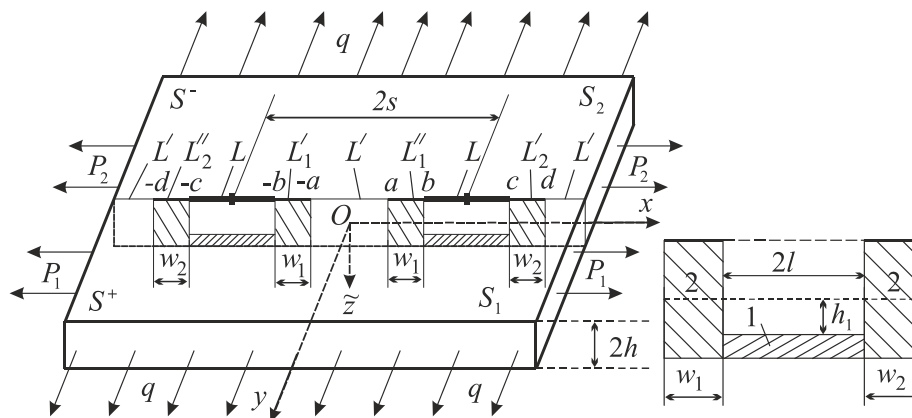


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

У серединній площині пластини введемо декартову систему координат  $Oxy\tilde{z}$  з початком координат посередині між тріщинами, а вісь  $Ox$  направимо вздовж межі поділу матеріалів. Лінію спаю матеріалів позначимо через  $L'$ , лінії, де розміщені тріщини – через  $L$ , а пластичні зони – через  $L'_1, L''_1, L'_2$  і  $L''_2$  (див. рис. 1). Для пружних характеристик верхньої півплощини будемо приписувати індекс 1, а для нижньої – індекс 2. Граничним значенням відповідних величин при  $y \rightarrow \pm 0$  будемо приписувати знаки «+» і «-».

Згідно з формулюванням задачі, маємо такі крайові умови:

на межі поділу матеріалів

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^-, \quad u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-,$$

$$M_y^+ = M_y^-, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^-, \quad N_y^+ = N_y^-, \quad w^+ = w^-, \quad (\partial w / \partial y)^+ = (\partial w / \partial y)^-,$$

і на берегах тріщин з пластичними зонами

$$\sigma_{yy}^\pm = \begin{cases} \sigma_{0j}, & x \in L_j, \\ \sigma_Y \tilde{b}_1, & x \in L, \end{cases} \quad M_y^\pm = \begin{cases} M_{0j}, & x \in L_j, \\ \sigma_Y \tilde{b}_2, & x \in L, \end{cases} \quad \sigma_{xy}^\pm = \begin{cases} \tau_{0j}, & x \in L'_j, \\ 0, & x \in L, \\ -\tau_{0j}, & x \in L''_j, \end{cases} \quad H_{xy}^\pm = \begin{cases} H_{0j}, & x \in L'_j, \\ 0, & x \in L, \\ -H_{0j}, & x \in L''_j, \end{cases}$$

$$\tilde{b}_1 = (h - h_1) / (2h), \quad \tilde{b}_2 = (h^2 - h_1^2) / 2, \quad \sigma_Y = \min \{ \sigma_Y^{(1)}, \sigma_Y^{(2)} \}, \quad L_j = L'_j \cup L''_j,$$

де  $u, v$  – проекції вектора переміщення точки серединної площини на осі  $Ox$  і  $Oy$  відповідно;  $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xx}$  – компоненти тензора напружень;  $\sigma_{0j}, \tau_{0j}$  – невідомі нормальні і дотичні напруження у  $j$  пластичній зоні для плоскої задачі,  $j = 1, 2$ ;  $w$  – прогин серединної площини пластини;  $M_y, H_{xy}, N_y$  – згинальний і крутний моменти та перерізувальна сила;  $M_{0j}, H_{0j}$  – невідомі згинальний і крутний моменти у пластичній зоні;  $\sigma_Y = \min \{ \sigma_Y^{(1)}, \sigma_Y^{(2)} \}$ ,  $\sigma_Y^{(j)}$  – границя текучості матеріалу  $S_j$  – півплощини;  $\partial_s f$  – позначення часткової похідної  $\partial f / \partial s$ .

### ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ

З використанням комплексних потенціалів Колосова-Мухелішвілі для плоскої задачі [3] та задачі згину [4] розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, аналогічно як це зроблено у статтях [1, 2], та побудовано їх розв'язок у класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон.

Напруження на межі поділу матеріалів визначимо за формулами

$$\tilde{\sigma}_{yy}^{\pm} = \sigma_{yy}^{\pm} + \frac{3M_y^{\pm}}{2h^2}, \quad \tilde{\sigma}_{xx}^{\pm} = \sigma_{xx}^{\pm} + \frac{3M_x^{\pm}}{2h^2}, \quad \tilde{\sigma}_{xy}^{\pm} = \sigma_{xy}^{\pm} + \frac{3H_{xy}^{\pm}}{2h^2},$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{\pm} - i\sigma_{xy}^{\pm} &= A_1^{-1} [\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x)], \quad M_y^{\pm} + iH_{xy}^{\pm} = \tilde{A}^{-1} [\theta_0^+(x) - \tilde{g}\theta_0^-(x)], \\ \sigma_{xx}^+ &= A_1^{-1} \operatorname{Re} [3\Phi_0^+(x) + g\Phi_0^-(x)] + P_1 - q(3+g)/(1-g), \\ \sigma_{xx}^- &= -A_1^{-1} \operatorname{Re} [\Phi_0^+(x) + 3g\Phi_0^-(x)] + P_2 + q(1+3g)/(1-g), \\ M_x^+ &= \tilde{A}^{-1} \operatorname{Re} [(\tilde{\kappa}_1 - 2)\theta_0^+(x)/\tilde{\kappa}_1 + \tilde{g}\theta_0^-(x)], \quad M_x^- = -\tilde{A}^{-1} \operatorname{Re} [\theta_0^+(x) + \tilde{g}(\tilde{\kappa}_2 - 2)\theta_0^-(x)/\tilde{\kappa}_2], \\ A_j &= \mu_j + \mu_{3-j}\kappa_j, \quad \tilde{A} = \tilde{\kappa}_1/(2\tilde{A}_1), \quad \tilde{A}_j = \tilde{\mu}_j + \tilde{\mu}_{3-j}\tilde{\kappa}_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= A_1 X_0(z) \left[ \frac{\sigma_Y b_1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\sigma_{0j}}{2\pi i} \int_{L_j \cup L_j^*} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\tau_{0j}}{2\pi} \int_{L_j} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} - \frac{\tau_{0j}}{2\pi} \int_{L_j^*} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_0(z) &= \tilde{A} \tilde{X}_0(z) \left[ \frac{\sigma_Y b_2}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)} + \sum_{j=1}^2 \left( \frac{M_{0j}}{2\pi i} \int_{L_j \cup L_j^*} \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{H_{0j}}{2\pi} \int_{L_j} \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)} - \frac{H_{0j}}{2\pi} \int_{L_j^*} \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)} \right) \right], \end{aligned}$$

$$X_0(z) = \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - d^2)} \left( \frac{(z+a)(z-d)}{(z-a)(z+d)} \right)^{i\beta}, \quad \tilde{X}_0(z) = \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - d^2)} \left( \frac{(z+a)(z-d)}{(z-a)(z+d)} \right)^{i\tilde{\beta}},$$

$$\beta = -\frac{\ln|g|}{2\pi}, \quad g = -\frac{A_1}{A_2}, \quad \kappa_j = \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j}, \quad \mu_j = \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)},$$

$$\tilde{\beta} = -\frac{\ln|\tilde{g}|}{2\pi}, \quad \tilde{g} = \frac{\tilde{\kappa}_2 \tilde{A}_1}{\tilde{A}_2 \tilde{\kappa}_1}, \quad \tilde{\kappa}_j = \frac{3 + \nu_j}{1 - \nu_j}, \quad \tilde{\mu}_j = -\frac{3(1 + \nu_j)}{4E_j h^3},$$

де  $E_j, \nu_j$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу  $j$  півплощини.

Зауважимо, що зусилля  $P_1, P_2$  і  $q$  задовольняють залежність:

$$P_2 = [P_1 E_2 + (E_1 \nu_2 - E_2 \nu_1) q] / E_1.$$

Для визначення невідомих  $\sigma_{0j}, \tau_{0j}, M_{0j}, H_{0j}$ , а також довжин пластичних зон  $w_j$  у вершинах тріщин отримано систему трансцендентних рівнянь

$$\begin{aligned} \sigma_Y b_1 I_{s0}^{bc} + \sigma_{01} I_{s0}^{ab} + \sigma_{02} I_{s0}^{cd} - \tau_{01} I_{c0}^{ab} + \tau_{02} I_{c0}^{cd} &= 0, \\ \sigma_Y b_1 I_{c1}^{bc} + \sigma_{01} I_{c1}^{ab} + \sigma_{02} I_{c1}^{cd} + \tau_{01} I_{s1}^{ab} - \tau_{02} I_{s1}^{cd} &= (q\pi e^{-\beta\pi}) / (1-g), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 -\sigma_Y b_1 I_{s2}^{bc} - \sigma_{01} I_{s2}^{ab} - \sigma_{02} I_{s2}^{cd} + \tau_{01} I_{c2}^{ab} - \tau_{02} I_{c2}^{cd} &= 2q\pi\beta(d-a)e^{-\beta\pi}/(1-g), \\
 \sigma_Y b_2 \tilde{I}_{s0}^{bc} + M_{01} \tilde{I}_{s0}^{ab} + M_{02} \tilde{I}_{s0}^{cd} + H_{01} \tilde{I}_{c0}^{ab} - H_{02} \tilde{I}_{c0}^{cd} &= 0, \\
 \sigma_Y b_2 \tilde{I}_{c1}^{bc} + M_{01} \tilde{I}_{c1}^{ab} + M_{02} \tilde{I}_{c1}^{cd} - H_{01} \tilde{I}_{s1}^{ab} + H_{02} \tilde{I}_{s1}^{cd} &= q\pi e^{-\beta\pi}/(1-\tilde{g}), \\
 -\sigma_Y b_2 \tilde{I}_{s2}^{bc} - M_{01} \tilde{I}_{s2}^{ab} - M_{02} \tilde{I}_{s2}^{cd} - H_{01} \tilde{I}_{c2}^{ab} + H_{02} \tilde{I}_{c2}^{cd} &= 2q\pi\tilde{\beta}e^{-\tilde{\beta}\pi}(d-a)/(1-\tilde{g}),
 \end{aligned}$$

де використано позначення

$$\begin{aligned}
 I_{si}^{km} &= \int_k^m \frac{t^i \sin b(t) dt}{\sqrt{(d^2-t^2)(t^2-a^2)}}, \quad I_{ci}^{km} = \int_k^m \frac{t^i \cos b(t) dt}{\sqrt{(d^2-t^2)(t^2-a^2)}}, \quad \tilde{I}_{si}^{km} = \int_k^m \frac{t^i \sin \tilde{b}(t) dt}{\sqrt{(d^2-t^2)(t^2-a^2)}}, \\
 \tilde{I}_{ci}^{km} &= \int_k^m \frac{t^i \cos \tilde{b}(t) dt}{\sqrt{(d^2-t^2)(t^2-a^2)}}, \quad b(x) = \beta \ln \frac{(x+a)(d-x)}{(x-a)(x+d)}, \quad \tilde{b}(x) = \tilde{\beta} \ln \frac{(x+a)(d-x)}{(x-a)(x+d)}, \quad i=0,1,2,
 \end{aligned}$$

яку доповнюємо умовою пластичності Мізеса [5]

$$\sigma_Y^2 = \tilde{\sigma}_{xx}^2 + \tilde{\sigma}_{yy}^2 - \tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\sigma}_{yy} + 3\tilde{\sigma}_{xy}^2,$$

та умовою однозначності переміщень для плоскої задачі та задачі згину

$$\int_a^d [\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x)] dx = 0, \quad \int_a^d [\theta_0^+(x) - \theta_0^-(x)] dx = 0.$$

Для знаходження розкриття у вершинах тріщини  $b(km = ab, j = 1)$  і  $c(km = dc, j = 2)$  маємо залежності:

у плоскій задачі

$$\begin{aligned}
 \delta_{km}^{\Pi}(x) &= \frac{A_1(g-1)}{4\pi g \mu_1 \mu_2} \int_k^m \sqrt{(x^2-a^2)(d^2-x^2)} [(\sigma_Y b_1 - \sigma_{0j}) \{ \sin b(x)(I_{sp}^{bc} - I_{sm}^{bc}) - \cos b(x)(I_{cp}^{bc} + I_{cm}^{bc}) \} + \\
 &+ (\sigma_{03-j} - \sigma_{0j}) \{ \sin b(x)(I_{sp}^{ab} - I_{sm}^{ab}) - \cos b(x)(I_{cp}^{ab} + I_{cm}^{ab}) \} + (-1)^j 2\tau_{0j} \{ \cos b(x) I_{sp}^{cd} + \sin b(x) I_{cp}^{ab} \} + \\
 &+ (-1)^j \tau_{0j} \{ \cos b(x)(I_{sp}^{bc} - I_{sm}^{bc}) + \sin b(x)(I_{cp}^{bc} + I_{cm}^{bc}) \} + (-1)^j \tau_{0j} \{ \cos b(x)(I_{sp}^{ab} - I_{sm}^{ab}) + \\
 &+ \sin b(x)(I_{cp}^{ab} + I_{cm}^{ab}) \} + (-1)^{j-1} \tau_{03-j} \{ \cos b(x)(I_{sp}^{ab} + I_{sm}^{ab}) + \sin b(x)(I_{cp}^{ab} - I_{cm}^{ab}) \}] dx;
 \end{aligned}$$

і задачі згину

$$\begin{aligned}
 \delta_{km}^3(x) &= \frac{\tilde{A}(\tilde{g}-1)}{2\pi\tilde{g}} h \int_k^m \sqrt{(x^2-a^2)(d^2-x^2)} [(\sigma_Y b_2 - M_{0j}) \{ \sin b(x)(\tilde{I}_{sp}^{bc} - \tilde{I}_{sm}^{bc}) - \cos b(x)(\tilde{I}_{cp}^{bc} + \tilde{I}_{cm}^{bc}) \} + \\
 &+ (M_{03-j} - M_{0j}) \{ \sin b(x)(\tilde{I}_{sp}^{ab} - \tilde{I}_{sm}^{ab}) - \cos b(x)(\tilde{I}_{cp}^{ab} + \tilde{I}_{cm}^{ab}) \} + (-1)^j 2H_{0j} \{ \cos b(x) \tilde{I}_{sp}^{cd} + \sin b(x) \tilde{I}_{cp}^{ab} \} + \\
 &+ (-1)^j H_{0i} \{ \cos b(x)(\tilde{I}_{sp}^{bc} - \tilde{I}_{sm}^{bc}) + \sin b(x)(\tilde{I}_{cp}^{bc} + \tilde{I}_{cm}^{bc}) \} + (-1)^j H_{0j} \{ \cos b(x)(\tilde{I}_{sp}^{ab} - \tilde{I}_{sm}^{ab}) + \\
 &+ \sin b(x)(\tilde{I}_{cp}^{ab} + \tilde{I}_{cm}^{ab}) \} + (-1)^{j-1} H_{03-j} \{ \cos b(x)(\tilde{I}_{sp}^{ab} + \tilde{I}_{sm}^{ab}) + \sin b(x)(\tilde{I}_{cp}^{ab} - \tilde{I}_{cm}^{ab}) \}] dx.
 \end{aligned}$$

### ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ І ВИСНОВКИ

Числовий аналіз задачі було проведено для нитесилу та технічно чистого заліза з границею текучості відповідно  $\sigma_T^{(1)} = 278$  МПа і  $\sigma_T^{(2)} = 130$  МПа та пружними сталими  $E_1 = 1,38 \cdot 10^5$  МПа,  $E_2 = 2,08 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ . Інтегралі, отримані під час розв'язку задачі, обчислювались чисельно за допомогою методу механічних квадратур [6], а систему трансцендентних рівнянь розв'язано чисельно за допомогою методу Ньютона.

На рис. 2-4 суцільні і штрихові лінії відповідають параметрам, що пов'язані відповідно з внутрішніми та зовнішніми вершинами тріщин.

На рис. 2 криві 1 побудовані при  $q/\sigma_y = 0,4$ , криві 2 – при  $q/\sigma_y = 0,5$ , криві 3 – при  $q/\sigma_y = 0,6$ . На рис. 3 криві 1 побудовані при  $h_1/h = 0,8$ , криві 2 – при  $h_1/h = 0,9$ , криві 3 – при  $h_1/h = 1$ . На рис. 4 криві 1 побудовані при  $P_1/\sigma_y = 0,4$ , криві 2 – при  $P_1/\sigma_y = 0,5$ , криві 3 – при  $P_1/\sigma_y = 0,6$ .

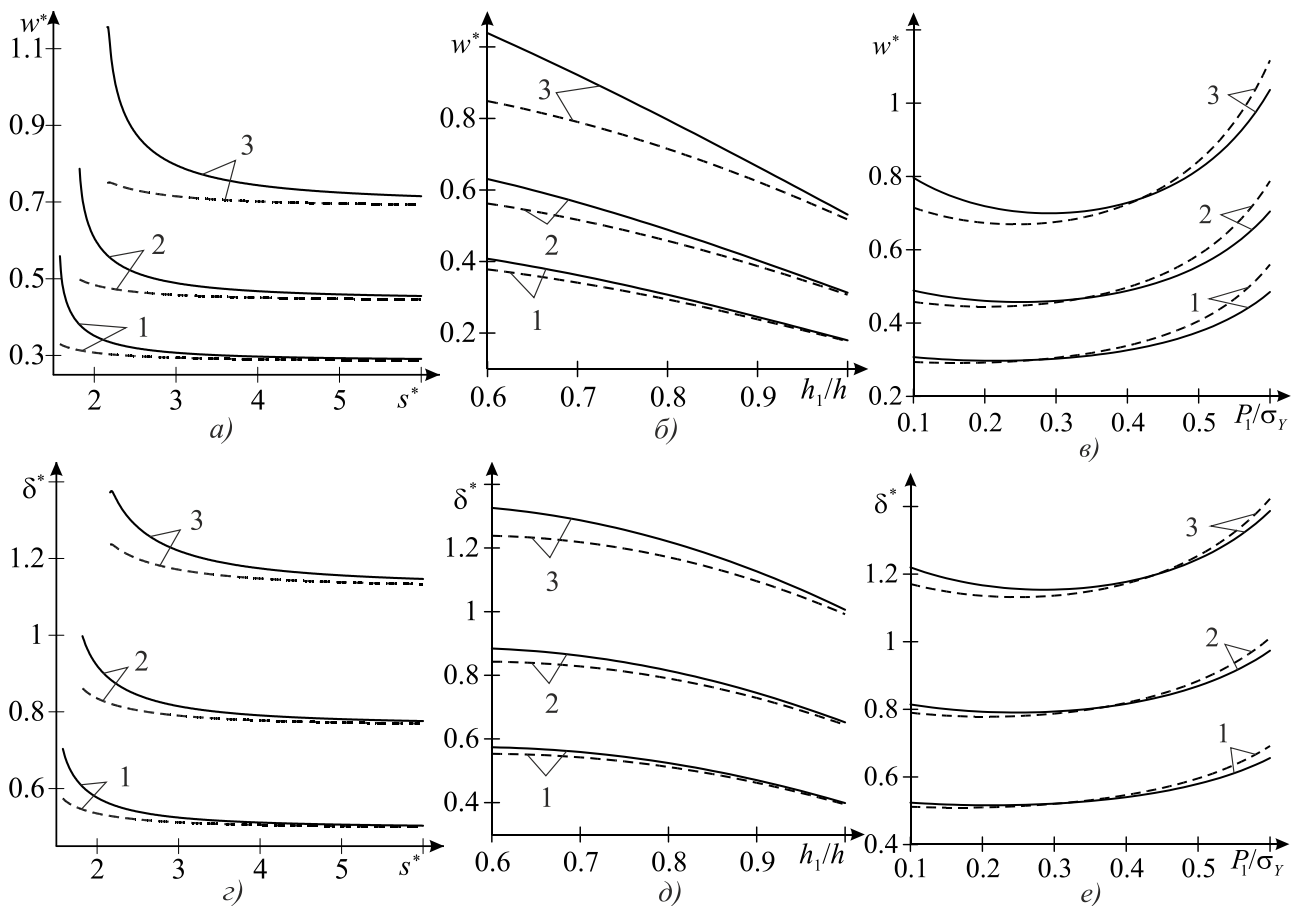


Рис. 2. Графічна залежність  $w^*$  і  $\delta^*$  при різному значенні  $q/\sigma_y$

На рис. 2а), б), в) та рис. 3а), б), в) і рис. 4а) дається графічна залежність зведеної довжини пластичної зони  $w_j^* = w_j/l$ , а на рис. 2з), д), е) та рис. 3з), д), е) і рис. 4б) зведеного розкриття тріщини  $\delta_j^* = \delta_j E_1 / (l \sigma_y)$  у її вершині, причому значення  $j = 1$  відповідає вершині  $b$ , а  $j = 2$  – вершині  $c$ .

Рис. 2а), 2з) побудовано при  $P_1/\sigma_y = 0,1$ ,  $h_1/h = 0,8$ , рис. 2б), 2д) – при  $P_1/\sigma_y = 0,1$ ,  $s^* = s/l = 3$ , а рис. 2в), 2е) – при  $h_1/h = 0,8$ ,  $s^* = 3$ .

На основі рис. 2а), 2з) бачимо, що шукані величини більші у вершинах між тріщинами і можемо зробити висновок, що при віддаленні тріщин одна від одної вони зменшуються і

виходять на результати для однієї поверхневої тріщини [1], а зростання розподіленого навантаження  $q$  при фіксованому  $P_1$  призводить до їх зростання.

З рис. 2б), 2д) видно, що шукані величини зменшуються і прямують до результатів для двох наскрізних тріщин, отриманих у [2], а зростання розподіленого навантаження  $q$  призводить до їх зростання.

Із рис. 2в), 2е) зробимо висновок, що зростання розподіленого навантаження  $P_1$  призводить спочатку до спадання, а потім до зростання шуканих величин, причому вони спочатку більші у внутрішніх вершинах тріщин, а потім у зовнішніх.

Рис. 3а), 3г) побудовано при  $P_1/\sigma_Y = 0,1$ ,  $q/\sigma_Y = 0,6$ , рис. 3б), 3д) – при  $P_1/\sigma_Y = 0,1$ ,  $s^* = 3$ , а рис. 3в), 3е) – при  $q/\sigma_Y = 0,4$ ,  $s^* = 3$ .

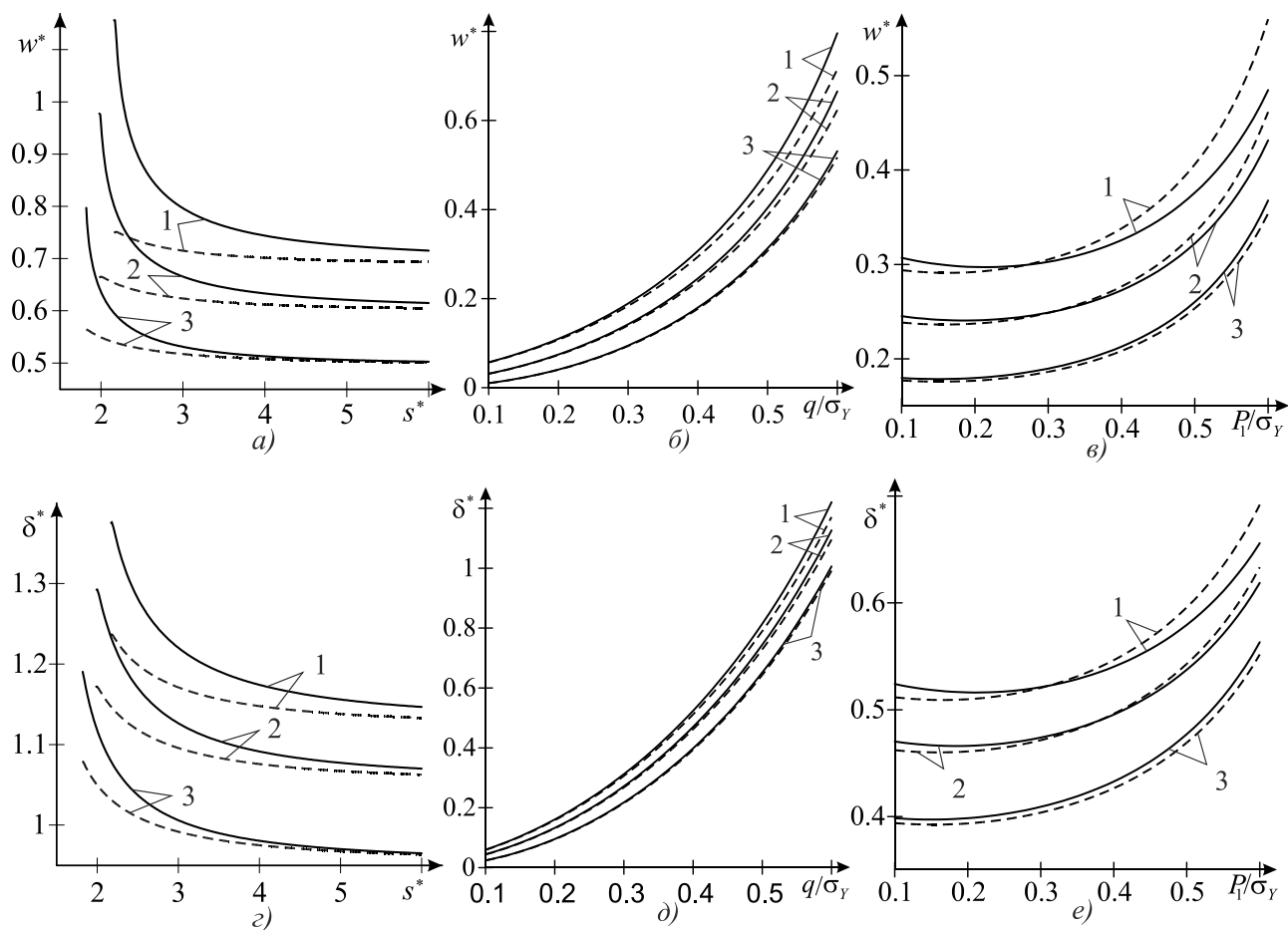


Рис. 3. Графічна залежність  $w^*$  і  $\delta^*$  при різному значенні  $h_1/h$

З цих рис. 3а), 3г) видно, що шукані величини більші у вершинах між тріщинами і можемо зробити висновок, що при віддаленні тріщин одна від одної вони зменшуються і виходять на результати для однієї поверхневої тріщини [1], а зростання розподіленого навантаження  $q$  при фіксованому  $P_1$  призводить до їх зростання.

На основі рис. 3б), 3д) бачимо, що шукані величини зростають при збільшенні  $q/\sigma_Y$ . А криві 3 співпадають з відомими кривими для двох наскрізних тріщин, отриманих у [2].

Із рис. 3в), 3е) зробимо висновок, що зростання розподіленого навантаження  $P_1$  призводить спочатку до спадання, а потім до зростання шуканих величин.

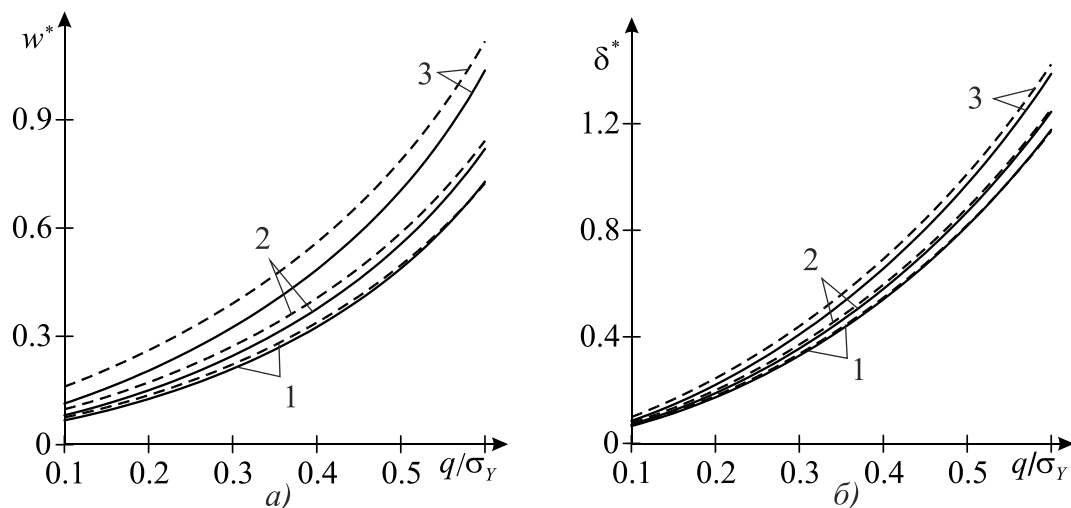
Рис. 4. Графічна залежність  $w^*$  і  $\delta^*$  при різному значенні  $P_1/\sigma_Y$ 

Рис. 4а), 4б) побудовано при  $h_1/h = 0,8$ ,  $s^* = 3$ . Із рис. 4а) і 4б) зробимо висновок, що зростання розподіленого навантаження  $q$  призводить до зростання шуканих величин, причому за цих параметрів вони більші у зовнішніх вершинах тріщин, ніж у внутрішніх.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Николишин М. М., Опанасович В. К., Куротчин Л. Р., Слободян М. С. Розтяг кусково-однорідної пластини з ненаскрізною тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів та з урахуванням пластичних зон по фронту тріщини. *Труди ИПММ НАН України*. 2013. 26. С. 130–138.
2. Николишин М. М., Опанасович В. К., Куротчин Л. Р., Слободян М. С. Растяжение кусочно-однородной пластины с двумя межфазными трещинами на прямолинейной границе раздела материалов с учетом пластических зон возле их вершин. *Теоретическая и прикладная механика*. 2013. Вып. 6(52). С. 52–58.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.
4. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. Минск: Изд-во БГУ, 1975. 256 с.
5. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Элементы теории пластичности та міцності. Львів: Світ, 1999. Т. 1. 531 с.
6. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.

#### REFERENCES

1. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2013). Tension of piecewise-homogeneous plate with non-through crack in a straight boundary between material and considering plastic zones along the crack front. *Transactions of IAMM*, 26, pp. 130-138.
2. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2013). Tension of piecewise-homogeneous plate with two interface crack in a straight boundary between material and taking into account the plastic zone at its edges. *Theoretical and applied mechanics*, Iss. 6(52), pp. 52-58.
3. Muskhelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.
4. Prusov I. A. (1975). The method of conjugation in the theory of plates. Minsk: Izdatelstvo Belorusskogo universitetu.
5. Bozhydarnyk, V. V. & Sulim, G. T. (1999). Elements of the theory of plasticity and strength. Lviv: Svit. Vol. 1.
6. Savruk, M. P. (1981). Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.

УДК 531:383-62:50

## ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ СТАЦІОНАРНИМИ ПАРАМЕТРИЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Новицький В. В., Зінчук М. О., Тетерятник О. В.

*Інститут математики НАН України,  
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна*

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

Вивчаються умови оптимального керування лінійними неперервними системами з матрицями коефіцієнтів, які залежать від параметра. Сформульовано інтервальні умови для оптимального регулятора. Наведено приклад оптимального керування параметричною системою четвертого порядку.

*Ключові слова: оптимальне керування, параметричні системи, матричне рівняння Ріккати, оптимальний регулятор.*

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Новицкий В. В., Зинчук М. О., Тетерятник О. В.

*Институт математики НАН Украины,  
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01004, Украина*

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

Изучаются условия оптимального управления линейными непрерывными системами с матрицами коэффициентов, зависящих от параметра. Сформулированы интервальные условия для оптимального регулятора. Приведен пример оптимального управления параметрической системой четвертого порядка.

*Ключевые слова: оптимальное управление, параметрические системы, матричное уравнение Риккати, оптимальный регулятор.*

## OPTIMAL CONTROL OF LINEAR STATIONARY PARAMETRIC SYSTEMS

Novytskyy V. V., Zinchuk M. O., Teteriatnyk O. V.

*Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine,  
Tereschenkivska st., 3, Kiev, 01004, Ukraine*

Novyc@imath.kiev.ua, E.Teteryatnik@gmail.com

In this paper the conditions of optimal control of linear continuous parametric systems are investigated. The matrix of the coefficients of the considered systems consists of a skew-symmetric matrix of general form, which has no multiple eigenvalues and arbitrary, which depends on the parameter. In this connection, the optimal regulator is constructed on the basis of the asymptotic solution of the matrix Riccati equation, which is reduced to an infinite system of matrix equations. Necessary and sufficient conditions for the solvability of this system are defined through the zero-space of the expanded matrix, which is constructed by means of direct product. This gave an easy way to calculate the values of the free parameters of components of the matrix of the asymptotic solution. It is shown how to find the exact solution of the matrix Riccati equation for a finite number of steps (the matrix-solving has a finite decomposition). The exact solution allowed us to formulate in the form of a theorem the interval conditions for an optimal regulator. The effectiveness of the approach is illustrated by the example in the fourth order.

*Key words: optimal control, parametric systems, matrix Riccati equation, optimal regulator.*

### ВСТУП

У статті [1] розглядалося оптимальне керування лінійними параметричними системами з матрицею коефіцієнтів консервативної частини, що задана в канонічній формі. Нижче досліджуються умови оптимального керування неперервними системами з матрицями коефіцієнтів (одна з яких кососиметрична загального вигляду і не має кратних власних

значень), які залежать від параметра. Формулюються інтервальні умови для оптимального регулятора на основі обмеженого асимптотичного розв'язку матричного рівняння Ріккати. Для параметричної системи четвертого порядку побудовано оптимальний регулятор і відповідний інтервал для невідомого параметра.

## 1. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ РІККАТІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо лінійну керовану диференціальну систему

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

де  $x \in \mathfrak{R}_{2n}$  – вектор стану,  $A_0 = -A_0^T \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$  – кососиметрична невиврождена матриця,  $A_1 \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$  – довільна стала матриця,  $u \in \mathfrak{R}_m$  – вектор керування,  $B \in \mathfrak{R}_{2n \times m}$  – матриця при керуванні,  $\varepsilon > 0$  – скалярний параметр. Система (1.1) при малих значеннях  $\varepsilon$  описує деяку майже консервативну систему [2].

Будемо шукати оптимальний регулятор для (1.1) у вигляді зворотного зв'язку за станом

$$u = -Kx \quad (1.2)$$

з квадратичним критерієм якості

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt, \quad (1.3)$$

де  $K \in \mathfrak{R}_{m \times 2n}$  – деяка стала матриця,  $Q \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$ ,  $R \in \mathfrak{R}_{m \times m}$  – додатно означені матриці.

Регулятор (1.2) буде оптимальним [3], якщо

$$K = \varepsilon R^{-1} B^T S, \quad (1.4)$$

де  $S \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$  – симетрична додатно означена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккати

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T S + S(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon^2 S B R^{-1} B^T S + Q = 0.$$

Тут  $Q$  та  $R$  – матриці з (1.3).

Уведемо заміну [4]  $P = \varepsilon S$ , тоді прийдемо до еквівалентного матричного рівняння Ріккати:

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T P + P(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon P B R^{-1} B^T P + \varepsilon Q = 0. \quad (1.5)$$

Виходячи з (1.5), матрицю-розв'язок  $P$  будемо шукати у вигляді розвинення за параметром  $\varepsilon$

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots \quad (1.6)$$

Матрицю  $Q$  зобразимо у вигляді подібного розвинення

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots \quad (1.7)$$

На відміну від класичної постановки задачі, коли матриця  $Q$  задана конкретно (є числовою у критерії (1.3)), будемо вважати, що додатно означена матриця  $Q_0$  задана, а симетричні матриці  $Q_1$ ,  $Q_2$ , ... будуть обчислені у процесі пошуку матриці зворотного зв'язку  $K$ , тобто матрицю  $Q$  задамо параметрично. Симетричні матриці  $Q_1$ ,  $Q_2$ , ... можуть бути довільними, якщо не впливають на додатну означеність матриці  $Q$ . Обчислювальні матриці дають можливість розв'язати рівняння (1.5) за скінченне число кроків [1].

Така постановка задачі дозволяє знайти точний розв’язок рівняння Ріккати, де матриця  $P$  має скінченне число доданків за умови, що  $Q$  – додатно означена матриця. У наступному параграфі на основі такого точного розв’язку будується інтервал для параметра  $\varepsilon$ , у якому знайдений регулятор буде оптимальним.

Від параметричного матричного рівняння Ріккати, підставляючи (1.6), (1.7) у (1.5) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$ , приходимо до нескінченної системи матричних рівнянь типу Ріккати

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} A_0 P_1 - P_1 A_0 &= P_0 A_1 + A_1^T P_0 - P_0 B R^{-1} B^T P_0 + Q_0, \\ A_0 P_2 - P_2 A_0 &= P_1 A_1 + A_1^T P_1 - P_1 B R^{-1} B^T P_0 - P_0 B R^{-1} B^T P_1 + Q_1 \\ &\dots \tag{1.9} \\ A_0 P_k - P_k A_0 &= P_{k-1} A_1 + A_1^T P_{k-1} - \sum_{i=1}^k P_{i-1} B R^{-1} B^T P_{k-i} + Q_{k-1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

У подальшому будемо розглядати тільки скінченні розклади, тому зосереджувати увагу на збіжності рядів (1.6), (1.7) не будемо. Розгляд скінченних розкладів (1.6), (1.7) певним чином впливає на регулятор, який буде оптимальним, як правило, не для всіх значень параметра  $\varepsilon$ . Тому необхідно виявити обмеження на невідомий параметр, за яких регулятор буде оптимальним.

Нехай  $A_0$  – довільна кососиметрична матриця, яка не має кратних власних значень. Рівняння (1.8) показує перестановність матриць  $A_0$ ,  $P_0$ . Матрицю-комутатор  $P_0$  можна зобразити у вигляді такого розкладу [5]:

$$P_0 = \alpha_0 I_{2n} + \alpha_2 A_0^2 + \dots + \alpha_{2(n-1)} A_0^{2(n-1)}, \tag{1.10}$$

де  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 2, \dots, 2(n-1)$  – деякі невизначені параметри. Тут  $I_{2n}$  – одинична матриця розміру  $2n$ .

У роботі [6] показано, що для розв’язності системи (1.9), коли кососиметрична матриця  $A_0$  канонічного вигляду, права частина рівнянь має задовольняти певні умови, за допомогою яких вільним параметрам матриць  $P_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  надаються конкретні значення. Знайдемо подібні умови у нашому випадку. Для цього перейдемо до еквівалентного рівняння, матриця коефіцієнтів якого має розмір  $4n^2$ . Це можна зробити через прямий добуток [7, теорема 8.4.1, с. 239].

Позначимо через  $D_i$  праву частину  $i$ -го рівняння системи (1.9), а через  $D_{i,l^*}$ ,  $P_{i,l^*}$  –  $l$ -ті рядки відповідно матриць  $D_i$ ,  $P_i$ . Отримаємо еквівалентну систему рівнянь:

$$\check{A} \theta_i = \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{1.11}$$

де

$$\begin{aligned} \check{A} &= A_0 \otimes I_{2n} - I_{2n} \otimes A_0^T, \quad \theta_i = [P_{i,1^*}, \dots, P_{i,2n^*}]^T, \\ \xi_i &= [D_{i,1^*}, \dots, D_{i,2n^*}]^T, \quad \check{A} \in \mathfrak{R}_{4n^2 \times 4n^2}, \quad \theta_i, \xi_i \in \mathfrak{R}_{4n^2} \end{aligned}$$

Тут  $\otimes$  – символ прямого добутку.

Отже, якщо виконуються рівності (необхідні та достатні умови)

$$\text{rang}\check{A} = \text{rang}\left[\check{A}, \xi_i\right], \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

то рівняння (1.11) мають розв'язки. Звідси випливає, що матриці обох частин рівностей (1.12) мають спільний нуль-простір.

Запишемо необхідні та достатні умови розв'язності рівнянь (1.11), виходячи з нуль-простору розмірності  $2n$  матриці  $\check{A}$ . Це випливає з подальшого. Власні значення матриці  $\check{A}$  такі:  $\lambda_k - \lambda_j$  [7, с. 238], де  $\lambda_k, \lambda_j, k, j \in \overline{1, 2n}$  – власні значення матриці  $A_0$ , звідки  $2n$  із них є нульовими. Нехай вектор  $\gamma \in \mathfrak{R}_{4n^2}$  є загальним розв'язком системи рівнянь

$$\check{A}\gamma = 0, \quad (1.13)$$

тобто він описує нуль-простір матриці  $\check{A}$ . Із властивостей прямого добутку отримуємо

$$\left(A_0 \otimes I_{2n} - I_{2n} \otimes A_0^T\right)^T = A_0^T \otimes I_{2n} - I_{2n} \otimes \left(A_0^T\right)^T = -\check{A},$$

тобто матриця  $\check{A}$  – кососиметрична, тому для вектора  $\gamma$  з (1.13) вірна рівність  $\check{A}^T \gamma = 0$ . Якщо домножимо зліва обидві частини рівнянь (1.11) на ненульовий транспонований вектор  $\gamma^T$ , який має  $2n$  довільних сталих, то отримаємо нульові тотожності тоді і тільки тоді, коли рівняння мають розв'язки.

Отже, необхідні і достатні умови розв'язності  $i$ -го рівняння визначає рівність

$$\left(\gamma, \xi_i\right) = 0. \quad (1.14)$$

Оскільки вектор  $\gamma$  має довільні сталі, то для виконання (1.14) і обчислення конкретних значень вільних параметрів матриці  $P_{i-1}$  у скалярному добутку  $\left(\gamma, \xi_i\right)$  необхідно прирівняти до нуля коефіцієнти при цих довільних сталих.

Перше рівняння системи (1.9) нелінійне відносно матриці  $P_0$ , а інші рівняння лінійні відносно матриць  $P_i, i > 0$ , що мають вільні параметри. Підставимо у праву частину першого рівняння системи (1.9) розклад для  $P_0$ , отримаємо

$$D_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} A_1 + A_1^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} - \left( \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} \right) B R^{-1} B^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} A_0^{2j} + Q_0$$

або [8]

$$D_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{2j} \left( A_0^{2j} A_1 + A_1^T A_0^{2j} \right) - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{2j} \alpha_{2l} A_0^{2j} B R^{-1} B^T A_0^{2l} + Q_0, \quad (1.15)$$

тобто для  $i=1$  у рівнянні (1.14) коефіцієнти при довільних сталих вектора  $\gamma$  будуть нелінійними відносно параметрів розкладу (1.10), а для інших рівнянь – лінійні відносно вільних параметрів відповідних матриць.

Зауважимо такий факт: оскільки матриця  $P_0$  задовольняє рівняння (1.8), то вектор  $\gamma$  можна сформулювати за розкладом (1.10) з меншим числом довільних сталих

$$\gamma = \left[ P_{v,1^*}, \dots, P_{v,2n^*} \right], \quad P_v = v_1 I_{2n} + v_2 A_0^2 + \dots + v_{2(n-1)} A_0^{2(n-1)}, \quad (1.16)$$

де  $v_i, i = \overline{1, n}$  – довільні сталі. При цьому зменшується також відповідна кількість рівнянь для обчислення значень вільних параметрів, щоправда, вектор  $\gamma$ , сформований за (1.16), через



меншу кількість довільних сталих не в усіх випадках може давати розв'язність (1.11) за допомогою (1.14).

Тепер перейдемо до обчислення матриць  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  з вільними параметрами. З рівнянь (1.11), при відомій правій частині (матриця  $P_{i-1}$  обчислена), отримуємо шукану матрицю  $P_i$ .

Для спрощення розв'язання рівнянь можна звести матрицю  $\check{A}$  до верхнього трикутного вигляду за допомогою лівих елементарних операцій [9, с. 126], яким відповідають матриці  $S_1, S_2, \dots, S_l$ . Далі покладаємо  $S = S_l S_{l-1} \dots S_1$  і приходимо до системи рівнянь:

$$S\check{A}\theta_i = S\xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.17)$$

де елементи вектора  $\theta_i$  обчислюються достатньо просто, починаючи з нижніх. Симетричності матриці  $P_i$  з розв'язку  $\theta_i$  рівняння (1.11) або (1.17) досягаємо за допомогою частини вільних параметрів. Це можна зробити завжди, оскільки матричне рівняння Ріккати (1.5) має симетричний розв'язок, а отже, його має система (1.8), (1.9).

Відзначимо ще одну властивість вектора  $\gamma$ . За допомогою нього можемо легко знайти номери лінійно залежних (незалежних) стовпців матриці  $\check{A}$ . Дійсно, позначимо  $c = [c_1, c_2, \dots, c_{2n}]^T$  вектор, який ставить у відповідність номери стовпцям матриці  $\check{A}$ . Тоді до коефіцієнтів при довільних сталих вектора  $\gamma$  скалярного добутку  $(\gamma, c)$  входять номери лінійно залежних (у сукупності) стовпців. Лінійно залежними стовпцями матриці  $\check{A}$  будуть ті, які належать тільки одному з коефіцієнтів. Число таких номерів дорівнює числу коефіцієнтів, тобто розмірності нуль-простору матриці  $\check{A}$ .

**2. ФОРМУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНИХ УМОВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА**  
 Перейдемо до побудови робастного оптимального регулятора. Для цього розглянемо деякі симетричні матриці обмежених розкладів (1.6), (1.7)

$$P = P_0 + \varepsilon P_1, \quad Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2, \quad (2.1)$$

що задовольняють матричне рівняння Ріккати (1.5), причому додатно означена матриця  $Q_0$  задана. Покажемо, що матриці  $P$  і  $Q$  з (2.1) існують та наведемо умови, за яких вони будуть додатно означеними.

**Теорема 2.1.** Нехай загального вигляду кососиметрична матриця  $A_0$  не має кратних власних значень, матриці  $P$  і  $Q$  з (2.1) задовольняють матричне рівняння Ріккати (1.5),  $\mu_{\max}$  – максимальне власне значення пучка матриць  $\mu P_0 + P_1$ ,  $\delta_i$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) – власні значення квадратичного пучка матриць  $\delta^2 Q_0 + \delta Q_1 + Q_2$  і  $\delta_{\min}$ ,  $\delta_{\max}$  – відповідно його мінімальне та максимальне дійсні власні значення.

Тоді, якщо параметри розкладу (1.10), знайдені з рівняння

$$(\gamma, \xi_1) = 0, \quad (2.2)$$

визначають додатно визначену матрицю  $P_0$ , то для довільного  $\varepsilon \in r_1(P) \cap r_2(Q)$ , де

$$r_1(P) = \begin{cases} (0, \mu_{\max}^{-1}), & \text{якщо } \mu_{\max} > 0, \\ (0, +\infty), & \text{якщо } \mu_{\max} \leq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$r_2(Q) = \begin{cases} (0, \delta_{\max}^{-1}) \cup (\delta_{\min}^{-1}, +\infty) & \text{якщо } \delta_{\min}, \delta_{\max} > 0, \\ (0, \delta_{\max}^{-1}) & \text{якщо } \delta_{\min} \leq 0, \delta_{\max} > 0, \\ (0, +\infty) & \text{якщо } \delta_{\min}, \delta_{\max} \leq 0 \\ & \text{або } \delta_i (i = \overline{1, 2n}) - \text{комплексні,} \end{cases} \quad (2.4)$$

матриці  $P$ ,  $Q$  – додатно означені.

*Доведення.* Матриця  $A_0$  не має кратних власних значень, тому правомірний розклад (1.10) для комутуючої матриці  $P_0$ , у якому, як бачимо, усі складові матриці симетричні. Рівняння (2.2) визначає достатні умови розв'язності першого рівняння системи (1.9), з якого визначаємо параметри розкладу  $\alpha_0, \dots, \alpha_{2(n-1)}$ , прирівнявши до нуля коефіцієнти при довільних сталих вектора  $\gamma$  з (1.13). Будемо вважати, що знайдені параметри задають додатно означену матрицю  $P_0$  (у теоремі розглядаються достатні умови).

При відомих матрицях  $P_0$ ,  $Q_0$  обчислюємо праву частину першого рівняння (1.15) системи (1.9), матрицю  $D_1$  та з рівняння

$$\tilde{A}\theta_1 = \xi_1 \quad (2.5)$$

знаходимо елементи матриці  $P_1$ , де

$$\theta_1 = [P_{1,1*}, \dots, P_{1,2n*}]^T, \quad \xi_1 = [D_{1,1*}, \dots, D_{1,2n*}]^T.$$

На матриці  $P_1$  завершуємо обчислення елементів розкладу матриці-розв'язку  $P$  ( $P_i = 0$ ,  $i = 2, 3, \dots$ ), тому вільні параметри можна покласти рівними нулю. З іншого боку, вільні параметри можна обчислити, оскільки це природніше вписує матрицю  $P_1$  у розклад (1.6) і, можливо, дасть ширший інтервал. Для обчислення вільних параметрів вибираємо симетричну матрицю  $Q_1$  (наприклад, одиничну) і у скалярному добутку  $(\gamma, \xi_2)$  прирівнюємо до нуля коефіцієнти при довільних сталих. При цьому матрицю  $Q_1$  вибираємо тільки для обчислення значень вільних параметрів. Параметри, що не набули значень, покладаємо рівними нулю.

Щоб виконувалися друге і третє рівняння системи (1.9), обчислюємо матриці  $Q_1$ ,  $Q_2$  ( $Q_i$ ,  $i = 3, 4, \dots$ ) за формулами

$$Q_1 = P_0 B R^{-1} B^T P_1 + P_1 B R^{-1} B^T P_0 - P_1 A_1 - A_1^T P_1, \quad Q_2 = P_1 B R^{-1} B^T P_1. \quad (2.6)$$

Неоднозначність обчислення матриці  $P_1$  враховано в (2.6). Отже, знайдені таким способом матриці  $P = P_0 + \varepsilon P_1$ ,  $Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2$  задовольняють матричне рівняння Ріккати (1.5).

Тепер знайдемо, за яких значень параметра  $\varepsilon$  пучки матриць  $P$  та  $Q$  будуть додатно означеними. Спочатку дослідимо пучок матриць  $P_0 + \varepsilon P_1$  на додатну означеність. Цей пучок матриць еквівалентний пучку  $P(\mu) = \mu P_0 + P_1$  за областю значень параметра  $\varepsilon = \mu^{-1}$ . Матриці  $P_0$ ,  $P_1$  – симетричні, тому власні значення пучка  $P(\mu)$  є дійсними числами. Маємо  $P_0 > 0$ , а отже, при достатньо великих значеннях  $\mu > 0$  матриця  $\mu P_0 + P_1$  буде додатно означеною, що впливає з власних значень матриці  $\mu P_0$  (вони великі додатні) і власних

значень суми ермітових (симетричних) матриць [9, теорема 10 додатку]. Власні значення матриці неперервно залежать від її елементів [10], тому додатна означеність пучка  $P(\mu)$  не зміниться до першого нуля  $|P(\mu)|$  справа на осі  $\mu$ . Отже, нехай  $\mu_{\max}$  – максимальне власне значення  $P(\mu)$ . Тоді маємо такі випадки для параметра  $\varepsilon = \mu^{-1}$ , коли матриця-розв'язок  $P$  буде додатно означеною:

1) якщо  $\mu_{\max} > 0$ , то отримуємо  $\mu_{\max} < \mu < +\infty$ , а для параметра  $\varepsilon = \mu^{-1}$  – інтервал  $0 < \varepsilon < \mu_{\max}^{-1}$ ;

2) коли  $\mu_{\max} \leq 0$ , то  $0 < \mu < +\infty$ , а для  $\varepsilon$  маємо такий інтервал:  $0 < \varepsilon < +\infty$ .

Розглянуті випадки описують інтервали (2.3).

Далі розглянемо квадратичний пучок матриць  $Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2$ . Оскільки  $Q_0$  – симетрична додатно означена матриця, то цей пучок матриць строго еквівалентний такому пучку [9, теорема 6, с. 139; теорема 2, с. 314]:

$$I_{2n} + \varepsilon Q_0^{-1/2} Q_1 Q_0^{-1/2} + \varepsilon^2 Q_0^{-1/2} Q_2 Q_0^{-1/2}.$$

Покладемо  $\delta = \varepsilon^{-1}$  і перейдемо до пучка

$$Q(\delta) = \delta^2 I_{2n} + \delta Q_0^{-1/2} Q_1 Q_0^{-1/2} + Q_0^{-1/2} Q_2 Q_0^{-1/2},$$

який має однакову область значень з пучком  $\delta^2 Q_0 + \delta Q_1 + Q_2$ , а також з початковим пучком матриць для параметра  $\varepsilon = \delta^{-1}$ .

Для достатньо великих (включаючи від'ємні) значень параметра  $\delta$  матриця  $Q(\delta)$  буде додатно означеною як матриця з домінуючими діагональними додатними елементами (теорема Гершгоріна [10]). Причому, якщо всі власні значення квадратичного пучка матриць комплексні, то додатна означеність  $Q(\delta)$  не залежить від параметра  $\delta$ . Ураховуючи те, що власні значення матриці неперервно залежать від її елементів, то додатна означеність матриці  $Q(\delta)$  не зміниться до перших нулів  $|Q(\delta)|$  справа і зліва на осі  $\delta$ . Нехай серед власних значень  $\delta_i$ ,  $i = \overline{1, 2n}$ , матриці  $Q(\delta)$  є дійсні, а  $\delta_{\min}$ ,  $\delta_{\max}$  – відповідно мінімальне і максимальне дійсні власні значення. Розглянемо можливі випадки для параметра  $\varepsilon = \delta^{-1}$ , коли матриця  $Q$  буде додатно означеною.

1. Якщо всі дійсні власні значення додатні, то параметр  $\delta$  належить інтервалам  $0 < \delta < \delta_{\min}$ ,  $\delta_{\max} < \delta < +\infty$ . Тоді  $\varepsilon = \delta^{-1}$  лежатиме в таких межах:  $0 < \varepsilon < \delta_{\max}^{-1}$ ,  $\delta_{\min}^{-1} < \varepsilon < +\infty$ .

2. Якщо  $\delta_{\min} \leq 0$ ,  $\delta_{\max} > 0$ , то  $\delta$  належить інтервалу  $\delta_{\max} < \delta < +\infty$ . Перейдемо до параметра  $\varepsilon$  і отримаємо такий інтервал:  $0 < \varepsilon < \delta_{\max}^{-1}$ .

3. Якщо всі дійсні власні значення недодатні або комплексні, то параметр  $\delta > 0$  може бути довільним. Звідси маємо  $0 < \varepsilon < +\infty$ .

Розглянуті випадки для параметра  $\varepsilon$  описують інтервали (2.4).

Отже, перетин інтервалів, побудованих для пучків матриць  $\mu P_0 + P_1$ ,  $\delta^2 Q_0 + \delta Q_1 + Q_2$ , дає шуканий інтервал. ■

Отже, якщо виконуються умови теореми 2.1, то завжди існує інтервал параметра  $\varepsilon$ , для якого, побудований за допомогою описаного вище підходу, регулятор буде оптимальним.

Укажемо на те, що точні розв'язки можна обчислювати з більшим числом доданків, ніж у (2.1). Якщо знайдено  $P = P_0 + \varepsilon P_1 + \dots + \varepsilon^k P_k$ ,  $k > 1$  (матриці  $P_{k+i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  прирівнюємо до нуля), то для отримання точного розв'язку рівняння Ріккати матриці  $Q_i$ ,  $i = k, k+1, \dots$  обчислюються за формулами

$$Q_k = \sum_{j=1}^{k+1} P_{j-1} B R^{-1} B^T P_{k+1-j} - P_k A_1 - A_1^T P_k, \quad (2.7)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{i+1} P_{j-1} B R^{-1} B^T P_{i-j+1}, \quad i = \overline{k+1, 2k}, \quad Q_{2k+i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

а матриці  $Q_i$ ,  $i = \overline{0, k-1}$  вважаємо заданими. Інтервали для параметра  $\varepsilon$  можна обчислити аналогічно до інтервалів (2.3), (2.4), де  $\mu_{\max}$  і  $\delta_{\min}$ ,  $\delta_{\max}$  – дійсні власні значення відповідно пучків матриць  $\mu^k P_0 + \mu^{k-1} P_1 + \dots + \mu P_{k-1} + P_k$ ,  $\delta^{2k} Q_0 + \delta^{2k-1} Q_1 + \dots + \delta Q_{2k-1} + Q_{2k}$ , причому для парного  $k$  інтервал  $r(P)$  обчислюється як інтервал  $r(Q)$ .

Приклад 2.1. Нехай задана система (1.1)-(1.4) з такими параметрами

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$Q_0 = I_4, \quad R = I_2, \quad K \in \mathbb{R}_{2 \times 4}.$$

Необхідно знайти розв'язок матричного рівняння Ріккати (1.5) та інтервал для параметра  $\varepsilon$ , у якому регулятор (1.4) буде оптимальним.

Матриця  $A_0$  має різні власні значення  $\lambda_{1,2} = \pm 0.8740320489i$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm 2.288245611i$ , тому для пошуку оптимального регулятора та інтервала для параметра  $\varepsilon$  можна застосувати теорему 2.1. З рівняння (1.13) знаходимо вектор  $\gamma$

$$\gamma = [2\nu_1 + \nu_2, -3\nu_4 + 2\nu_3, 2\nu_1, -\nu_4, 3\nu_4 - 2\nu_3, 3\nu_1 + \nu_2, \\ 2\nu_4 - \nu_3, \nu_1, 2\nu_1, -2\nu_4 + \nu_3, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_1, -\nu_3, \nu_2 - \nu_1]^T.$$

Далі обчислюємо матрицю  $D_1$ , формуємо вектор  $\xi_1$  і у скалярному добутку прирівнюємо до нуля коефіцієнти при довільних сталих  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ . У результаті проведених обчислень отримуємо рівняння (два з коефіцієнтів тотожно дорівнюють нулю):

$$\begin{aligned} -16\alpha_2 + 4 - 3(\alpha_0 - \alpha_2)^2 - 2(\alpha_0 - \alpha_2)\alpha_2 - 2\alpha_2^2 + \\ + 8\alpha_0 - 2\alpha_2(\alpha_0 - 5\alpha_2) + (\alpha_0 - 5\alpha_2)^2 = 0, \\ 8\alpha_2 + 4 - (\alpha_0 - \alpha_2)^2 - \alpha_2^2 - (\alpha_0 - 5\alpha_2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

З системи нелінійних рівнянь (2.8) знаходимо один із розв'язків:  $\alpha_0 = 6/5 + 1/5\sqrt{70}$ ,  $\alpha_2 = 2/5$  і за розкладом (1.10) будемо матрицю

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2/5 + 1/5\sqrt{70} & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 4/5 + 1/5\sqrt{70} & 0 & 2/5 \\ 4/5 & 0 & 2/5 + 1/5\sqrt{70} & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & -4/5 + 1/5\sqrt{70} \end{bmatrix},$$

власні значення якої дорівнюють  $\lambda_{1,3} = 1/5\sqrt{70} + 2/5\sqrt{5}$ ,  $\lambda_{2,4} = 1/5\sqrt{70} - 2/5\sqrt{5}$  тобто  $P_0 = 0$ .

Далі з рівняння (2.5) знаходимо перше наближення матриці-розв'язку  $P$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 7/5 - 1/10\sqrt{70} & 5/2 + \frac{4}{25}\sqrt{70} & -\frac{14}{5} - 1/5\sqrt{70} & 6/5 + \frac{4}{25}\sqrt{70} \\ 5/2 + \frac{4}{25}\sqrt{70} & \frac{23}{5} - 1/10\sqrt{70} & -7/4 + \frac{4}{25}\sqrt{70} & 0 \\ \frac{14}{5} - 1/5\sqrt{70} & -7/4 + \frac{2}{25}\sqrt{70} & 0 & 13/20 \\ 6/5 + \frac{4}{25}\sqrt{70} & 0 & 13/20 & -\frac{11}{5} + 1/10\sqrt{70} \end{bmatrix},$$

ураховавши симетричність матриці за допомогою частини вільних параметрів, а решту покладаємо рівними нулю. За формулами (2.6) обчислюємо матриці розкладу  $Q$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -12.40798406 & 15.82628764 & 5.81397211 & -5.12342657 \\ 15.82628764 & 25.09992032 & 3.22517623 & -12.53138380 \\ 5.81397211 & 3.22517623 & -6.57604781 & 1.96542909 \\ -5.12342657 & -12.53138380 & 1.96542909 & 2.69604781 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 21.18005471 & 14.44616773 & -2.49820160 & -3.46105126 \\ 14.44616773 & 14.16272776 & -4.06693606 & 0.0 \\ -2.49820160 & -4.06693606 & 1.59035193 & -0.88617098 \\ -3.46105126 & 0.0 & -0.88617098 & 1.85869589 \end{bmatrix}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що знайдений розв'язок  $P$ ,  $Q$  задовольняє матричне рівняння Ріккати (1.5).

Тепер знаходимо максимальні власні значення пучків матриць  $\mu P_0 + P_1$  та  $\delta^2 Q_0 + \delta Q_1 + Q_2$ :

$$|\mu P_0 + P_1| = 4.0\mu^4 + 2.34150332\mu^3 - 44.01710326\mu^2 + 19.14069123\mu + 60.69431149,$$

$$|\delta^2 Q_0 + \delta Q_1 + Q_2| = 1.\delta^8 + 8.81193626\delta^7 - 821.4450381\delta^6 + 5732.956411\delta^5 - \\ - 6281.234469\delta^4 + 6487.390346\delta^3 - 2022.27962\delta^2 - .711031807\delta^{-7},$$

$$\mu_{\max} = 3.12090767, \quad \delta_{\max} = 19.23482760.$$

Мінімальне власне значення квадратичного пучка матриць від'ємне.

Отже, в інтервалах  $(0, \mu_{\max}^{-1})$ ,  $(0, \delta_{\max}^{-1})$ , відповідно матриці  $P_0 + \varepsilon P_1$  і  $Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2$  будуть додатно означеними. У спільному інтервалі  $(0, 0.0519890)$  регулятор  $K = R^{-1}B^T (P_0 + \varepsilon P_1)^{-1}$  – оптимальний. Побудований регулятор і матриця коефіцієнтів замкненої системи мають вигляд:

$$K = \begin{bmatrix} 3.83865604\varepsilon & 2.47332005 + 3.76333997\varepsilon & -1.08067198\varepsilon & 0.40 \\ 2.53865604\varepsilon & 0.40 & 0.650\varepsilon & 0.87332005 - 1.36333997\varepsilon \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$A_0 + \varepsilon(A_1 - BK) = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -1.0 - 3.83865604\varepsilon^2 & -2.47332005\varepsilon - 3.76333997\varepsilon^2 \\ \varepsilon & 3.0\varepsilon \\ 1.0 + 2.0\varepsilon - 2.53865604\varepsilon^2 & -3.4\varepsilon \\ \varepsilon & -1.0 - 1.0\varepsilon \\ -2.0\varepsilon + 1.08067198 & 2.6\varepsilon \\ 0.0 & 2.0 \\ -2.0 - 0.65\varepsilon^2 & -0.87332005 + 1.36333997\varepsilon^2 \end{bmatrix}.$$

Наприклад, для  $\varepsilon = 0.05$  власні значення матриці коефіцієнтів такі:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -0.03981458056 \pm 2.310472295i, \\ \lambda_{3,4} &= -0.04685142209 \pm 0.9226108147i. \end{aligned} \quad (2.10)$$

З (2.10) випливає, що замкнена система (1.1)-(1.4), за допомогою отриманого оптимального регулятора (2.9), стабілізована.

## ВИСНОВКИ

У розглянутій роботі вивчалось оптимальне керування лінійними неперервними системами, матриці коефіцієнтів яких складаються з кососиметричної частини і збурення залежного від параметра. Для таких систем необхідно будувати оптимальний регулятор за допомогою асимптотичного розкладу розв'язку матричного рівняння Ріккати, що призводить до нескінченної системи матричних алгебраїчних рівнянь. Отримано необхідні та достатні умови розв'язності таких рівнянь на основі нуль-простору розширеної матриці, яку побудовано за допомогою прямого добутку, що дало простий та ефективний спосіб обчислення значень вільних параметрів матриць розкладу (1.6). Показано, як можна отримати точний розв'язок рівняння Ріккати за скінченне число кроків. А це, у свою чергу, дало можливість сформулювати у вигляді теореми інтервальні умови для оптимального регулятора. Ефективність розглянутого підходу показана на прикладі четвертого порядку.

Запропонований у статті алгоритм робастного оптимального керування неперервними параметричними системами може бути застосований до механічних систем, які описуються такими моделями.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Зінчук М. О., Новицький В. В. Оптимальне керування лінійними параметричними системами. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2010. Т. 7, № 3. С. 171–185.
2. Новицький В. В., Хуан Чень. Оптимальное управление почти консервативными системами. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2004. Т. 1, № 2. С. 152–157.
3. Barnett S., Cameron R. G. *Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition*. Oxford: Clarendon press, 1985. 404 p.
4. Ларин В. Б. О слабом управлении слабодемпфированными системами. *Прикл. математика и механика*. 1978. Т. 42, Вып. 6. С. 1000–1006.
5. Прасолов В. В. *Задачи и теоремы линейной алгебры*. Москва: Наука, 1996. 304 с.
6. Зінчук М. О., Новицький В. В. Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2006. Т. 3, № 1. С. 75–89.

7. Ланкастер П. Теория матриц. Москва: Наука, 1978. 280 с.
8. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т 1. Основные алгоритмы. Москва: Мир, 1976. 736 с.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1988. 552 с.
10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 656 с.

#### REFERENCES

1. Zinchuk, M. O. & Novytskyi, V. V. (2010). Optimal control of linear parametric systems. *Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, Vol. 7, No. 3, pp. 171-185.
2. Novytskyi, V. V. & Khuan, Chen (2004). Optimal control of almost conservative systems. *Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, Vol. 1, No. 2, pp. 152-157.
3. Barnett, S. & Cameron, R. G. (1985). *Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition*. Oxford: Clarendon press.
4. Larin, V. B. (1978). On weak management of weakly damped systems. *Prikl. matematika i mehanika*, Vol. 42, No. 6, pp. 1000-1006.
5. Prasolov, V. V. (1996). *The problems and theorems of linear algebra*. Moscow: Nauka.
6. Zinchuk, M. O. & Novytskyi, V. V. (2006). Optimal control of continuous almost conservative systems. *Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, Vol. 3, No. 1, pp. 75-89.
7. Lankaster, P. (1978). *Theory of matrices*. Moscow: Nauka.
8. Knut, D. (1976). *The art of computer programming. (vol. 1) The main algorithms*. Moscow: Mir.
9. Gantmaher, F. R. (1988). *Theory of matrices*. Moscow: Nauka.
10. Horn, R. & Dzhonson, Ch. (1989). *Matrix Analysis*. Moscow: Mir.

УДК 539.3

### ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З ДВОМА РІВНИМИ ЗСУНУТИМИ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Звізло І. С., к. ф.-м. н., Яцик І. М., магістр

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

kafmech@franko.lviv.ua, kafmech@franko.lviv.ua, IhorYatsyk@i.ua

Досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з двома прямолінійними паралельними зсунутими наскрізними тріщинами однакової довжини за двобічного згину розподіленими моментами на нескінченності. Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, а під дією згинальних моментів на нескінченності вони прийшли у гладкий контакт уздовж області сталої ширини поблизу основи пластини. На основі методів теорії функцій комплексної змінної і комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та теорії згину пластин за Рейсснером, розв'язування задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь на тріщинах, яку вирішено чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Побудовано графічні залежності для контактної зусилля між берегами тріщин, коефіцієнтів інтенсивності зусиль, згинальних і крутих моментів та поперечних сил за різних параметрів задачі.

*Ключові слова: пластинка Рейсснера, тріщина, двобічний згин, контакт берегів тріщини, плоский напружений стан, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності.*

## ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ РЕЙССНЕРА С ДВУМЯ РОВНЫМИ СДВИНУТЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ИХ БЕРЕГОВ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., профессор, Звизло И. С., к. ф.-м. н., Яцык И. Н., магистр

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина*

kafmech@franko.lviv.ua, kafmech@franko.lviv.ua, IhorYatsyk@i.ua

Исследовано напряженно-деформированное состояние изотропной пластины с двумя прямолинейными параллельными сдвинутыми сквозными трещинами одинаковой длины при двустороннем изгибе распределенными моментами на бесконечности. Берега трещин свободны от внешней нагрузки, а под воздействием изгибающих моментов на бесконечности они пришли в гладкий контакт вдоль области постоянной ширины вблизи основания пластины. С использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости и теории изгиба пластин по Рейсснеру, решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений на трещинах, решаемой численно с помощью метода механических квадратур. Построены графические зависимости для контактного усилия между берегами трещин, коэффициентов интенсивности усилий, изгибающих и крутящих моментов и поперечных сил при различных параметрах задачи.

*Ключевые слова: пластина Рейсснера, трещина, двусторонний изгиб, контакт берегов трещины, плоское напряженное состояние, комплексные потенциалы, контактное усилие, коэффициенты интенсивности.*

## REISSNER'S PLATE BENDING CONTAINING TWO EQUAL SHIFTED PARALLEL CRACKS TAKING INTO ACCOUNT CONTACT ZONE WIDTH OF THEIR FACES

Opanasovych V. K., D. Sc. in Physics and Maths, Professor,  
Zvizlo I. S., Ph. D. in Physics and Maths, Yatsyk I. M., Master

*Ivan Franko National University of Lviv,  
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine*

kafmech@franko.lviv.ua, kafmech@franko.lviv.ua, IhorYatsyk@i.ua

Construction of the cracked plate bending problems solutions forms an important and actual in terms of theory development and practical applications scientific direction. They make it possible to determine stress and displacement distribution near the defects tips, as well as make recommendations for selecting optimal geometrical, physical and mechanical characteristics of plates depending on operating conditions in order to prevent destruction of engineering constructions. In this paper the stress-strain state of boundless isotropic plate with two equal shifted parallel through-the-thickness cracks, the faces of which are free from the external loading is investigated. The plate is under the action of the uniformly distributed in a remote part bending moments, which vectors are parallel and perpendicular to the axes of the cracks. It is assumed that under external loading the cracks faces come in a smooth contact on all crack length along the two-dimensional area of constant width near the upper plate basis. As a result of the cracks faces contact the solution of problem is presented in the form of two related problems solutions: the theory of elasticity plane problem and the problem of plates bending based on the equations of Reissner theory. On the basis of complex variable function theory methods and complex potentials the system of singular integral equations is obtained which is reduced by the mechanical quadratures method to the infinite system of linear algebraic equations. This system is solved numerically by the method of reduction using Gauss with a choice of main entry. The numerical analysis of problem at some parameters values is carried out and graphic dependences for contact force between the faces of cracks, force and moment intensity factors are constructed. In particular cases known in the scientific literature results for Reissner's plate bending problems with one crack considering the contact zone width of its faces, with two parallel not shifted equal cracks as well as for appropriate problems solved using equations of the classical theory of plates bending are obtained.

*Key words: Reissner's plate, crack, bilateral bending, contact of crack faces, plane stress, complex potentials, contact force, intensity factors.*



## ВСТУП

Як конструктивний елемент пластини широко застосовують у машинобудуванні та багатьох інших галузях техніки. Їхній запас міцності істотно залежить від наявності в них тріщиноподібних дефектів, які є потужними концентраторами напружень та істотно знижують допустиме навантаження, що може бути прикладеним до пластини. Щоб визначити граничне навантаження, а також ресурс експлуатації пластинчастих елементів, важливо опрацювати методи оцінювання впливу таких дефектів на перерозподіл полів напружень і деформацій.

Найчастіше пластини перебувають під дією згинального навантаження. Тому вивчення напружено-деформованого стану пластини за згину з урахуванням можливого контакту берегів тріщиноподібних дефектів не втрачає своєї актуальності. З дослідженнями задач згину пластин з тріщинами та пошуком ефективних методів їхнього розв'язування можна ознайомитися в монографіях [1-3] і статтях [4-7], де контакт берегів тріщин не враховували, вважаючи тріщину щілиною із достатньо широко розведеними берегами, щоб вони не дотикалися. Однак зрозуміло, що в більшості випадків, незважаючи на істотне ускладнення формулювання задач згину пластини із тріщинами та розв'язування відповідних математичних задач, це все ж треба робити. У працях [8-16] вивчені різноманітні задачі, де в різний спосіб враховано контакт берегів тріщиноподібних дефектів за згину пластини, проте недостатньо досліджень, пов'язаних зі згином пластини з тріщинами, береги яких контактують уздовж двовимірної зони постійної ширини з використанням теорії Рейсснера. Зазначимо, що у праці [15] досліджено двобічний згин пластини Рейсснера розподіленими згинальними моментами на нескінченності за наявності прямолінійних співвісних наскрізних тріщин. Крім того, у дослідженні [16] розглянуто напружено-деформований стан ізотропної пластини Рейсснера з прямолінійними однаковими паралельними не зсунутими наскрізними тріщинами з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів, при цьому вектори розподілених моментів паралельні та перпендикулярні до ліній тріщин.

Мета роботи – дослідити згин ізотропної пластини Рейсснера з прямолінійними паралельними зсунутими наскрізними однаковими тріщинами з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Обчислення здійснені для вибраних значень параметрів задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності для контактної зусилля між берегами тріщин і коефіцієнтів інтенсивності зусиль, моментів та поперечних сил.

## ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Дослідимо задачу про згин ізотропної пластини завтовшки  $2h$  з двома однаковими паралельними зсунутими тріщинами завдовжки  $2l$ . Відстань між осями дефектів дорівнює  $d$ , а між проекціями центрів на напрямок тріщин –  $c$ . Вважаємо, що під впливом зовнішнього навантаження береги тріщини приходять у гладкий контакт поблизу верхньої основи пластини уздовж усієї довжини тріщини, причому ширина області контакту є сталою та дорівнює  $h_1$ .

Виберемо декартову систему координат  $Ox\tilde{y}z$  з координатною площиною  $Ox\tilde{y}$  у серединній площині пластини, початок  $O$  якої розташований посередині відрізка, що з'єднує геометричні центри тріщин, а вісь  $Ox$  спрямовано паралельно до осей дефектів. Уведемо локальні системи координат  $O_k x_k y_k$  з початками у точках  $O_k \left( (-1)^k c/2; (-1)^k d/2 \right)$ ,  $k = 1, 2$  і осями  $O_k x_k$  та  $O_k y_k$ , паралельними відповідно до осей  $Ox$  та  $Oy$ . Відрізок дійсної осі  $O_k x_k$ , для якого  $|x_k| \leq l$ , позначимо через  $L_k$ . Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження.

Пластина перебуває під дією розподіленого згинального навантаження на нескінченності  $M_x^\infty$  і  $M_y^\infty$  (рис. 1).

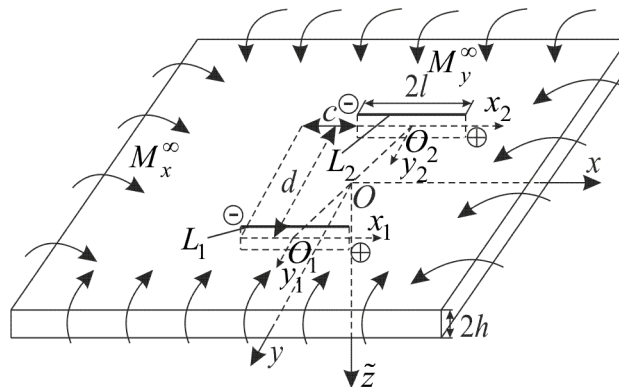


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

Надалі дотримуватимемося таких позначень:  $\mu$  – модуль зсуву;  $E$  – модуль пружності;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ .

З урахуванням контакту берегів тріщини розв'язування задачі розбиваємо на дві взаємозв'язані задачі: плоску задачу теорії пружності та задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

Згідно з формулюванням задачі на берегах тріщин маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{y_k y_k}^+ = \sigma_{y_k y_k}^- = -N_k / (2h), \quad \sigma_{x_k y_k}^+ = \sigma_{x_k y_k}^- = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

$$M_{y_k}^+ = M_{y_k}^- = \beta h N_k, \quad H_{x_k y_k}^+ = H_{x_k y_k}^- = 0, \quad Q_{y_k}^+ = Q_{y_k}^- = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

$$\partial_{x_k} [v_{p_k}] - \alpha h \partial_{x_k} [\varphi_{y_k}] = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

де  $\sigma_{x_k y_k}$ ,  $\sigma_{y_k y_k}$  і  $u_{p_k}$  та  $v_{p_k}$  – відповідно компоненти тензора напружень і проекції вектора переміщення точки на осі  $O_k x_k$  та  $O_k y_k$  у плоскій задачі;  $N_k$  – контактне зусилля між берегами  $k$ -ї тріщини, причому  $N_k > 0$ ;  $\varphi_{y_k}$  – усереднений за товщиною пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини у задачі згину [17];  $M_{y_k}$  – згинальний момент;  $Q_{y_k}$  і  $H_{x_k y_k}$  – поперечна сила і крутний момент відповідно;  $\partial_{x_k} = \partial / \partial x_k$ ,  $[f] = f^+ - f^-$ ; символи «+» і «-» позначають відповідно граничні значення функції при прямуванні точки площини при  $y_k \rightarrow \pm 0$ ;  $\alpha = \{1 + (1 - \gamma)^2\} / 2$ ,  $\beta = 1 - \gamma / 3$ , а  $\gamma = h_1 / h$  – зведена ширина області контакту [8].

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини.

### ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [18] та теорії згину пластин за Рейсснером [19], аналогічно як це зроблено у статті [16], розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих дійсних функцій  $g_{sj}(x_j)$ ,  $s = \overline{1, 4}$ ,  $j = 1, 2$ , яка після зведення інтегрування до проміжку  $[-1; 1]$  матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=-1}^2 \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{s=1}^3 R_{3k-2,3j-3+s}(t, \tilde{x}) \tilde{g}_{sj}(t) + A_{kj}(t, \tilde{x}) \tilde{g}_{4j}(t) \right\} dt = 2\pi M_y^\infty / n, \quad |\tilde{x}| < 1, \\ & \sum_{j=-1}^2 \int_{-1}^1 \sum_{s=1}^3 R_{3k-1,3j-3+s}(t, \tilde{x}) \tilde{g}_{sj}(t) dt = 0, \quad |\tilde{x}| < 1, \\ & \sum_{j=-1}^2 \int_{-1}^1 \sum_{s=1}^3 R_{3k,3j-3+s}(t, \tilde{x}) \tilde{g}_{sj}(t) dt = 0, \quad |\tilde{x}| < 1, \\ & \sum_{j=-1}^2 \int_{-1}^1 \left\{ \tilde{K}_{kj}(t, \tilde{x}) \tilde{g}_{2j}(t) + \tilde{L}_{kj}(t, \tilde{x}) \tilde{g}_{4j}(t) \right\} dt = 0, \quad |\tilde{x}| < 1, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} R_{3k-2,3j-2}(t, \tilde{x}) &= -\frac{b_{kj}}{r_{kj}^2} \left\{ 1 - (3 - 4b_{kj}^2/r_{kj}^2) \left\{ 1 + 2n_3 \tilde{K}_2 \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\} + \frac{2n_3}{\lambda} (b_{kj}^2/r_{kj}^2 - 1) r_{kj} K_1 \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\}, \\ R_{3k-2,3j-1}(t, \tilde{x}) &= (t - a_{kj})/r_{kj}^2 \left\{ n_1 + 6n_2 \alpha \beta (2b_{kj}^2/r_{kj}^2 + 1) + (1 - 4b_{kj}^2/r_{kj}^2) \left\{ 1 + 2n_3 \tilde{K}_2 \left( r_{kj}/\lambda \right) \right\} - \right. \\ & \quad \left. - 2n_3 b_{kj}^2 / (\lambda r_{kj}) K_1 \left( r_{kj}/\lambda \right) \right\}, \quad R_{3k-2,3j}(t, \tilde{x}) = \ln_3 b_{kj} (t - a_{kj}) / r_{kj}^2 \tilde{K}_2 \left( r_{kj}/\lambda \right), \\ R_{3k-1,3j-2}(t, \tilde{x}) &= \frac{t - a_{kj}}{r_{kj}^2} \left\{ n_4 - (1 - 4b_{kj}^2/r_{kj}^2) \left\{ 1 + 2n_3 \tilde{K}_2 \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\} + \frac{n_3}{\lambda} (2b_{kj}^2/r_{kj}^2 - 1) r_{kj} K_1 \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\}, \\ R_{3k-1,3j-1}(t, \tilde{x}) &= -\frac{b_{kj}}{r_{kj}^2} \left\{ n_4 + (3 - 4b_{kj}^2/r_{kj}^2) \left\{ 1 + 2n_3 \tilde{K}_2 \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\} - \frac{n_3}{\lambda} (2b_{kj}^2/r_{kj}^2 - 1) r_{kj} K_1 \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\}, \\ R_{3k-1,3j}(t, \tilde{x}) &= -\ln_3 (b_{kj}^2/r_{kj}^2 - 1/2) \tilde{K}_2 \left( r_{kj}/\lambda \right), \\ R_{3k,3j-2}(t, \tilde{x}) &= 4/(\lambda r_{kj}^2) \left\{ (r_{kj}^2 - 2b_{kj}^2) \tilde{K}'_1 \left( r_{kj}/\lambda \right) - b_{kj}^2 K_0 \left( r_{kj}/\lambda \right) \right\}, \\ R_{3k,3j-1}(t, \tilde{x}) &= 4/(\lambda r_{kj}^2) b_{kj} (t - a_{kj}) \tilde{K}_2 \left( r_{kj}/\lambda \right), \quad R_{3k,3j}(t, \tilde{x}) = -2l(t - a_{kj}) K_1 \left( r_{kj}/\lambda \right) / r_{kj}, \\ A_{kj}(t, \tilde{x}) &= 4\beta b_{kj} h^2 / (nr_{kj}^2) (1 - 2b_{kj}^2/r_{kj}^2), \\ \tilde{K}_{kj}(t, \tilde{x}) &= \alpha E h b_{kj} / \{ r_{kj}^2 (1 - \nu) \} (1/2 - b_{kj}^2/r_{kj}^2), \quad \tilde{L}_{kj}(t, \tilde{x}) = (t - a_{kj}) / r_{kj}^2 (2b_{kj}^2/r_{kj}^2 - 1), \\ \tilde{g}_{sj}(t) &= g_{sj}(lt), \quad r_{kj} = \sqrt{(t - a_{kj})^2 + b_{kj}^2}, \quad a_{kj} = \begin{cases} \tilde{x}, & k = j, \\ \tilde{x} + (-1)^k c/l, & k \neq j, \end{cases} \quad b_{kj} = \begin{cases} 0, & k = j, \\ (-1)^k d/l, & k \neq j, \end{cases} \\ n_1 &= (5 + 3\nu)/(1 - \nu), \quad n_2 = (1 + \nu)/(1 - \nu), \quad n_3 = \frac{4}{1 - \nu}, \quad n_4 = (3 + \nu)/(1 - \nu), \\ \tilde{x} &= \frac{x}{l}, \quad \lambda = h\sqrt{10}/(5l). \end{aligned}$$

Систему (4) доповнимо умовами

$$\int_{-1}^1 \tilde{g}_{1j}(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \tilde{g}_{2j}(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \{ t \tilde{g}_{1j}(t) - l \lambda^2 \tilde{g}_{3j}(t) \} dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \tilde{g}_{4j}(t) dt = 0, \quad (5)$$

які відображають відповідно однозначність усереднених кутів повороту нормалі  $\varphi_{x_j}$ ,  $\varphi_{y_j}$ , прогину  $w_j$  і переміщення  $u_{p_j}$  при обході навколо контуру  $j$ -ої тріщини.

Контактне зусилля між берегами  $k$ -ої тріщини визначимо за формулою

$$N_k(\tilde{x}) = \frac{2h}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \left\{ B_{kj}(t, \tilde{x}) \tilde{g}_{2j}(t) + nA_{kj}(t, \tilde{x}) / (4\beta h^2) \tilde{g}_{4j}(t) \right\} dt, |\tilde{x}| < 1,$$

де  $B_{kj}(t, \tilde{x}) = \alpha Eh(t - a_{kj}) / \{r_{kj}^2(1 - \nu)\} (1 + 2b_{kj}^2/r_{kj}^2)$ .

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності зусиль  $K_{1j}^{\pm}$ ,  $K_{2j}^{\pm}$ , згинальних  $K_{Mj}^{\pm}$  і крутних  $K_{Hj}^{\pm}$  моментів та поперечних сил  $K_{Qj}^{\pm}$  скористаємося відповідними залежностями із монографій [3] та [19]

$$\begin{aligned} K_{1j}^{\pm} &= \pm 2\alpha Eh^2 / (1 - \nu) \sqrt{l} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1 - t^2} \tilde{g}_{2j}(t) \right\}, & K_{2j}^{\pm} &= \pm 2h \sqrt{l} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1 - t^2} \tilde{g}_{4j}(t) \right\}, \\ K_{Mj}^{\pm} &= \mp m \sqrt{l} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1 - t^2} \tilde{g}_{2j}(t) \right\}, & K_{Hj}^{\pm} &= \mp m \sqrt{l} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1 - t^2} \tilde{g}_{1j}(t) \right\}, \\ K_{Qj}^{\pm} &= \pm D \sqrt{l} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1 - t^2} \tilde{g}_{3j}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут верхні знаки відповідають вершині тріщини  $x_j = l$ , а нижній –  $x_j = -l$ , причому коефіцієнти інтенсивності  $K_{1j}^{\pm}$  і  $K_{Mj}^{\pm}$  зв'язані залежністю

$$K_{1j}^{\pm} = 3\alpha K_{Mj}^{\pm} / h.$$

З урахуванням формул (6) зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль (ЗКІЗ)  $\tilde{K}_{1j}^{\pm} = 2hK_{1j}^{\pm} / (M_y^{\infty} \sqrt{l})$ ,  $\tilde{K}_{2j}^{\pm} = 2hK_{2j}^{\pm} / (M_y^{\infty} \sqrt{l})$ , згинальних (ЗКІЗМ)  $\tilde{K}_{Mj}^{\pm} = K_{Mj}^{\pm} / (M_y^{\infty} \sqrt{l})$  і крутних моментів (ЗКІКМ)  $\tilde{K}_{Hj}^{\pm} = K_{Hj}^{\pm} / (M_y^{\infty} \sqrt{l})$  та поперечних сил (ЗКПС)  $\tilde{K}_{Qj}^{\pm} = K_{Qj}^{\pm} \lambda \sqrt{l} / M_y^{\infty}$  можна подати так:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{1j}^{\pm} &= 6\alpha \tilde{K}_{Mj}^{\pm}, & \tilde{K}_{2j}^{\pm} &= \pm 4h^2 / M_y^{\infty} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1 - t^2} \tilde{g}_{4j}(t) \right\}, & \tilde{K}_{Mj}^{\pm} &= \mp m / M_y^{\infty} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1 - t^2} \tilde{g}_{2j}(t) \right\}, \\ \tilde{K}_{Hj}^{\pm} &= \mp m / M_y^{\infty} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1 - t^2} \tilde{g}_{1j}(t) \right\}, & \tilde{K}_{Qj}^{\pm} &= \pm D l \lambda / M_y^{\infty} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1 - t^2} \tilde{g}_{3j}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Систему рівнянь (32) і (33) розв'язуємо числово за допомогою методу механічних квадратур [20] з використанням такого подання функцій  $\tilde{g}_{kj}(t)$  ( $j = 1, 2; k = \overline{1, 4}$ ):

$$\tilde{g}_{1j}(t) = \frac{M_y^{\infty} g_{1j}^*(t)}{n\sqrt{1-t^2}}, \quad \tilde{g}_{2j}(t) = \frac{M_y^{\infty} g_{2j}^*(t)}{n\sqrt{1-t^2}}, \quad \tilde{g}_{3j}(t) = \frac{M_y^{\infty} g_{3j}^*(t)}{nl\sqrt{1-t^2}}, \quad \tilde{g}_{4j}(t) = \frac{M_y^{\infty} g_{4j}^*(t)}{h^2\sqrt{1-t^2}}. \quad (8)$$

У результаті отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно вузлових значень  $g_{kj}^*(t_s)$  ( $j = 1, 2; k = \overline{1, 4}$ ), де  $t_s = \cos\{\pi(2s-1)/(2S)\}$ ;  $S$  – кількість вузлів у методі механічних квадратур.

З урахуванням (8), з (7) для обчислення зведених коефіцієнтів інтенсивності отримуються залежності

$$\tilde{K}_{2j}^{\pm} = \pm 4g_{4j}^*(\pm 1), \quad \tilde{K}_{Mj}^{\pm} = \mp qg_{2j}^*(\pm 1), \quad \tilde{K}_{Hj}^{\pm} = \mp qg_{1j}^*(\pm 1), \quad \tilde{K}_{Qj}^{\pm} = \pm \lambda n_3 / 4g_{3j}^*(\pm 1), \quad (9)$$

де

$$g_{kj}^*(\pm 1) = \mp 1/S \sum_{s=1}^S (-1)^{s+(1\mp 1)S/2} g_{kj}^*(t_s) \operatorname{tg}^{\mp 1} \{ \pi(2s-1)/(4S) \}.$$

### ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ І ВИСНОВКИ

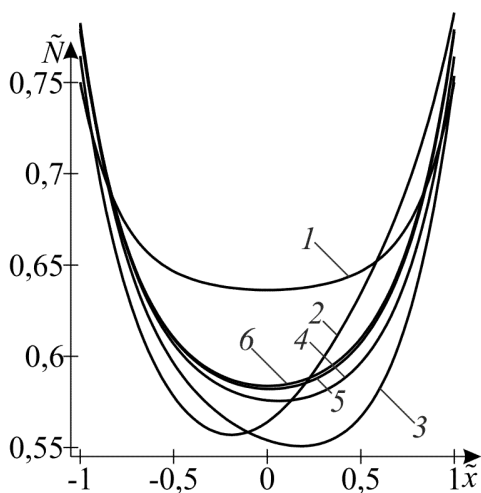


Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактної зусилля  $\tilde{N}$  між берегами тріщини

При  $\nu = 0,3$ ,  $\tilde{d} = d/l = 1$  і  $\gamma = 0,13$  був проведений числовий аналіз задачі, який поданий на рис. 2-6.

На рис. 2 наведена графічна залежність зведеного контактної зусилля  $\tilde{N} = hN_1/M_y^\infty$  при  $\lambda = 0,2$  та різних значеннях  $\tilde{c} = c/l$ . Крива 1 побудована при  $\tilde{c} = 0$ , крива 2 – при  $\tilde{c} = 1$ , крива 3 – при  $\tilde{c} = 2$ , крива 4 – при  $\tilde{c} = 3$ , крива 5 – при  $\tilde{c} = 4$  та крива 6 – при  $\tilde{c} = 5$ . Як бачимо з цього рисунка, при збільшенні  $\tilde{c}$  величина  $\tilde{N}$  у середній частині тріщини спочатку зменшується, а потім збільшується, залишаючись меншою, ніж у випадку не зсунутих паралельних тріщин ( $\tilde{c} = 0$ ).

На рис. 3 подана графічна залежність ЗКІЗ  $\tilde{K}_{21}^\pm$ , на рис. 4 – ЗКІЗМ  $\tilde{K}_{M1}^\pm$ , на рис. 5 – ЗКІКМ  $\tilde{K}_{H1}^\pm$  і на рис. 6 – ЗКІПС  $\tilde{K}_{Q1}^\pm$  від  $\tilde{c}$ , причому штриховими

лініями позначені коефіцієнти інтенсивності у вершині тріщини  $\tilde{x} = -1$ , а суцільними –  $\tilde{x} = 1$ . Криві 1 відповідають значенню  $\lambda = 0,2$ , криві 2 –  $\lambda = 0,5$ , криві 3 –  $\lambda = 1$ . Як бачимо з цих рисунків, при малих значеннях  $\tilde{c}$  ЗКІЗМ більші у зовнішніх, а ЗКІЗ – у внутрішніх вершинах тріщин. При переході через деяке значення  $\tilde{c}$  (для ЗКІЗМ воно знаходиться в околі  $\tilde{c} = 2$ , а для ЗКІЗ – в околі  $\tilde{c} = 1$ ) ситуація змінюється на протилежну. Стосовно коефіцієнтів ЗКІКМ і ЗКІПС такої однозначності немає.

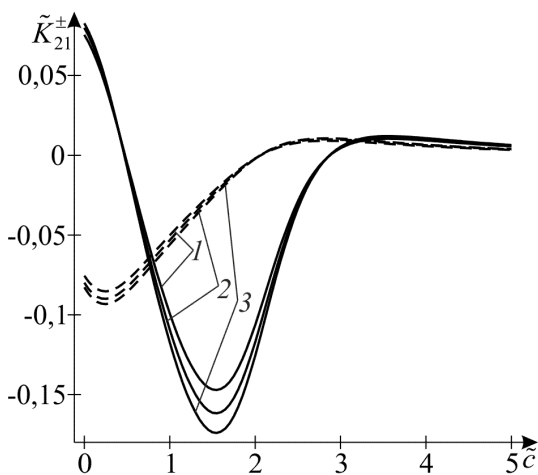


Рис. 3. Графічна залежність  $\tilde{K}_{21}^\pm$  від зсуву тріщин  $\tilde{c}$  при різних значеннях  $\lambda$

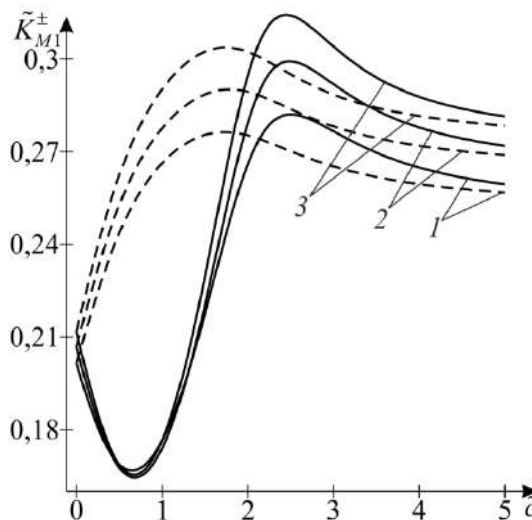


Рис. 4. Графічна залежність  $\tilde{K}_{M1}^\pm$  від зсуву тріщин  $\tilde{c}$  при різних значеннях  $\lambda$

Зауважимо, що ЗКІЗ  $\tilde{K}_{1j}^\pm$  і ЗКІЗМ  $\tilde{K}_{Mj}^\pm$  пов'язані між собою першим співвідношенням (7), тому графічні залежності для  $\tilde{K}_{11}^\pm$  не наводяться.

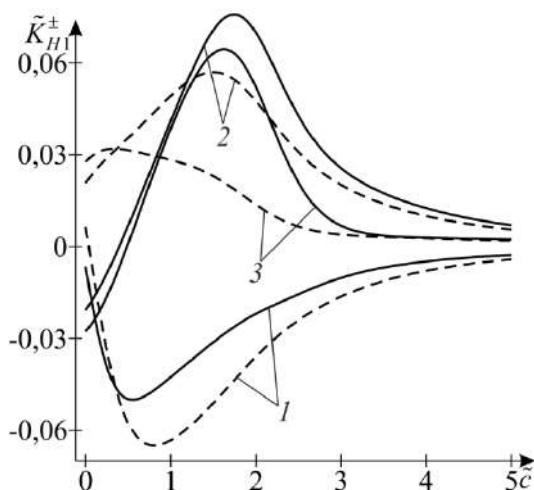


Рис. 5. Графічна залежність  $\tilde{K}_{HI}^{\pm}$  від зсуву тріщин  $\tilde{c}$  при різних значеннях  $\tilde{k}_{\pm}^c$

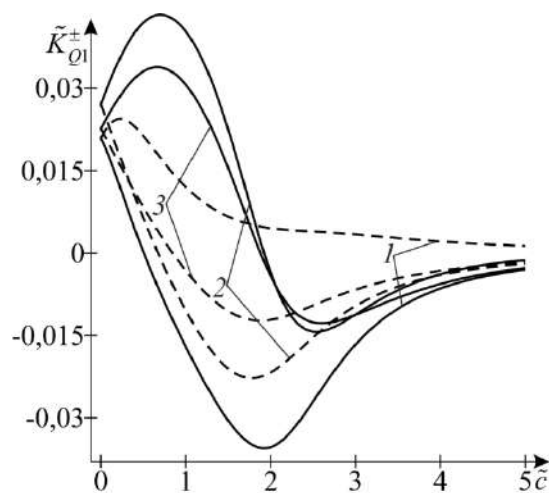


Рис. 6. Графічна залежність  $\tilde{K}_{OI}^{\pm}$  від зсуву тріщин  $\tilde{c}$  при різних значеннях  $\tilde{k}_{\pm}^c$

У частинних випадках, коли  $\tilde{c} = 0$ , контактне зусилля та коефіцієнти інтенсивності прямують до відповідних значень задачі згину пластини з двома паралельними не зсунутими тріщинами [16], при  $\tilde{c} > 1$  і  $\tilde{d} = 0$  одержується випадок згину пластини з двома співвісними тріщинами [15], а якщо один із параметрів  $\tilde{c}$  або  $\tilde{d}$  прямує до нескінченності – випадок однієї ізольованої тріщини [10].

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Бережницький Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
2. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. Минск: Изд-во БГУ, 1975. 256 с.
3. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
4. Alwar R. S., Ramachandran Nambissan K. N. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis. *Eng. Fracture Mech.* 1983. 17, No. 4. P. 323–333.
5. Heming F. S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate. *Int. J. Fracture.* 1980. 16, No. 4. P. 289–304.
6. Jones D. P., Swedlow J. L. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate. *Int. J. Fracture.* 1975. 11, No. 6. P. 897–914.
7. Williams M. L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack. *Trans ASME. J. Appl. Mech.* 1961. 28. P. 78–82.
8. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь. *Наукові нотатки Луцького технічного університету.* 2007. Вип. 20 (2). С. 123–127.
9. Опанасович В. К., Новосад В. П., Селіверстов Р. Г. Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Зб. наук. праць.* Вип. 5. Львів: Каменяр, 2002. С. 148–153.
10. Опанасович В., Яцик І. Згин пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2008. Вип. 69. С. 125–135.
11. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. *Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки.* 1988. № 7. С. 49–51.

12. Шацький І. П., Перепічка В. В. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1992. 28, № 2. С. 54–58.
13. Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А. Мат. проблеми механіки неоднорідних структур. Т. 2. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах. Львів, 2000. С. 51–54.
14. Dempsey J. P., Shekhtman I. I., Slepyan L. L. Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. P. 4077–4089.
15. Опанасович В., Яцик І. Згин пластини Рейсснера з двома співвісними наскрізними тріщинами різної довжини з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів. *Машинознавство*. 2009. Вип. 4 (142). С. 18–25.
16. Сулим Г. Т., Опанасович В. К., Яцик І. М. Згин пластини Рейсснера з двома не співвісними однаковими наскрізними тріщинами з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів. *Вісник ТНТУ. Механіка та матеріалознавство*. 2015. Т. 80, № 4. С. 7–19.
17. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер С. Пластины и оболочки. Москва: Наука, 1966. 636 с.
18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.
19. Мазурак Л. П., Бережницкий Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1990. 256 с.
20. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.

#### REFERENCES

1. Beregnitskiy, L. T., Delyavskiy, M. V. & Panasyuk, V. V. (1979). Bending of thin plates with defects type of cracks. Kiev: Naukova Dumka.
2. Prusov, I. A. (1975). The method of conjugation in the theory of plates. Minsk: Izdatelstvo Beloruskogo universiteta.
3. Savruk, M. P. (1981). Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka.
4. Alwar, R. S. & Ramachandran Nambissan, K. N. (1983). Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis. *Eng. Fracture Mech.*, 17, No. 4, pp. 323-333.
5. Heming, F. S. Jr. (1980). Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate. *Int. J. Fracture*, 16, No. 4, pp. 289-304.
6. Jones, D. P. & Swedlow, J. L. (1975). The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate. *Int. J. Fracture*, 11, No. 6, pp. 897-914.
7. Williams, M. L. (1961). The bending stress distribution at the base of a stationary crack. *Trans ASME. J. Appl. Mech.*, 28, pp. 78-82.
8. Opanasovych, V. K. (2007). Bending the plate with a through crack linear considering width of its contact surfaces. *Naukovi notatki Luts'kogo tehnic'noho universitetu*, Vol. 20(2), pp. 123-127.
9. Opanasovych, V. K., Novosad, V. P. & Seliverstov, R. H. (2002). Consideration contact crack by bending transversely-isotropic plate. *Mehanika ta fizyka ruynuvannya budivelnih materiaiv ta konstruktivnyy: Coll. Science. works*, Vol. 5. Lviv: Kamenyar, pp. 148-153.
10. Opanasovych, V. & Yatsyk, I. (2008). Bending of the Reissner's plate with through-the-thickness crack taking into account contact region width of its faces. *Visnyk L'vivskogo Universitetu. Seria Mehaniko-Matematichna*, Vol. 69, pp. 125-135.
11. Shats'kyu, I. P. (1988). Plate bending attenuated by slit with contacting faces. *Dopovidi AN URSR. Seria A. Fiziko-matematichni ta tehnic'ni nauki*, No. 7, pp. 49-51.
12. Shats'kyu, I. P. & Perepichka, V. V. (1992). Semi-infinite plate bending attenuated by slit with contacting faces. *Fiz.-him. mekhanika materialiv*, 28, No. 2, pp. 54-58.

13. Shats'kyu, I., Perepichka, V., Dalyak, T. & Shcherbiy, A. (2000). Mat. problemy mekhaniky neodnorodnykh struktur. (vol. 2). Problems of plates and shells theory with interconnected boundary conditions on slits. L'viv, pp. 51-54.
14. Dempsey, J. P., Shektman, I. I. & Slepyan, L. L. (1998). Closure of a through crack in a plate under bending. International Journal of Solids and Structures, Vol. 35, pp. 4077-4089.
15. Opanasovych, V. & Yatsyk, I. (2009). Reissner's plate bending with two collinear through-the-thickness cracks of different length taking into account contact region width of their faces. Mashynoznavstvo, Iss. 4(142), pp. 18-25.
16. Sulym, H. T., Opanasovych, V. K. & Yatsyk, I. M. (2015). Reissner's plate bending containing two not coaxial identical through-the-thickness cracks taking into account contact zone width of their faces. Visnyk TNTU, Vol. 80, No. 4, pp. 7-19.
17. Timoshenko, S. P. & Voynovsky-Krieger, S. (1966). Plates and shells. Moscow: Nauka.
18. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.
19. Mazurak, L. P. & Berezhnitskiy, L. T. (1990). Bending of transversally isotropic plates with defects of cracks type. Kiev: Naukova Dumka.
20. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsyshyn, A. P. (1976). Distribution of stresses around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka.

УДК 517.9

## ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА В ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

Панасенко Є. В., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний університет,  
бул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

panasenko.yevgeniy@gmail.com

У статті розглянуто двоточкову крайову задачу в критичному випадку для матричних диференціальних рівнянь типу Ляпунова. Досліджено задачу в припущенні, що оператор, який описує однорідну лінійну крайову задачу, є нетеровим. Запропоновано підхід до знаходження серед розв'язків крайової задачі того розв'язку, який мінімізує деякий функціонал.

*Ключові слова: крайова задача, еволюційний оператор, псевдообернена матриця, функціонал.*

## ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

Панасенко Е. В., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

panasenko.yevgeniy@gmail.com

В статье рассмотрена двухточечная краевая задача в критическом случае для матричных дифференциальных уравнений типа Ляпунова. Исследована задача в предположении, что оператор, который описывает линейную краевую задачу, является нетеровым. Предложен подход к нахождению среди решений краевой задачи того решения, которое минимизирует некоторый функционал.

*Ключевые слова: краевая задача, эволюционный оператор, псевдообратная матрица, функционал.*



## A PROBLEM OF OPTIMIZATION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR LYAPUNOV EQUATIONS IN HILBERT SPACE

Panasenko Y. V., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

*Zaporizhzhya National University,  
66, Zhykovsky str., Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

panasenko.yevgeniy@gmail.com

The paper is devoted to the investigation of the two-point boundary-value problem in the critical case. This problem has many applications of the theory of boundary-value problems for differential equations. Under the assumption that the corresponding generating operator is Noether's operator the given boundary-value problem is studied. The set of solutions are constructed with the help of the theory of pseudoinvertible operators. An approach is used to construct the set of solutions with the ones of the boundary-value problem that minimizes some functional is proposed.

It should be noted that such equations are used in the games theory and the variational calculations. Many papers exist where in wick matrix Riccati equations and operator differential Riccati equations are investigated. As a rule such equations are investigated in the regular case when are the given problem has a unique solution. In the nonregular case such equation was investigated (in the periodic case) in the works of Boichuk O.A., Krivosheya S.A. [1, 6]. It should be noted that this equation are investigated in operator, matrix case or in the operator-differential case.

Riccati equation plays an important role in the theory of optimal control, calculus of variations, physics and many others applications. It should be noted that in general many papers are devoted to obtaining the conditions of solvability in the regular case. There are also papers [1-3, 6-8] in wick this equation is investigated in finite-dimensional case and papers in wick equation is investigated in the infinite-dimensional case [4, 11].

The paper presents the examples of finite system of such equations. We find the Necessary and sufficient conditions of the existence of solutions of boundary-value problem for Lyapunov equation in the Hilbert space are found. On the basis of this material the boundary-value problem using a pseudoinverse matrix theory is solved. Among the solutions of the boundary-value problem for Lyapunov equation, a solution that minimizes some functional is found.

It was shown that can be applied for studies functional to a minimum, can apply the theory of pseudoinverse matrix [7, 8]. The proposed approach can be applied to study of boundary-value problems for operator-differential equations of general type.

*Key words: boundary-value problem, evolutionary operator, pseudoinverse matrix, functional.*

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Дослідженню крайових задач для диференціальних рівнянь як у скінченновимірному, так і у нескінченновимірному випадках присвячена величезна кількість робіт [4, 6-8, 10]. Серед останнього класу добре відомим є рівняння Ляпунова [1, 3, 4, 9]. У статті розглядається задача оптимізації крайової задачі для операторно-диференціального рівняння Ляпунова в просторі Гільберта. Наша робота є продовженням роботи авторів [4].

Розглянемо таку крайову задачу:

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \quad (1)$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha, \quad (2)$$

де  $Z(t)$  є невідомою оператор-функцією з простору  $C([a; b]; H_1)$ ;  $A(t), B(t) \in C([a; b]; L(H_1, H_2))$ ; оператор-функція  $\Phi(t)$  є шляхом у просторі лінійних та обмежених операторів  $L(H_1, H_2)$ .  $\Phi(t)$  – неперервне відображення відрізка  $[a; b]$  у простір  $L(H_1, H_2)$ , тобто  $\Phi(t) \in C([a; b]; L(H_1, H_2))$ ; лінійний обмежений оператор  $\ell$  переводить оператор-функцію  $Z(t)$  у простір Гільберта  $H_2$ , тобто  $\ell : C([a; b]; L(H_1)) \rightarrow H_2$ ;  $\alpha$  – елемент з простору  $H_2$ .

Серед розв'язків крайової задачі (1), (2) для рівняння Ляпунова шукається такий розв'язок, який мінімізує функціонал  $J[C]$ :

$$J[C] = \left\| \frac{1}{b-a} \int_a^b Z(t, C) dt - H \right\| \rightarrow \min_c, \quad (3)$$

де  $H$  – постійний обмежений оператор.

Матричне рівняння такого вигляду відіграє важливу роль у теорії лінійних Гамільтонових систем, варіаційному численні та оптимальному керуванні і широко використовується в теорії ігор [5].

У праці [6] отримано критерій розв'язності періодичної крайової задачі для матричного рівняння Ріккати в термінах жорданової структури матриць  $A$  та  $B$  й у нерегулярному випадку. У праці [11] досліджено крайову задачу на керованість для рівняння Ляпунова в просторі Гільберта.

### ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ, ЯКИЙ МІНІМІЗУЄ ФУНКЦІОНАЛ У ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

Розглянемо лінійний оператор  $K_\tau^t$ , який переводить оператор-функцію  $\Phi(t)$  з простору  $C([a; b]; L(H_1, H_2))$  в оператор-функцію  $K_\tau^t[\Phi] \in C([a; b] \times [a; b]; L(H_1, H_2))$  вигляду

$$K_\tau^t[\Phi] = X(t)X^{-1}(\tau)\Phi(\tau)V^{-1}(\tau)V(t), \quad (4)$$

де  $X(t)$ ,  $V(t)$  – еволюційні оператори таких операторно-диференціальних рівнянь

$$\dot{H}(t) = A(t)H(t), \quad H(0) = I,$$

$$\dot{Y}(t) = B(t)Y(t), \quad Y(0) = I,$$

відповідно.

За допомогою цього оператора можна представити загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$Z(t) = K_a^t[M] + \int_a^t K_\tau^t[\Phi] d\tau, \quad (5)$$

де довільний оператор  $M \in L(H_1, H_2)$ . Позначимо через  $\tilde{Z}(t)$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1), який має вигляд:

$$\tilde{Z}(t) = \int_a^t K_\tau^t[\Phi] d\tau. \quad (6)$$

Підставимо (5) у крайову умову (2) та отримаємо таке операторне рівняння відносно оператора  $M$ :

$$LM = \alpha - \ell \int_a^t K_\tau^t[\Phi] d\tau, \quad (7)$$

де оператор  $L$  діє за правилом  $LM = \ell K_a^t[M]: L(H_1, H_2) \rightarrow H_2$ . Покажемо, що за певних додаткових умов на оператор  $L$ , дане рівняння має розв'язки.

Відповідно, розв'язки рівняння (7) існують тоді й тільки тоді [8], коли

$$P_{N(L^*)} \left[ \alpha - \ell \int_a^t K_\tau^t[\Phi] d\tau \right] = 0. \quad (8)$$

Тут  $P_{N(L^*)}$  – проектор на ядро оператора  $L^*$ , спряженого до оператора  $L$ . Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (7)  $\left[ \alpha - \ell \int_a^{\cdot} K_{\tau}[\Phi] d\tau \right] \in R(L)$  множині значень оператора  $L$ .

За виконання умови розв’язності (8), операторне рівняння (7) має множину розв’язків вигляду:

$$M = L^+ \left[ \alpha - \ell \int_a^{\cdot} K_{\tau}[\Phi] d\tau \right] + P_{N(L)} C, \tag{9}$$

де  $C$  – довільний лінійний обмежений оператор ( $C \in L(H_1, H_2)$ ),  $P_{N(L)}$  – проектор на ядро оператора  $L$ . Підставивши оператор  $M$  в (5), отримуємо загальний розв’язок (1), (2) у вигляді:

$$Z(t, C) = K_a^t [P_{N(L)} C] + G([\Phi, \alpha])(t), \tag{10}$$

де узагальнений оператор Гріна визначається так

$$G([\Phi, \alpha])(t) = \int_a^t K_{\tau}^t[\Phi] d\tau - K_a^t \left[ \ell \int_a^{\cdot} K_{\tau}[\Phi] d\tau \right] + K_a^t [L^+ \alpha] \tag{11}$$

**Теорема 1.** Нехай оператор  $L$  є узагальнено-оборотним. Тоді крайова задача (1),(2) має розв’язки тоді й тільки тоді, коли  $R(L) = \overline{R(L)}$  й виконується умова (8). За виконання умови (8) розв’язки крайової задачі (1),(2) мають вигляд (10) для довільного оператора  $C \in L(H_1, H_2)$ .

Серед розв’язків (10) крайової задачі (1), (2) для рівняння Ляпунова знайдемо той розв’язок, який мінімізує функціонал (3)  $J[C] = \left\| \frac{1}{b-a} \int_a^b Z(t, C) dt - H \right\| \rightarrow \min_C$ , де  $H$  – постійний

обмежений оператор. Позначимо через  $\bar{Z}(C) = \frac{1}{b-a} \int_a^b Z(t, C) dt$ . Якщо  $\min_C$  досягається, то відповідно, умова (3) еквівалентна знаходженню розв’язків рівняння:

$$\bar{Z}(C) = H. \tag{12}$$

Якщо [7]  $P_{N(\bar{Z}^*)} H = 0$ , то  $\inf_{[a;b]} C = 0$  і досягається на

$$C = \bar{Z}^+ H. \tag{13}$$

Якщо  $P_{N(\bar{Z}^*)} H \neq 0$ , то рівняння (12) нерозв’язне, однак воно завжди має псевдорозв’язок  $C^+$ , який мінімізує відхил  $\|\tilde{Z}(C) - H\|$  у розв’язку рівняння (12) і серед усіх  $C$ , на яких відхил  $\|\tilde{Z}(C) - H\|$  досягає найменшого значення. Рівняння (12) завжди має один і тільки один найкращий псевдорозв’язок  $C^+$  у сенсі найменших квадратів. Незважаючи на те, що псевдорозв’язок єдиний, розв’язок рівняння (12) у значенні найменших квадратів має вигляд:

$$C^+ = \bar{Z}^+ H + P_{N(Q)} \bar{C}. \tag{14}$$

## ПРИКЛАД

Нехай задана крайова задача для матричного диференціального рівняння типу Ляпунова вигляду (1), (2) з компонентами:  $A = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right\}$   $B = \text{diag} \{0, 1, 0, 1\}$ ,

$\Phi(t) = \text{diag} \left\{ e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t} \right\}$ ,  $\alpha = \text{diag} \{ \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{44} \}$  – діагональні матриці; крайова умова

має вигляд –  $\ell Z(\cdot) = Z(0) - Z(\ln 16) = \alpha$ ;  $Z = Z(t)$  є невідомою матрицею.

Еволюційні оператори  $X(t)$ ,  $V(t)$  дорівнюють:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{3}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{4}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{1}{5}t} \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Матриця  $K'_\tau[\Phi] = X(t)X^{-1}(t)\Phi(\tau)V^{-1}(t)V(t)$  дорівнює

$$K'_\tau[\Phi] = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{4}{3}t + \frac{1}{6}\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{6}{5}t + \frac{3}{10}\tau} \end{pmatrix}.$$

За допомогою оператора  $K'_\tau[\cdot]$  можна представити загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$Z(t) = K'_0[M] + \int_0^t K'_\tau[\Phi] d\tau$ , де  $M$  – матриця з невідомими компонентами, які треба знайти.

Оскільки, за умовою задачі  $A$  і  $B$  – діагональні матриці, то для зручності будемо шукати матрицю  $M$  у вигляді діагональної матриці  $M = \text{diag} \{m_{11}, 0, m_{33}, 0\}$ . Знайдемо оператор  $K'_0[M]$  за формулою (4):

$$K'_0[M] = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\tau} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\tau} m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор  $L$  діє за правилом  $LM = \ell K'_a[M]$ :

$$L = \begin{pmatrix} -3m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цей оператор немає оберненого  $L^{-1}$ , але існує псевдообернений оператор

$$L^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3m_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3m_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проектори  $P_{N(L)}$  і  $P_{N(L^*)}$  у цьому випадку будуть дорівнювати:  $P_{N(L)} = \text{diag}\{0,1,0,1\}$ ,  $P_{N(L^*)} = \text{diag}\{0,1,0,1\}$ .

Умова розв'язності (8) виконується при  $\alpha_{22} = -384 + 192\sqrt[3]{2}$ ,  $\alpha_{44} = -\frac{640}{3} + \frac{160}{3}\sqrt[5]{16}$  та довільних  $\alpha_{11} \in R$  і  $\alpha_{33} \in R$ . Отже, загальний розв'язок рівняння (1) можна виписати у вигляді:

$$Z(t, C) = \begin{pmatrix} -\frac{e^{\frac{1}{2}t}(\alpha_{11} + 16 \ln 2)}{3m_{11}} + e^{\frac{1}{2}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}e^{\frac{4}{3}t} - 6e^{\frac{4}{3}t} + 6e^{\frac{3}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^{\frac{1}{4}t}(\alpha_{33} + 8)}{m_{33}} - 4e^{\frac{1}{4}t} + 4e^{\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}e^{\frac{6}{5}t} - \frac{10}{3}e^{\frac{6}{5}t} + \frac{10}{3}e^{\frac{3}{2}t} \end{pmatrix}$$

Підставивши знайдену матрицю  $Z(t, C)$  в крайову умову, з'ясуємо, що  $m_{11} = 1$ ,  $m_{33} = 1$ . Оскільки  $\alpha_{11}$  і  $\alpha_{33}$  довільні, то покладемо  $\alpha_{11} = \alpha_{33} = 0$ . Отже, функція  $Z(t, C)$  дорівнює:

$$Z(t, C) = \begin{pmatrix} -\frac{16}{3}e^{\frac{1}{2}t} \ln 2 + e^{\frac{1}{2}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}e^{\frac{4}{3}t} - 6e^{\frac{4}{3}t} + 6e^{\frac{3}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12e^{\frac{1}{4}t} + 4e^{\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}e^{\frac{6}{5}t} - \frac{10}{3}e^{\frac{6}{5}t} + \frac{10}{3}e^{\frac{3}{2}t} \end{pmatrix}.$$

Серед розв'язків  $Z(t, C)$  крайової задачі (1), (2) знайдемо такий розв'язок, який мінімізує функціонал  $J[C]$  вигляду (3). У ролі матриці  $H$  візьмемо діагональну матрицю  $H = \text{diag}\{h_{11}, h_{22}, h_{33}, h_{44}\}$ .

$$J[C] = \left\| \frac{1}{b-a} \int_a^b Z(t, C) dt - H \right\| =$$

$$= \left\| \text{diag} \left\{ -\frac{3}{\ln 2} - h_{11}, \frac{1}{4 \ln 2} \left( -\frac{3}{4}c_{22} + \frac{513}{2} + 24c_{22}\sqrt[3]{2} - 144\sqrt[3]{2} \right) - h_{22}, \right. \right.$$

$$\left. -\frac{6}{\ln 2} - h_{33}, \frac{1}{4 \ln 2} \left( -\frac{5}{6}c_{44} + \frac{1285}{9} + \frac{40}{3}c_{44}\sqrt[5]{16} - \frac{400}{9}\sqrt[5]{16} \right) - h_{44} \right\} \rightarrow \min_c.$$

Застосовуючи метод найменших квадратів, можна знайти  $c_{22}$  і  $c_{44}$ . У цьому випадку маємо:

$$c_{22} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8h_{22} \ln 2 + 282\sqrt[3]{2} - 5113}{32\sqrt[3]{2} - 1},$$

$$c_{44} = -\frac{2}{15} \cdot \frac{576h_{44}\sqrt[5]{16} \ln 2 - 20960\sqrt[5]{16} + 12800\sqrt[5]{8} - 36h_{44} \ln 2 + 1285}{32\sqrt[5]{16} - 512\sqrt[5]{8} - 1}.$$

Узявши, наприклад,  $h_{22} = h_{44} = 1$ , маємо, що при  $c_{22} \approx -2,451794702$  і  $c_{44} \approx -2,797995711$  розв'язок  $Z(t, C)$  крайової задачі (1), (2) мінімізує функціонал  $J[C]$ .

### ВИСНОВКИ

У дослідженні розглянута задача оптимізації крайової задачі для рівняння Ляпунова в просторі Гільберта. Ця теорія працює як у критичному так й у регулярному випадку [7, 8].

Показано, що для дослідження функціоналів на мінімум можна застосовувати теорію псевдообертання [7, 8]. Запропонований підхід можна застосовувати до дослідження крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь загального типу.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Бойчук О. А., Кривошея С. А. Критерій розв'язності матричних рівнянь типу Ляпунова. *Укр. мат. журн.* 1998. Т. 50, № 8. С. 1021–1026.
2. Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва: Наука, 1970. 534 с.
3. Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова. *Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна, серія Математика, прикладна математика і механіка.* 2014. № 1120. С. 85–94.
4. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Керованість крайових задач для рівнянь Ляпунова в просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2015. № 3. С. 212–220.
5. Брайсон А., Ю-ши Хо. Прикладная теория оптимального управления. Москва: Мир, 1972. 544 с.
6. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. A Critical Periodic Boundary-Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential Equations.* 2001. Vol. 37, № 4. P. 464–471.
7. Бойчук А. А., Журавлёв В. Ф., Самойленко А. М. Обобщённо-обратные операторы и неётеровы краевые задачи. Киев: Институт математики НАНУ, 1995. 320 с.
8. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. II edition, De Gruyter, 2016. 296 p.
9. Bhatia Rajendra. A note on the Lyapunov equation. *Linear algebra and its applications.* 1997. Vol. 259. P. 71–76.
10. Bondarev A. N., Laptinskii V. N. Multipoint Boundary-Value Problem for the Lyapunov Equation in the Case of Strong Degeneration of the Boundary Conditions. *Differential Equations.* 2011. Vol. 47, № 6. P. 778–786.
11. Panasenko E. V., Pokutnyi O. O. Boundary-value problems for the Lyapunov equation in Banach spaces. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. Vol. 223, № 3. P. 298–304.

### REFERENCES

1. Boychuk, O. A. & Krivosheya, S. A. (1998). Criterion of the solvability of the matrix equations of Lyapunov type. *Ukrainskyu matematychnyy zhurnal*, Vol. 50, No. 8, pp. 1021-1026 (in Russian).
2. Kreyn, M. G. (1970). Stability of solutions of differential equations in a Banach space. Moscow: Nauka.
3. Chuyko, S. M. (2014). About solutions of the matrix Lyapunov equations. *Visnik HNU imeni V.N. Karazina, seriya Matematika, prikladna matematika i mehanika*, No. 1120, pp. 85-94 (in Russian).

4. Panasenko, E. V. & Pokutniy, O. O. (2015). Controllability of boundary-value problems for Lyapunov equations in Hilbert space. Visnik Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki, No. 3, pp. 212-220 (in Ukrainian).
5. Brayson, A. (1972). Applied optimal control theory. Moskow: Mir.
6. Boychuk, O. A. & Krivosheya, S. A (2001). A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation. Differential Equations, Vol.37, No. 4, pp. 464-471.
7. Boichuk, A. A., Zhuravlyev, V. F. & Samoilenko, A. M. (1995). Generalized-inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Kyiv: Institut matematiki NANU.
8. Boichuk, A. A. & Samoilenko, A. M. (2016). Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. II edition, De Gruyter.
9. Bhatia Rajendra, (1997). A note on the Lyapunov equation. Linear algebra and its applications. No. 259, pp. 71-76.
10. Bondarev, A. N. & Laptinskii, V. N. (2011). Multipoint boundary-value problem for the Lyapunov equation in the case of strong degeneration of the boundary conditions. Differential Equations, Vol. 47, No. 6, pp. 778-786.
11. Panasenko, E. V. & Pokutnyi, O. O. (2017). Boundary-value problems for the Lyapunov equation in Banach spaces. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 223, No. 3, pp. 298-304.

УДК 539.3

## **МІШАНА ЗАДАЧА ФРИКЦІЙНОГО КОНТАКТУ КОАКСІАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ТА ПРУЖНОГО ЗАПОВНІЮВАЧА**

Попадюк І. Й., к. ф.-м. н., старший науковий співробітник

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 3 б, м. Львів, 79060, Україна*

igorpopadyuk60@gmail.com

З метою розробки інженерної методики розрахунку оболонкових бурових амортизаторів, проведено механіко-математичне моделювання оболонкового пружного елемента. Сформульовано та розв'язано мішану контактну задачу. Визначено критерій розташування зон проковзування та зчеплення на поверхнях контакту.

*Ключові слова: оболонка, заповнювач, тертя, контакт, моделювання, проковзування, зчеплення.*

## **СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК И УПРУГОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ**

Попадюк И. И., к. ф.-м. н., старший научный сотрудник

*Институт прикладных проблем механики и математики  
им. Я. С. Подстригача НАН Украины,  
ул. Наукова, 3 б, г. Львов, 79060, Украина*

С целью разработки инженерной методики расчёта оболочечных буровых амортизаторов, проведено механико-математическое моделирование оболочечного упругого элемента. Сформулирована и решена смешанная контактная задача. Определён критерий размещения зон проскальзывания и сцепления на поверхностях контакта.

*Ключевые слова: оболочка, заполнитель, трение, контакт, моделирование, проскальзывание, сцепление.*

## MIXED PROBLEM OF FRICTIONAL INTERACTION OF A COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS WITH AN ELASTIC FILLER

Popadyuk I. Y., Ph.D. in Physics and Maths, senior scientific co-worker

*Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics,  
Ukrainian National Academy of Sciences,  
Naukova str., 3 b, Lviv, 79060, Ukraine.*

In the contemporary industry, a significant role is played by vibrational processes. The operation of all machines and mechanisms without exception is directly connected with the appearance of vibrations. In most cases, vibrations decrease the strength, reliability, and durability of industrial machines, mechanisms, and structures and exert harmful influence on the health of the personnel. Thus, the problem of vibroinsulation proves to be quite urgent both from the viewpoint of engineering and for the labor protection. One of the ways used for the solution of the formulated problem is connected with the application of vibroprotecting devices, such as shock absorbers, dampers, dynamic vibration absorbers, etc. This is why the research and design works and theoretical investigations in the field of development of new means of vibroprotection and methods for their numerical analyses are of crucial importance. Note that new promising vibroinsulators were designed at the Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics on the basis of a new type of vibration-protecting devices based on the so-called shell elastic elements. As the main distinctive feature of structures of this type, we can mention the application of thin-wall elements (shells, plates, and bars) as the principal bearing and actuating elements. From the viewpoint of design, these are deformable shell systems with dry friction. In the mechano-mathematical modeling of the behavior of elastic elements under (generally speaking, nonmonotonic) loading, we get a class of nonlinear nonconservative mixed contact problems of the frictional interaction of thin shells with deformable fillers. Many boring devices of vibration insulation which are used for drilling of oil and gas wells are included an internal shell assigned for various technological requirements. That is why, the necessity of mechanical and mathematical modelling of system of a coaxial cylindrical shells divided by the elastic filler is existed. The mixed problem of frictional interaction in this system has been investigated in presented work with allowance for the Coulomb friction. The analytical description of the stress-strain state has been obtained by using the applied models. The obtained results make it possible to extend the range of applicability of the methods used for the numerical analyses of shell vibroinsulators and perform a more accurate analysis of the influence of the elastic characteristics of the materials of the shells and the filler on durability of the analyzed system.

*Key words: shell, filler, friction, interaction, modelling, sliding, adhesion.*

### ВСТУП

Буріння нафтових і газових свердловин пов'язане з виникненням значних вібрацій. В Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України розроблені перспективні конструкції бурових амортизаторів, пружні елементи яких є оболонковими системами з пружним заповнювачем [1]. Детальний огляд публікацій, присвячених дослідженню динамічних систем з різноманітними законами тертя, здійснено у статті [2]. При механіко-математичному моделюванні поведінки пружних елементів виникає клас конструктивно нелінійних неконсервативних мішаних контактних задач про фрикційну взаємодію тонких оболонок з деформівним заповнювачем. Загальні підходи до формулювання та розв'язування таких задач, розроблені для спрощених одновимірних моделей, представлено в монографії [3]. Постановки, методи і розв'язки деяких задач цього класу для циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем та результати експериментальних досліджень подано в роботах авторів [4-6]. Наявність у багатьох бурових засобах віброзахисту внутрішньої оболонки (так званого «ствола»), призначеної для різноманітних технологічних потреб, диктує необхідність дослідження системи коаксіальних циліндричних оболонок, розділених пружним деформівним заповнювачем (рис. 1), в умовах фрикційного контакту.



ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

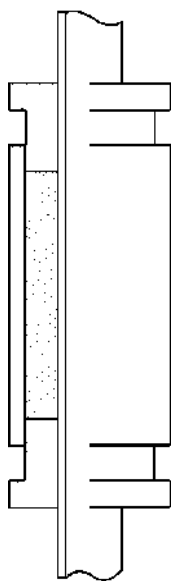


Рис. 1

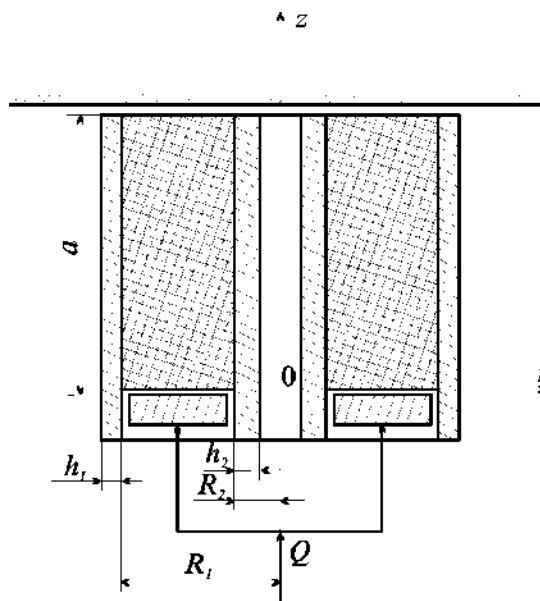


Рис. 2

Симетрія конструкції дозволяє розглянути половину системи (рис. 2). Маємо пружний порожнистий циліндр зовнішнього  $R_1$  і внутрішнього  $R_2$  радіусів і довжини  $a$ , який заповнює простір між коаксіально встановленими зовнішньою (радіуса  $R_1$  і товщини  $h_1$ ) і внутрішньою (радіуса  $R_2$  і товщини  $h_2$ ) тонкими оболонками. На один із торців циліндра через абсолютно жорсткий гладкий поршень передається зовнішнє немонотонне за часом навантаження  $Q$ ; другий торець циліндра, разом із оболонками, гладко впирається в жорстку перепону. Заповнювач і оболонки взаємодіють із сухим тертям.

Дослідження проводимо у вказаних на рис. 2 циліндричних координатах. Крайові умови в напруженнях для порожнистого нескінченного циліндра будуть

$$\sigma_r|_{r=R_i} = \sigma_i, \quad \tau_{rz}|_{r=R_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

Тут  $\sigma_i, \tau_i$  – задані на поверхнях  $r = R_i, i = 1, 2$  нормальні і дотичні напруження.

Модельні співвідношення для порожнистого циліндра отримаємо, вважаючи, що в кожному поперечному ( $z = const$ ) перерізі заповнювача переміщення визначаються як суперпозиція розв’язків задачі Ламе про радіальний стиск порожнистого циліндра і задачі про осьовий стиск стержня при дії дотичних напружень на циліндричних поверхнях. Маємо

$$u_r = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left( \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^2 R_2^2}{r} (1 + \nu) + (\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2) (1 - \nu) r - \nu (R_1^2 - R_2^2) r \sigma_z \right), \tag{2}$$

$$u_z = \frac{-2\nu(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{E(R_1^2 - R_2^2)} (z - a) + \frac{1}{E} (z - a) \sigma_z. \tag{3}$$

Рівняння рівноваги заповнювача має вигляд

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0. \tag{4}$$

Запишемо співвідношення (2) на поверхнях  $r = R_i, i = 1, 2$ , продиференціюємо (3) по  $z$  і усереднимо рівняння рівноваги (4) по поперечному перерізу, одержимо необхідні початкові співвідношення для заповнювача, записані у зручному для подальшого дослідження вигляді

$$\frac{w_1}{R_1} = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left( [R_2^2(1+\nu) + R_1^2(1-\nu)]\sigma_1 - 2R_2^2\sigma_2 \right) - \frac{\nu}{E}\sigma_\zeta; \quad (5)$$

$$\frac{w_2}{R_2} = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \times \left( -[R_1^2(1+\nu) + R_2^2(1-\nu)]\sigma_2 + 2R_1^2\sigma_1 \right) - \frac{\nu}{E}\sigma_\zeta; \quad (6)$$

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{2\nu(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{E(R_1^2 - R_2^2)} + \frac{1}{E}\sigma_\zeta; \quad (7)$$

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} (R_1\tau_1 - R_2\tau_2) = 0. \quad (8)$$

Тут  $\zeta = z/a \in [0, 1]$ ;  $w_i$  – радіальні переміщення на поверхнях  $r = R_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача.

Пружну рівновагу оболонок описуємо співвідношеннями безмоментної теорії: рівняння рівноваги

$$\frac{dN_\zeta^{(i)}}{d\zeta} + (-1)^i a\tau_i = 0; \quad N_\beta^{(i)} = (-1)^i R_i\sigma_i; \quad (9)$$

фізичні співвідношення (закон Гука)

$$\varepsilon_\zeta^{(i)} = \frac{1}{a} \frac{du_i}{d\zeta} = \frac{1}{E_i h_i} [N_\zeta^{(i)} - \nu_i N_\beta^{(i)}]; \quad \varepsilon_\beta^{(i)} = \frac{w^{(i)}}{R_i} = \frac{1}{E_i h_i} [N_\beta^{(i)} - \nu_i N_\zeta^{(i)}], \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Тут:  $N_\zeta^{(i)}$ ,  $N_\beta^{(i)}$  – мембранні зусилля;  $u_i$ ,  $w^{(i)}$  – осеві та радіальні переміщення оболонок;  $E_i$ ,  $\nu_i$  – пружні характеристики їх матеріалів;  $\sigma_i$ ,  $\tau_i$  – нормальні і дотичні контактні напруження, задані на внутрішній поверхні першої і на зовнішній поверхні другої оболонок.

На торцях заповнювача і оболонок виконуються умови

$$\sigma_\zeta(0) = -P \equiv -\frac{Q}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}, \quad N_\zeta^{(i)}(0) = 0; \quad (11)$$

$$u(1) = 0, \quad u_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

де  $u$  – осеве переміщення заповнювача.

Фрикційну взаємодію оболонок і заповнювача описуємо співвідношеннями одностороннього контакту

$$w = w^{(i)}, \quad \sigma_i < 0, \quad i = 1, 2, \quad \zeta \in [0, 1] \quad (13)$$

і законом сухого тертя, записаним у такій формі:

область проковзування на обидвох поверхнях контакту

$$\tau_i = (-1)^j f_i \sigma_i, \quad u > u_i, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad \zeta \in [0, \alpha_k]; \quad (14)$$

область проковзування-зчеплення (проковзування на одній поверхні, зчеплення – на другій)

$$u = u_k, \quad u > u_m, \quad |\tau_k| < -f_k \sigma_k, \quad \tau_m = (-1)^k f_m \sigma_m, \quad k \neq m, \quad \zeta \in [\alpha_k, \alpha_m]; \quad (15)$$

область зчеплення на обидвох поверхнях контакту

$$u = u_i, \quad |\tau_i| < -f_i \sigma_i, \quad i = 1, 2, \quad \zeta \in (\alpha_m, 1). \quad (16)$$

Тут:  $f_i$  – коефіцієнти тертя на поверхнях  $r = R_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\alpha_k$  – координата кінця області загального проковзування;  $\alpha_m$  – координата початку області загального зчеплення. Координати точок будемо знаходити, задовольняючи умови неперервності осьових напружень. Позначимо

$$\sigma^{(3)} = \sigma_\zeta; \quad \sigma^{(s)} = \frac{N_\zeta^{(s)}}{R_s}, \quad s = 1, 2.$$

Умови неперервності в цих позначеннях будуть

$$\sigma^{(s)}(\alpha_k - 0) = \sigma^{(s)}(\alpha_k + 0), \quad s = \overline{1, 3}; \quad (17)$$

$$\sigma^{(s)}(\alpha_m - 0) = \sigma^{(s)}(\alpha_m + 0), \quad s = \overline{1, 3}. \quad (18)$$

Записаний у формі (14)-(16) закон сухого тертя потребує деяких пояснень. Індекс  $k$  тут може приймати значення 1 або 2 (індекс  $m$  відповідно значення 2 або 1) залежно від того, на якій із контактуючих поверхонь швидше досягається початок області зчеплення. Наприклад, якщо  $k = 1$ , то  $m = 2$ , і в області проковзування – зчеплення цей варіант буде означати зчеплення на зовнішній поверхні заповнювача і проковзування на внутрішній. Якщо, навпаки,  $m = 1$ ,  $k = 2$ , то маємо другий варіант: зчеплення на внутрішній поверхні заповнювача і проковзування на зовнішній. Критерій для вибору варіанта в явному вигляді безпосередньо в процесі розв’язування задачі отримати не вдалося. Знаходження координат точок  $\alpha_k$ ,  $\alpha_m$  розділу областей пов’язане з умовами (17), (18) неперервності осьових напружень, що призводить до числового пошуку коренів трансцендентних рівнянь. Отже, і критерій вибору варіанта буде отриманий у результаті розв’язування трансцендентних рівнянь.

Проінтегруємо рівняння рівноваги (8), (9). З урахуванням крайових умов (11), маємо

$$\sigma_\zeta = -P - \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_0^\zeta (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta; \quad (19)$$

$$N_\zeta^{(i)} = (-1)^j a \int_0^\zeta \tau_i d\zeta, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (20)$$

Підставляючи вирази для мембранних зусиль (9), (20) у закон Гука (10), отримуємо осьові деформації і радіальні переміщення оболонок через невідомі контактні напруження

$$\varepsilon_\zeta^{(i)} = (-1)^j \frac{R_i}{E_i h_i} \left( v_i \sigma_i + \frac{a}{R_i} \int_0^\zeta \tau_i d\zeta \right), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j; \quad (21)$$

$$\frac{w^{(i)}}{R_i} = (-1)^i \frac{R_i}{E_i h_i} \left( \sigma_i + v_i \frac{a}{R_i} \int_0^\zeta \tau_i d\zeta \right), \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Підставляючи вираз (19) для осьових напружень заповнювача в формулу (7), отримуємо осьові деформації заповнювача

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{1}{E} \left[ \frac{2\nu(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} + P + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_0^\zeta (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta \right]. \quad (23)$$

Введемо позначення деяких безрозмірних величин

$$\varepsilon_i = \frac{ER_i}{E_i h_i}, \quad r_i^2 = \frac{R_i^2}{R_1^2 - R_2^2}, \quad l_i = \frac{a}{R_i}, \quad \chi_i = (-1)^i (1 + \nu) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2.$$

Підставляючи вирази для радіальних переміщень заповнювача (5), (6) і оболонок (10) в умови одностороннього контакту (13), отримуємо

$$\begin{aligned} (2r_i^2 + \chi_i)\sigma_i - 2r_j^2\sigma_j + l_i(2\nu r_i^2 + \nu_i \varepsilon_i) \int_0^\zeta \tau_i d\zeta - 2\nu l_j r_j^2 \int_0^\zeta \tau_j d\zeta + (-1)^j \nu P = 0, \\ i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad \zeta \in (0, 1). \end{aligned} \quad (24)$$

### ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ

Тепер перейдемо до запису ключових рівнянь і отримання розв'язків контактної задачі окремо в кожній області.

**Область проковзування на обидвох поверхнях контакту**  $\zeta \in [0, \alpha_k)$ . Беручи до уваги закон Кулона (14), із рівнянь (22) отримуємо

$$\begin{aligned} (2r_i^2 + \chi_i)\sigma_i - 2r_j^2\sigma_j + f_i l_i (2\nu r_i^2 + \nu_i \varepsilon_i) (-1)^j \int_0^\zeta \sigma_i d\zeta - \\ - 2\nu f_j l_j r_j^2 (-1)^i \int_0^\zeta \sigma_j d\zeta + (-1)^j \nu P = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (25)$$

Продиференціюємо рівняння (25) і приведемо отриману систему звичайних диференціальних рівнянь до нормального вигляду

$$\frac{d\sigma_i}{d\zeta} = \sum_n a_{in} \sigma_n; \quad i, n = 1, 2. \quad (26)$$

Крайові умови для системи (26) отримаємо з рівняння (25) при  $\zeta = 0$

$$\sigma_i(0) = (-1)^j \frac{\chi_j \nu}{\chi_o} P; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (27)$$

У формулах (26), (27) введені позначення

$$\begin{aligned} \chi_o &= -\chi_1 \chi_2 - 2r_1^2 \chi_2 - 2r_2^2 \chi_1; \\ a_{nm} &= (-1)^n f_m l_m \left[ (2\nu r_m^2 + \nu_m \varepsilon_m) \chi_n + 2\nu_m r_n^2 \varepsilon_m \right] / \chi_o; \\ a_{nm} &= (-1)^n 2r_m^2 f_m l_m (\nu_m \varepsilon_m - \nu \chi_m) / \chi_o; \quad n, m = 1, 2; \quad n \neq m. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі (26), (27) має такий вигляд:

$$\sigma_i = P \sum_n K_{in} e^{\lambda_n \zeta}, \quad \tau_i = (-1)^j f_i P \sum_n K_{in} e^{\lambda_n \zeta}; \quad i, j, n = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (28)$$

Тут введені позначення

$$\lambda_n = \left[ a_{11} + a_{22} + (-1)^n \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{21}a_{12}} \right] / 2;$$

$$K_{in} = \left( -\frac{a_{11} - \lambda_n}{a_{12}} \right)^{\delta_{2i}} (a_{11}\chi_2 - a_{12}\chi_1 - \lambda_n\chi_2)(-1)^m \frac{v}{\chi_o(t_1 - t_2)};$$

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $m, n, i = 1, 2$ ;  $m \neq n$ .

Напружено-деформований стан системи в області проковзування визначається підстановкою знайдених контактних напружень у вихідні співвідношення. Для радіальних переміщень і осьових деформацій на основі формул (21)-(23) маємо

$$\frac{w_i}{R_i} = \frac{PR_i}{E_i h_i} \sum_n K_{in} \left[ (-1)^i e^{\lambda_n \zeta} - \frac{v_i f_i l_i}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) \right], \tag{29}$$

$$\varepsilon_\zeta^{(i)} = \frac{PR_i}{E_i h_i} \sum_n K_{in} \left[ (-1)^j v_i e^{\lambda_n \zeta} + \frac{f_i l_i}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) \right], \tag{30}$$

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{P}{E} \left\{ 1 + 2 \sum_i \sum_n r_i^2 K_{in} \left[ v (-1)^j e^{\lambda_n \zeta} + \frac{f_i l_i}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) \right] \right\}; \quad i, j, n = 1, 2; \quad i \neq j. \tag{31}$$

Осьові напруження в заповнювачі і осьові мембранні зусилля в оболонках будуть

$$\sigma_\zeta = -P \left\{ 1 + 2 \sum_n \sum_m f_m l_m r_m^2 K_{mn} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) / \lambda_n \right\}; \quad \frac{N_\zeta^{(i)}}{R_i} = P f_i l_i \sum_n K_{in} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) / \lambda_n;$$

$$i, m, n = 1, 2. \tag{32}$$

Запишемо осьові напруження (32) у кінці області проковзування

$$\sigma^{(s)}(\alpha_k) = \sum_{n=1}^3 g_{sn} e^{\lambda_n \alpha_k}, \quad s = \overline{1, 3}. \tag{33}$$

Тут  $\lambda_3 = 0$ ;

$$g_{sn} = P \left\{ \begin{array}{ll} f_s l_s K_{sn} / \lambda_n; & n = 1, 2 \\ -f_s l_s \sum_r K_{sr} / \lambda_r; & n = 3 \end{array} \right\}, \quad r, s = 1, 2;$$

$$g_{3n} = -P \left\{ \begin{array}{ll} 2 \sum_m f_m l_m r_m^2 K_{mn} / \lambda_n, & n = 1, 2 \\ 1 - 2 \sum_r \sum_m f_m l_m r_m^2 K_{mr} / \lambda_r, & n = 3 \end{array} \right\}, \quad r, m = 1, 2.$$

**Область проковзування-зчеплення**  $\zeta \in [\alpha_k, \alpha_m]$ .

Як уже зазначалось у коментарях до форми запису закону сухого тертя, можливі два варіанти граничних умов у цій області. Для того, щоб уникнути зайвої громіздкості, дослідження проводимо одразу для обидвох варіантів.

Співвідношення (19), (20) для осьових напружень і зусиль у розглядуваній області мають вигляд:

$$\sigma_\zeta = \sigma_\zeta(\alpha_k) - \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_k}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta;$$

$$N_{\zeta}^{(i)} = N_{\zeta}^{(s)}(\alpha_k) + (-1)^j a \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_i d\zeta, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (34)$$

Умови одностороннього контакту (13) з урахуванням закону тертя (15) і співвідношень (34) будуть:

$$\begin{aligned} & (2r_i^2 + \chi_i) \sigma_i - 2r_j^2 \sigma_j + l_i (2vr_i^2 + v_i \varepsilon_i) \int_{\alpha_k}^{\zeta} [\delta_{ik} \tau_i + \delta_{jk} (-1)^j f_i \sigma_i] d\zeta - \\ & - 2vl_j r_j^2 \int_{\alpha_k}^{\zeta} [\delta_{jk} \tau_j + \delta_{ik} (-1)^i f_j \sigma_j] d\zeta = \\ & = (-1)^j \left[ v \sigma_{\zeta}(\alpha_k) - v_i \varepsilon_i N_{\zeta}^{(s)}(\alpha_k) / R_i \right]; \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (35)$$

Оскільки на торці системи, який гладко впирається в жорстку перепону, виконуються умови (12), то у формулюваннях закону тертя (15) умови рівності осьових переміщень можна замінити умовами сумісності осьових деформацій. Відповідно, маємо

$$\varepsilon_{\zeta} = \varepsilon_{\zeta}^{(k)}, \quad \zeta \in (\alpha_k, \alpha_m). \quad (36)$$

Осьові деформації в розглядуваній області отримаємо, підставляючи співвідношення для осьових напружень і зусиль (34) у вихідні формули (7), (10)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\zeta} &= -\frac{1}{E} \left[ \frac{2v(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} - \sigma_{\zeta}(\alpha_k) + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_k}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta \right]; \\ \varepsilon_{\zeta}^{(k)} &= \frac{R_k}{E_k h_k} \left( \frac{N_{\zeta}^{(k)}(\alpha_k)}{R_k} - (-1)^k \left( v_k \sigma_k + \frac{a}{R_k} \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_k d\zeta \right) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Підставляючи отримані вирази (37) в умову (36), маємо

$$\begin{aligned} & (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \sigma_k - 2vr_m^2 \sigma_m + l_k (2r_k^2 + \varepsilon_k) \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_k d\zeta - 2l_m r_m^2 (-1)^k f_m \int_{\alpha_k}^{\zeta} \sigma_m d\zeta = \\ & = (-1)^m \left[ \sigma_{\zeta}(\alpha_k) - \varepsilon_k N_{\zeta}^{(k)}(\alpha_k) / R_k \right], \quad k \neq m. \end{aligned} \quad (38)$$

Отже, отримана система трьох ключових рівнянь – два рівняння (35) і одне (38) (залежно від варіанта  $k$  – фіксоване число).

Виключимо з двох рівнянь (35) з допомогою формул (38) невідому величину  $\int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_k d\zeta$ ,

продиференціюємо знайдені співвідношення і зведемо отриману систему звичайних диференціальних рівнянь до нормального вигляду

$$\frac{d\sigma_i}{d\zeta} = \sum_n b_{in}^k \sigma_n; \quad i = 1, 2. \quad (39)$$

Тут введено позначення

$$b_{in}^k = \frac{(B_{ij}^k D_{ji}^k - C_{ij}^k A_{ji}^k) \delta_{in} + (B_{ij}^k C_{ji}^k - D_{ij}^k A_{ji}^k) \delta_{jn}}{A_{ij}^k A_{ji}^k - B_{ij}^k B_{ji}^k}; \quad i, j, n = 1, 2; \quad j \neq i.$$

$$A_{ij}^k = (2r_i^2 + \chi_i)(2r_k^2 + \varepsilon_k) - (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \delta_{ik} - 4v^2 r_k^2 r_i^2 \delta_{jk};$$

$$B_{ij}^k = -2r_j^2 (2r_k^2 + \varepsilon_k) + 2vr_j^2 (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) (\delta_{jk} + \delta_{ik});$$

$$C_{ij}^k = (-1)^k f_i l_i \left[ (2vr_i^2 + v_i \varepsilon_i) (2r_k^2 + \varepsilon_k) - 4vr_i^2 r_j^2 \right] \delta_{ik}; \quad D_{ij}^k = -(-1)^i f_j l_j 2r_j^2 \varepsilon_k (v - v_k) \delta_{ik}.$$

Крайові умови для системи рівнянь (39) отримаємо підстановкою в рівняння (35), (38)  $\zeta = \alpha_k$

$$(2r_i^2 + \chi_i) \sigma_i(\alpha_k) - 2r_j^2 \sigma_j(\alpha_k) = (-1)^j \left[ v \sigma_\zeta(\alpha_k) - v_i \varepsilon_i N_\zeta^{(i)}(\alpha_k) / R_i \right], \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (40)$$

$$(2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \sigma_k(\alpha_k) - 2vr_m^2 \sigma_m(\alpha_k) = (-1)^m \left[ \sigma_\zeta(\alpha_k) - \varepsilon_k N_\zeta^{(k)}(\alpha_k) / R_k \right], \quad k \neq m. \quad (41)$$

Розв'язок рівняння (40) буде

$$\begin{aligned} \sigma_i(\alpha_k) = & \frac{(-1)^i}{\chi_o} \left[ v \chi_j \sigma_\zeta(\alpha_k) - (2r_j^2 + \chi_j) v_i \varepsilon_i \times \right. \\ & \left. \times \frac{N_\zeta^i(\alpha_k)}{R_i} + 2r_j^2 v_j \varepsilon_j \frac{N_\zeta^j(\alpha_k)}{R_j} \right]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (42)$$

Невідомі контактні напруження знаходимо із системи (39) з урахуванням крайових умов (42):

$$\sigma_i = \sum_n C_{in}^k(\alpha_k) e^{\lambda_n^k(\zeta - \alpha_k)}; \quad i, n = 1, 2.$$

Тут позначено:

$$\begin{aligned} \lambda_n^k = & \left[ b_{11}^k + b_{22}^k + (-1)^n \sqrt{(b_{11}^k - b_{22}^k)^2 + 4b_{12}^k b_{21}^k} \right] / 2; \quad C_{in}^k(\alpha_k) = (-1)^n \left( -\frac{b_{11}^k - \lambda_n^k}{b_{12}^k} \right)^{\delta_{2i}} \times \\ & \times \delta_{1k} \frac{\sigma_1(\alpha_k)(b_{11}^k - \lambda_s^k) + \sigma_2(\alpha_k) b_{12}^k}{\lambda_2^k - \lambda_1^k} + (-1)^s \left( \frac{b_{22}^k - \lambda_n^k}{b_{21}^k} \right)^{\delta_{1i}} \delta_{2k} \frac{\sigma_1(\alpha_k) b_{21}^k + \sigma_2(\alpha_k)(b_{22}^k - \lambda_s^k)}{\lambda_2^k - \lambda_1^k}; \\ & i, s, n = 1, 2; \quad s \neq n. \end{aligned}$$

Для визначення невідомої координати  $\alpha_k$  підставимо співвідношення (42) у невикористану крайову умову (41), отримаємо

$$\sum_{s=1}^3 d_{ks} \sigma^{(s)}(\alpha_k) = 0, \quad (43)$$

де

$$\begin{aligned} d_{k1} = & \varepsilon_k \left[ 2r_k^2 \chi_m (1 - v_k v) + (2r_m^2 + \chi_m) (\chi_k - v_k^2 \varepsilon_k) \right]; \quad d_{k2} = (v_k \varepsilon_k - v \chi_k) 2r_m^2 v_m \varepsilon_m; \\ & d_{k3} = (1 - v^2) \chi_o + (v_k \varepsilon_k - v \chi_k) v \chi_m; \quad k \neq m. \end{aligned}$$

Тепер використаємо умову неперервності осьових напружень у точці  $\alpha_k$ . З урахуванням виразів (17) підставимо формулу (33) у співвідношення (43). Маємо трансцендентне рівняння відносно невідомої  $\alpha_k$

$$\sum_{s=1}^3 \sum_{n=1}^3 d_{ks} g_{sn} e^{\lambda_n^k \alpha_k} = 0, \quad (44)$$

яке розв'язується лише числово.

Осьові напруження в області проковзування-зчеплення будуть

$$\sigma^{(s)} = \sum_{n=1}^3 h_{sn}(\alpha_k) e^{\lambda_n^k(\zeta - \alpha_k)}, \quad s = \overline{1,3}, \quad (45)$$

де  $\lambda_3^k = 0$ . Тут позначено:

$$h_{sn}(\alpha_k) = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^s \left\{ \frac{\delta_{sk}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) C_{kn}^k(\alpha_k) - \right. \\ \left. - \left[ 2vr_m^2 \frac{\delta_{sk}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \left( \frac{\delta_{sk} 2r_m^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{sm} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (-1)^k \frac{f_m l_m}{\lambda_n^k} \right] C_{mn}^k(\alpha_k) \right\}, \quad n = 1, 2; \\ \frac{N_\zeta^{(s)}(\alpha_k)}{R_s} + \sum_j (-1)^s (-1)^k \left( \frac{2r_m^2 \delta_{sk}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{sm} \right) \times \\ \times \frac{f_m l_m}{\lambda_j^k} C_{mj}^k(\alpha_k), \quad n = 3; \quad j = 1, 2; \quad s = 1, 2. \end{array} \right\},$$

$$h_{3n}(\alpha_k) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^m}{2r_k^2 + \varepsilon_k} \left[ 2r_k^2 (2vr_k^2 + v_k \varepsilon) C_{kn}^k(\alpha) + 2r_m^2 \times \right. \\ \left. \times (-2vr_k^2 + \varepsilon_k f_m l_m (-1)^k / \lambda_n^k) \right], \quad n = 1, 2; \\ \sigma_\zeta(\alpha_k) + \frac{\varepsilon_k}{2r_k^2 + \varepsilon_k} 2r_m^2 f_m l_m \sum_j C_{mj}^k(\alpha_k) / \lambda_j^k, \\ n = 3; \quad j = 1, 2; \quad k \neq m. \end{array} \right\}.$$

Радіальні переміщення і осьові деформації оболонок подаються виразами

$$\frac{w_i}{R_i} = \frac{R_i}{E_i h_i} \left\{ -v_i \frac{N_\zeta^{(i)}(\alpha_k)}{R_i} + (-1)^i \sum_{n=1}^3 \left[ \left[ \left[ 1 - \frac{v_i \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \right] \times C_{in}^k(\alpha_k) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + v_i \left[ \frac{2vr_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \left( \frac{2r_m^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} \delta_{ik} + \delta_{im} \right) (-1)^k \frac{f_m l_m}{\lambda_n^k} \right] \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times C_{mn}^k(\alpha_k) \right\} e^{\lambda_n^k(\zeta - \alpha_k)} - \left( \frac{2r_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{im} \right) \times (-1)^k v_i f_m l_m C_{mn}^k(\alpha_k) / \lambda_n^k \right] \right\}; \quad (46)$$

$$\varepsilon_\zeta^{(i)} = \frac{R_i}{E_i h_i} \left\{ \frac{N_\zeta^{(i)}(\alpha_k)}{R_i} - (-1)^i \sum_{n=1}^3 \left[ \left[ \left[ v_i - \frac{\delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \right] \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times C_{in}^k(\alpha_k) + \left[ \frac{2vr_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \left( \frac{2r_m^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{im} \right) (-1)^k \frac{f_m l_m}{\lambda_n^k} \right] \times C_{mn}^k(\alpha_k) \right] \right\} \times \right. \\ \left. \times e^{\lambda_n^k(\zeta - \alpha_k)} - \left( \frac{2r_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{im} \right) (-1)^k f_m l_m C_{mn}^k(\alpha_k) / \lambda_n^k \right] \right\}; \quad i = 1, 2; \quad k \neq m. \quad (47)$$

Осьова деформація заповнювача має такий вигляд:



$$\begin{aligned} \varepsilon_{\zeta} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{\zeta}(\alpha_k) + \sum_{n=1}^3 \left[ \left\{ 2\nu \sum_i (-1)^i r_i^2 C_{in}^k(\alpha_k) + \frac{(-1)^k 2r_k^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2\nu r_k^2 + \nu_k \varepsilon_k) C_{kn}^k(\alpha_k) + \left[ (-1)^k \frac{4r_k^2 r_m^2 \nu}{2r_k^2 + \varepsilon_k} - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{(-1)^k 2r_k^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2\nu r_k^2 + \nu_k \varepsilon_k) C_{kn}^k(\alpha_k) + \left[ (-1)^k \frac{4r_k^2 r_m^2 \nu}{2r_k^2 + \varepsilon_k} - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{2r_m^2 \varepsilon_k}{2r_k^2 + \varepsilon_k} f_m l_m / \lambda_n^k \right] C_{mn}^k(\alpha_k) \right\} e^{\lambda_n^k (\zeta - \lambda_k)} + \frac{2r_m^2 \varepsilon_k}{2r_k^2 + \varepsilon_k} f_m l_m C_{mn}^k(\alpha_k) / \lambda_n^k / \lambda_n^k \right\}; \quad k \neq m. \quad (48) \end{aligned}$$

**Область зчеплення на обидвох поверхнях контакту**  $\zeta \in (\alpha_m, 1]$ . Співвідношення (19), (20) для осьових напружень і зусиль у цій області мають вигляд:

$$\sigma_{\zeta} = \sigma_{\zeta}(\alpha_m) - \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_m}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta; \quad N_{\zeta}^{(i)} = N_{\zeta}^{(i)}(\alpha_m) - (-1)^i a \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau d\zeta; \quad i = 1, 2. \quad (49)$$

Співвідношення (13) з урахуванням виразів (49) будуть

$$\begin{aligned} (2r_i^2 + \chi_i) \sigma_i - 2r_j^2 \sigma_j + l_i (2\nu r_i^2 + \nu_i \varepsilon_i) \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta - 2\nu l_j r_j^2 \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_j d\zeta = \\ = (-1)^j \left[ \nu \sigma_{\zeta}(\alpha_m) - \nu_i \varepsilon_i N_{\zeta}^{(i)}(\alpha_m) / R_i \right]; \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (50) \end{aligned}$$

Умови сумісності осьових деформацій будуть

$$\varepsilon_{\zeta} = \varepsilon_{\zeta}^{(i)}; \quad i = 1, 2, \quad \zeta \in (\alpha_m, 1]. \quad (51)$$

Осьові деформації в розглядуваній області одержимо, підставляючи співвідношення для осьових напружень і зусиль (49) у вихідні формули (7), (10)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\zeta} = -\frac{1}{E} \left[ \frac{2\nu (\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} - \sigma_{\zeta}(\alpha_m) + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_m}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta \right]; \\ \varepsilon_{\zeta}^{(i)} = \frac{R_i}{E_i h_i} \left( \frac{N_{\zeta}^{(i)}(\alpha_m)}{R_i} - (-1)^i \left( \nu_i \sigma_i + \frac{a}{R_i} \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta \right) \right); \quad i = 1, 2. \quad (52) \end{aligned}$$

Підставляючи отримані вирази (52) в умови (51), маємо

$$\begin{aligned} (2\nu r_i^2 + \nu_i \varepsilon_i) \sigma_i - 2\nu r_j^2 \sigma_j + l_i^2 (2r_i^2 + \varepsilon_i) \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta - 2l_j r_j^2 \times \\ \times \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_j d\zeta = (-1)^j \left[ \sigma_{\zeta}(\alpha_m) - \varepsilon_i N_{\zeta}^{(k)}(\alpha_m) / R_i \right], \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (53) \end{aligned}$$

Отже, отримана система чотирьох ключових рівнянь (50), (53). Права частина отриманої системи рівнянь не залежить від  $\zeta$ , тобто, це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно

чотирьох невідомих констант  $\sigma_i$ ,  $l_i \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta$ ,  $i = 1, 2$ . Зазначимо, що співвідношення вигляду

$l_i \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta = \text{const}$  призводять до особливостей типу  $\delta$ -функції у виразах для  $\tau_i$ , а тому і до

розриву осьових напружень  $\sigma_\zeta$  і зусиль  $N_\zeta^{(i)}$ , які у цьому конкретному випадку зобов'язані бути неперервними. Тому необхідно прийняти  $l_i \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta = 0$ , звідки випливає  $\tau_i(\zeta) = 0$ ;  $i = 1, 2$ ;  $\zeta \in [\alpha_m, 1]$ , і система рівнянь (50), (53) набуває вигляду

$$(2r_i^2 + \chi_i)\sigma_i - 2r_j^2\sigma_j = (-1)^j \times [v\sigma_\zeta(\alpha_m) - v_i\varepsilon_i N_\zeta^{(i)}(\alpha_m)/R_i]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \quad (54)$$

$$(2vr_i^2 + v_i\varepsilon_i)\sigma_i - 2vr_j^2\sigma_j = (-1)^j \times [\sigma_\zeta(\alpha_m) - \varepsilon_i N_\zeta^{(k)}(\alpha_m)/R_i]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (55)$$

Знайдемо із рівняння (54) контактні напруження

$$\sigma_i = \frac{(-1)^i}{\chi_0} \left[ v\chi_j\sigma_\zeta(\alpha_m) - (2r_j^2 + \chi_j)v_i\varepsilon_i \frac{N_\zeta^{(i)}(\alpha_m)}{R_i} + 2r_j^2v_j\varepsilon_j \frac{N_\zeta^{(j)}(\alpha_m)}{R_j} \right]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j \quad (56)$$

і підставимо їх у рівняння (55), отримаємо

$$\sum_{s=1}^3 d_{is}\sigma^{(s)}(\alpha_m) = 0; \quad i = 1, 2. \quad (57)$$

Маємо дві умови, з яких одна ( $i = k$ ) виконується автоматично, оскільки вона відповідає рівнянню (43), котре вже використане в аналізі області проковзування-зчеплення при виводі трансцендентного рівняння (44) для визначення невідомої  $\alpha_k$ . Отже, для визначення невідомої  $\alpha_m$  маємо одне з двох рівнянь (57) для  $i = m$

$$\sum_{s=1}^3 d_{ms}\sigma^{(s)}(\alpha_m) = 0. \quad (58)$$

Використовуючи умови (18) у точці  $\alpha_m$ , із виразів (45) отримуємо

$$\sigma^{(s)}(\alpha_m) = \sum_{n=1}^3 h_{sn}(\alpha_k) e^{\lambda_n^k(\alpha_m - \alpha_k)}, \quad s = \overline{1, 3}. \quad (59)$$

Підставляючи вирази (59) в рівняння (58), маємо

$$\sum_{s=1}^3 \sum_{n=1}^3 d_{ms} h_{sn}(\alpha_k) e^{\lambda_n^k(\alpha_m - \alpha_k)} = 0, \quad k \neq m.$$

Звідси за умови, що координата  $\alpha_k$  уже відома (знайдена числово з трансцендентного рівняння (44)), можна вирахувати величину  $\alpha_m$ , причому, якщо варіант у зоні проковзування-зчеплення вже вибрано, тобто, індекси  $k, m$  мають конкретні значення, то координата початку зони зчеплення  $\alpha_m$  знаходиться аналітично.

Контактні нормальні напруження при відомій  $\alpha_m$  можна отримати підстановкою осьових напружень (59) у формули (56). Маючи контактні напруження, із вихідних формул легко визначити всі характеристики напружено-деформованого стану системи в області  $\zeta \in [\alpha_m, 1]$ . З іншого боку, враховуючи сталість усіх напружень і деформацій в області зчеплення і беручи до уваги умову неперервності осьових напружень для цілої області контакту  $\zeta \in [0, 1]$ , усі компоненти напружено-деформованого стану можна отримати з формул (46)-(48), записаних для області проковзування-зчеплення, якщо покласти в них  $\zeta = \alpha_m$ . Враховуючи об'ємність цих формул, тут відтворювати їх не будемо.

## ВИСНОВКИ. ФОРМУЛЮВАННЯ КРИТЕРІЮ ВИБОРУ ВАРІАНТА ГРАНИЧНИХ УМОВ НА КОНТАКТУЮЧИХ ПОВЕРХНЯХ

Отже, у поданій статті отримано розв'язок мішаної контактної задачі про фрикційну взаємодію коаксіальних безмоментних оболонок з деформівним заповнювачем. Визначено контактні напруження, з використанням яких отримано основні характеристики напружено-деформованого стану системи – вирази (29)-(32), (45)-(48). Тепер, маючи ці результати, можна перейти до формулювання критерію вибору варіанта граничних умов на контактуючих поверхнях в області проковзування-зчеплення.

Як видно з отриманих результатів, контактні напруження  $\sigma_i$ , а, значить, і колові мембранні зусилля  $N_{\beta}^{(i)}$ , неперервні вздовж усієї області контакту. Враховуючи умови (17), (18) неперервності осьових напружень, неперервність контактних напружень і мембранних зусиль, із формул (7), (10) можна зробити висновок про неперервність осьових деформацій при  $\zeta \in [0, 1]$ . Конкретно для точки  $\alpha_k$  маємо

$$\varepsilon_{\zeta}(\alpha_k - 0) = \varepsilon_{\zeta}(\alpha_k + 0); \quad \varepsilon_{\zeta}^{(i)}(\alpha_k - 0) = \varepsilon_{\zeta}^{(i)}(\alpha_k + 0).$$

Отже, координату точки розділу зон проковзування ( $\zeta \in [0, \alpha_k)$ ) і проковзування-зчеплення ( $\zeta \in [\alpha_k, \alpha_m]$ ) можна знайти з розв'язку задачі для області проковзування – формули (30), (31). Для цього достатньо прирівняти осьові деформації заповнювача (31) до осьових деформацій кожної оболонки окремо. Отримаємо два трансцендентних рівняння відносно  $\alpha_k$ ,  $k=1, 2$ , кожне з яких у силу монотонності осьових деформацій оболонок і заповнювача має єдиний, причому додатний, корінь. Ці рівняння будуть

$$\sum_n \left\{ \left[ (2\nu r_1^2 + \nu_1 \varepsilon_1) K_{1n} - 2\nu r_2^2 K_{2n} \right] e^{\lambda_n \alpha_1} + \left[ (2r_1^2 + \varepsilon_1) f_1 l_1 K_{1n} + 2f_2 l_2 r_2^2 K_{2n} \right] \frac{e^{\lambda_n \alpha_1} - 1}{\lambda_n} \right\} = -1;$$

$$\sum_n \left\{ \left[ 2\nu r_1^2 K_{1n} - (2\nu r_2^2 + \nu_2 \varepsilon_2) K_{2n} \right] e^{\lambda_n \alpha_2} + \left[ 2f_1 l_1 r_1^2 K_{1n} + (2r_2^2 + \varepsilon_2) f_2 l_2 K_{2n} \right] \frac{e^{\lambda_n \alpha_2} - 1}{\lambda_n} \right\} = -1.$$

У результаті розв'язування цих рівнянь отримуємо дві величини –  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , причому більша з них нас не цікавить, оскільки знайдена з некоректної умови. Дійсно, якщо на одній із оболонок уже досягнута точка  $\alpha_k$ , тобто виконано умови ідеального контакту, то координату  $\alpha_m$  точки початку області зчеплення на другій оболонці потрібно шукати з розв'язку задачі для області проковзування-зчеплення. Беручи до уваги умови неперервності осьових деформацій

$$\varepsilon_{\zeta}(\alpha_k - 0) = \varepsilon_{\zeta}(\alpha_k + 0); \quad \varepsilon_{\zeta}^{(i)}(\alpha_m - 0) = \varepsilon_{\zeta}^{(i)}(\alpha_m + 0),$$

підставляючи у формули (47), (48)  $\zeta = \alpha_m$  і вже знайдене  $\alpha_k$  та прирівнюючи отримані співвідношення, будемо мати трансцендентне рівняння на невідому координату  $\alpha_m$ . Розв'язок цього рівняння при відомому номері варіанта знаходиться аналітично.

Тепер, нарешті, сформулюємо шуканий критерій. Номер варіанта (або значення індексу  $k$ ) відповідає значенню індексу меншого з коренів записаних трансцендентних рівнянь.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Шопа В. М., Величкович А. С., Величкович С. В., Шацький І. П., Попадюк І. Й. Оболонкові пружини. Івано-Франківськ: Факел, 2002. 92 с.
2. Awrejcewicz J., Olejnik P. Analysis of dynamic systems with various friction laws. *Appl. Mech. Rev. Trans. ASME*. 2005. Vol. 58. P. 389–411.

3. Никитин Л. В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. Москва: Московский Лицей, 1998. 272 с.
4. Величкович А. С., Попадюк И. И., Шопя В. М. Экспериментальные исследования оболочечного упругого элемента для буровых средств виброзащиты. *Химическое и нефтегазовое машиностроение*. 2010. № 9. С. 16–20. **English translation:** *Chemical and Petroleum Engineering*. New York: Springer 2011. Vol. 46, No. 9-10. P. 518–524.
5. Шопя В. М., Попадюк І. Й., Бедзір О. О. Змішані задачі фрикційного контакту коаксіальних циліндричних оболонок і деформівного заповнювача. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1998. 41, № 3. С. 103–108.
6. Попадюк І. Й., Шацький І. П., Шопя В. М., Величкович А. С. Фрикційна взаємодія циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем при немонотонному навантаженні. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2014. 57, № 2. С. 187–194. **English translation:** *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 215, No. 2, May, 2016.

#### REFERENCES

1. Shopa, V. M., Velychkovych, A. S., Velychkovych, S. V., Shats'kyi, I. P. & Popadyuk, I. I. (2002). Shell Springs. Ivano-Frankivs'k: Fakel.
2. Awrejcewicz, J. & Olejnik, P. (2005). Analysis of dynamic systems with various friction laws. *Appl. Mech. Rev. Trans. ASME*, Vol. 58, pp. 389–411.
3. Nikitin, L. V. (1998). Statics and Dynamics of Solid Bodies with External Dry Friction. Moscow: Moskovskii Litsei.
4. Velichkovich, A. S., Popadyuk, I. I. & Shopa, V. M. (2010). Experimental study of the shell flexible component for drilling vibration damping devices. *Khim. Neftegaz. Mashinostr.*, No. 9, pp. 16–20. **English translation:** (2011). *Chem. Petrol. Eng.*, 46, No. 9–10, pp. 518–524.
5. Shopa, V. M., Popadyuk, I. Yo. & Bedzir, O. O. (1998). Mixed problems of frictional interaction of a coaxial cylindrical shells and deformative filler. *Math meth. ta phys.-mech. polya*, **41**, No. 3, pp. 103–108.
6. Popadyuk, I. Yo., Shats'kyi, I. P., Shopa, V. M. & Velichkovich, A. S. (2014). Frictional interaction of a cylindrical shell with deformative filler under non-monotonic loading. *Math meth. ta phys.-mech. polya*, **57**, No. 2, pp. 187–194. **English translation:** (2016). *J. of Math. Sci.*, Vol. 215, No. 2.

УДК 536.2

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДВУХСЛОЙНЫХ СРЕДАХ

<sup>1</sup>Пышнограев Ю. Н., к. ф.-м. н., <sup>2</sup>Штанько А. И., <sup>3</sup>Пышнограев Е. Ю.

<sup>1,2</sup>*Запорожская государственная инженерная академия,  
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69006, Украина*

<sup>3</sup>*ООО «Яндекс»,  
ул. Льва Толстого, 16, Москва, 119021, Россия*

pyshnograevyuri@gmail.com, anna.shtanko177@gmail.com, efim@fastmail.com

Рассмотрена математическая модель, описывающая конвективную теплопроводность двухслойной среды. Методом конечных интегральных преобразований проведено поэтапное решение задачи. Получен набор собственных значений и соответствующих им ортогональных собственных функций. Исходная задача приведена к обыкновенному дифференциальному уравнению. Решение задачи получено в виде функционального ряда.

*Ключевые слова:* теплопроводность, конвекция, двухслойная среда, интегральное преобразование, собственная функция.

## АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ У ДВОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

<sup>1</sup>Пишнограєв Ю. М., к. ф.-м. н., <sup>2</sup>Штанько Г. І., <sup>3</sup>Пишнограєв Ю. Ю.

<sup>1,2</sup>*Запорізька державна інженерна академія,  
просп. Соборний, Запоріжжя, 69006, Україна*

<sup>3</sup>*ТОВ «Яндекс»,  
вул. Льва Толстого, 16, Москва, 119021, Росія*

pyshnograevyuri@gmail.com, anna.shtanko177@gmail.com, efim@fastmail.com

Розглянуто математичну модель, що описує конвективну теплопровідність двошарового середовища. Методом скінчених інтегральних перетворень проведено поетапне рішення задачі. Отримано набір власних значень і відповідних їм ортогональних власних функцій. Вихідна задача приведена до звичайного диференціального рівняння. Рішення задачі отримано у вигляді функціонального ряду.

*Ключові слова: теплопровідність, конвекція, двошарове середовище, інтегральне перетворення, власна функція.*

## ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF CONVECTIVE HEAT EXCHANGE IN TWO-LAYER MEDIUM

<sup>1</sup>Pyshnograev Y. N., Ph.D. in Physico-mathematical, <sup>2</sup>Shtanko A. I., <sup>3</sup>Pyshnograev, E. Y.

<sup>1,2</sup>*Zaporizhzhya State Engineering Academy,  
Sobornyy ave., 226, Zaporizhzhia, 69006, Ukraine*

<sup>3</sup>*Software Developer of Yandex LLC,  
Ulitsa Lva Tolstogo, 16, Moscow, 119021, Russia*

pyshnograevyuri@gmail.com, anna.shtanko177@gmail.com, efim@fastmail.com

When building blocks are designed, there is an important problem to determine the temperature distribution in contacting materials. It is well known that obtaining a general analytical solution in such cases is difficult. For this reason, numerical methods are used to calculate the parameters of temperature fields. However there is a problem of errors accumulation when numerical methods are used. In some cases this can lead to unreliable results. For this reason, there is a need for analytical research.

In this research a medium with two layers is considered. Heat is distributed according to the laws of heat conduction and convection. The boundary conditions of the first kind are given on the outer boundaries. Layers contact each other with the conditions for an ideal thermal contact. Temperature distribution in the layers at the initial instant is constant. Current research determines the temperature function, which depends on the spatial variable and time.

The mathematical model consists of a one-dimensional nonstationary heat conduction equation with a convective component, boundary and initial conditions.

The solution of the problem is carried out by the method of finite integral transformations. In order to achieve this, the method of the separation of variables is used. This helps to reduce the original problem to the spectral problem with respect to the spatial variable. Then, using the proper replacement, the problem is transformed to the Sturm-Liouville problem. To solve this problem, the three intervals of the arrangement of eigenvalues are considered. At each of the intervals the set of eigenvalues is determined from the respective transcendental equations. These values correspond to eigenfunctions, which are a linear combination of trigonometric or hyperbolic functions. It is shown that the found eigenfunctions satisfy the orthogonality property and can be used as kernels of integral transformations. Conducting an integral transformation makes possible reducing the original partial differential equation to an ordinary differential equation with respect to time. Using the inversion formula, the final solution of the problem is written in the form of a functional series.

Given solution can be extended to solve more complex two-dimensional and three-dimensional problems. It is also possible to solve the problem when the number of contacting materials is increased.

*Key words: heat conductivity, convection, two-layer medium, integral transformation, eigenfunction.*

## ВВЕДЕНИЕ

При проектировании радиоаппаратуры, гидросооружений [1], высокотехнологического металлургического оборудования актуальной является проблема учета температурного

режима. В связи с этим, оптимизация характеристик проектируемых элементов должна проводиться с учетом поведения температурных полей в соприкасающихся средах. К таким средам относятся твердые тела, а также газовые и жидкие наполнители. Проведение температурных расчетов является достаточно сложной математической задачей, и для ее решения, как правило, используются численные методы [2]. Однако, при всей их привлекательности, применение численных подходов связано с проблемой накопления погрешностей, ошибок округления и схемных ошибок. К тому же численные методы не позволяют получить достоверные результаты вблизи особых точек, границ раздела слоев, а также при больших разбросах теплофизических и геометрических параметров. В связи с этим возникает необходимость проведения аналитических исследований. Аналитические решения имеют большую ценность, так как позволяют изучать поведение функций, входящих в решение. Кроме того, аналитические решения могут быть использованы как инструмент тестирования численных методов. В данной работе приводится алгоритм получения аналитического решения нестационарной задачи конвективной теплопроводности двухслойной среды.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается среда, состоящая из двух слоев. Первый слой занимает область  $(-l_1; 0)$ , второй –  $(0; l_2)$ . Коэффициент температуропроводности  $a$ , теплопроводности  $\lambda$  и скорость движения среды  $w$  принимают значения  $a_1, \lambda_1, w_1$  на первом слое и  $a_2, \lambda_2, w_2$  на втором слое соответственно (рис. 1). На внешних границах заданы однородные граничные условия первого рода, на общей границе условия идеального теплового контакта. Предполагается, что в начальный момент времени температура слоев постоянная. Требуется определить температурную функцию  $T(x, t)$ , зависящую от пространственной переменной и времени.

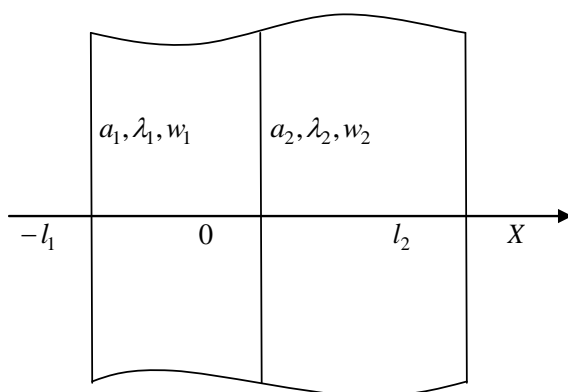


Рис. 1. Двухслойная область

Математическая формулировка задачи состоит из уравнения в частных производных

$$T_t(x, t) = a \cdot T_{xx}(x, t) + w T_x(x, t), \quad (1)$$

граничных условий

$$\begin{cases} T(-l_1, t) = 0, \\ T(l_2, t) = 0, \\ T(-0, t) = T(+0, t), \\ \lambda_1 T_x(-0, t) = \lambda_2 T_x(+0, t), \end{cases} \quad (2)$$

а также начального условия

$$T(x, 0) = T_0. \quad (3)$$

## 2. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Решение задачи проводится методом конечных интегральных преобразований. Этот метод предполагает нахождение ядер интегральных преобразований, которые являются решениями задачи Штурма-Лиувилля [3]. Чтобы получить условия этой задачи, представим неизвестную температурную функцию в виде произведения

$$T(x, t) = \bar{T}(t) \varphi(x). \tag{4}$$

Определяя из (4) выражения для  $T_t$ ,  $T'_x$ ,  $T''_{xx}$  и подставляя их, а также (4) в (1) и (2), приходим к соотношениям, которые позволяют разделить переменные и получить спектральную задачу, состоящую из уравнения

$$a\varphi''(x) + w\varphi'(x) + \beta^2\varphi(x) = 0 \tag{5}$$

и граничных условий

$$\varphi(-l_1) = 0, \quad \varphi(l_2) = 0, \quad \varphi(-0) = \varphi(+0), \quad \lambda_1\varphi'(-0) = \lambda_2\varphi'(0). \tag{6}$$

Отметим, что в уравнение (5) входит пока неизвестная постоянная разделения  $\beta^2$ . Для решения уравнения (5) с условиями (6) сделаем замену

$$\varphi(x) = \psi(x) e^{-\mu x}, \tag{7}$$

где

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 = \frac{w_1}{2a_1}, & x \in [-l_1; 0), \\ \mu_2 = \frac{w_2}{2a_2}, & x \in [0; l_2]. \end{cases} \tag{8}$$

В результате приходим к задаче Штурма-Лиувилля. Она состоит из уравнения

$$a\psi''(x) + (\beta^2 - \mu^2 a)\psi(x) = 0 \tag{9}$$

и граничных условий

$$\begin{cases} \psi(-l_1) = 0, \\ \psi(l_2) = 0, \\ \psi(-0) = \psi(+0), \\ \lambda_1(\psi'(-0) - \mu_1\psi(-0)) = \lambda_2(\psi'(0) - \mu_2\psi(0)). \end{cases} \tag{10}$$

Задача (9)-(10) позволяет определить бесконечный набор собственных значений  $\beta$  и соответствующих им собственных функции  $\psi(x)$ .

Пусть для определенности  $\mu_1 \leq \mu_2$ . Тогда для нахождения собственных значений и собственных функций нужно рассмотреть три интервала, на каждом из которых собственные функции имеют различный вид [4].

1) Если  $0 < \beta < \mu_1\sqrt{a_1}$ , собственные значения  $\beta$  определяются из трансцендентного уравнения

$$(\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2)sh(q_1l_1)sh(q_2l_2) - \lambda_1q_1ch(q_1l_1)sh(q_2l_2) - \lambda_2q_2sh(q_1l_1)ch(q_2l_2) = 0,$$

где

$$q_1 = \sqrt{\mu_1^2 - \frac{\beta^2}{a_1}}, \quad q_2 = \sqrt{\mu_2^2 - \frac{\beta^2}{a_2}}. \quad (11)$$

Собственным значениям соответствуют собственные функции

$$\psi_1(x) = A_1 ch(q_1 x) + B_1 sh(q_1 x), \quad \psi_2(x) = A_2 ch(q_2 x) + B_2 sh(q_2 x), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = sh(q_1 l_1), \quad B_1 = ch(q_1 l_1), \\ B_2 = \frac{sh(q_1 l_1)(\lambda_2 \mu_2 - \lambda_1 \mu_1) + \lambda_1 q_1 ch(q_1 l_1)}{\lambda_2 q_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

2) Если  $\mu_1 \sqrt{a_1} \leq \beta \leq \mu_2 \sqrt{a_2}$ , собственные значения  $\beta$  определяются из трансцендентного уравнения

$$(\lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2) \sin(q_1 l_1) sh(q_2 l_2) - \lambda_1 q_1 \cos(q_1 l_1) sh(q_2 l_2) - \lambda_2 q_2 \sin(q_1 l_1) ch(q_2 l_2) = 0,$$

где

$$q_1 = \sqrt{\frac{\beta^2}{a_1} - \mu_1^2}, \quad q_2 = \sqrt{\mu_2^2 - \frac{\beta^2}{a_2}}. \quad (14)$$

Собственные функции имеют вид

$$\psi_1(x) = A_1 \cos(q_1 x) + B_1 \sin(q_1 x), \quad \psi_2(x) = A_2 ch(q_2 x) + B_2 sh(q_2 x), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = \sin(q_1 l_1), \quad B_1 = \cos(q_1 l_1), \\ B_2 = \frac{\sin(q_1 l_1)(\lambda_2 \mu_2 - \lambda_1 \mu_1) + \lambda_1 q_1 \cos(q_1 l_1)}{\lambda_2 q_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

3) Если  $\mu_2 \sqrt{a_2} < \beta < +\infty$ , собственные значения  $\beta$  определяются из трансцендентного уравнения

$$(\lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2) \sin(q_1 l_1) \sin(q_2 l_2) - \lambda_1 q_1 \cos(q_1 l_1) \sin(q_2 l_2) - \lambda_2 q_2 \sin(q_1 l_1) \cos(q_2 l_2) = 0,$$

где

$$q_1 = \sqrt{\frac{\beta^2}{a_1} - \mu_1^2}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{\beta^2}{a_2} - \mu_2^2}. \quad (17)$$

Собственные функции имеют вид

$$\psi_1(x) = A_1 \cos(q_1 x) + B_1 \sin(q_1 x), \quad \psi_2(x) = A_2 \cos(q_2 x) + B_2 \sin(q_2 x), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = \sin(q_1 l_1), \quad B_1 = \cos(q_1 l_1), \\ B_2 = \frac{-\lambda_1 \mu_1 \sin(q_1 l_1) + \lambda_2 \mu_2 \sin(q_1 l_1) + \lambda_1 q_1 \cos(q_1 l_1)}{\lambda_2 q_2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Окончательный вид собственных функций  $\varphi(x)$  можно получить с помощью выражения (7).

Отметим, что функции  $\varphi(x)$  ортогональны с весом  $\rho(x) = \frac{\lambda}{a} e^{2\mu x}$ , то есть



$$\int_{-l_1}^{l_2} \frac{\lambda}{a} e^{2\mu x} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \|\varphi_n\|^2, & n = m, \end{cases} \quad (20)$$

где  $\|\varphi_n\|^2$  – квадрат нормы собственных функций [5].

### 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ

Используя функции  $\varphi_n(x)$  в качестве ядер интегральных преобразований, проведем конечное интегральное преобразование по формуле

$$\bar{T}_n(t) = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\lambda}{a} e^{2\mu x} \varphi_n(x) T(x, t) dx. \quad (21)$$

Для этого умножаем обе части уравнения (1) на  $\frac{\lambda}{a} e^{2\mu x} \varphi_n(x)$  и интегрируем в пределах от  $-l_1$  до  $l_2$ , при этом правую часть интегрируем дважды по частям. С учетом условий (2), (10), а также уравнения (9), имеем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции  $\bar{T}_n(t)$ :

$$\bar{T}_n'(t) + \beta_n^2 \bar{T}_n(t) = 0 \quad (22)$$

с начальным условием

$$\bar{T}_n(0) = T_0 \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\lambda}{a} e^{2\mu x} \varphi_n(x) dx. \quad (23)$$

Значения  $\beta_n^2$ , входящие в (22), заранее определены из алгебраических уравнений (11), (14), (17).

Решение задачи Коши (22), (23) хорошо известно:

$$\bar{T}_n(t) = \bar{T}_n(0) e^{-\beta_n^2 t}. \quad (24)$$

Используя формулу обращения, получаем окончательное решение задачи

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \bar{T}_n(t)}{\|\varphi_n\|^2}, \quad (25)$$

где выражения, входящие в правую часть (25), определяются формулами (7), (11)-(20), (24).

Таким образом, решение задачи (1)-(3) получено. Отметим, что при постановке задачи для простоты изложения схемы решения рассматривались однородные граничные условия первого рода. При задании граничных условий как произвольных функций вид ядер интегральных преобразований не изменится. В этом случае достаточно разделить исходную задачу на стационарную и квазистационарную части.

### ВЫВОДЫ

Для описания тепловых процессов в технологических конструкциях может быть использована модель конвективной теплопроводности двухслойной среды. Общая схема решения применима для решения более сложных задач при изменении геометрии сред, а также при увеличении числа слоев. Особый интерес представляет распространение метода для решения двумерных и трехмерных задач. Кроме того полученное аналитическое решение представляет ценность для тестирования качества приближенных численных методов.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Плятт Ш. Н. Расчеты температурных полей бетонных гидросооружений. Москва: Энергия, 1974. 407 с.
2. Цаплин А. И. Теплофизика в металлургии: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. гос. тех. ун-та, 2008. 230 с.
3. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. Москва: Мир, 1985. 384 с.
4. Пышнограев Ю. Н., Пышнограев Е. Ю. Построение системы собственных функций для уравнения конвективной диффузии с кусочно-постоянными коэффициентами. *Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2012. Т. 9, № 1. С. 7–12.
5. Карташев Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности. Москва: Высш. шк., 1985. 480 с.

## REFERENCES

1. Plyatt, Sh. N. (1974). Calculations of temperature fields of concrete hydro structures. Moscow: Energy, Russia.
2. Tsaplin, A. I. (2008). Thermophysics in metallurgy: tutorial. Perm': Permskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, Russia.
3. Farlow, S. (1985). Partial differential equations for scientists and engineers. Moscow: Mir, Russia.
4. Pyshnograev, Yu. N. & Pyshnograev, E. Yu. (2012). Construction of a system of eigenfunctions for the convective diffusion equation with piecewise constant coefficients. *Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, Vol. 9, No. 1, pp. 7-12.
5. Kartashov, E. M. (1985). Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. Moscow: Vysshaya shkola, Russia.

УДК 539.374

## ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ТЕРМОСИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНУЮ НАГРУЗКУ ТРУБЫ ПРИ ЕЕ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

<sup>1</sup>Свитлинец А. М., <sup>2</sup>Онищенко И. С., <sup>1</sup>Черняков Ю. А.

<sup>1</sup>Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина

<sup>2</sup>ООО «Завод Мастер-Профи»,  
г. Днепр, 49010, Украина

anna.svitlinets@gmail.com

Элементы конструкций из гнутых стальных труб широко применяются в химической, аэрокосмической отраслях, в гражданском строительстве, при строительстве трубопроводов и в коммунальных сетях. Для изгиба труб обычно используются промышленные гибочные установки. Однако, при больших диаметрах труб использовать такие установки не представляется возможным. Кроме того, эти установки являются дорогостоящими и их использование для изгиба труб в небольшом объеме не рационально. В силу этого применяются более простые способы изгиба труб, такой, как, например, совместное действие изгибающего момента и локального нагрева. В результате такого технологического процесса на вогнутой поверхности трубы возникают складки и остаточные напряжения. При повторном нагружении эти складки и остаточные напряжения в трубе приводят к неоднородному напряженному состоянию и, как следствие, к снижению несущей способности трубы. В работе с помощью программного комплекса ABAQUS построена конечно-элементная модель деформации локально нагретой трубы при нагружении ее изгибающим моментом с повторным нагружением до момента исчерпания несущей способности трубы. Приведены результаты конкретных расчетов предельной нагрузки для трех длин трубы.

*Ключевые слова:* конечные элементы, оболочка, повторное нагружение, предельная нагрузка, идеальная пластичность.

## ВПЛИВ ПОПЕРЕДНЬОГО ТЕРМОСИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ГРАНИЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ТРУБИ ПРИ ЇЇ ЧИСТОМУ ВИГИНІ

<sup>1</sup>Світлинець Г. М., <sup>2</sup>Онищенко І. С., <sup>1</sup>Черняков Ю. А.  
<sup>1</sup>Дніпровський національний університет ім. Олесь Гончара,  
 просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010, Україна

<sup>2</sup>ТОВ «Завод Майстер-Профі»,  
 м. Дніпро, 49010, Україна  
 anna.svitlinets@gmail.com

Елементи конструкцій з гнутих сталевих труб широко застосовуються в хімічній, аерокосмічній галузях, у цивільному будівництві, при будівництві трубопроводів і в комунальних мережах. Для вигину труб зазвичай використовуються промислові установки. Однак, при великих діаметрах труб і великих товщинах використовувати такі установки не є можливим. Крім того, ці установки є вартісними і їх використання для вигину труб у невеликому обсязі не є раціональним. Через це застосовуються більш прості способи вигину труб, такий, як, наприклад, спільна дія згинального моменту і локального нагріву. У результаті такого технологічного процесу на увігнутій поверхні труби виникають складки і залишкові напруження. При повторному навантаженні ці складки і залишкові напруження в трубі призводять до неоднорідного напруженого стану і, як наслідок, до зниження несучої здатності труби. У роботі за допомогою програмного комплексу ABAQUS побудована кінцево-елементна модель деформації локально нагрітої труби при навантаженні її згинаючим моментом з повторним навантаженням до моменту вичерпання несучої здатності труби. Наведено результати конкретних розрахунків граничного навантаження для трьох довжин труби.

*Ключові слова:* скінченні елементи, оболонка, повторне навантаження, граничне навантаження, ідеальна пластичність.

## INFLUENCE OF THE PRELIMINARY THERMAL FORCE OF LOAD ON THE LIMITING LOAD OF THE PIPE AT ITS CLEAN BENDING

<sup>1</sup>Svitlinets A. M., <sup>2</sup>Onischenko I. S., <sup>1</sup>Chernyakov Yu. A.  
<sup>1</sup>Oles Honchar Dnipro National University

<sup>2</sup>“Zavod Master-Profi”, LLC,  
 Dnipro, Ukraine

**Introduction.** Elements of constructions from bent steel pipes are widely used in chemical, aerospace, civil engineering, and pipeline construction and utility networks. Typically, industrial bending machines are used for bending pipes. However, such installations cannot be used for large pipe diameters. In addition, these plants are expensive and their using for bending pipes in small amount are not rational. That is why simpler methods of bending pipes are used, such as, for example, the joint action of a bending moment and local heating. As a result of such a process on the concave pipe surface occur folds and residual stresses. These folds and residual stresses in the pipe lead to an inhomogeneous stress state during repeated loading and, as a consequence, to decrease bearing capacity of the pipe. In work with the ABAQUS software complex, the finite element model of deformation of a locally heated pipe is constructed under loading its by a bending moment with repeated loading until the exhausting bearing capacity of the pipe. The results of specific calculations of the ultimate load for three pipe lengths are given. For evaluation of bearing capacity of the pipe thermo force loading process is divided into two stages. At the first stage, during the bending process, the heating of the pipe section is carried out, and bending moment acts on the pipe, the value of which increases to achieve a predetermined curvature. Then the pipe is unloaded and cooled. In the second stage, during operation, the increasing bending moment acts on the pipe until the load capacity is exhausted. Exhaustion of bearing capacity of the pipe is determined by achievement of the maximum on the curve “bending moment-bowing”.

The kinematic loading scheme was used to ensure a stable count, especially in the vicinity of the torque limit: the angle of rotation of the end section was set, and bending moments were calculated through obtained reactions in the middle section. To describe the mechanical behavior of pipe material, we use the simplest theory of elastically perfectly plastic flow. The program complex of finite element calculations ABAQUS was used for solving the problem. A cylindrical coordinate system  $\theta_r$  was specified and only a fourth part of the pipe was considered because of symmetry. The condition of a plane section was taken at the edge of the shell  $z=0$ . The symmetry conditions were specified on the lines of intersection of the shell surface with the symmetry planes  $z=L$  and  $\varphi=0$ .

**Conclusions.** With the aid of the ABAQUS software complex finite-element model of deformation of a locally heated tube is constructed under loading its by a bending moment.

The model allows to investigate pipe deformation under thermo force loading at the stage of bending pipe, to determine the residual state of the pipe with given geometric dimensions and to obtain the limiting value of the bending moment.

*Key words:* Finite elements, shell, repeated loading, ultimate load, ideal plasticity.

## ВВЕДЕНИЕ

Элементы конструкций из гнутых стальных труб широко применяются в химической, аэрокосмической отраслях, в гражданском строительстве, при строительстве трубопроводов, в коммунальных сетях. При больших диаметрах труб не удается использовать механические гибочные установки и необходимый изгиб трубы можно получить за счет поэтапного ее изгиба моментом и локального разогрева. В результате такого технологического процесса на вогнутой поверхности трубы возникают складки. В строительных нормах оговаривается ограничения на несовершенство формы трубы. Кривизна любого участка трубы на 1 м длины не должна превышать: 1,5 мм – для труб с толщиной стенки до 20 мм; 2,0 мм – для труб с толщиной стенки свыше 20 до 30 мм; 4,0 мм – для труб с толщиной стенки свыше 30 мм. Отношение радиуса применяемых труб к их толщине, в соответствии с ГОСТ 8732-78 «Трубы стальные бесшовные горячедеформированные», изменяется в пределах от 7 до 10. В таком диапазоне размеров потеря устойчивости трубы, как короткой оболочки, происходит при нагрузках, намного превышающих эксплуатационные, и, в силу этого, исключается из расчета на прочность, т.е. говорить о чувствительности к начальным несовершенствам не имеет смысла. Однако складки, образовавшиеся на поверхности трубы, и остаточные напряжения в трубе приводят к неоднородному напряженному состоянию при повторном нагружении и, как следствие, к локальному пластическому течению, развитие которого приводит к снижению несущей способности трубы.

Обзор современных подходов к изгибу труб можно найти в работах [2-4, 6, 9, 12, 14]. Наиболее изученным является метод локального индукционного нагрева, который применяется для изгиба трубы с малым радиусом изгиба и большим диаметром [5, 10, 11, 13]. Во время изгиба трубы ее наружная стенка изгиба утоняется, а внутренняя стенка утолщается, поперечное сечение канала изгиба становится овальным, и угол изгиба несколько уменьшается за счет упругой деформации при разгрузке. В инженерном проектировании утонение стенки трубы и овальность не должны превышать 12,5% и 7%, соответственно, как следствие, радиус изгиба обычно больше, чем 3,5 внешнего диаметра трубы при использовании этого стандартного способа. Анализ влияния предварительного термосилового нагружения на несущую способность трубы слабо изучен.

В настоящей работе, с помощью программного комплекса ABAQUS, построена конечно-элементная модель чистого изгиба локально нагретой трубы большого диаметра. В результате расчета, с заданными геометрическими размерами трубы, модель позволяет оценить остаточные поля напряжений, деформаций и перемещений после изгиба и вычислить предельный момент.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для оценки несущей способности трубы процесс термосилового нагружения разобьем на два этапа. На первом этапе, в процессе гибки, осуществляется нагрев участка трубы и на трубу действует изгибающий момент, величина которого растет до достижения заданной кривизны. Затем осуществляется разгрузка трубы и ее охлаждение. На втором этапе, в процессе эксплуатации, на трубу действует возрастающий изгибающий момент до исчерпания несущей способности. Исчерпание несущей способности трубы определяется достижением максимума на кривой изгибающий момент – кривизна.

Рассматривается труба длины  $L$ , радиусом  $R$  и толщины  $h$ , которая в исходном состоянии  $t = t_0$  не нагружена и температура ее комнатная  $T_0$ . На первом этапе, в промежутке времени

$t_0 < t < t_1$ , часть поверхности трубы, показанная на рис. 1 заштрихованной областью, разогревается до температуры  $T_1$  и подвергается воздействию изменяющегося во времени изгибающего момента  $M(t)$  до достижения заданного значения кривизны трубы. Затем, на промежутке времени  $t_1 < t < t_2$ , труба охлаждается до комнатной температуры и изгибающий момент снимается. Область нагрева задается в форме эллипса с полуосями  $2l$  и  $2R\varphi$  (см. рис. 1). В результате такого воздействия в трубе возникают остаточные напряжения и кривизна. Решение задачи на этом этапе детально рассмотрено в работе [15].

Остановимся на решении задачи на втором этапе, т.е. в процессе эксплуатации. Зафиксируем форму трубы и остаточные напряжения в конце первого этапа.

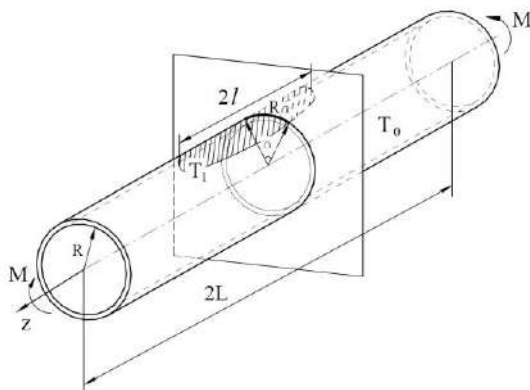


Рис. 1. Труба при термосиловом нагружении

Для описания механического поведения материала трубы воспользуемся простейшей теорией упруго идеально пластического течения. Разрешающие уравнения такой теории включают [1]:

1. Аддитивное представление для тензора полной скорости деформации

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_T, \tag{7}$$

где  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_T = \alpha T$  – скорости упругой, пластической и температурной деформации,  $\alpha$  – коэффициент линейного удлинения.

2. Закон Гука

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{G}_e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p), \quad \mathbf{C}^e = 2G_0 \left[ \mathbf{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} \right], \tag{8}$$

где  $\mathbf{C}^e$  – матрица упругой жесткости,  $G_0$  – модуль упругого сдвига при комнатной температуре,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\mathbf{I}, \mathbf{i}$  – единичные тензоры четвертого и второго ранга, соответственно.

3. Закон течения

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{s},$$

где  $\dot{\lambda}$  – пластический множитель,  $\mathbf{s}' = \boldsymbol{\sigma}' - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}') \mathbf{i} / 3$  – девиатор тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0$ .

4. Функцию текучести

$$f \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{s} : \mathbf{s} - \sigma_{0.2} \cdot q(\theta) = 0, \tag{9}$$

где  $\sigma_{0,2}$  – предел текучести при комнатной температуре.

Для задания универсальных функций и констант материала использовались экспериментальные данные, приведенные в работе [7]. Для мягкой стали имеем  $\sigma_{0,2} = 401 \text{ MPa}$ ,  $G_0 = 85 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ .

В дальнейшем будем рассматривать такие отношения  $h/R$ , при которых трубу можно моделировать, как оболочку. Общая длина оболочки принималась равной  $2L$  и выбиралась из тех соображений, чтобы на определенном расстоянии от нагретой области ее влиянием можно было пренебречь. Очевидно, что задача имеет две плоскости симметрии  $z = L$  и  $\varphi = 0, \pi/2$ .

Для решения задачи использовался программный комплекс конечно-элементных расчетов ABAQUS. Задавалась цилиндрическая система координат  $\theta rz$  и, в силу симметрии, рассматривалась только четвертая часть трубы. На краю оболочки  $z = 0$  принималось условие плоского сечения. На линиях пересечения поверхности оболочки с плоскостями симметрии  $z = L$  и  $\varphi = 0$  задавались условия симметрии.

Для обеспечения устойчивого счета, особенно в окрестности предельного значения момента, использовалась кинематическая схема нагружения – задавался угол поворота конечного сечения  $\vartheta(t)$ , а изгибающие моменты подсчитывались через полученные реакции в сечении  $z = 0$

$$M = \sum_k \sigma_z^k y_k,$$

где  $\sigma_z^k$ ,  $y_k$  – нормальные напряжения и координаты узлов в плоскости симметрии.

В дальнейшем будем рассматривать такие величины  $h/R$ , при которых трубу можно моделировать, как оболочку. Область нагрева на поверхности оболочки зададим в форме эллипса с полуосями  $l$  и  $\alpha R$ , как показано на рис. 2.

Для решения задачи использовался вычислительный комплекс метода конечных элементов ABAQUS. Зададим цилиндрическую систему координат  $\theta rz$  и, в силу симметрии, будем рассматривать только четвертую часть оболочки длины  $L$ . На краю оболочки  $z = 0$  принимается условие плоского сечения. На линиях пересечения поверхности оболочки с плоскостями симметрии  $z = L$  и  $\alpha = 0$  задаем известные условия симметрии.

Задаем температуру во всех точках оболочки  $T_0 = 20^\circ \text{C}$ , а в выделенной эллиптической области повышенную температуру  $T_1 = 400^\circ \text{C}$ .

Предварительные расчеты показали, что достаточной точности можно достичь с использованием разбивки, показанной на рис. 2а, которая составлена из конечных элементов STRI65 мембранного типа.

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассматривалась труба с размерами  $h = 10 \text{ мм}$ ,  $L = 0,3$ ,  $R = 213 \text{ мм}$ . Исчерпание несущей способности фиксировалось достижением максимума на кривой изгибающий момент – кривизна. На рис. 2 представлена форма трубы с нанесенной на ее поверхность сеткой конечных элементов для случая.

На рис. 3 представлены программы термосилового нагружения трубы и на рис. 4 – зависимость изгибающего момента от угла поворота крайнего сечения трубы. Как видно из представленных результатов, на кривой момент-угол поворота возникает явно выраженный максимум, который и определяет исчерпание несущей способности трубы.

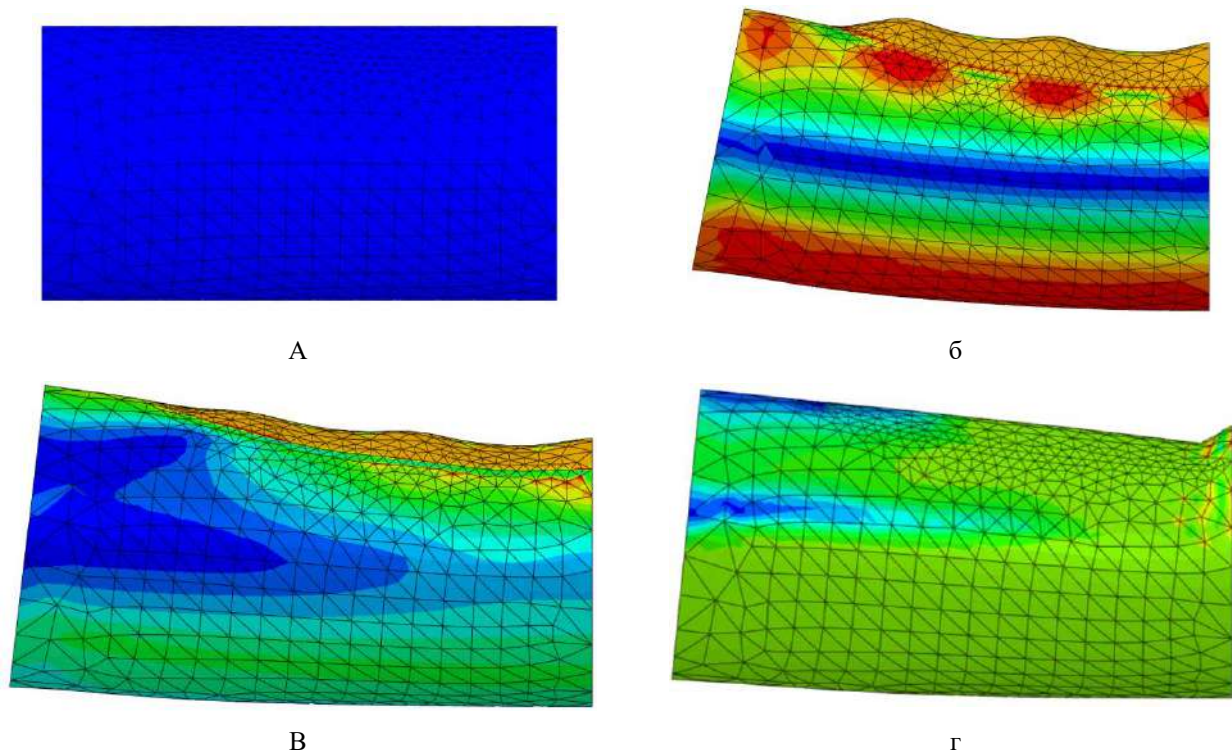


Рис. 2. Изменение формы трубы на различных стадиях термосилового нагружения: а – начальное состояние; б – нагружение на первом этапе; в – разгрузка в конце первого этапа; г – исчерпание несущей способности

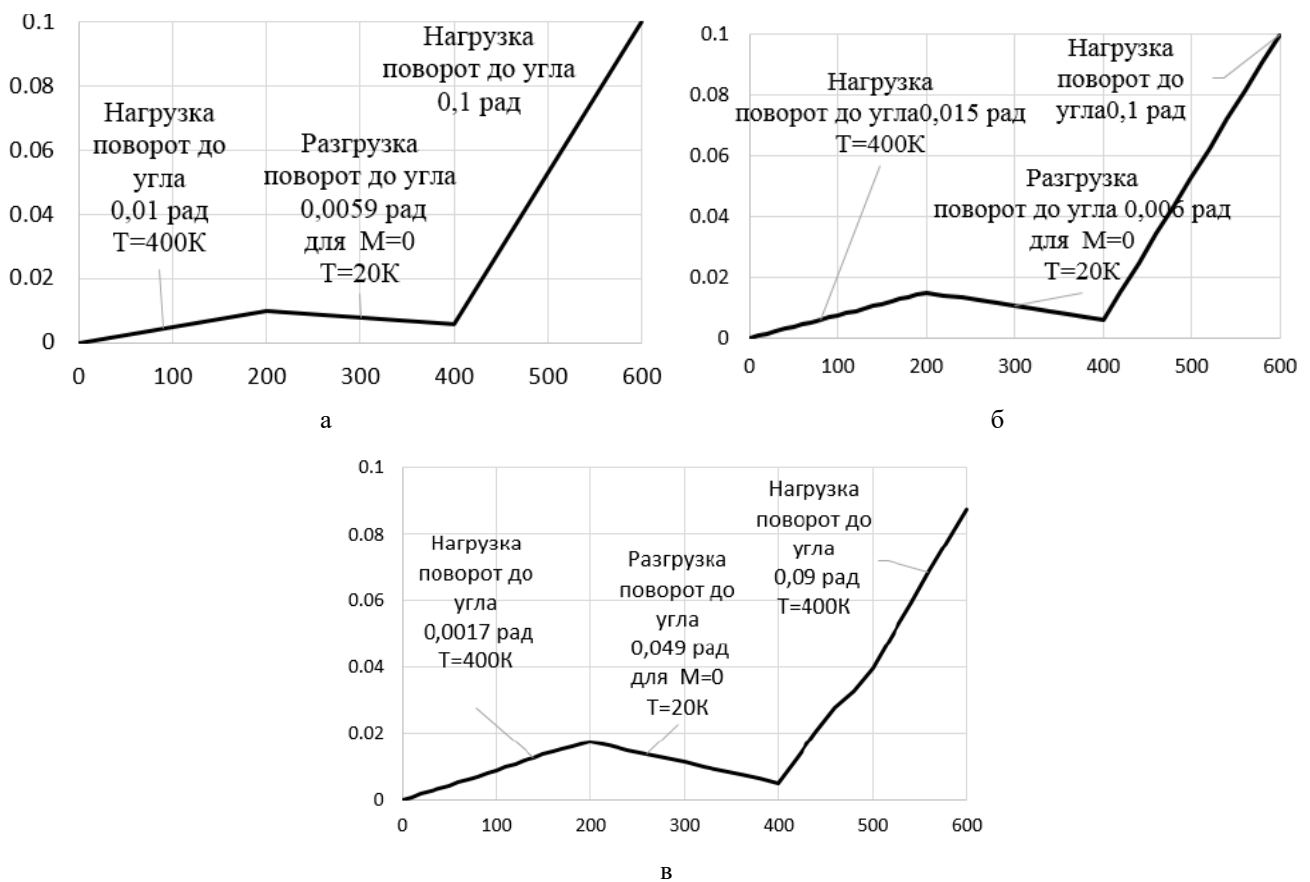


Рис. 3. Программа нагружения при: а)  $L = 800$  мм; б)  $L = 1200$  мм; в)  $L = 1800$  мм

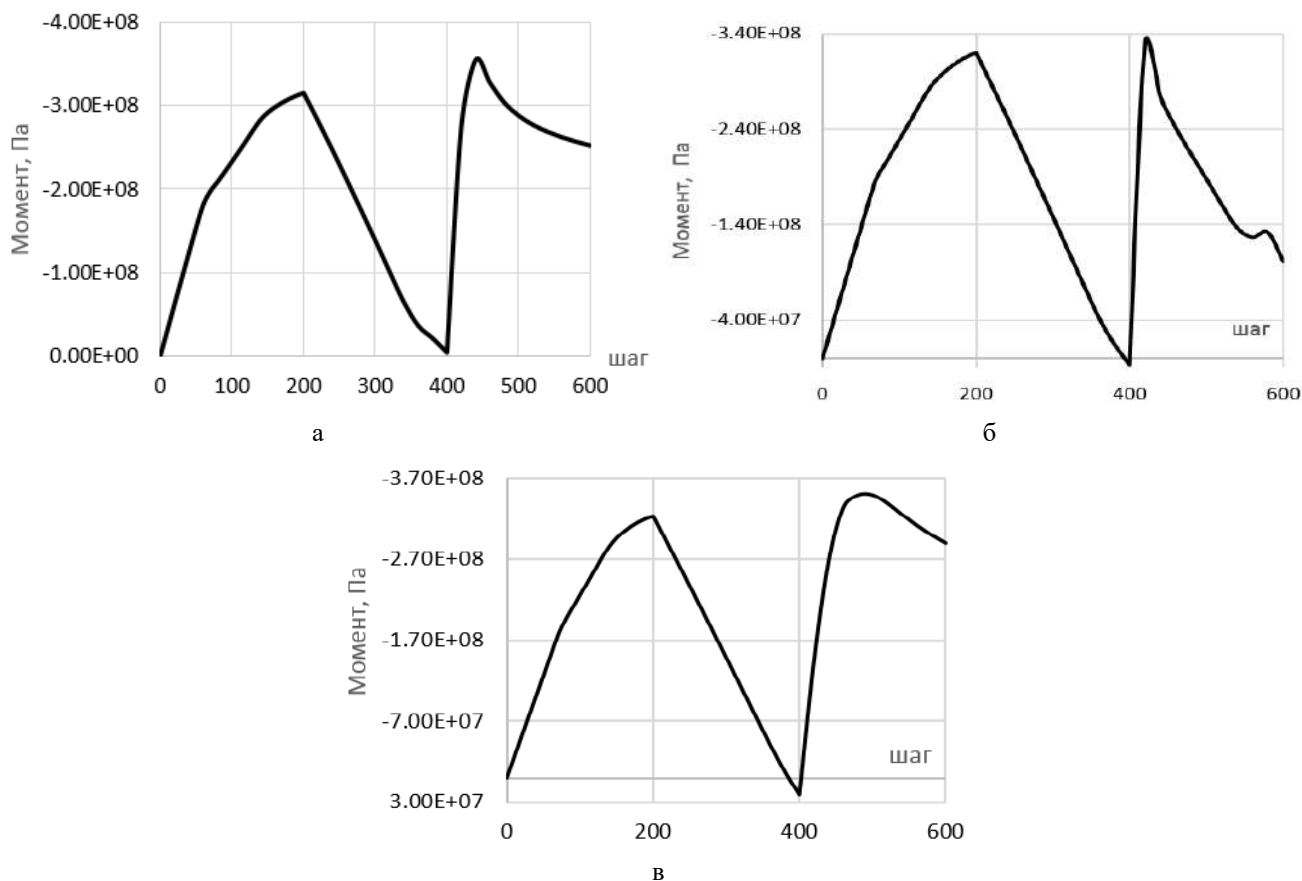


Рис. 4. Зависимость изгибающего момента от кривизны при:  
 а)  $L = 800$  мм; б)  $L = 1200$  мм; в)  $L = 1800$  мм

## ВЫВОДЫ

С помощью программного комплекса ABAQUS построена конечно-элементная модель деформации локально нагретой трубы при нагружении ее изгибающим моментом.

Построенная модель позволяет исследовать деформацию трубы при термосиловом нагружении на этапе гибки трубы, определить остаточное состояние трубы с заданными геометрическими размерами и получить предельное значение изгибающего момента.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Изд-во Тех-теор. лит., 1956. С. 324.
2. Мерзляков В. А., Шевченко Ю. Н. Уругоупластическое деформирование оболочек вращения при неосесимметричном нагружении (Обзор). *Прикл. мех.* 1999. № 5. С. 3–39.
3. Ништа А. П., Скворцов А. Н. Конечно-элементное моделирование напряженного состояния горячегнутого отвода производства ООО «Нефтегаздеталь». *Интеллектуальные системы в производстве.* 2013. № 2(22). С. 93–96. URL: <http://izdat.istu.ru/index.php/ISM/article/view/1624/437>.
4. Asao H., Okada K., Watanabe M., Matsumoto H., Umeharea N. Analysis in workability of pipe bending using high frequency induction heating. *Proceedings of The Twenty – Fourthth International Machine Tool design and Research Conference.* 1983. P. 97–104.
5. Asao H., Okada K., Fujishima S., Matsumoto T. Numerical analysis of bending force in tube bending using frequency induction heating-investigation of metal forming local heating. *I, J. JSTP.* 1987. Vol. 28(313). P. 150–157.
6. Behne T. A new bending technique for large diameter pipe. *IAMI.* 1983. Vol. 1. P. 34.
7. Chen J., Young B., Uy B. Behavior of High Strength Structural Steel at Elevated Temperatures. *Journal of Structural Engineering.* 2006. Vol. 132(12). P. 1948–1954. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2013.08.014>.



8. Guo L., Yang S., Jiao H. Behavior of thin-walled circular hollow section tube subjected to bending. *Thin-Walled Structures*. 2013. Vol. 73. P. 281–289. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2013.08.014>.
9. Hea Y., Henga L., Zhiyonga Z., Meia Z., Jinga L., Guangjunb L. Advances and Trends on Tube Bending Forming Technologies. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2012. Vol. 25. P. 1–12. doi:10.1016/S1000–9361(11)60356–7.
10. Hu Z., Li J. Q. Computer Simulation of Pipe–bending Processes with Small Bending Radius Using Local Induction Heating. *Journal of Materials Processing Technology*. 1999. Vol. 91. P. 75–79. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0924–0136\(98\)00425–7](http://dx.doi.org/10.1016/S0924–0136(98)00425–7).
11. Orcan Y., Eraslan A. N. Thermal stresses in elastic–plastic tubes with temperature–dependent mechanical and thermal properties. *Journal of Thermal stresses*. 2001. Vol. 24, №11. P. 1097–1113. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/01495730152620087>.
12. Panchal D. D., Patel A. M. Experimental Investigations in Pipe Bending Methods: A Literature Review. *International Journal of Advanced Research*. 2016. Vol. 4, Is. 4. P. 77–81. Journal DOI: 10.21474/IJAR01.
13. Wang Z. T., Hu Z. Theory of pipe–bending to a small bend radius using induction heating. *J. Mater. Process. Technol.* 1990. Vol. 21. P. 275–284. DOI: 10.1016/0924–0136(90)90047–X.
14. Xu Y., Zhang S., Cheng M., Song H., Zhang X. Application of pulsating hydroforming in manufacture of engine cradle of austenitic stainless steel. *Procedia Engineering*. 2014. Vol. 8. P. 12205–2210. doi:10.1016/j.proeng.2014.10.309
15. Свитлинець А. М., Онищенко І. С., Черняков Ю. А. Остаточные напряжения и деформации в трубе после предварительного изгиба и локального нагрева. *Строительство, материаловедение, машиностроение: сб. научн. трудов*. 2016. Вып. 92. С. 132–137.

#### REFERENCES

1. Kachanov, L. M. (1956). Fundamentals of the theory of plasticity. Moscow: Izd-vo Tekh-teor. lit.
2. Merzlyakov, V. A. & Shevchenko, Yu. N. (1999). Elastic-plastic deformation of shells of rotation under nonaxisymmetric loading. *Prikl. Mekh.*, No. 5, pp. 3-39.
3. Nishta, A. P. & Skvortsov, A. N. (2013). Finite-element modeling of the stressed state of the hot-bent branch pipe produced by “neftegazdetal”. *Intellektual'nyye sistemy v proizvodstve*, No. 2(22), pp. 93-96. Retrieved from <http://izdat.istu.ru/index.php/ISM/article/view/1624/437>.
4. Asao, H., Okada, K., Watanabe, M., Matsumoto, H. & Umeharea, N. (1983). Analysis in workability of pipe bending using high frequency induction heating. *Proceedings of The Twenty – Fourthth International Machine Tool design and Research Conference*, (pp. 97-104).
5. Asao, H., Okada, K., Fujishima, S. & Matsumoto, T. (1987). Numerical analysis of bending force in tube bending using frequency induction heating-investigation of metal forming local heating. I, *J. JSTP*, Vol. 28(313), pp. 150-157.
6. Behne, T. (1983). A new bending technique for large diameter pipe. *IAMI*, Vol. 1, p. 34.
7. Chen, J., Young, B. & Uy, B. (2006). Behavior of High Strength Structural Steel at Elevated Temperatures. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 132(12), pp. 1948-1954. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2013.08.014>.
8. Guo, L., Yang, S. & Jiao, H. (2013). Behavior of thin-walled circular hollow section tube subjected to bending. *Thin-Walled Structures*, Vol. 73, pp. 281-289. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2013.08.014>.
9. Hea, Y., Henga, L., Zhiyonga, Z., Meia, Z., Jinga, L. & Guangjunb, L. (2012). Advances and Trends on Tube Bending Forming Technologies. *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 25, pp. 1-12. doi: 10.1016/S1000–9361(11)60356–7.
10. Hu, Z. & Li, J. Q. (1999). Computer Simulation of Pipe–bending Processes with Small Bending Radius Using Local Induction Heating. *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 91, pp. 75-79. Retrieved from [http://dx.doi.org/10.1016/S0924–0136\(98\)00425–7](http://dx.doi.org/10.1016/S0924–0136(98)00425–7).
11. Orcan, Y. & Eraslan, A. N. (2001). Thermal stresses in elastic–plastic tubes with temperature–dependent mechanical and thermal properties. *Journal of Thermal stresses*, Vol. 24, No. 11, pp. 1097-1113. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1080/01495730152620087>.

12. Panchal, D. D. & Patel, A. M. (2016). Experimental Investigations in Pipe Bending Methods: A Literature Review. International Journal of Advanced Research, Vol. 4, Is. 4, pp. 77-81. Journal DOI: 10.21474/IJAR01.
13. Wang, Z. T. & Hu, Z. (1990). Theory of pipe-bending to a small bend radius using induction heating. J. Mater. Process. Technol, Vol. 21, pp. 275-284. DOI: 10.1016/0924-0136(90)90047-X.
14. Xu, Y., Zhang, S., Cheng, M., Song, H. & Zhang, X. (2014). Application of pulsating hydroforming in manufacture of engine cradle of austenitic stainless steel. Procedia Engineering, Vol. 8, pp. 12205-2210. doi:10.1016/j.proeng.2014.10.309.
15. Svitlinets, A. M., Onishchenko, I. S. & Chernyakov, Yu. A. (2016). Residual stresses and strains in the pipe after preliminary bending and local heating. Stroitel'stvo, materialovedeniye, mashinostroyeniye: sb. nauchn. Trudov, Iss. 92, pp. 132-137.

УДК 517.988 : 519.632

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ФУНКЦІЙ ГРИНА ТА КВАЗИФУНКЦІЙ ГРИНА-РВАЧОВА ДЛЯ ПОБУДОВИ ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Сидоров М. В., к. ф.-м. н., доцент

*Харківський національний університет радіоелектроніки,  
просп. Науки, 14, Харків, 61000, Україна*

maxim.sidorov@nure.ua

У роботі розглянуто питання побудови двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної крайової задачі  $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$  у  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ,  $u = 0$  на  $\partial\Omega$ . Дослідження цієї задачі проводиться методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах. За допомогою методу функцій Гріна або методу квазіфункцій Гріна-Рвачова нелінійна задача перетворюється на нелінійне інтегральне рівняння Гаммерштейна або Урисона відповідно, розглядуване як нелінійне операторне рівняння з гетеротонним оператором у просторі неперервних функцій  $C(\bar{\Omega})$ , напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Далі для розв'язання нелінійного інтегрального рівняння застосовується метод послідовних наближень. Отримано умови двобічної збіжності побудованого ітераційного процесу. Обчислювальний експеримент проведено для задачі зі степеневу нелінійністю.

*Ключові слова: нелінійна крайова задача; додатний розв'язок; сильно інваріантний конусний відрізок; гетеротонний оператор; двобічні наближення; функція Гріна; квазіфункція Гріна-Рвачова.*

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФУНКЦИЙ ГРИНА И КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА-РВАЧЕВА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДВУСТОРОННИХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Сидоров М. В., к. ф.-м. н., доцент

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники,  
просп. Науки, 14, Харьков, 61000, Украина*

maxim.sidorov@nure.ua

В работе рассмотрен вопрос построения двусторонних приближений к положительному решению нелинейной краевой задачи  $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$  в  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ,  $u = 0$  на  $\partial\Omega$ . Исследование этой задачи проводится методами теории нелинейных операторов в полуупорядоченных пространствах. С помощью метода функций Грина или метода квазифункций Грина-Рвачева нелинейная задача преобразовывается в нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна или Урисона соответственно, рассматриваемое как нелинейное операторное уравнение с

гетеротонным оператором в пространстве непрерывных функций  $C(\bar{\Omega})$ , полуупорядоченном конусом неотрицательных функций. Далее для решения нелинейного интегрального уравнения применяется метод последовательных приближений. Получены условия двусторонней сходимости построенного итерационного процесса. Вычислительный эксперимент проведено для задачи со степенной нелинейностью.

*Ключевые слова:* нелинейная краевая задача; положительное решение; сильно инвариантный конусный отрезок; гетеротонный оператор; двусторонние приближения; функция Грина; квазифункция Грина-Рвачёва.

## CONSTRUCTION TWO-SIDED ITERATIVE PROCESSES FOR SOLVING NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS USING METHODS OF GREEN'S FUNCTIONS AND THE QUASI-FUNCTIONS OF GREEN-RVACHEV

Sidorov M. V., Ph.D. in Physics and Maths, associate professor

*Kharkov National University of Radio Electronics,  
14, Nauka Ave, Kharkov, 61000, Ukraine*

maxim.sidorov@nure.ua

In this paper we consider the nonlinear boundary value problem  $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$  in  $\Omega$ ,  $u = 0$  on  $\partial\Omega$ , where  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  – bounded domain with a piecewise-smooth boundary  $\partial\Omega$ . This problem is a mathematical model of many stationary processes that are considered in chemical kinetics, biology, combustion theory, etc. We will assume that the function  $f(\mathbf{x}, u)$  is non-negative and continuous by all variables  $\mathbf{x}$ ,  $u$ , if  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ,  $u \geq 0$ . To analyze the problem and construct two-sided approximations to its positive solutions, we use the methods of the theory of nonlinear operators in semi-ordered spaces. Let the space  $C(\bar{\Omega})$  be semiordered by a cone  $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u \geq 0\}$ . The problem in the space  $C(\bar{\Omega})$  is equivalent to the Hammerstein equation  $u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi$  or

Urysohn equation  $u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \xi, u(\xi)) d\xi$ , where  $G(\mathbf{x}, \xi)$  is Green's function of the first boundary value problem for the operator  $-\Delta$  in the domain  $\Omega$ ,  $L(\mathbf{x}, \xi, u(\xi)) = K(\mathbf{x}, \xi)u(\xi) + G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) f(\xi, u(\xi))$ ,  $K(\mathbf{x}, \xi) = -\Delta_{\xi} q(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi)$  is Green-Rvachev's quasi-function of the first boundary value problem for the operator  $-\Delta$  in the domain  $\Omega$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ . Let us assume that the function  $f(\mathbf{x}, u)$  allows a diagonal representation  $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$ , where the function  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$  is continuous on the set of variables  $\mathbf{x}$ ,  $v$ ,  $w$ , monotonically increases with respect to  $v$  and monotonically decreases with respect to  $w$  for all  $\mathbf{x} \in \Omega$ . For nonlinear integral Hammerstein equation or nonlinear integral Urysohn equation we construct scheme of two-sided approximations. As initial approximations we choose ends of strongly invariant segment  $\langle v_0, w_0 \rangle$  for according heterotone operator. Herewith it has been proven that  $v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_k \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_k \leq \dots \leq w_1 \leq w_0$ . In the paper the results of the computational experiment for power nonlinearity  $f(\mathbf{x}, u) = u^p$ ,  $0 < p < 1$ , are presented, that allow us to draw a conclusion about efficiency of the suggested method.

*Key words:* nonlinear boundary value problem, positive solution, strongly invariant cone segment, heterotone operator, two-sided approximations, Green's function, quasi-function of Green-Rvachev.

### ВСТУП

При математичному моделюванні процесів у нелінійних середовищах часто виникає проблема розв'язання задач для рівняння  $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$ . У ряді робіт [1, 2 та ін.] проведено дослідження цього рівняння, отримано умови існування та єдності додатних розв'язків. Проблеми побудови двобічних методів розв'язання крайових задач для рівняння  $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$  присвячені роботи [3-7 та ін.]. Ця робота продовжує дослідження, розпочаті у [6, 7].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Метою роботи є розробка нових методів побудови двобічних ітераційних процесів знаходження додатних розв'язків нелінійної крайової задачі вигляду

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u) \text{ у } \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  – обмежена область з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$ .

Вважатимемо, що функція  $f(\mathbf{x}, u)$  невід'ємна та неперервна за сукупністю змінних  $\mathbf{x}$ ,  $u$ , якщо  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ,  $u \geq 0$ .

Припустимо також, що межа  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  складається зі скінченної кількості кусків ліній  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , де кожна  $\sigma_i(\mathbf{x})$  – елементарна функція. Тоді за допомогою методу  $R$ -функцій [8] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію  $\omega(\mathbf{x})$  таку, що:

а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;

б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;

в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

Також функція  $\omega(\mathbf{x})$  може мати певні властивості диференційованості, завдяки використанню різних достатньо повних систем  $R$ -функцій [8].

Задачу (1), (2) і побудовані нижче еквівалентні їй інтегральні рівняння розглядатимемо у просторі неперервних функцій  $C(\bar{\Omega})$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$  невід'ємних у  $C(\bar{\Omega})$  функцій [3, 4]. Зазначимо, що конус  $\mathcal{K}_+$  у  $C(\bar{\Omega})$  є нормальним [3, 4].

## 2. ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ФУНКЦІЙ ГРІНА

Нехай  $G(\mathbf{x}, \xi)$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  в області  $\Omega$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ . Тоді задача (1), (2) у просторі  $C(\bar{\Omega})$  еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню Гаммерштейна [3, 4]

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi. \quad (3)$$

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $T$ , який діє  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$T(u) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi. \quad (4)$$

Припустимо, що функція  $f(\mathbf{x}, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$ , де функція  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Тоді оператор  $T$  вигляду (4) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, v(\xi), w(\xi)) d\xi. \quad (5)$$

Оператори  $T$  і  $\hat{T}$  є цілком неперервними [3, 4].

Зауважимо, що для випадку, коли функція  $f(\mathbf{x}, u)$  монотонно зростає за  $u$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ , можна обрати  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, v)$ , а для монотонно спадної за  $u$  функції  $f(\mathbf{x}, u)$  можна покласти  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = f(\mathbf{x}, w)$ .

Розглянемо у  $\mathcal{K}_+$  конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle \alpha\omega, \beta\omega \rangle$ ,  $0 \leq \alpha < \beta$ . Оберемо  $\alpha$  і  $\beta$  так, щоб цей конусний відрізок був сильно інваріантним для гетеротонного оператора (5), тобто щоб виконувалися умови

$$\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \quad \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0. \quad (6)$$

Для оператора (5) умови (6) призводять до нерівностей

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, \alpha\omega(\xi), \beta\omega(\xi)) d\xi \geq \alpha\omega(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, \beta\omega(\xi), \alpha\omega(\xi)) d\xi \leq \beta\omega(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (8)$$

Нехай система нерівностей (7), (8) розв'язна. Тоді сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v_{n+1} = \hat{T}(v_n, w_n), \quad w_{n+1} = \hat{T}(w_n, v_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

тобто

$$v_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, v_n(\xi), w_n(\xi)) d\xi, \quad (10)$$

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, w_n(\xi), v_n(\xi)) d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

З огляду на сильну інваріантність побудованого конусного відрізка можна зробити висновок про те, що послідовність  $\{v_{n+1}(\mathbf{x})\}$  не спадає за конусом  $\mathcal{K}_+$ , а послідовність  $\{w_{n+1}(\mathbf{x})\}$  не зростає за конусом  $\mathcal{K}_+$ . Крім того, з нормальності конуса  $\mathcal{K}_+$  і цілком неперервності оператора  $\hat{T}$  впливає існування границь  $v^*(\mathbf{x})$  і  $w^*(\mathbf{x})$  цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0.$$

І нарешті припустимо, що для всіх додатних чисел  $v, w$  і будь-якому  $\tau \in (0, 1)$  виконується нерівність

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(\mathbf{x}, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (12)$$

яка гарантує  $u_0$ -псевдоугнутість оператора (4) з  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) d\xi$ .

Тоді інтегральне рівняння (3) (а отже, і крайова задача (1), (2)) має єдиний додатний розв'язок [4], до якого двобічно збігається ітераційний процес (10), (11).

Отже, справджується теорема.

**Теорема 1.** Нехай система нерівностей (7), (8) має розв'язок  $(\alpha, \beta)$  такий, що  $0 \leq \alpha < \beta$  і виконується умова (12). Тоді ітераційний процес (10), (11) з  $v_0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w_0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$  двобічно збігається до єдиної в конусі  $\mathcal{K}_+$  нерухомої точки  $u^*$  оператора  $T$ :

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0.$$

### 3. ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА

Практичне використання методу побудови двобічних ітераційних процесів методом функцій Гріна блокується тим, що функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  відома лише для незначної кількості класичних областей. При розгляді нелінійної крайової задачі (1), (2) в областях некласичної геометрії або в областях, для яких функція Гріна відома, але має складний аналітичний вираз, для побудови відповідного (1), (2) інтегрального рівняння можна використати підхід, заснований на використанні замість функції Гріна відповідної квазіфункції [8].

**Означення.** Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у  $\mathbf{R}^2$  назовемо функцію

$$G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) = g_2(r) - q(\mathbf{x}, \xi),$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $r = |\mathbf{x} - \xi|$ ,  $g_2(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$  – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа у  $\mathbf{R}^2$ ,  $q(\mathbf{x}, \xi) = g_2(\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi)})$ .

Отже,

$$G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi)}} = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi)}{r^2}}. \quad (13)$$

З властивостей функції  $\omega(\mathbf{x})$  та з (13) випливає, що квазіфункція  $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi)$  Гріна-Рвачова має такі властивості:

- а)  $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- б) є симетричною функцією:  $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) = G_{\text{quasi}}(\xi, \mathbf{x})$ ;
- в) має таку ж особливість при  $\mathbf{x} = \xi$ , що і звичайна функція Гріна;
- г) додатна в області  $\Omega$ :  $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) > 0$ ,  $\mathbf{x}, \xi \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \neq \xi$ .

Нехай  $u(\mathbf{x})$  – класичний розв'язок задачі (1), (2). Використовуючи інтегральне подання функції класу  $C^2$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left[ g(r) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} - u(\xi) \frac{\partial g(r)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \right] d_\xi s - \int_{\Omega} g(r) \Delta_\xi u(\xi) d\xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

другу формулу Гріна

$$\int_{\Omega} \left[ u(\xi) \Delta_\xi q(\mathbf{x}, \xi) - q(\mathbf{x}, \xi) \Delta_\xi u(\xi) \right] d\xi = \int_{\partial\Omega} \left[ u(\xi) \frac{\partial q(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} - q(\mathbf{x}, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \right] d_\xi s$$

та поведінку функцій  $u(\mathbf{x})$ ,  $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi)$  на  $\partial\Omega$ , від задачі (1), (2) переходимо до інтегрального рівняння Урисона

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \xi, u(\xi)) d\xi, \tag{14}$$

де

$$L(\mathbf{x}, \xi, u(\xi)) = K(\mathbf{x}, \xi)u(\xi) + G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi)f(\xi, u(\xi)),$$

$$K(\mathbf{x}, \xi) = -\Delta_{\xi}q(\mathbf{x}, \xi).$$

Рівняння (14) розглядатимемо в банаховому просторі  $C(\bar{\Omega})$ , напівупорядкованому конусом  $\mathcal{K}_+$  невід’ємних функцій.

Уведемо до розгляду нелінійний оператор  $T$ , що діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом

$$T(u) = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \xi, u(\xi)) d\xi. \tag{15}$$

З результатів робіт [3, 4] випливає, що оператор  $T$  вигляду (15) буде цілком неперервним.

Позначимо

$$K_+(\mathbf{x}, \xi) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \xi)\}, \quad K_-(\mathbf{x}, \xi) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \xi)\}.$$

Тоді

$$K(\mathbf{x}, \xi) = K_+(\mathbf{x}, \xi) - K_-(\mathbf{x}, \xi)$$

і оператор (15) набуває вигляду

$$T(u) = \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi)u(\xi) d\xi - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi)u(\xi) d\xi + \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi)f(\xi, u(\xi)) d\xi.$$

Якщо функція  $f(\mathbf{x}, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$ , де функція  $\hat{f}(x, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $\mathbf{x} \in \Omega$ , то оператор  $T$  буде гетеротонним із супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w) = \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi)v(\xi) d\xi - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi)w(\xi) d\xi + \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi)\hat{f}(\xi, v(\xi), w(\xi)) d\xi.$$

Як і у випадку методу функцій Гріна в конусі  $\mathcal{K}_+$  невід’ємних у  $C(\bar{\Omega})$  функцій виділимо сильно інваріантний для гетеротонного оператора  $T$  конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle \alpha\omega, \beta\omega \rangle$ , де  $0 \leq \alpha < \beta$ . Умови сильної інваріантності (6) призводять до системи нерівностей

$$\alpha \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi)\omega(\xi) d\xi - \beta \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi)\omega(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi)\hat{f}(\xi, \alpha\omega(\xi), \beta\omega(\xi)) d\xi \geq \alpha\omega(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \Omega, \tag{16}$$

$$\beta \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi)\omega(\xi) d\xi - \alpha \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi)\omega(\xi) d\xi +$$

$$+\int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, \beta\omega(\xi), \alpha\omega(\xi)) d\xi \leq \beta\omega(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (17)$$

У випадку розв'язності системи нерівностей (16), (17) будемо ітераційний процес за формулами (9):

$$v_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi) v_n(\xi) d\xi - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi) w_n(\xi) d\xi + \\ + \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, v_n(\xi), w_n(\xi)) d\xi, \quad (18)$$

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi) w_n(\xi) d\xi - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi) v_n(\xi) d\xi + \\ + \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, w_n(\xi), v_n(\xi)) d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

де покладемо  $v_0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w_0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ .

**Теорема 2.** Якщо система нерівностей (17), (18) має розв'язок  $(\alpha, \beta)$  такий, що  $0 \leq \alpha < \beta$ , то ітераційний процес (18), (19) збігається:  $v_n \rightarrow v^*$ ,  $w_n \rightarrow w^*$ , причому

$$\alpha\omega = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta\omega.$$

Якщо при цьому  $v^* = w^* = u^*$ , то  $u^*$  – єдина на  $\langle \alpha\omega, \beta\omega \rangle$  нерухома точка оператора (15).

Зауважимо, що перевагою побудованих двобічних ітераційних процесів є те, що на кожній  $n$ -й ітерації ми маємо зручну оцінку похибки для наближеного розв'язку

$$u_n(\mathbf{x}) = \frac{w_n(\mathbf{x}) + v_n(\mathbf{x})}{2}:$$

$$\|u^* - u_n\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w_n(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x})).$$

Тоді, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності  $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w_n(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$  і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $u^*(\mathbf{x}) \approx u_n(\mathbf{x})$ .

#### 4. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Розглянемо задачу (1), (2) з  $f(\mathbf{x}, u) = u^p$ ,  $p > 0$ . Оскільки  $f(\mathbf{x}, u) = u^p$  зростає за  $u$ , то функцію  $\hat{f}(x, v, w)$  оберемо у вигляді  $\hat{f}(x, v, w) = v^p$ .

Застосуємо до розв'язання задачі метод функцій Гріна. Умова (12) має вигляд  $(\tau v)^p > \tau v^p$ , або  $(\tau^p - \tau)v^p > 0$ , і справджується для всіх  $v > 0$ ,  $\tau \in (0, 1)$ , якщо  $0 < p < 1$ . Нерівності (7), (8), які визначають сильно інваріантний конусний відрізок, набувають вигляду

$$\alpha^{1-p}\omega(\mathbf{x}) \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \omega^p(\xi) d\xi \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (20)$$

$$\beta^{1-p}\omega(\mathbf{x}) \geq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \omega^p(\xi) d\xi \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (21)$$

а ітераційний процес (10), (11) формується за формулами

$$v_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) v_n^p(\xi) d\xi, \quad (22)$$



$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) w_n^p(\xi) d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

де  $u_0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $v_0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ .

**Теорема 3.** Якщо система нерівностей (20), (21) має розв’язок  $(\alpha, \beta)$  такий, що  $0 \leq \alpha < \beta$ , і  $0 < p < 1$ , то послідовні наближення, які формуються за схемою (22), (23), двобічно збігаються до єдиного додатного розв’язку задачі (1), (2) з  $f(\mathbf{x}, u) = u^p$ .

Застосуємо тепер до розв’язання задачі метод квазіфункцій Гріна-Рвачова для значень  $p$ , які задовольняють нерівність  $0 < p < 1$ . Нерівності (16), (17), які визначають сильно інваріантний конусний відрізок, набувають вигляду

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi - \beta \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi + \\ & + \alpha^p \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) \omega^p(\xi) d\xi \geq \alpha \omega(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \beta \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi - \alpha \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi) \omega(\xi) d\xi + \\ & + \beta^p \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) \omega^p(\xi) d\xi \leq \beta \omega(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (25)$$

а ітераційний процес (18), (19) формується за формулами

$$v_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi) v_n(\xi) d\xi - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi) w_n(\xi) d\xi + \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) v_n^p(\xi) d\xi, \quad (26)$$

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \xi) w_n(\xi) d\xi - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \xi) v_n(\xi) d\xi + \int_{\Omega} G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) w_n^p(\xi) d\xi, \quad (27)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $u_0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $v_0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$ .

**Теорема 4.** Якщо система нерівностей (24), (25) має розв’язок  $(\alpha, \beta)$  такий, що  $0 \leq \alpha < \beta$  і  $0 < p < 1$ , то послідовні наближення, які формуються за схемою (26), (27), двобічно збігаються до єдиного додатного розв’язку задачі (1), (2) з  $f(\mathbf{x}, u) = u^p$ .

Обчислювальний експеримент було проведено для значень параметра  $p$  від 0,1 до 0,9 з кроком 0,1 в області  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}$ . Функція Гріна, квазіфункція Гріна-Рвачова і функція  $\omega(x_1, x_2)$ , побудована методом  $R$ -функцій, мають відповідно вигляд

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k x_1 \sin \pi m x_2 \sin \pi k \xi_1 \sin \pi m \xi_2}{k^2 + m^2},$$

$$G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi)}{r^2}},$$

де  $\omega(\mathbf{x}) = [x_1(1-x_1)] \wedge_0 [x_2(1-x_2)]$ ,  $\wedge_0$  – знак  $R$ -кон’юнкції [8].

Ітерації припинялись, коли у значенні  $\frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_n(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x}))$  незмінними ставали чотири значущі цифри після коми. Значення  $\alpha$ ,  $\beta$ , кількість зроблених ітерацій  $N$  і норма наближеного розв'язку  $u_N(\mathbf{x})$  залежно від  $p$  при застосуванні методу функцій Гріна наведені в таблиці 1, а при застосуванні методу квазіфункцій Гріна-Рвачова – у таблиці 2.

Таблиця 1 – Результати реалізації методу функцій Гріна

$p$	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u_N\ _{C(\bar{\Omega})}$
0,1	0,222	0,367	4	$0,5263 \cdot 10^{-1}$
0,2	0,135	0,248	5	$0,3486 \cdot 10^{-1}$
0,3	$0,722 \cdot 10^{-1}$	0,150	6	$0,2051 \cdot 10^{-1}$
0,4	$0,313 \cdot 10^{-1}$	$0,764 \cdot 10^{-1}$	7	$0,1010 \cdot 10^{-1}$
0,5	$0,976 \cdot 10^{-2}$	$0,299 \cdot 10^{-1}$	12	$0,3749 \cdot 10^{-2}$
0,6	$0,170 \cdot 10^{-2}$	$0,732 \cdot 10^{-2}$	18	$0,8472 \cdot 10^{-3}$
0,7	$0,941 \cdot 10^{-4}$	$0,704 \cdot 10^{-3}$	25	$0,7098 \cdot 10^{-4}$
0,8	$0,288 \cdot 10^{-6}$	$0,653 \cdot 10^{-5}$	41	$0,4980 \cdot 10^{-6}$
0,9	$0,841 \cdot 10^{-14}$	$0,523 \cdot 10^{-11}$	82	$0,1718 \cdot 10^{-12}$

Таблиця 2 – Результати реалізації методу квазіфункцій Гріна-Рвачова

$p$	$\alpha$	$\beta$	$N$	$\ u_N\ _{C(\bar{\Omega})}$
0,1	0,140	0,398	12	$0,5314 \cdot 10^{-1}$
0,2	$0,622 \cdot 10^{-1}$	0,274	14	$0,3523 \cdot 10^{-1}$
0,3	$0,131 \cdot 10^{-1}$	0,172	17	$0,2076 \cdot 10^{-1}$
0,4	$0,856 \cdot 10^{-2}$	$0,894 \cdot 10^{-1}$	19	$0,1025 \cdot 10^{-1}$
0,5	$0,486 \cdot 10^{-2}$	$0,365 \cdot 10^{-1}$	29	$0,3820 \cdot 10^{-2}$
0,6	$0,146 \cdot 10^{-2}$	$0,891 \cdot 10^{-2}$	42	$0,8683 \cdot 10^{-3}$
0,7	$0,227 \cdot 10^{-3}$	$0,908 \cdot 10^{-3}$	58	$0,7348 \cdot 10^{-4}$
0,8	$0,288 \cdot 10^{-5}$	$0,952 \cdot 10^{-5}$	95	$0,5261 \cdot 10^{-6}$
0,9	$0,315 \cdot 10^{-11}$	$0,984 \cdot 10^{-11}$	152	$0,2214 \cdot 10^{-12}$

Як бачимо, результати, отримані обома методами, майже збігаються. Різницю можна пояснити тим, що при реалізації методу функцій Гріна точна функція замінювалася частковою сумою відповідного ряду. Крім того, зауважимо, що побудований для методу квазіфункцій Гріна-Рвачова інваріантний конусний відрізок виявився дещо ширшим, ніж для методу функцій Гріна. Це призвело до більш повільної збіжності методу квазіфункцій Гріна-Рвачова.

## ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто два методи побудови ітераційних процесів, які двобічно збігаються до додатних розв'язків нелінійних крайових задач вигляду (1), (2). Перший метод використовує точну функцію Гріна і дозволяє не тільки побудувати двобічні наближення, а й провести у ряді випадків теоретичне дослідження поставленої задачі. Другий метод використовує

квазіфункцію Гріна-Рвачова і також дозволяє за деяких умов побудувати двобічні наближення до додатного розв'язку задачі. Цей метод стає в нагоді у випадках, коли для області, у якій розглядається задача, функція Гріна невідома або має складний аналітичний вираз. Порівняння запропонованих методів та їх ефективність проілюстрована серією обчислювальних експериментів. Методи функцій Гріна і квазіфункцій Гріна-Рвачова можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач, математичними моделями яких є нелінійні крайові задачі. Крім того, запропоновані методи можуть бути поширені на крайові задачі для систем нелінійних еліптичних рівнянь та еліптичних рівнянь вищих порядків.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Chen G., Zhou J., Ni W.-M. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations. *Int. J. Bifurcation Chaos*. 2000. 10, № 7. P. 1565–1612.
2. Matinfar M., Nemati K. A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem. *International Mathematical Forum*. 2008. 3 (17). P. 811–816.
3. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва: Физматгиз, 1962. 394 с.
4. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
5. Курпель Н. С., Шувар Б. А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. Киев: Наук. думка, 1980. 268 с.
6. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2013. № 1. С. 35–42.
7. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 107–120.
8. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.

### REFERENCES

1. Chen, G., Zhou, J. & Ni, W.-M. (2000). Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 10, No. 7, pp. 1565-1612.
2. Matinfar, M. & Nemati, K. (2008). A numerical extension on a convex nonlinear elliptic problem. *International Mathematical Forum*, 3 (17), pp. 811-816.
3. Krasnosel'skij, M. A. (1962). *Positive Solutions of Operator Equations*. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
4. Opojtcsev, V. I. & Khurodze, T.A. (1984). *Nonlinear Operators in Spaces with a Cone*. Tbilisi: Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta (in Russian).
5. Kurpel', N. S. & Shuvar, B. A. (1980). *Twosided operator inequalities and their application*. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
6. Kolosova, S. V., Lukhanin, V. S. & Sidorov, M. V. (2013). About construction iterative methods of boundary value problems for nonlinear elliptic equations. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, No. 1, pp. 35 – 42 (in Russian).
7. Kolosova, S. V., Lukhanin, V. S. & Sidorov, M. V. (2015). On the construction of two-sided approximations to the positive solution of the Lane-Emden equation. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, No. 3, pp. 107 – 120 (in Russian).
8. Rvacev, V. L. (1982). *Theory of R-functions and its some applications*. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).

УДК 539.3

## ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ З АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОЮ КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ПОБЛИЗУ ЇЇ ВЕРШИН

<sup>1</sup>Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, <sup>1</sup>Матулка М. І., аспірант, <sup>2</sup>Білаш О. В., к. е. н, викладач

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна

<sup>2</sup>Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного,  
вул. Героїв Майдану, 32, м. Львів, 79012, Україна

slobkolia@gmail.com, maryana.matulka@gmail.com, oksana.opanasovych@gmail.com

У роботі побудовано розв'язок задачі про двовісний розтяг нескінченної ізотропної пластини з абсолютно жорсткою круговою шайбою та радіальною тріщиною. При розв'язуванні задачі припускалося, що під дією рівномірно розподіленого розтягуювального навантаження на нескінченності біля вершин тріщини утворилися прямолінійні пластичні зони. Розв'язок задачі побудований з використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів і зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно стрибків переміщень у плоскій задачі, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі та побудовані графічні залежності довжини пластичних зон при різних параметрах задачі.

*Ключові слова:* тріщина, розтяг, жорстка шайба, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, пластична зона.

## ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ КРУГОВОЙ ШАЙБОЙ И РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН ОКОЛО ЕЕ ВЕРШИН

<sup>1</sup>Слободян Н. С., к. ф.-м. н., доцент, <sup>1</sup>Матулка М. И., аспирант,  
<sup>2</sup>Білаш О. В., к. е. н, преподаватель

<sup>1</sup>Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина

<sup>2</sup>Национальная академия сухопутных войск имени гетмана Петра Сагайдачного,  
ул. Героев Майдана, 32, г. Львов, 79012, Украина

slobkolia@gmail.com, maryana.matulka@gmail.com, oksana.opanasovych@gmail.com

В работе исследуется задача о двухосном растяжении бесконечной изотропной пластины с абсолютно жесткой круговой шайбой и радиальной трещиной. При решении задачи считалось, что под действием равномерно распределенной нагрузки на бесконечности около вершин трещины образовались прямолинейные пластические зоны. Решение задачи построено с использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов и сведено к системе сингулярных интегральных уравнений относительно скачков перемещений, которая решена численно с помощью метода механических квадратур. Проведен численный анализ задачи и построены графические зависимости длины пластических зон при разных параметрах задачи.

*Ключевые слова:* трещина, растяжение, жёсткая шайба, изотропная пластинка, комплексные потенциалы, пластическая зона.

## THE BIAxIAL TENSION OF THE PLATE WITH A CIRCLE WASHER AND A RADIAL CRACK TAKING INTO ACCOUNT THE PLASTIC ZONES NEAR ITS TOPS

<sup>1</sup>Slobodyan M. S., Ph. D. in Physics and Maths, associate professor, <sup>1</sup>Matulka M. I., postgraduate,  
<sup>2</sup>Bilash O. V., Ph. D. in Economic Sciences, lecturer

<sup>1</sup>Ivan Franko National University of Lviv,  
1, Universytetska Str., Lviv, 79000, Ukraine

<sup>2</sup>Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy,  
32, Heroiv Maydana Str., 32, Lviv, 79000, Ukraine

slobkolia@gmail.com, maryana.matulka@gmail.com, oksana.opanasovych@gmail.com

In the paper was researched the problem of biaxial tension of the infinite isotropic plate with the absolutely rigid washer and the radial crack. On the boundary of an absolutely rigid circular washer the conditions for perfect mechanical contact are implemented. The shores of the crack is free of external load. The vectors of the applied to the plate evenly distributed tensile load are perpendicular and parallel to the crack. When solving the problem, it was assumed that under the evenly distributed tensile load at infinity, rectilinear plastic zones were formed at the vertices of the crack. Problem solved with such boundary conditions:  $u_{rr} = 0$ ,  $u_{r\theta} = 0$ ,  $t \in L$ ;  $\sigma_{x_1 y_1}^{\pm} = 0$ ,  $x_1 \in \tilde{L}_1$ ;  $\sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = 0$ ,  $x_1 \in L_1$ ;  $\sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(1)}$ ,  $x_1 \in L'_1$ ;  $\sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(2)}$ ,  $x_1 \in L''_1$ , where  $u_{rr}$  and  $u_{r\theta}$  – components of the vector of displacements in the polar coordinate system,  $\sigma_{x_1 y_1}$ ,  $\sigma_{y_1 y_1}$  – components of stress tensor in the Cartesian coordinate system;  $\sigma_0^{(1)}$  i  $\sigma_0^{(2)}$  – unknown normal stresses in the plastic zones for which the Miesz's plasticity conditions are fulfilled in the form of a surface layer,  $L$  – the boundary of an absolutely rigid circular washer,  $L_1$  – area, where placed crack,  $L'_1$ ,  $L''_1$  – area, where placed plastic zone,  $\tilde{L}_1 = L_1 \cup L'_1 \cup L''_1$ ; "+" and "-" marked limit value at the appropriate value on  $y \rightarrow \pm 0$ ;  $[f] = f^+ - f^-$ . Using the methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials Kolosov-Muskhelishvili constructed linear conjugation problems. The obtained linear conjugation problems are solved analytically and a system of singular integral equations with respect to jumps of displacements on the banks of the crack and in plastic zones is obtained. This system of singular integral equations, using the method of mechanical quadrature's, is reduced to a system of algebraic equations, which is numerically solved by the Gaussian method. A numerical analysis of the problem was carried out and graphic dependences of the length of plastic zones were constructed under various geometric parameters of the problem and different values of the uniformly distributed stress expansion at infinity. In some cases, the obtained results coincided with the known results obtained in the scientific works by other authors.

*Key words: crack, tension, rigid washer, isotropic plate, complex potentials, plastic zone.*

### ВСТУП

У машинобудуванні та інших галузях техніки широко використовують пластинчасті елементи конструкцій. Їх дієздатність і експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів та включень, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Під час експлуатації пластинчатих елементів важливо знати, яким чином такі дефекти впливають на міцність та механічні характеристики конструкції.

Розв'язками плоских задач з отворами, шайбами та тріщинами за розтягу пластини займалися багато авторів. Проте в цих роботах не враховувалися пластичні зони, які можуть утворитися на продовженні тріщин. У [1] проведено огляд досліджень для задач розтягу тіл з тріщиною, у вершині якої утворюються пластичні зони, та наведено критерії руйнування. У статті [2] досліджено одновісний розтяг пластини з наскрізною тріщиною у пластичній постановці. У роботі [3] з використанням умови пластичності Мізеса визначена пластична область на продовженні тріщини у пластині. Задачі розтягу однорідної та кусково-однорідної

пластини з однією або двома прямолінійними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля вершин розв'язано у [4-6].

У нашій роботі досліджується задача про двовісний розтяг ізотропної пластини з абсолютно жорсткою круговою шайбою та радіальною тріщиною з урахуванням лінійчатих пластичних зон на її продовженні.

### ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо безмежну ізотропну пластину завтовшки  $2h$  з абсолютно жорсткою круговою шайбою радіуса  $R$  та прямолінійною тріщиною завдовжки  $2l$ . Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Відстань від межі кругового отвору до центру тріщини позначимо  $d$ . Вважається, що під дією рівномірно розподіленого розтягуювального навантаження на нескінченності  $P_1$  і  $P_2$  (див. рис. 1) біля вершин тріщини утворилися пластичні зони завдовжки  $w_1$  і  $w_2$ . У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат  $Ox\tilde{z}$  з початком у центрі шайби, направивши вісь  $Ox$  вздовж тріщини, а вісь  $O\tilde{z}$  – перпендикулярно до неї, та полярну систему координат з центром у точці  $O$  та полярною віссю  $Ox$ , а в центрі тріщини виберемо декартову систему координат  $O_1x_1y_1$ . Межу шайби позначимо через  $L$ , лінію, де розміщена тріщина –  $L_1$ , пластичні зони –  $L'_1$  і  $L''_1$ , відстань між центром отвору та центром тріщини –  $x_0$ ;  $\tilde{L}_1 = L_1 \cup L'_1 \cup L''_1$ .

Розв'язок задачі будемо визначати за таких крайових умов:

$$u_{Pr} = 0, \quad u_{P\theta} = 0, \quad t \in L; \quad (1)$$

$$\sigma_{x_1y_1}^{\pm} = 0, \quad x_1 \in \tilde{L}_1; \quad \sigma_{y_1y_1}^{\pm} = 0, \quad x_1 \in L_1; \quad \sigma_{y_1y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(1)}, \quad x_1 \in L'_1; \quad \sigma_{y_1y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(2)}, \quad x_1 \in L''_1, \quad (2)$$

де  $u_{Pr}$  і  $u_{P\theta}$  – компоненти вектора переміщень у полярній системі координат,  $\sigma_{x_1y_1}$ ,  $\sigma_{y_1y_1}$  – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат;  $\sigma_0^{(1)}$  і  $\sigma_0^{(2)}$  – невідомі нормальні напруження у пластичних зонах, для яких виконуються умови пластичності Треска [7].

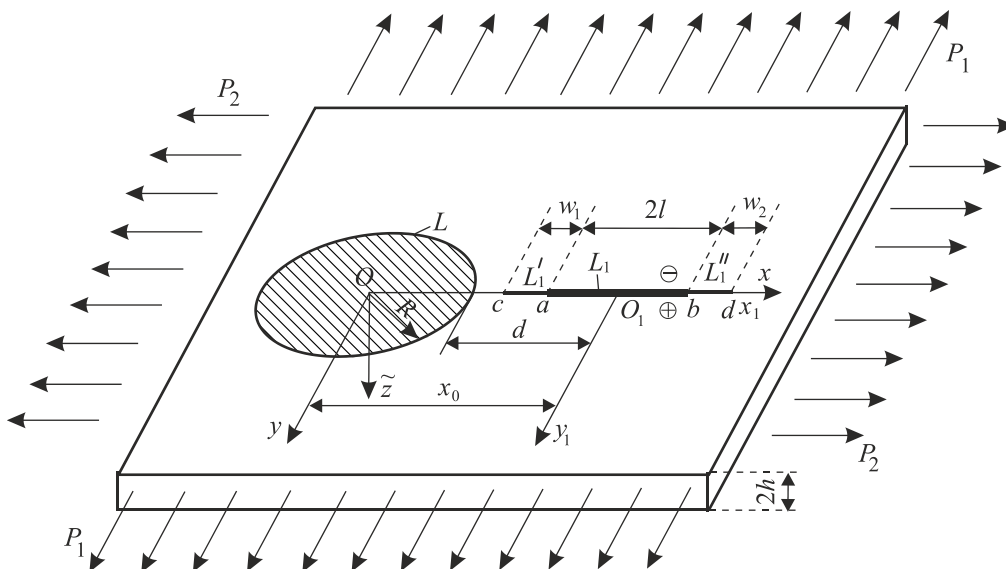


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини з пластичними зонами

### РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [8], аналогічним методом як у [9], задовольняючи крайові умови (1)-(2), розв'язок задачі зведений до задач лінійного

спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень на берегах тріщини  $G(\eta)$ , яка набуде вигляду:

$$\int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi)\} G_1(\eta) d\eta = P(\xi) + H(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi) - S(\eta, \xi)\} G_2(\eta) d\eta = 0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (4)$$

де

$$R(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi(\eta - \xi)} + R^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) R^{II}(\eta, \xi) + \left(X - \frac{1}{X}\right) R^{III}(\eta, \xi) + \frac{1}{X^2} R^{IV}(\eta, \xi),$$

$$S(\eta, \xi) = S^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) S^{II}(\eta, \xi) + \left(X - \frac{1}{X}\right) S^{III}(\eta, \xi) + \frac{1}{X^2} S^{IV}(\eta, \xi),$$

$$R^I(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi\kappa X} \cdot \frac{1}{TX - 1}, \quad S^I(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi\kappa} \left\{ \frac{\lambda}{T} + \frac{\lambda(X^2 - 1)}{X(TX - 1)^2} - \frac{\lambda}{X} \cdot \frac{X^2 + 1}{TX - 1} \right\},$$

$$R^{II}(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi\kappa} \left\{ \frac{\lambda}{T} + \frac{\lambda(X^2 - 1)}{X(TX - 1)^2} - \frac{\lambda}{X} \cdot \frac{X^2 + 1}{TX - 1} \right\}, \quad S^{II}(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi\kappa X} \cdot \frac{\lambda}{TX - 1},$$

$$R^{III}(\eta, \xi) = -\frac{1}{\pi\kappa} \frac{\lambda}{(TX - 1)^2} \left\{ \frac{2}{X^2} + \frac{TX - 1}{X^2} - \frac{1}{X^2} \frac{X^2 - 1}{TX - 1} \right\},$$

$$S^{III}(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi\kappa X^2} \frac{\lambda}{TX - 1} \left(1 + \frac{1}{2(TX - 1)}\right), \quad R^{IV}(\eta, \xi) = -\frac{\kappa\lambda X}{2\pi(TX - 1)}, \quad S^{IV}(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{2\pi T},$$

$$P(\xi) = 2\gamma + \kappa\gamma' + \frac{\gamma}{X^2} + \frac{\kappa\gamma'}{X^2} + \frac{(2X^2 - 3)}{X^4} \gamma', \quad \gamma = \frac{P_1^* + P_2^*}{4}, \quad \gamma' = -\frac{P_1^* - P_2^*}{2}, \quad P_1^* = \frac{P_1}{\sigma_Y}, \quad P_2^* = \frac{P_2}{\sigma_Y},$$

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & -1 \leq \xi \leq -1 + w_1^*, \\ 0, & -1 + w_1^* < \xi < 1 - w_2^*, \quad w_1^* = \frac{w_1}{l}, \quad w_2^* = \frac{w_2}{l}, \\ 1, & 1 - w_2^* \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$T = 1 + \varepsilon + \lambda\eta, \quad X = 1 + \varepsilon + \lambda\xi, \quad \lambda = l/R, \quad \sigma_0^{(1)} = \sigma_0^{(2)} = \sigma_Y, \quad \frac{x_0}{R} = 1 + \frac{d}{R} = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{d}{R},$$

$$G(x) = G_1(x) + iG_2(x) = \frac{hg'(x)}{\sigma_Y}, \quad g'(x) = \frac{2\mu}{(1+\kappa)i} [\partial_x(u_{II} + iv_{II})], \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu},$$

$G_1(x)$ ,  $G_2(x)$  – дійсні невідомі функції;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\sigma_Y$  – межа текучості матеріалу пластини.

Зауважимо, що ядра  $R(\eta, \xi)$  і  $S(\eta, \xi)$  збігаються з відповідними ядрами, отриманими в монографії [10] іншим підходом.

Виходячи з умов однозначності переміщень при обході контуру тріщини, отримаємо

$$\int_{-1}^1 \{G_1(\eta) + iG_2(\eta)\} d\eta = 0. \quad (5)$$

Коефіцієнти інтенсивності зусиль (КІЗ)  $k = k_1 - ik_2$  можна обчислити за формулами [10]

$$k^\pm = \mp h \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)g'(x)), \quad f(x) = \sqrt{(l^2 - x^2)/l}.$$

Оскільки у вершинах тріщини КІЗ рівні нулеві, тоді

$$k^a = 0, \quad k^b = 0,$$

то

$$G(-1) = 0, \quad G(1) = 0. \quad (6)$$

Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь (3)-(6) за допомогою методу механічних квадратур [10] зведена до наступної системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $U_i(\eta_m)$  ( $i=1,2$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M (R(\eta_m, \xi_r) + S(\eta_m, \xi_r)) U_1(\eta_m) &= P(\xi_r) + H(\xi_r), \quad r = \overline{1, M-1}, \\ \sum_{m=1}^M (R(\eta_m, \xi_r) - S(\eta_m, \xi_r)) U_2(\eta_m) &= 0, \quad r = \overline{1, M-1}, \\ \sum_{m=1}^M U_1(\eta_m) &= 0, \quad \sum_{m=1}^M U_2(\eta_m) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{де } \eta_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad \xi_r = \cos \frac{\pi r}{M}, \quad T_m = 1 + \varepsilon + \lambda \eta_m, \quad X_r = 1 + \varepsilon + \lambda \xi_r,$$

$$G_i(\eta) = \frac{U_i(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad i=1,2.$$

Зведені КІЗ  $k^*$  обчислюються за формулою [10]

$$k^* = \frac{hk}{M_y^\infty \sqrt{l}} = \mp u(\pm 1),$$

де

$$\begin{aligned} u(1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} (U_1(\eta_m) + iU_2(\eta_m)) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi, \\ u(-1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} (U_1(\eta_m) + iU_2(\eta_m)) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Урахувавши (6), із (8) отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} U_j(\eta_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi &= 0, \quad j=1,2, \\ \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} U_j(\eta_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi &= 0, \quad j=1,2. \end{aligned} \quad (9)$$

Розв'язування задачі зведено до системи алгебраїчних рівнянь (7), (9).



### ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

На основі розв'язку системи алгебраїчних рівнянь (7), (9) був проведений числовий аналіз задачі при  $\nu = 0.3$ , який поданий на рис. 2.

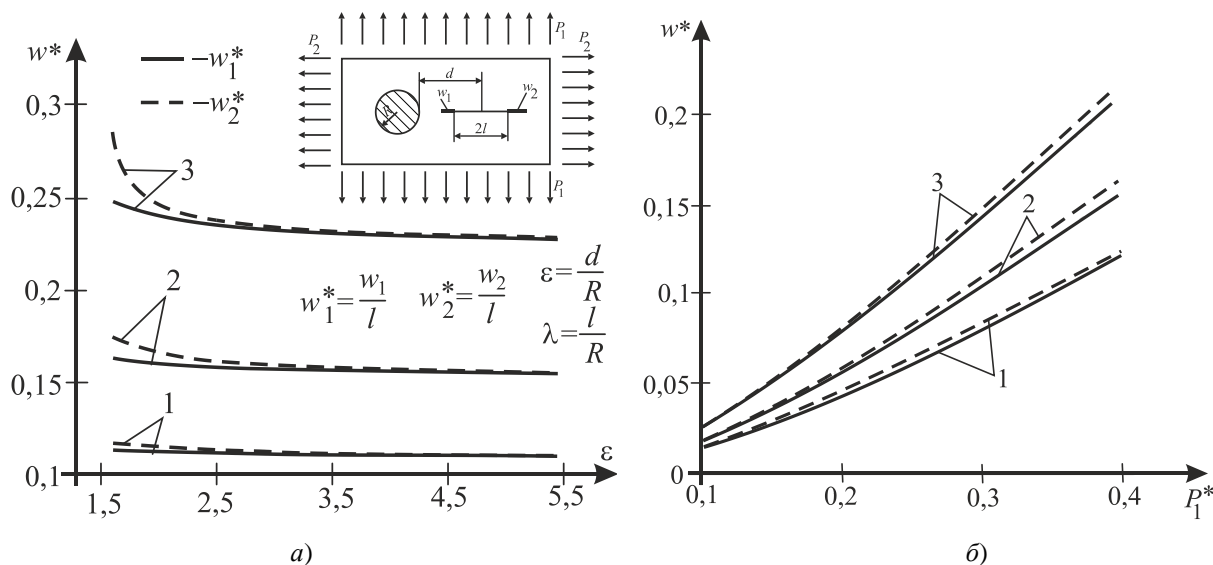


Рис. 2. Безрозмірна довжина пластичних зон  $w^*$  від відносної відстані між центром тріщини на межу шайби  $\epsilon$  (рис. а) та від зовнішнього навантаження  $P_1^*$  (рис. б)

На рис. 2 наведена графічна залежність безрозмірної довжини пластичних зон  $w^*$  від відносної відстані між центром тріщини на межу шайби  $\epsilon$  (рис. а) та від зовнішнього навантаження  $P_1^*$  (рис. б). Рис. а) побудовано при  $P_2^* = 0.3$ ,  $\lambda = 1$ , при чому крива 1 побудована при  $P_1^* = 0.4$ , крива 2 – при  $P_1^* = 0.5$ , крива 3 – при  $P_1^* = 0.6$ . Рис. б) побудовано при  $\epsilon = 2$ ,  $\lambda = 1$ , при чому крива 1 побудована при  $P_2^* = 0.4$ , крива 2 – при  $P_2^* = 0.4$ , крива 3 – при  $P_2^* = 0.4$ . Як бачимо з рис. а), при віддаленні тріщини від шайби довжини пластичних зон зменшуються і прямують до випадку для однієї ізольованої тріщини. З рис. б) бачимо, що зі збільшенням навантаження  $P_1^*$  довжини пластичних зон збільшуються.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Витвицький П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения. (Обзор). *Пробл. Прочности*. 1973. № 2. С. 3–18.
2. Костюшко І. А., Куземко В. А. Пружнопластична пластина з тріщиною нормального відриву. *Мат. методи та фіз. мех. поля*. 2001. 44, № 2. С. 123–126.
3. Castro et alii J. T. P. Characterization of crack tip stress fields. *Forni di Sopra (UD)*. 2011. P. 58–65.
4. Nykolyshyn M. M., Opanasovych V. K., Kurotchyn L. R., Slobodyan M. S. Biaxial tension of a homogeneous isotropic plate with two equal coaxial cracks with regard for plastic zones near their tips. *Journal of Mathematical Sciences*. 2010. Vol. 168, N. 5. P. 643–652.
5. Николишин М. М., Опанасович В. К., Куротчин Л. Р., Слободян М. С. Знаходження довжини пластичних зон біля вершин наскрізної тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів при розтязі кусково-однорідної ізотропної пластини. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. 2012. Вип. 136. С. 294–300.
6. Николишин М. М., Опанасович В. К., Куротчин Л. Р., Слободян М. С. Двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з двома тріщинами на межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їхніх вершин. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2014. № 6. С. 67–72.
7. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: СПОЛОМ, 2003. 320 с.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.

9. Опанасович В., Слободян М. Двовісний згин безмежної пластини з абсолютно жорсткою шайбою та тріщиною, береги якої контактують. *Вісник Львівського державного аграрного університету*. 2007. № 8. С. 75–87.
10. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.

### REFERENCES

1. Vitvitskiy, P. M., Panasuk, V. V. & Yarema, S. Ya. (1973). Plastic deformations in the vicinity of cracks and destruction criteria. *Problemi prochnosti*, No. 2, pp. 3-18.
2. Kostyushko, I. A. & Kuzemko, V. A. (2001). Elastic plate with a crack normal detachment. *Matematichni metodi ta fiziko-mehanichni polia*, 44, No. 2, pp. 123-126.
3. Castro et alii J.T.P. (2011). Characterization of crack tip stress fields. *Forni di Sopra (UD)*, pp. 58-65.
4. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2010). Biaxial tension of a homogeneous isotropic plate with two equal coaxial cracks with regard for plastic zones near their tips. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 168, No. 5, pp. 643-652.
5. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2012). Finding the length of plastic zones near the top straight-through cracks in the materials at the interface roztyazi piecewise homogeneous isotropic plate. *Metodi rozviazuvannia prikladnih zadach mehaniki deformivnogo tverdogo tila*, No. 136, pp. 294-300.
6. Nykolyshyn, M. M., Opanasovych, V. K., Kurotchyn, L. R. & Slobodyan, M. S. (2014). Biaxial tension piecewise homogeneous plate with two cracks at the interface of materials based on plastic zones near their vertices. *Fiziko-himichna mehanika materialiv*, No. 6, pp. 67-72.
7. Kushnir, R. M., Nikolishin, M. M. & Osadchuk, V. A. (2003). Elastic and elastic-plastic shells with boundary condition defects. Lviv: SPOLOM.
8. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.
9. Opanasovich, V. & Slobodyan, M. (2007). Biaxial bending of plate with a rigid circular washer and crack with considering contact of it's edges. *Visnik Lvivskogo dergavnogo agrarnogo universitetu*, No. 8, pp. 75-87.
10. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsishin, A. P. (1976). Distribution of stresses around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka.

УДК 539.3

## АНАЛІТИКО-ЧИСЕЛЬНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ

Спиця О. Г.

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

sputytsa.o.g@gmail.com

Метод функцій податливості поширено на розв'язання основних граничних задач для багатошарових плит з плоскопаралельними, ізотропними, зчепленими, необмеженими в плані шарами. Задача розв'язується методом двовимірного перетворення Фур'є. Напружений стан кожного шару визначається шістькою допоміжних функцій, які пов'язані з трансформантами напружень і переміщень точок верхньої границі шару за допомогою спеціальних рекурентних співвідношень, що містять функції податливості. У статті запропоновано матричний метод визначення функцій податливості плити, досліджено їх властивості й особливості чисельної реалізації побудови рекурентних співвідношень. Запропонований алгоритм розв'язку поставленої задачі реалізовано для тришарової плити, яка знаходиться під дією нормальних навантажень, прикладених до верхньої та нижньої границь плити.

*Ключові слова: багатошарова плита, допоміжні функції шару, матриці податливості, рекурентні співвідношення, трансформанти напружень та переміщень, метод скінченних елементів.*

## АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОСНОВНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛИТ

Спица О. Г.

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

sptysa.o.g@gmail.com

Метод функций податливости распространен на решение основных граничных задач для многослойных плит с плоскопараллельными, изотропными, сцепленными, неограниченными в плане слоями. Задача решается методом двумерного преобразования Фурье. Напряженное состояние каждого слоя определяется шестеркой вспомогательных функций, связанных с трансформантами напряжений и перемещений точек верхней границы слоя с помощью специальных рекуррентных соотношений, содержащих функции податливости. В статье предложен матричный метод определения функций податливости плиты, исследованы их свойства и особенности численной реализации построения рекуррентных соотношений. Предложенный алгоритм решения поставленной задачи реализован для трехслойной плиты, находящейся под действием нормальных нагрузок, приложенных к верхней и нижней границам плиты.

*Ключевые слова: многослойная плита, вспомогательные функции слоя, матрицы податливости, рекуррентные соотношения, трансформанты напряжений и перемещений, метод конечных элементов.*

## ANALYTIC-NUMERIC APPROACH FOR SOLVING OF BOUNDARY VALUES PROBLEMS' OF MULTILAYERED PLATES

Sptysia O.

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

sptysa.o.g@gmail.com

The investigation of the stress-strain state of multilayered plates is actively employed in industrial and civil engineering. Such plates are an object of modern researches devoted to problems contact mechanics. At the same time, there is growing interest in methods for analytic determining of multilayered plates' stress-strain state.

One of the most efficient method for analytic investigation of the boundary value problems for elastic multilayer plates is the method of compliance functions. A compliance function is a function that depends on a parameter used for an integral transform, but the function doesn't depend on applied loads. In the article, the method of compliance functions is extended to the solution of the main boundary problems for multilayer plates with planar parallel, isotropic, coupled, plates with unlimited layers. The problem is solved by the method of a two-dimensional Fourier transform. The stress state of each layer is determined by the six auxiliary functions that are associated with stress transformants and displacements of the points of the upper layer's boundary using means of special recurrence relations containing compliance functions. A matrix method is suggested for determining a compliance function. The properties of compliance functions and recurrence relations' numerical implementation are investigated.

In addition, in the article based on compliance functions analytic method is compared with the finite elements method. In this comparison, we investigate the stress-strain state of three-layered plate that loaded by normal forces.

*Key words: multilayer plate, auxiliary functions of a layer, matrices of compliance, recurrence relations, transformations of stresses and displacements, the finite element method.*

### ВСТУП

Визначення напружено-деформованого стану багатослойних плит, а також уточнення існуючих розрахункових схем реальних плитних конструкцій пов'язане з розширенням області застосування неоднорідних, у тому числі й багатослойних плит, у промисловому і цивільному будівництві та зумовлює досить широкий спектр прикладних задач механіки. У машино-, літако-, і кораблебудуванні, в електротехнічному та хімічному машинобудуванні, нафтовидобувній, металургійній та інших галузях промисловості як раціональний конструктивний елемент широко використовується штучно створений матеріал з шаруватою

структурою. При цьому, розширення сфери застосування шаруватих елементів пояснюється, з одного боку, нагальними проблемами інженерної практики, і, з іншого боку, розвитком і вдосконаленням сучасних методів дослідження. У зв'язку з цим зростає інтерес до побудови точних розв'язків задачі про визначення їх напружено-деформованого стану, з якими можна порівнювати розв'язки, побудовані за допомогою відомих чисельних методів.

Перевага багатошарової моделі реальних середовищ полягає в тому, що вона може відобразити різкі зміни механічних властивостей основи після переходу від одного шару до іншого. Крім того, багатошаровими основами можна апроксимувати системи, пружні властивості яких неперервно змінюються з глибиною за будь-яким законом.

Найбільш ефективним серед точних методів розв'язання основних граничних задач для пружних багатошарових середовищ є метод функцій податливості, запропонований для розв'язання основних задач теорії пружності для багатошарових основ Ю. А. Шевляковим, А. К. Приварниковим [5]. Функції податливості залежать від параметра використаного інтегрального перетворення, але не залежать від навантажень, прикладених до основи. Тому вони можуть бути визначені до розв'язання широкого кола граничних задач.

Необхідно зауважити, що при розв'язанні граничних задач теорії пружності для багатошарових основ методом функцій податливості не доводиться мати справу з будь-якими допоміжними системами лінійних алгебраїчних рівнянь. Трансформанти напружень та переміщень у довільному шарі основи можуть бути представлені безпосередньо через задані на його верхній межі напруження та переміщення за допомогою спеціальних рекурентних співвідношень, що містять функції податливості. Точний розв'язок основних граничних задач теорії пружності для багатошарових основ отримується у вигляді інтегралів Фур'є або Ханкеля. Дотепер цим методом розв'язана достатньо велика кількість граничних задач теорії пружності для багатошарових основ, у яких нижній шар є пружним або абсолютно жорстким півпростором.

Запропонований підхід є поширенням метода функцій податливості на багатошарові плити з плоскопаралельними, ізотропними, необмеженими в плані шарами.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Під багатошаровою плитою розуміється пакет із скінченного числа невагомих однорідних ізотропних шарів. Кожен шар – це частина простору, обмежена двома паралельними площинами. Кожен шар характеризується товщиною  $h$  та двома пружними константами ( $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона). Сусідні шари плити зчеплені. Нумерацію шарів проводимо зверху вниз, починаючи з одиниці. Усі величини, що відносяться до цього шару, будемо позначати нижнім індексом  $k$ . У кожному шарі введемо локальну прямокутну декартову систему координат  $O_k X_k Y_k Z_k$  із початком на верхній межі шару так, щоб осі  $Z_k$  усіх систем координат збігалися і були спрямовані всередину шару (рис. 1). Усі осі  $X_k$  ( $Y_k$ ) мають однаковий напрямок. Задача полягає у визначенні напружень і переміщень у шарах плити, якщо на поверхні плити відомі напруження.

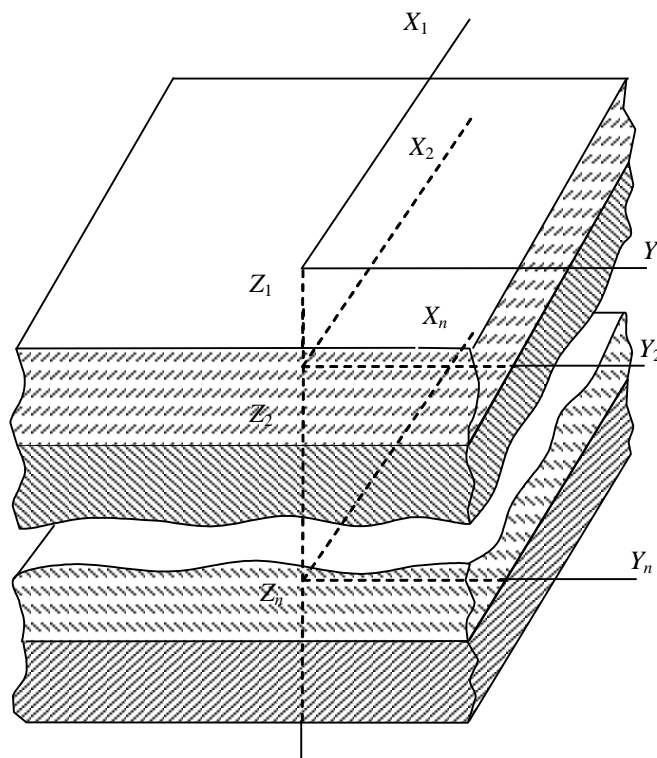


Рис. 1. Багатошарова плита

### МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розглянемо шар із номером  $k$ . Рівняння рівноваги у переміщеннях піддамо двовимірному перетворенню Фур'є по змінних  $x$  та  $y$ :  $F(f(x, y)) = \bar{f}(\xi, \eta)$ . Одержимо систему двох звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами щодо трансформант переміщень  $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$ . Загальний розв'язок цієї системи можна виразити через шість довільних функцій  $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k \ \delta_k \ \tilde{\delta}_k)^T$  і  $\bar{\beta}_k = (\beta_k \ \gamma_k \ \tilde{\gamma}_k)^T$  (будемо називати їх допоміжними функціями шару), що залежать від  $\xi$  і  $\eta$  та пов'язані з трансформантами напружень і переміщень точок верхньої межі шару такими співвідношеннями [2, 3]:

$$\alpha_k = \bar{\sigma}_{zk} \Big|_{z=0}; \quad \delta_k = -\frac{1}{p} (i\xi \bar{\tau}_{xzk} + i\eta \bar{\tau}_{yzk}) \Big|_{z=0}; \quad \tilde{\delta}_k = \frac{1}{p} (i\eta \bar{\tau}_{xzk} - i\xi \bar{\tau}_{yzk}) \Big|_{z=0};$$

$$\beta_k = \frac{E_k}{2(1-\nu_k^2)} p \bar{u}_z \Big|_{z=0}; \quad \gamma_k = \frac{E_k}{2(1-\nu_k^2)} (i\xi \bar{u}_x + i\eta \bar{u}_y) \Big|_{z=0};$$

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{E_k}{2(1-\nu_k^2)} (i\eta \bar{u}_x - i\xi \bar{u}_y) \Big|_{z=0}, \tag{1}$$

де  $p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ .

Використовуючи умови контакту сусідніх шарів

$$u_{xk}(x, y, h_k) = u_{xk+1}(x, y, 0); \quad u_{yk}(x, y, h_k) = u_{yk+1}(x, y, 0); \quad u_{zk}(x, y, h_k) = u_{zk+1}(x, y, 0),$$

$$\sigma_{zk}(x, y, h_k) = \sigma_{zk+1}(x, y, 0); \quad \tau_{xzk}(x, y, h_k) = \tau_{xzk+1}(x, y, 0); \quad \tau_{yzk}(x, y, h_k) = \tau_{yzk+1}(x, y, 0), \tag{2}$$

допоміжні функції  $k+1$ -го шару виражаються через допоміжні функції  $k$ -го шару у матричному вигляді [1, 4]:

$$\bar{\alpha}_{k+1} = T_{11k} \bar{\alpha}_k + T_{12k} \bar{\beta}_k, \tag{3}$$

$$\bar{\beta}_{k+1} = T_{21k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} \bar{\beta}_k, \tag{4}$$

де

$$T_{11k} = \frac{1}{\nu_{1k}} \begin{pmatrix} \nu_{1k} c_k - p_k s_k & -\nu_{2k} s_k - p_k c_k & 0 \\ p_k c_k - \nu_{2k} s_k & \nu_{1k} c_k + p_k s_k & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{1k} c_k \end{pmatrix},$$

$$T_{12k} = \begin{pmatrix} s_k - p_k c_k & -p_k s_k & 0 \\ p_k s_k & s_k + p_k c_k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu_{1k} s_k}{2} \end{pmatrix},$$

$$T_{21k} = \frac{1}{\nu_{1k}^2 \Delta_k} \begin{pmatrix} \nu_{3k} s_k - p_k c_k & -p_k s_k & 0 \\ p_k s_k & \nu_{3k} s_k + p_k c_k & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu_{1k} s_k \end{pmatrix},$$

$$T_{22k} = \frac{1}{\nu_{1k} \Delta_k} \begin{pmatrix} \nu_{1k} c_k - p_k s_k & \nu_{2k} s_k - p_k c_k & 0 \\ \nu_{2k} s_k + p_k c_k & \nu_{1k} c_k + p_k s_k & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{1k} s_k \end{pmatrix};$$

$$p_k = ph_k, \quad s_k = sh p_k, \quad c_k = ch p_k, \quad v_{1k} = 2(1 - v_k),$$

$$v_{2k} = 1 - 2v_k, \quad v_{3k} = 3 - 4v_k, \quad \Delta_k = \frac{E_k(1 - v_{k+1}^2)}{E_{k+1}(1 - v_k^2)}. \quad (5)$$

1. Допоміжні функції  $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k \quad \delta_k \quad \tilde{\delta}_k)^T$  і  $\bar{\beta}_k = (\beta_k \quad \gamma_k \quad \tilde{\gamma}_k)^T$  шару не є незалежними. Вони пов'язані з відомими з умов задачі функціями  $\bar{\alpha}_{n+1} = \left( \bar{\sigma}_{zn}; \quad -\frac{1}{p}(i\xi\bar{\tau}_{xzn} + i\eta\bar{\tau}_{yzn}); \quad \frac{1}{p}(i\eta\bar{\tau}_{xzn} - i\xi\bar{\tau}_{yzn}) \right)^T \Big|_{z=h_n}$  лінійними співвідношеннями:

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}. \quad (6)$$

Елементи матриць  $A_k$  і  $C_k$  називаються функціями податливості багатошарової плити. Ці функції не залежать від прикладених до плити навантажень і можуть бути визначені до розв'язку будь-якої конкретної задачі. Рекурентні співвідношення між функціями податливості мають вигляд [1]:

$$A_k = (A_{k+1} T_{12k} - T_{22k})^{-1} (T_{21k} - A_{k+1} T_{11k}), \quad (7)$$

$$C_k = (T_{22k} - A_{k+1} T_{12k})^{-1} C_{k+1}. \quad (8)$$

Для початку побудови функцій податливості за цими формулами треба знати функції податливості одношарової плити [1]:

$$A_n = -T_{12n}^{-1} T_{11n}, \quad (9)$$

$$C_n = T_{12n}^{-1}, \quad (10)$$

або використовуючи позначення (5),

$$A_n = \frac{1}{v_{1n}(s_n^2 - p_n^2)} \begin{pmatrix} v_{1n}(p_n + c_n s_n) & -p_n^2 - v_{2n} s_n^2 & 0 \\ -p_n^2 - v_{2n} s_n^2 & v_{1n}(-p_n + c_n s_n) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2c_n}{s_n}(s^2 - p^2) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$C_n = \frac{1}{s_n^2 - p_n^2} \begin{pmatrix} s_n + p_n c_n & p_n s_n & 0 \\ -p_n s_n & s_n - p_n c_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{v_{1n} s_n}(s^2 - p^2) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

### ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ ПОДАТЛИВОСТІ

З'ясуємо, як поведуть себе функції податливості (11) і (12) при  $p_n = ph_n \rightarrow \infty$  та  $p_n = ph_n \rightarrow 0$ . Розглянемо кожний елемент матриць  $A_n$  і  $C_n$  при  $p_n = ph_n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} A_n^\beta(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{-c_n s_n - p_n}{s_n^2 - p_n^2} = -1, \quad \lim_{p_n \rightarrow \infty} A_n^\gamma(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} B_n^\beta(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{v_{2n} s_n^2 - p_n^2}{v_{1n}(s_n^2 - p_n^2)} = \frac{v_{2n}}{v_{1n}},$$

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} B_n^\gamma(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{p_n - c_n s_n}{s_n^2 - p_n^2} = -1, \quad \lim_{p_n \rightarrow \infty} B_n^{\tilde{\gamma}}(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{-2c_n}{v_{1n} s_n} = -\frac{2}{v_{1n}},$$

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} C_n^\beta(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{s_n + p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2} = 0, \quad \lim_{p_n \rightarrow \infty} C_n^\gamma(p) = -\lim_{p_n \rightarrow \infty} D_n^\beta(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{p_n s_n}{s_n^2 - p_n^2} = 0,$$

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} D_n^\gamma(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{s_n - p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2} = 0, \quad \lim_{p_n \rightarrow \infty} C_{\tau n}^{\tilde{\gamma}}(p) = \lim_{p_n \rightarrow \infty} \frac{2}{v_{1n} s_n} = 0$$

або в матричній формі

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} A_n = \begin{pmatrix} -1 & v_{2n} & 0 \\ & v_{1n} & \\ \frac{v_{2n}}{v_{1n}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{v_{1n}} \end{pmatrix}, \quad \lim_{p_n \rightarrow \infty} C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta; \quad (13)$$

при  $p_n = p h_n \rightarrow 0$

$$\lim_{p_n \rightarrow 0} A_n^\beta(p) = \frac{-c_n s_n - p_n}{s_n^2 - p_n^2} = O\left(\frac{1}{p^3}\right), \quad \lim_{p_n \rightarrow 0} A_n^\gamma(p) = \lim_{p_n \rightarrow 0} B_n^\beta(p) = \frac{v_{2n} s_n^2 - p_n^2}{v_{1n} (s_n^2 - p_n^2)} = O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

$$\lim_{p_n \rightarrow 0} B_n^\gamma(p) = \frac{p_n - c_n s_n}{s_n^2 - p_n^2} = O\left(\frac{1}{p}\right), \quad \lim_{p_n \rightarrow 0} B_{\tau n}^{\tilde{\gamma}}(p) = \frac{-2c_n}{v_{1n} s_n} = O\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$\lim_{p_n \rightarrow 0} C_n^\beta(p) = \frac{s_n + p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2} = O\left(\frac{1}{p^3}\right), \quad \lim_{p_n \rightarrow 0} C_n^\gamma(p) = -\lim_{p_n \rightarrow 0} D_n^\beta(p) = \frac{p_n s_n}{s_n^2 - p_n^2} = O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

$$\lim_{p_n \rightarrow 0} D_n^\gamma(p) = \frac{s_n - p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2} = O\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad \lim_{p_n \rightarrow 0} C_{\tau n}^{\tilde{\gamma}}(p) = \frac{2}{v_{1n} s_n} = O\left(\frac{1}{p}\right)$$

або в матричній формі

$$\lim_{p_n \rightarrow 0} A_n = \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{p^3}\right) & O\left(\frac{1}{p^2}\right) & 0 \\ O\left(\frac{1}{p^2}\right) & O\left(\frac{1}{p}\right) & 0 \\ 0 & 0 & O\left(\frac{1}{p}\right) \end{pmatrix}, \quad \lim_{p_n \rightarrow 0} C_n = \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{p^3}\right) & O\left(\frac{1}{p^2}\right) & 0 \\ O\left(\frac{1}{p^2}\right) & O\left(\frac{1}{p^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & O\left(\frac{1}{p}\right) \end{pmatrix}.$$

Ураховуючи встановлені властивості функцій податливості  $n$ -го шару, методом математичної індукції можна встановити аналогічні властивості функцій податливості багат шарової плити.

### ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ

При великих значеннях  $p$  у формулах (5) і відповідно (7), (8) будуть відніматися близькі за значенням величини. Тому ці формули непридатні для обчислення їх значень. Для уникнення цього недоліку вводяться позначення

$$p_k = p h_k, \quad e_k = e^{-2p_k}, \quad u = p_k e_k, \quad c_k = \frac{1 + e_k}{2},$$

$$s_k = \frac{1 - e_k}{2}, \quad \text{ch } p h_k = c_k e^{p h_k}, \quad \text{sh } p h_k = s_k e^{p h_k}.$$

З урахуванням цих позначень та властивостей функцій податливості (13) отримаємо матрицю податливості (12) шару з номером  $n$  :

$$C_n = e^{-p_n} \begin{pmatrix} \frac{s_n + p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & \frac{p_n s_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & 0 \\ -\frac{p_n s_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & \frac{s_n - p_n c_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{v_{1n} s_n} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Матриця (7) записується у вигляді

$$A_k = A_{1k} + A_{2k}, \quad (15)$$

де

$$A_{1k} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{v_{2k}}{v_{1k}} & 0 \\ \frac{v_{2k}}{v_{1k}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{v_{1k}} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} A_k &= A_{1k} + A_{2k} = \left[ \left( A_{1(k+1)} + A_{2(k+1)} \right) T_{12k} - T_{22k} \right]^{-1} \cdot \left[ T_{21k} - \left( A_{1(k+1)} + A_{2(k+1)} \right) T_{11k} \right] = \\ &= \left[ A_{1(k+1)} T_{12k} + A_{2(k+1)} T_{12k} - T_{22k} \right]^{-1} \cdot \left[ T_{21k} - A_{1(k+1)} T_{11k} - A_{2(k+1)} T_{11k} \right] = \\ &= \left[ \left( A_{1(k+1)} T_{12k} - T_{22k} \right) + A_{2(k+1)} T_{12k} \right]^{-1} \cdot \left[ \left( T_{21k} - A_{1(k+1)} T_{11k} \right) - A_{2(k+1)} T_{11k} \right]. \end{aligned}$$

Звідки

$$A_{2k} = \left[ \left( A_{1(k+1)} T_{12k} - T_{22k} \right) + A_{2(k+1)} T_{12k} \right]^{-1} \cdot \left[ \left( T_{21k} - A_{1(k+1)} T_{11k} \right) - A_{2(k+1)} T_{11k} \right] - A_{1k}. \quad (16)$$

Для матриці податливості шару з номером  $n$  вирази (15) для матриць  $A_{1n}$  та  $A_{2n}$  будуть мати вигляд:

$$A_{1n} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{v_{2n}}{v_{1n}} & 0 \\ \frac{v_{2n}}{v_{1n}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{v_{1n}} \end{pmatrix}, \quad A_{2n} = e^{-p_n} \begin{pmatrix} -\frac{s_n + p_n^2 + p_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & \frac{p_n^2}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & 0 \\ \frac{p_n^2}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & -\frac{s_n + p_n^2 - p_n}{s_n^2 - p_n^2 e_n} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{v_{1n} s_n} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Для обчислення трансформант напружень та переміщень у  $k$ -м шарі плити необхідно знати один з двох допоміжних векторів  $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k \quad \delta_k \quad \tilde{\delta}_k)^T$  або  $\bar{\beta}_k = (\beta_k \quad \gamma_k \quad \tilde{\gamma}_k)^T$ , пошук якого можна звести до відшукування допоміжних векторів  $\bar{\alpha}_1 = (\alpha_1 \quad \delta_1 \quad \tilde{\delta}_1)^T$  або  $\bar{\beta}_1 = (\beta_1 \quad \gamma_1 \quad \tilde{\gamma}_1)^T$



верхнього (першого) та  $\bar{\alpha}_{n+1} = (\alpha_{n+1} \quad \delta_{n+1} \quad \tilde{\delta}_{n+1})^T$  або  $\bar{\beta}_{n+1} = (\beta_{n+1} \quad \gamma_{n+1} \quad \tilde{\gamma}_{n+1})^T$  для нижнього  $(n+1)$ -го шарів плити, якщо побудувати рекурентні співвідношення між векторами двох сусідніх шарів.

Для цього в першому випадку в рівність (3) підставляється замість  $\bar{\beta}_k$  вираз (6), а замість  $A_k$  – (7). У результаті отримуються співвідношення:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{k+1} &= T_{11k} \bar{\alpha}_k + T_{12k} \left( (A_{1k} + A_{2k}) \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1} \right) = (T_{11k} + T_{12k} A_{1k}) \bar{\alpha}_k + T_{12k} A_{2k} \bar{\alpha}_k + T_{12k} C_k \bar{\alpha}_{n+1} = \\ &= \left( (TA)_{1k} + T_{12k} A_{2k} \right) \bar{\alpha}_k + T_{12k} C_k \bar{\alpha}_{n+1}, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$(TA)_{1k} = T_{11k} + T_{12k} A_{1k} = e^{-p_k} \begin{pmatrix} p_k + 1 & -p_k & 0 \\ p_k & 1 - p_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

Аналогічно, у другому випадку

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} &= T_{21k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = T_{21k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} \left[ (A_{1k} + A_{2k}) \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1} \right] = \\ &= (T_{21k} + T_{22k} A_{1k}) \bar{\alpha}_k + T_{22k} A_{2k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} C_k \bar{\alpha}_{n+1} = (TA)_{2k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} A_{2k} \bar{\alpha}_k + T_{22k} C_k \bar{\alpha}_{n+1}, \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$(TA)_{2k} = T_{21k} + T_{22k} A_{1k} = \frac{e^{-p_k}}{v_{1k} \Delta_k} \begin{pmatrix} -v_{1k} - p_k & p_k + v_{2k} & 0 \\ v_{2k} - p_k & p_k - v_{1k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

### АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

Сформулюємо алгоритм розв'язання основних граничних задач для багат шарових плит:

1. Обчислюються матриці податливості шару з номером  $n$  за формулами (14), (17), а для інших шарів за рекурентними співвідношеннями (8), (16).
2. З крайових умов задачі, що розглядається, обчислюються трансформанти Фур'є напружень та переміщень граничних точок плити, а потім знаходяться  $\bar{\alpha}_1$  та  $\bar{\alpha}_{n+1}$  за формулами (1).
3. Вектори допоміжних функцій  $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k \quad \delta_k \quad \tilde{\delta}_k)^T$  або  $\bar{\beta}_k = (\beta_k \quad \gamma_k \quad \tilde{\gamma}_k)^T$  знаходяться за формулами (18), (19) або (20), (21).
4. Трансформанти шуканих напружень та переміщень даються за формулами [2]:

$$\bar{u}_{xk}(\xi, \eta, z) = -\frac{1}{p^2} (i\xi) S_k - \frac{1}{p^2} (i\eta) T_k,$$

$$\bar{u}_{yk}(\xi, \eta, z) = -\frac{1}{p^2} (i\eta) S_k + \frac{1}{p^2} (i\xi) T_k,$$

$$p\bar{u}_{zk}(\xi, \eta, z) = U_{zk}^1 \bar{\alpha}_k + U_{zk}^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (U_{zk}^1 + A_k U_{zk}^2) \bar{\alpha}_k + U_{zk}^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$\bar{\sigma}_{xk}(\xi, \eta, z) = \frac{2G_k}{p^2} (i\xi)^2 S_k + \frac{2G_k}{p^2} (i\xi)(i\eta) T_k - \frac{2G_k v_k}{1 - 2v_k} \left( \frac{d\bar{u}_{zk}}{dz} - S_k \right),$$

$$\bar{\sigma}_{yk}(\xi, \eta, z) = \frac{2G_k}{p^2} (i\eta)^2 S_k - \frac{2G_k}{p^2} (i\xi)(i\eta) T_k - \frac{2G_k v_k}{1 - 2v_k} \left( \frac{d\bar{u}_{zk}}{dz} - S_k \right),$$

$$\bar{\sigma}_{zk}(\xi, \eta, z) = S_{zk}^1 \bar{\alpha}_k + S_{zk}^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (S_{zk}^1 + S_{zk}^2 A_k) \bar{\alpha}_k + S_{zk}^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$\bar{\tau}_{yzk}(\xi, \eta, z) = -G_k(i\eta) \bar{u}_z - \frac{G_k}{p^2}(i\eta) \frac{dS_k}{dz} + \frac{G_k}{p^2}(i\xi) \frac{dT_k}{dz},$$

$$\bar{\tau}_{xzk}(\xi, \eta, z) = -G_k(i\xi) \bar{u}_z - \frac{G_k}{p^2}(i\xi) \frac{dS_k}{dz} - \frac{G_k}{p^2}(i\eta) \frac{dT_k}{dz},$$

$$\bar{\tau}_{xyk}(\xi, \eta, z) = -\left((i\xi)^2 - (i\eta)^2\right) \frac{G_k}{p^2} T_k + \frac{2G_k}{p^2}(i\xi)(i\eta) S_k,$$

де

$$S_k(\xi, \eta, z) = S_k^1 \bar{\alpha}_k + S_k^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (S_k^1 + S_k^2 A_k) \bar{\alpha}_k + S_k^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$T_k(\xi, \eta, z) = T_k^1 \bar{\alpha}_k + T_k^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (T_k^1 + T_k^2 A_k) \bar{\alpha}_k + T_k^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$\frac{d\bar{u}}{dz}_{zk}(\xi, \eta, z) = dU_{zk}^1 \bar{\alpha}_k + dU_{zk}^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (dU_{zk}^1 + dU_{zk}^2 A_k) \bar{\alpha}_k + dU_{zk}^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$\frac{dS_k}{dz}(\xi, \eta, z) = dS_k^1 \bar{\alpha}_k + dS_k^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (dS_k^1 + dS_k^2 A_k) \bar{\alpha}_k + dS_k^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1},$$

$$\frac{dT_k}{dz}(\xi, \eta, z) = dT_k^1 \bar{\alpha}_k + dT_k^2 (A_k \bar{\alpha}_k + C_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (dT_k^1 + dT_k^2 A_k) \bar{\alpha}_k + dT_k^2 C_k \bar{\alpha}_{n+1}.$$

Тут  $p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ,  $G_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}$ ,

$$dU_{zk}^1 = \frac{1}{2G_k(1-\nu_k)} (2(1-2\nu_k) \operatorname{ch} p z_k - p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad -\operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad 0),$$

$$dU_{zk}^2 = \frac{1}{G_k} ((1-2\nu_k) \operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad -2\nu_k \operatorname{ch} p z_k - p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad 0),$$

$$dS_k^1 = \frac{p}{2G_k(1-\nu_k)} (-\operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad -2(1-2\nu_k) \operatorname{ch} p z_k - p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad 0),$$

$$dS_k^2 = \frac{p}{2G_k} (-(1-2\nu_k) \operatorname{ch} p z_k - p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad -(3-2\nu_k) \operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad 0),$$

$$dT_k^1 = \frac{p}{G_k} (0; \quad 0; \quad \operatorname{ch} p z_k),$$

$$dT_k^2 = \frac{p}{2G_k} (0; \quad 0; \quad (1-2\nu_k) \operatorname{sh} p z_k),$$

$$U_{zk}^1 = \frac{1}{2G_k(1-\nu_k)} [(3-4\nu_k) \operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad -p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad 0],$$

$$U_{zk}^2 = \frac{1}{G_k} [2(1-\nu_k) \operatorname{ch} p z_k - p z_k \operatorname{sh} p z_k; \quad (1-2\nu_k) \operatorname{sh} p z_k - p z_k \operatorname{ch} p z_k; \quad 0],$$

$$S_k^1 = -\frac{1}{2G_k(1-2\nu_k)} [pz_k \operatorname{sh}pz_k; (3-4\nu_k)\operatorname{sh}pz_k + pz_k \operatorname{ch}pz_k; 0],$$

$$S_k^2 = -\frac{(1-\nu_k)}{G_k(1-2\nu_k)} [(1-2\nu_k)\operatorname{sh}pz_k + pz_k \operatorname{ch}pz_k; 2(1-\nu_k)\operatorname{ch}pz_k + pz_k \operatorname{sh}pz_k; 0],$$

$$T_k^1 = \frac{1}{G_k} [0; 0; \operatorname{sh}pz_k],$$

$$T_k^2 = \frac{1}{G_k} [0; 0; (1-\nu_k)\operatorname{ch}pz_k],$$

$$S_{zk}^1 = -\frac{1}{2(1-\nu_k)} [-2(1-\nu_k)\operatorname{ch}pz_k + pz_k \operatorname{sh}pz_k; (1-2\nu_k)\operatorname{sh}pz_k + pz_k \operatorname{ch}pz_k; 0],$$

$$S_{zk}^2 = [\operatorname{sh}pz_k - pz_k \operatorname{ch}pz_k; -pz_k \operatorname{sh}pz_k; 0],$$

$$TU_k^1 = \frac{1}{2(1-\nu_k)} [pz_k \operatorname{ch}pz_k - 2(1-\nu_k)\operatorname{sh}pz_k; 2(1-\nu_k)\operatorname{ch}pz_k + pz_k \operatorname{sh}pz_k; 0],$$

$$TU_k^2 = [pz_k \operatorname{sh}pz_k; \operatorname{sh}pz_k + pz_k \operatorname{ch}pz_k; 0],$$

$$TS_k^1 = [0; 0; \operatorname{ch}pz_k],$$

$$TS_k^2 = [0; 0; (1-\nu_k)\operatorname{sh}pz_k].$$

5. Для того, щоб одержати напруження та переміщення в  $k$ -му шарі, піддамо оберненому перетворенню Фур'є знайдені на попередньому кроці їх трансформанти.

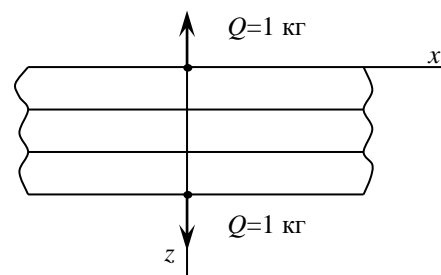
Для верифікації отриманого розв'язку була розроблена програмна система розв'язку основних граничних та контактних задач за допомогою метода скінченних елементів. Програма реалізована на мові Python 3 та дозволяє розв'язувати широкі класи задач механіки з використанням метода скінченних елементів.

### ПРИКЛАД ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

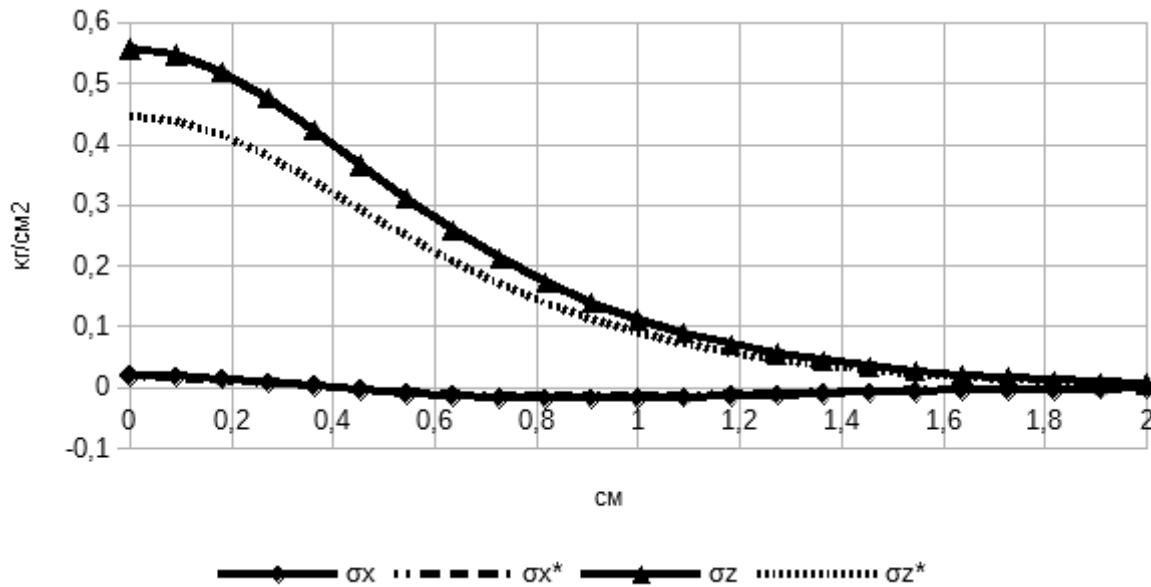
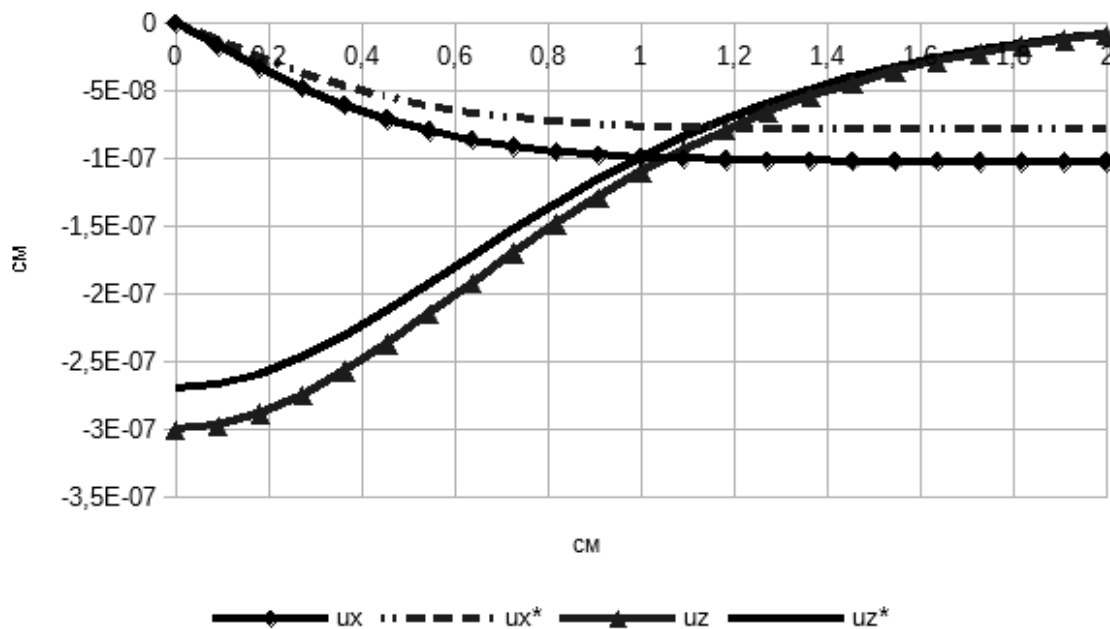
Розглядається випадок дії нормальних зосереджених сил на багатошаровий пакет. Пружна тришарова плита деформується навантаженнями  $Q = 1$  кг, прикладеними до верхньої та нижньої границь.

Товщини шарів:  $h_1 = 1$  см,  $h_2 = 2$  см,  $h_3 = 1$  см. Пружні характеристики шарів:  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$ ;

$$E_1 = E_3 = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, E_2 = 1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$



Розглянемо шар з номером 2 на глибині  $z_2 = 0$  в точках  $M(R)$ ,  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Результати чисельного розв'язання задачі методом скінченних елементів порівняно з чисельним розрахунком аналітичного підходу зображені на рис. 2, 3 (\* позначено аналітичний розв'язок). Аналіз результатів показав, що максимальне відхилення чисельного розрахунку аналітичного підходу від чисельного розв'язку методом скінченних елементів складає 10%.

Рис. 2. Розподіл нормальних та дотичних напружень у другому шарі на глибині  $z_2 = 0$ Рис. 3. Розподіл переміщень у другому шарі на глибині  $z_2 = 0$ 

## ВИСНОВКИ

Метод функцій податливості поширено на розв'язання основних граничних задач для багатошарових плит з плоскопаралельними, ізотропними, зчепленими, необмеженими в плані шарами. У просторі трансформант отримано рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості сусідніх шарів. Досліджено властивості функцій податливості та особливості чисельної реалізації побудови їх рекурентних співвідношень. Сформульований алгоритм розв'язку поставленої задачі доповнений прикладом чисельної реалізації для тришарової плити, яка знаходиться під дією нормальних навантажень, прикладених до верхньої та нижньої границь плити. Ефективність запропонованого підходу досліджена на порівнянні аналітичного та чисельного розв'язків.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Величко И. Г., Приварников А. К., Спица О. Г. Матричный алгоритм аналитического определения напряженно-деформированного состояния упругой многослойной плиты. *Теор. и прикл. мех.* 2001. Вып. 34. С. 38–43.
2. Приварников А. К. Граничные задачи теории упругости для многослойных оснований простой и сложной структуры: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва, 1982. Рукопись. 350 с.
3. Приварников А. К., Ламзюк В. Д. Упругие многослойные основания. Днепропетровск, 1985. 162 с. Деп. в ВИНТИ 23.12.85, № 8789 –В.
4. Приварников А. К., Годес Ю. Я. О решении первой граничной задачи для упругого многослойного основания. *Устойчивость и прочность элементов конструкций*, 1986. С. 6–28.
5. Шевляков Ю. А., Приварников А. К. К расчету слоистых оснований. *Прикладная механика*. 1962. Т.8, Вып. 2. С. 113–119.

## REFERENCES

1. Velychko, Y. H., Pryvarnykov, A. K. & Spytza, O. H. (2001). Matrix algorithm for the analytical determination of the stress-strain state of an elastic multilayer plate. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, Iss. 34, pp. 38-43.
2. Privarnikov, A. K. (1982). Boundary-value problems of the theory of elasticity for multilayered bases of a simple and complex structure (Unpublished doctor thesis). Moscow, SSSR.
3. Privarnikov, A. K. & Lamzyuk, V. D. (1985). Elastics multilayer bases. Dnepropetrovsk.
4. Privarnikov, A. K. & Godes, YU. YA. (1986). On the solution of the first boundary value problem for an elastic multilayered base. *Ustoychivost' i prochnost' elementov konstruktсий*, pp.6–28.
5. Shevlyakov, YU. A. & Privarnikov, A. K. (1962). To the calculation of layered bases. *Prikladnaya mekhanika*, Vol.8, Iss. 2, pp. 113–119.

УДК 539.312

## ДИНАМІКА НЕСКІНЧЕННО ДОВГОЇ, ПІДКРІПЛЕНОЇ ПОВЗДОВЖНІМИ РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ, ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ТРИВИМІРНОМУ ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Фасоляк А. В.

*Запорізький національний технічний університет,  
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, 69063, Україна*

antonfasolyak@mail.ru

У роботі розглянуто динаміку нескінченно довгої циліндричної оболонки у лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному тривимірному середовищі. Досліджується вплив поздовжніх ребер жорсткості та їх взаємного розташування на динамічний напружено-деформований стан цієї механічної системи. До сьогодні подібні задачі розглядалися лише у стаціонарній постановці, тому новизною нашої роботи є те, що задача розглядається у нестационарній постановці. Рух середовища описувався динамічними рівняннями теорії пружності, рух оболонки – рівняннями, що враховують поперечний зсув та інерцію обертання, а рух поздовжніх ребер жорсткості – рівняннями теорії балок. Розв'язок задачі отримано шляхом розкладання невідомих функцій у тригонометричний ряд Фур'є, а також методом інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа. Обернення інтегральних перетворень здійснювалося чисельно. Отримані результати проаналізовано та проілюстровано графічно.

*Ключові слова: циліндрична оболонка, поздовжні ребра жорсткості, пружне середовище, динамічне навантаження.*

## ДИНАМИКА БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ТРЕХМЕРНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Фасоляк А. В.

*Запорожский национальный технический университет,  
ул. Жуковского, 64, Запорожье, 69063, Украина*

antonfasolyak@mail.ru

В работе рассмотрена динамика бесконечно длинной цилиндрической оболочки в линейно-упругой, однородной, изотропной и инерциальной трехмерной среде. Исследуется влияние продольных ребер жесткости и их взаимного расположения на динамическое напряженно-деформированное состояние данной механической системы. До настоящего времени подобные задачи рассматривались только в стационарной постановке, поэтому новизной данной работы является то, что задача рассмотрена в нестационарной постановке. Движение среды описывалось динамическими уравнениями теории упругости, движение оболочки – уравнениями, которые учитывают поперечный сдвиг и инерцию вращения, а движение продольных ребер жесткости – уравнениями теории балок. Решение данной задачи получено путем разложения неизвестных функций в тригонометрический ряд Фурье, а также методом интегральных преобразований Фурье и Лапласа. Обращение интегральных преобразований проводилось численно. Полученные результаты проанализированы и проиллюстрированы графически.

*Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, продольные ребра жесткости, упругая среда, динамическое нагружение.*

## DYNAMIC OF INFINITE CYLINDRICAL SHELL, WHICH IS REINFORCED BY LONGITUDINAL RIBS OF RIGIDITY, IN THREE-DIMENSIONAL ELASTIC MEDIA

Fasoliak A. V.

*Zaporizhzhya national technical university,  
Zhykovskago str, 64, Zaporizhzhya, 69063, Ukraine*

antonfasolyak@mail.ru

Dynamic of infinite cylindrical shell in linearly elastic, homogeneous, isotropic and inertial three-dimensional media is considered in this work. Influence of longitudinal ribs of rigidity, which under action dynamic load, and their mutual location on dynamic stress-strain state of this mechanic system are investigated. In present paper not stationary problem was considered and it's scientific novelty of this work, because before these problems has been considered only in stationary formulations. Purpose of present work is analyzing influence of longitudinal ribs of rigidity and their mutual location on dynamic stress-strain state of this mechanic system. Also purpose of this work is compare results for cylindrical shell, which is reinforced by longitudinal rib of rigidity, and cylindrical shell, which isn't reinforced, under action corresponding loads.

Media motions are described by dynamic equations of elastic theory, which are solved by method of three potential functions. Shell motions – by equations, which consider transverse shear and inertia of rotation (Timoshenko's shell). Motions of longitudinal ribs of rigidity are described by dynamic equations of beams theory. The problem is solved in dimensionless quantities. All quantities are expanded in trigonometrically Fourier series on angle variable. Integral transforms Fourier (on axial variable) and Laplace (on dimensionless time variable) are also used.

Solution was received as Fourier series of inversion of integral Fourier and Laplace transforms. Integral transforms are inverted numerically. Filon's method (to inverse Fourier transform) and the displaced Legendre's polynoms method (to inverse Laplace transform) are used. Then after summarizing of trigonometrically Fourier series, we obtain solution of the problem.

Case, when shell, which is reinforced by two, four and six longitudinal ribs of rigidity, has been considered. Radial displacement on angle and axial variables for the shell was illustrated graphically.

Also case, when the shell, which is reinforced by two longitudinal ribs of rigidity, is compared with cylindrical shell, which isn't reinforced, under action of corresponding loads.

*Key words: cylindrical shell, longitudinal rib of rigidity, elastic media, dynamic loads.*

### ВСТУП

На сьогодні важливе місце для практики мають динамічні задачі для пружних, тонких циліндричних оболонок у тривимірному лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному тривимірному середовищі під дією нестационарних навантажень. Зокрема, до таких розрахункових схем зводяться задачі моделювання динаміки трубопроводів та тунелів глибокого залягання (глибина залягання перевищує 10 радіусів оболонки). У подібних

задачах напруження і навантаження, викликані дією поверхневих нестационарних динамічних навантажень, можуть значно перевищувати відповідні статичні значення, а тому не можуть бути розраховані за допомогою коефіцієнта динамічності. Тому ця задача є актуальною.

На сьогодні досить добре вивчена динаміка циліндричних оболонок у тривимірному пружному середовищі. У монографії [1] досліджені подібні задачі у стаціонарній постановці. У нестационарній постановці такі задачі розглянуті зокрема в роботах [2, 3], причому у роботі [2] у осесиметричній постановці, а в [3] – неосесиметричній.

Також важливе значення для практики мають оболонки, підкріплені поздовжніми ребрами жорсткості (стрингерами). У монографії [1] розглянута подібна динамічна задача у стаціонарній постановці.

Нашу роботу присвячено нестационарним динамічним задачам для дискретно підкріплених поздовжніми ребрами жорсткості циліндричним оболонкам, у тривимірному лінійно-пружному, однорідному, ізотропному та інерційному середовищі. Припускається, що динамічне навантаження діє на ребра жорсткості. Важливим є дослідження впливу кількості ребер. Також проводиться порівняння з невідкріпленою оболонкою при аналогічних навантаженнях.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай оболонка і середовище віднесені до нерухої циліндричної системи координат  $\{r, \theta, x\}$ , причому вісь оболонки збігається з оссю  $Ox$ . Внутрішня поверхня оболонки задається рівнянням  $r = b$ , а зовнішня –  $r = a$  ( $h = a - b$  – товщина оболонки). Середовище задається співвідношенням  $r \geq a$ . Контакт між оболонкою і середовищем будемо вважати ковзним.

На внутрішній поверхні оболонки розміщено  $N$  поздовжніх ребер жорсткості. Положення кожного ребра жорсткості на внутрішній поверхні оболонки задається рівнянням  $\theta = \theta_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Рух середовища будемо описувати за допомогою динамічних рівнянь теорії пружності, які у векторній формі мають вигляд [4]:

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \text{grad div}(\bar{u}) - \mu_2 \text{rot rot}(\bar{u}) = \rho_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де  $\bar{u} = (u_x, u_\theta, u_r)$  – вектор переміщень;  $\lambda_2, \mu_2$  – параметри Ламе для простору,  $\rho_2$  – щільність простору.

Рух оболонки описується рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), та в загальному випадку мають вигляд [5]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_x, \\ \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} \left( 1 + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2a} \chi_\theta - \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_\theta, \\ \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{w}{a^2} + \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (p - q_r), \\ -6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \chi_x + \frac{1-\nu_1}{2a^2} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial \theta^2} - \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial t^2} = -\frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_x, \\ -6k^2 \frac{1-\nu_1}{ah^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1+\nu_1}{2a} \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \chi_\theta + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial \theta^2} - \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial t^2} = -\frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_\theta, \end{cases} \quad (2)$$

де  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – осьове, кільцеве та нормальне переміщення точок серединної поверхні оболонки відповідно;  $\chi_x$ ,  $\chi_\theta$  – кути повороту нормалі до серединної поверхні в осьовому і кільцевому напрямках;  $q_r$ ,  $q_x$ ,  $q_\theta$  – нормальна, осьова та кільцева реакція з боку середовища на границі контакту між середовищем та оболонкою;  $p$  – нормальне навантаження;  $G_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\nu_1$ ,  $h$ ,  $a$  – модуль зсуву, густина, коефіцієнт Пуассона, товщина та зовнішній радіус оболонки;  $k^2 = \frac{2}{3}$  – числовий коефіцієнт.

Для опису руху кожного ребра використовуємо рівняння теорії балок [6]:

$$E_{\delta j} I_j \frac{\partial^4 y_{\delta j}}{\partial x^4} + \rho_{\delta j} F_j \frac{\partial^2 y_{\delta j}}{\partial t^2} = p_{\delta j}(x, t) - q_{c j}(x, t); \quad j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

де  $p_{\delta j}(x, t)$  – інтенсивність заданого навантаження на  $j$ -е ребро;  $q_{c j}(x, t)$  – невідома реакція з боку оболонки на  $j$ -е ребро;  $E_{\delta j}$ ,  $\rho_{\delta j}$  – модуль Юнга і щільність  $j$ -го шпангоута;  $y_{\delta j}$  – прогин  $j$ -го ребра;  $I_j$ ,  $F_j$  – момент інерції і площа поперечного перетину ребра.

При відсутності масових сил вводимо потенціальні функції  $\phi$ ,  $\varphi$ ,  $\chi$  за формулами [4]

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial \chi}{\partial r}. \quad (4)$$

Підставляємо залежності (4) у рівняння (1).

Маємо:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0; \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \{ \varphi, \chi \} = 0; \quad (5)$$

$$c_p^2 = \frac{2G_2(1-\nu_2)}{\rho_2(1-2\nu_2)}, \quad c_s^2 = \frac{G_2}{\rho_2}. \quad (6)$$

Граничні умови між оболонкою і середовищем мають вигляд:

$$\begin{aligned} q_r(x, t, \theta) &= -\sigma_{rr}(a, x, t, \theta), \quad q_x(x, t, \theta) = q_\theta(x, t, \theta) = 0, \\ w(x, t, \theta) &= u_r(a, x, t, \theta), \quad \sigma_{rx}(a, x, t, \theta) = \sigma_{r\theta}(a, x, t, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Напруження, необхідні для задоволення граничних умов (7), виражаються через переміщення, згідно з формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2G_2\nu_2}{1-2\nu_2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{rx} &= G_2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \frac{G_2}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Умови контакту ребер і оболонки запишемо так:

а) у місцях контакту  $\theta = \theta_j$  нормальне переміщення ребра рівне нормальному переміщенню оболонки:

$$w(x, t, \theta_j) = y_{\delta j}(x, t); \quad (9)$$

б) внутрішнє навантаження на оболонку дорівнює сумі тисків, які передаються через кожне ребро



$$p(x, \theta, t) = \sum_{j=1}^N q_{cj}(x, t) \delta(\theta - \theta_j), \quad (10)$$

де  $N$  – кількість ребер, а  $\delta(\theta)$  – дельта-функція Дірака.

Початкові умови приймаються нульовими, тобто, при  $t=0$  шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

### РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ У ПРОСТОРІ ЗОБРАЖЕНЬ

Для розв'язання задачі будемо використовувати перетворення Лапласа за часовою змінною:

$$f_L(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (11)$$

та перетворення Фур'є за осью координатою:

$$f_F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx. \quad (12)$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \{\Phi, X\} &= \frac{1}{a^2} \{\phi, \chi\}; \quad \{\Psi\} = \frac{1}{a^3} \{\varphi\}; \quad \{U_x, U_\theta, U_r, U, V, W, Y_j\} = \frac{1}{a} \{u_x, u_\theta, u_r, u, v, w, y_j\}; \\ \{\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rx}, \bar{\sigma}_{r\theta}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{rr}, \sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}\}; \quad \{P, P_{\delta j}\} = \frac{a}{G_2} \{p, p_{\delta j}\}; \quad \{\bar{q}_r, \bar{q}_x, \bar{q}_\theta, \bar{q}_{cj}\} = \frac{1}{G_2} \{q_r, q_x, q_\theta, q_{cj}\}; \\ \{x_*, r_*\} &= \frac{1}{a} \{x, r\}; \quad \tau = \frac{c_s}{a} t; \quad \kappa = \frac{h}{a}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad c_s = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{\rho_2}}; \\ \gamma_j &= \frac{G_{\delta j}}{G_2}; \quad \rho_j^* = \frac{\rho_{\delta j}}{\rho_2}; \quad I_j^* = \frac{I_j}{a^4}; \quad F_j^* = \frac{F_j}{a^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною  $\tau$  та перетворення Фур'є за змінною  $x_*$  до рівнянь (5), та розкладаємо зображення потенціальних функцій в ряд Фур'є за формулами:

$$\{\Phi_{LF}, \Psi_{LF}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\Phi_{LF,n}, \Psi_{LF,n}\} \cos(n\theta), \quad X_{LF} = \sum_{n=1}^{\infty} X_{LF,n} \sin(n\theta). \quad (14)$$

Рівняння (5) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r_*^2} - \eta_p^2 p^2 - s^2 \right) \Phi_{LF,n} &= 0; \\ \left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r_*^2} - p^2 - s^2 \right) \{\Psi_{LF,n}, X_{LF,n}\} &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

де  $\eta_p^2 = \frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)}$ .

Загальний розв'язок рівнянь (15), з урахуванням умов згасання на нескінченності, має вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{1n}(s, p) K_n(m_p r_*); \quad \Psi_{LF,n}(r_*, s, p) = C_{2n}(s, p) K_n(m_s r_*); \\ X_{LF,n}(r_*, s, p) &= C_{3n}(s, p) K_n(m_s r_*); \end{aligned} \quad (16)$$

де  $m_p = \sqrt{s^2 + \eta_p^2 p^2}$ ,  $m_s = \sqrt{s^2 + p^2}$ , а  $K_n$  – модифіковані функції Бесселя.

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною  $\tau$  та перетворення Фур'є за змінною  $x_*$  до компонент переміщень і напружень середовища, та розкладаємо їх у ряд Фур'є за формулами:

$$\begin{aligned} \{U_{rLF}, U_{xLF}, \bar{\sigma}_{rrLF}, \bar{\sigma}_{rxLF}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{rLF,n}, U_{xLF,n}, \bar{\sigma}_{rrLF,n}, \bar{\sigma}_{rxLF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{U_{\theta LF}, \bar{\sigma}_{r\theta LF}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{\theta LF,n}, \bar{\sigma}_{r\theta LF,n}\} \sin(n\theta). \end{aligned} \quad (17)$$

Рівності (4) та (8) мають вигляд:

$$\begin{aligned} U_{xLF,n} &= is\Phi_{LF,n} + \left( \frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr_*} - \frac{n^2}{r_*^2} \right) \Psi_{LF,n}, \quad U_{rLF,n} = \frac{d\Phi_{LF,n}}{dr_*} - is \frac{d\Psi_{LF,n}}{dr_*} + \frac{n}{r_*} X_{LF,n}, \\ U_{\theta LF,n} &= -\frac{n}{r_*} \Phi_{LF,n} + \frac{isn}{r_*} \Psi_{LF,n} - \frac{dX_{LF,n}}{dr_*}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rrLF,n} &= \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \left( isU_{xLF,n} + \frac{n}{r_*} U_{\theta LF,n} + \frac{U_{rLF,n}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{dU_{rLF,n}}{dr_*}, \\ \bar{\sigma}_{rxLF,n} &= \frac{dU_{xLF,n}}{dr_*} + isU_{rLF,n}, \quad \bar{\sigma}_{r\theta LF,n} = \frac{1}{r_*} \left( -nU_{rLF,n} + \frac{dU_{\theta LF,n}}{dr_*} - \frac{U_{\theta LF,n}}{r_*} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Розкладаємо зображення шуканих величин у ряд Фур'є таким чином:

$$\begin{aligned} \{U_{LF}, W_{LF}, \bar{q}_{rLF}, \bar{q}_{xLF}, \chi_{xLF}, \chi_{\theta LF}, F_{LF}, P_{LF}\} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{LF,n}, W_{LF,n}, \bar{q}_{rLF,n}, \bar{q}_{xLF,n}, \chi_{xLF,n}, P_{LF,n}\} \cos(n\theta), \\ \{V_{LF}, \bar{q}_{\theta LF}, \chi_{\theta LF}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{V_{LF,n}, \bar{q}_{\theta LF,n}, \chi_{\theta LF,n}\} \sin(n\theta). \end{aligned} \quad (20)$$

У просторі зображень за Фур'є-Лапласом система (2) має вигляд:

$$\begin{cases} -\left( \frac{1-\nu_1}{2}(n^2 + p^2) + s^2 \right) U_{LF,n} + isn \frac{1+\nu_1}{2} V_{LF,n} + \nu_1 is W_{LF,n} = -\frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} \bar{q}_{xLF,n}, \\ -isn \frac{1+\nu_1}{2} U_{LF,n} - \left( \frac{1-\nu_1}{2}(s^2 + p^2) + n^2 \right) V_{LF,n} - n \left( 1 + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2} \right) W_{LF,n} + \\ + \frac{(1-\nu_1)k^2}{2} \chi_{\theta LF,n} = -\frac{1-\nu_1}{2\kappa^2\gamma} \bar{q}_{\theta LF,n}, \\ is\nu_1 U_{LF,n} + nV_{LF,n} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} (is\chi_{xLF,n} + n\chi_{\theta LF,n}) + \left( \frac{1-\nu_1}{2} ((s^2 + n^2)k^2 + p^2) + 1 \right) W_{LF,n} = \\ = -\frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} (\bar{q}_{rLF,n} - P_{LF,n}), \\ -6k^2 is \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} W_{LF,n} + isn \frac{1+\nu_1}{2} \chi_{\theta LF,n} - \left( s^2 + \frac{1-\nu_1}{2} \left( \frac{12k^2}{\kappa^2} + n^2 + p^2 \right) \right) \chi_{xLF,n} = -\frac{3(1-\nu_1)}{\kappa^2\gamma} \bar{q}_{xLF,n}, \\ 6k^2 n \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} W_{LF,n} - isn \frac{1+\nu_1}{2} \chi_{xLF,n} - \left( n^2 + \frac{1-\nu_1}{2} \left( \frac{12k^2}{\kappa^2} + s^2 + p^2 \right) \right) \chi_{\theta LF,n} = -\frac{3(1-\nu_1)}{\kappa^2\gamma} \bar{q}_{\theta LF,n}. \end{cases} \quad (21)$$

Граничні умови (7) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{rLF,n}(s,p) &= -\bar{\sigma}_{rrLF,n}(1,s,p), \quad \bar{q}_{xLF,n}(s,p) = \bar{q}_{\theta LF,n}(s,p) = 0, \\ W_{LF,n}(s,p) &= U_{rLF,n}(1,s,p), \quad \bar{\sigma}_{rxLF,n}(1,s,p) = \bar{\sigma}_{r\theta LF,n}(1,s,p) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Враховуючи граничні умови (22), у системі (21) з четвертого та п'ятого рівнянь знаходимо невідомі функції  $\chi_{xLF,n}$ ,  $\chi_{\theta LF,n}$ , а потім з першого та другого рівнянь знаходимо функції  $U_{LF,n}$ ,  $V_{LF,n}$  відповідно:

$$\begin{aligned} \chi_{xLF,n}(s,p) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} W_{LF,n}(s,p); \quad \chi_{\theta LF,n}(s,p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} W_{LF,n}(s,p); \\ U_{LF,n}(s,p) &= \frac{\Delta_4}{\Delta_3} W_{LF,n}(s,p); \quad V_{LF,n}(s,p) = \frac{\Delta_5}{\Delta_3} W_{LF,n}(s,p), \end{aligned} \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= A_1 A_2 - A_3^2; \quad \Delta_1 = iA_4 (sA_2 - nA_3); \quad \Delta_2 = A_4 (-sA_3 + nA_1); \\ \Delta_3 &= B_1 B_2 - B_3^2; \quad \Delta_4 = -i(v_1 s B_2 + n B_4 B_3); \quad \Delta_5 = v_1 s B_3 - B_4 B_1; \\ A_1 &= s^2 + \frac{1-v_1}{2} \left( \frac{12k^2}{\kappa^2} + n^2 + p^2 \right); \quad A_2 = n^2 + \frac{1-v_1}{2} \left( \frac{12k^2}{\kappa^2} + s^2 + p^2 \right); \\ A_3 &= sn \frac{1+v_1}{2}; \quad A_4 = 6k^2 \frac{1-v_1}{\kappa^2}; \\ B_1 &= \frac{1-v_1}{2} (n^2 + p^2) + s^2; \quad B_2 = \frac{1-v_1}{2} (s^2 + p^2) + n^2; \\ B_3 &= sn \frac{1+v_1}{2}; \quad B_4 = -k^2 \frac{(1-v_1)\Delta_2}{2\Delta} + n \left( 1 + \frac{(1-v_1)k^2}{2} \right). \end{aligned}$$

У результаті третє рівняння системи (21) набуде вигляду:

$$\left( isv_1 \frac{\Delta_4}{\Delta_3} + n \frac{\Delta_5}{\Delta_3} - k^2 \frac{1-v_1}{2\Delta} (is\Delta_1 + n\Delta_2) + \frac{1-v_1}{2} ((s^2 + n^2)k^2 + p^2) + 1 \right) W_{LF,n} = -\frac{1-v_1}{2\kappa\gamma} (\bar{q}_{rLF,n} - P_{LF,n}). \tag{24}$$

Отже, враховуючи рівняння (24) та дві останні рівності з (22), отримуємо систему рівнянь відносно змінних  $C_{1n}(s,p)$ ,  $C_{2n}(s,p)$ ,  $C_{3n}(s,p)$ , яка розв'язується методом Гауса. Нехай  $\bar{C}_{1n}(s,p)$ ,  $\bar{C}_{2n}(s,p)$ ,  $\bar{C}_{3n}(s,p)$  – розв'язки цієї системи. Тоді можемо записати:

$$U_{rLF,n}(r_*,s,p) = T_n(r_*,s,p) P_{LF,n}, \tag{25}$$

де

$$\begin{aligned} T_n(r_*,s,p) &= \bar{C}_{1n}(s,p) \left( \frac{nK_n(m_p r_*)}{r_*} - m_p K_{n+1}(m_p r_*) \right) - is\bar{C}_{2n}(s,p) \left( \frac{nK_n(m_s r_*)}{r_*} - m_s K_{n+1}(m_s r_*) \right) + \\ &+ \bar{C}_{3n}(s,p) \frac{nK_n(m_s r_*)}{r_*}. \end{aligned}$$

Аналогічно до (25) можна записати вираз і для інших переміщень та всіх напружень.

Тепер для знаходження нормальних переміщень за співвідношенням (25) потрібно знайти навантаження, яке передається на оболонку з боку шпангоутів. Для цього застосовуємо перетворення Лапласа за змінною  $\tau$  та перетворення Фур'є за змінною  $x_*$  до рівняння (3):

$$2\gamma_j(1+\nu_{\delta_j})I_j^*s^4Y_{jLF} + \rho_j^*F_j^*p^2Y_{jLF} = P_{\delta_{jLF}}(s,p) - \bar{q}_{cjLF}(s,p). \quad (26)$$

Введемо позначення:

$$A_j = 2\gamma_j(1+\nu_{\delta_j})I_j^*s^4 + \rho_j^*F_j^*p^2.$$

Тоді:

$$Y_{\delta_{jLF}}(s,p) = \frac{P_{\delta_{jLF}}(s,p) - \bar{q}_{cjLF}(s,p)}{A_j}. \quad (27)$$

Застосуємо перетворення Лапласа за змінною  $\tau$  та перетворення Фур'є за змінною  $x_*$  до рівнянь (10). Отримаємо:

$$P_{LF,n}(s,p) = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{cjLF}(s,p) D_n^j, \quad (28)$$

$$\text{де } \delta(\theta - \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^j \cos(n\theta).$$

Підставляємо (28) в (25). Будемо мати:

$$U_{rLF,n}(r_*,s,p) = T_n(r_*,s,p) \sum_{j=1}^N \bar{q}_{cjLF}(s,p) D_n^j. \quad (29)$$

Підсумовуємо в (29) тригонометричний ряд Фур'є. Отримаємо:

$$U_{rLF}(r_*,x_*,p,\theta) = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{cjLF}(p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*,s,p) D_n^j \cos(n\theta). \quad (30)$$

У виразі (30) замість  $\theta$  підставляємо  $\theta_k$ , ( $k = \overline{1, N}$ ), та отримаємо  $N$  рівностей:

$$U_{rLF}(r_*,x_*,p,\theta_k) = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{cjLF}(p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*,s,p) D_n^j \cos(n\theta_k), \quad (k = \overline{1, N}). \quad (31)$$

Використовуємо тепер граничну умову (9). З урахуванням (27) будемо мати:

$$\frac{P_{ckLF}(s,p) - \bar{q}_{\delta kLF}(s,p)}{A_k} = \sum_{j=1}^N \bar{q}_{cjLF}(p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*,s,p) D_n^j \cos(n\theta_k), \quad (k = \overline{1, N}) \quad (32)$$

або

$$P_{ckLF}(s,p) = \left( 1 + A_j \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*,s,p) D_n^j \cos(n\theta_j) \right) \bar{q}_{cjLF}(s,p) + \\ + A_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \bar{q}_{cjLF}(s,p) \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*,s,p) D_n^j \cos(n\theta_k), \quad (k = \overline{1, N}). \quad (33)$$

Розв'язуємо систему (33) відносно невідомих  $\bar{q}_{c1LF}(s,p), \dots, \bar{q}_{cNLF}(s,p)$ . Підставляємо отримані результати у вираз (29) та отримуємо кінцевий вираз для нормальних переміщень у просторі зображень за Фур'є-Лапласом.

Проілюструємо описаний алгоритм для випадку двох, чотирьох та шести ребер. Для спрощення розрахунків припустимо, що всі ребра мають однакові фізичні характеристики, та прикладемо до них однакові навантаження. Також, будемо припускати, що всі ребра

знаходяться у вершинах правильного  $N$ -кутника, який вписано в коло, що описує поперечний переріз оболонки. У такому випадку для всіх ребер реакції з боку оболонки будуть однакові.

Позначимо:

$$P_{\delta LF}(s, p) = P_{\delta 1LF}(s, p) = \dots = P_{\delta NLF}(s, p); \quad A = A_1 = \dots = A_N;$$

$$\bar{q}_{cLF}(s, p) = \bar{q}_{c1LF}(s, p) = \dots = \bar{q}_{cNLF}(s, p).$$

У такому випадку будемо мати:

$$\bar{q}_{cLF}(s, p) = \frac{P_{\delta LF}(s, p)}{1 + Af_1(r_*, s, p)}, \tag{34}$$

$$U_{rLF,n}(r_*, s, p) = \frac{T_n(r_*, s, p)P_{\delta LF}(s, p)}{1 + Af_1(r_*, s, p)} \sum_{j=1}^N D_n^j, \tag{35}$$

де  $f_1(r_*, s, p) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r_*, s, p) \sum_{j=1}^N D_n^j \cos(n\theta_1)$ .

Відповідні вирази для нормальних напружень отримуються аналогічно.

Коефіцієнти  $D_n^j$  отримуються так:

$$D_n^j = \frac{\sigma_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta - \theta_j) \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \cos(n\theta_j) \sigma_n, \tag{36}$$

де  $\sigma_n = 1, n=0, \sigma_n = \frac{NF+1}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{NF+1}\right), n > 0$  – множники, для прискорення збіжності тригонометричних рядів Фур'є [7];  $NF$  – кількість доданків у ряді Фур'є.

Через властивості кутів вписаного в коло правильного  $N$ -кутника, будемо мати:

$$\sum_{j=1}^N D_n^j \cos(n\theta_1) = \begin{cases} N\sigma_n, & n = Nk, \quad k \in Z, \\ 0, & n \neq Nk, \quad k \in Z, \end{cases} \tag{37}$$

$$\sum_{j=1}^N D_n^j = \begin{cases} N\sigma_n, & n = Nk, \quad k \in Z, \\ 0, & n \neq Nk, \quad k \in Z. \end{cases} \tag{38}$$

Іншими словами, співвідношення (37) та (38) означають, що у формулах (34) та (35), при підсумовуванні рядів Фур'є, потрібно враховувати лише ті доданки, номер яких кратний  $N$ .

### РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Розглянемо тепер випадок, коли в початковий момент часу  $t=0$  в області  $\theta = \theta_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ),  $r = b, -d \leq x \leq d$  прикладається імпульсивне нормальне навантаження  $F_0$ , яке постійно діє на відповідній ділянці.

Функція навантаження має вигляд:

$$p_{\delta}(x, t) = F_0 H(t) H(d - |x|). \tag{39}$$

Трансформанта навантаження (39) має вигляд:

$$P_{\delta LF}(s, p) = \frac{\sqrt{2}F_0 \sin(sd^*)}{\sqrt{\pi s p a}}, \quad (40)$$

$$\text{де } d^* = \frac{d}{a}.$$

Після оберненого перетворення Фур'є та Лапласа і підсумовування рядів Фур'є отримаємо вирази для оригіналу функції нормальних переміщень:

$$\frac{U_r(r_*, x_*, t, \theta) G_2}{F_0/a} = \frac{N}{\pi^3 i} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{Nn} \left[ \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \frac{e^{pt}}{p} \left( \int_0^{\infty} \frac{T_{Nn}(r_*, s, p) \sin(sd^*)}{s(1 + Af_1(r_*, s, p))} \cos(sx_*) ds \right) dp \right] \cos(n\theta). \quad (41)$$

Обчислення невластних інтегралів у виразі (41) здійснювалось наближено з використанням метода Файлона [8], обернення перетворення Лапласа здійснювалось чисельно за допомогою зміщених поліномів Лежандра [9].

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів:  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_\delta = 0,3$ ,  $\gamma = 30$ ,  $\gamma_\delta = 300$ ,  $\rho^* = 4$ ,  $\rho_\delta^* = 8$ ,  $F_\delta^* = 7 \cdot 10^{-4}$ ,  $I_\delta^* = 10^{-6}$ ,  $\kappa = 0,02$ ,  $r_* = 1$ ,  $d_* = \frac{1}{2}$ . Величини  $\theta$ ,  $\tau$ ,  $x_*$  змінювались.

На рис. 1 проілюстровано зміну нормальних переміщень (41) середовища за кутовою координатою в різні моменти безрозмірного часу на границі контакту з оболонкою, підкріпленою двома ребрами, у характерній точці ( $x_* = 0$ ). На рис. 2 наводяться аналогічні результати за осьовою координатою (при  $\theta = 0$ ) у різні моменти безрозмірного часу. На рис. 3 та рис. 5 наведені аналогічні до рис. 1 результати для оболонок, підкріплених чотирма та шістьма ребрами відповідно. На рис. 4 та рис. 6 наведені аналогічні до рис. 2 результати для оболонок, підкріплених чотирма та шістьма ребрами відповідно.

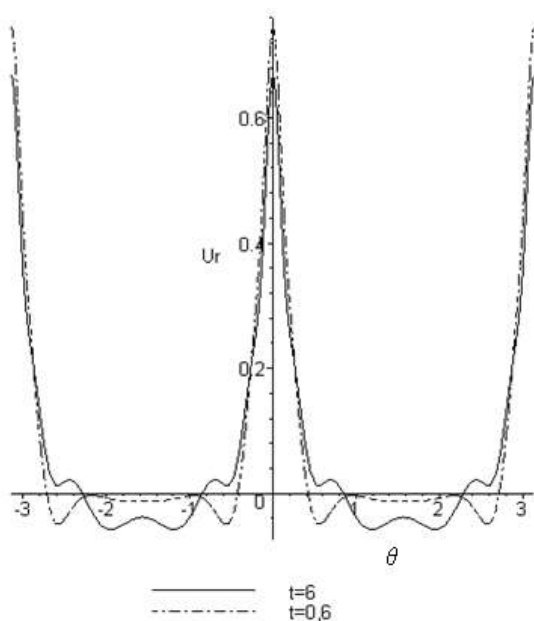


Рис. 1. Розподіл нормальних переміщень за кутовою координатою

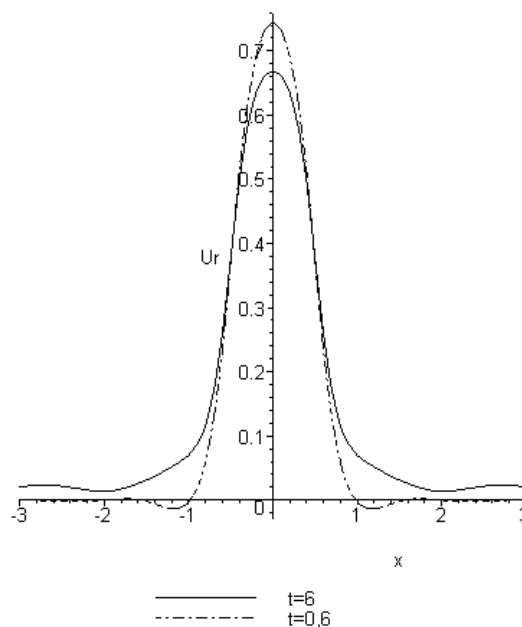


Рис. 2. Розподіл нормальних переміщень за осьовою координатою

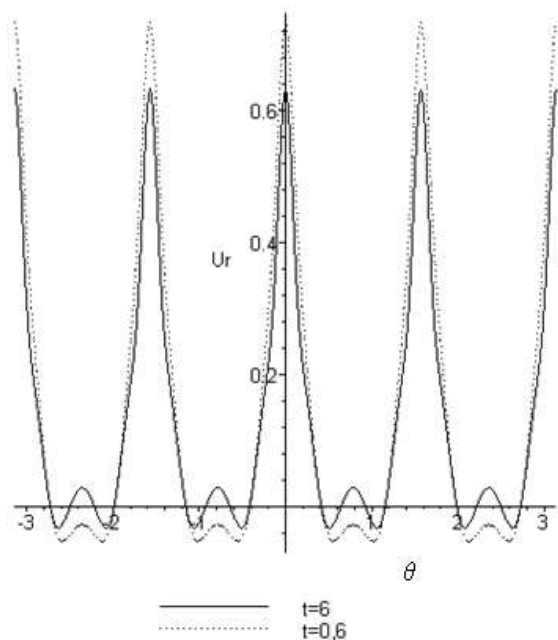


Рис. 3. Розподіл нормальних переміщень за кутовою координатою

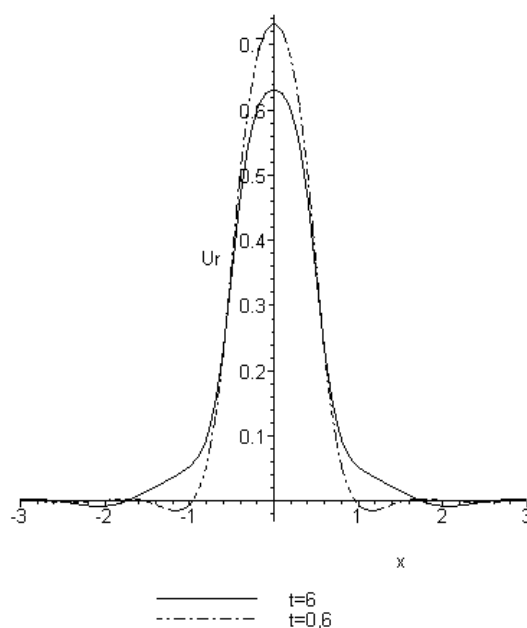


Рис. 4. Розподіл нормальних переміщень за осьюовою координатою

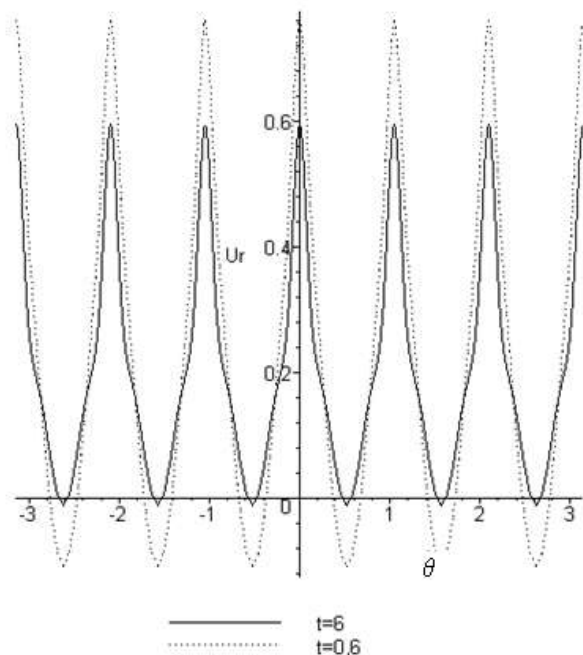


Рис. 5. Розподіл нормальних переміщень за кутовою координатою

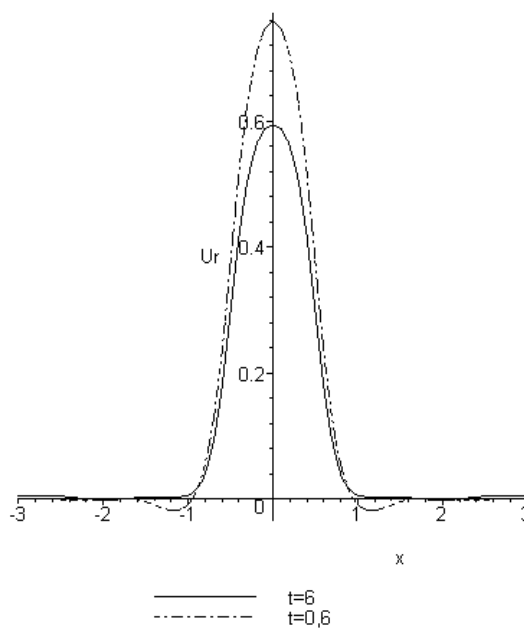


Рис. 6. Розподіл нормальних переміщень за осьюовою координатою

З отриманих результатів зрозуміло, що збільшення кількості ребер збільшує міцність конструкції.

Тепер порівняємо отримані результати з невідкріпленою оболонкою. Розглянемо випадок, коли оболонка відкріплена двома поздовжніми ребрами жорсткості. Невідкріплену оболонку розглянемо під дією навантаження, яке залежить від осьової змінної та безрозмірної змінної часу аналогічно до (38), та діє на ділянці, яка в першому випадку відкріплена ребрами. Друга задача розв'язана методами, описаними в роботі [2]. На рис. 6 проілюстровано порівняння нормальних переміщень оболонки на границі контакту з середовищем у точці  $\theta = x_* = 0$  за змінною безрозмірного часу, причому крива 1 відповідає відкріпленій оболонці, а крива 2 – невідкріпленій.

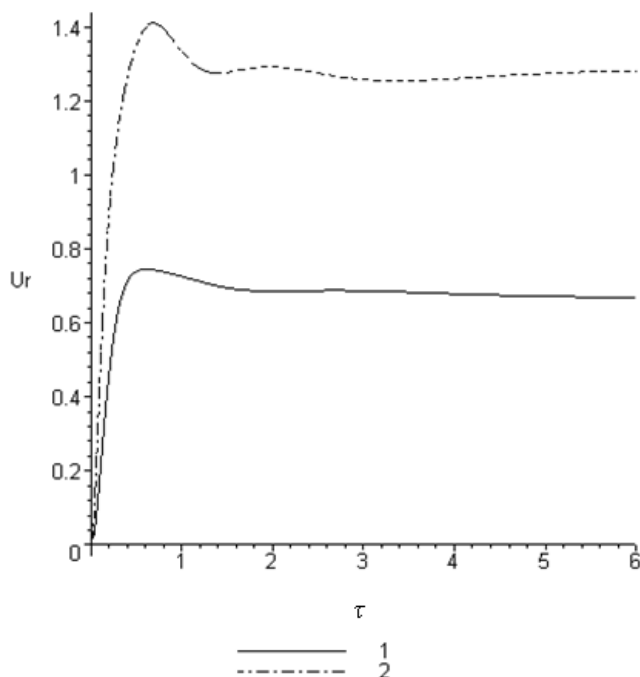


Рис. 7. Порівняння нормальних переміщень оболонки за змінною безрозмірного часу

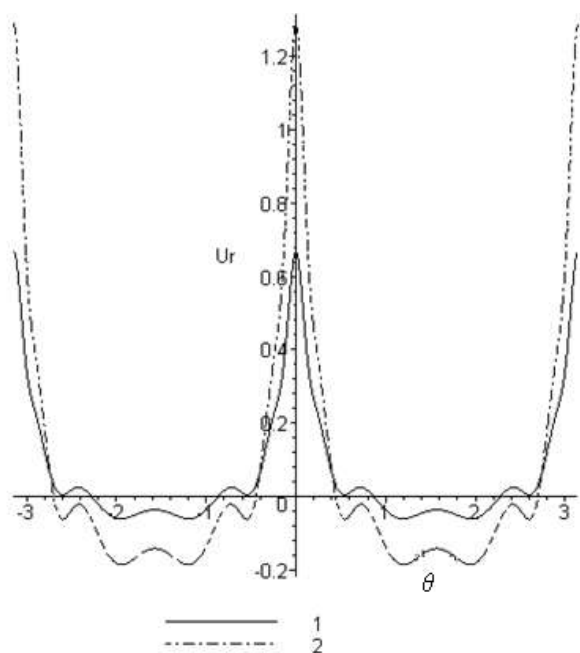


Рис. 8. Порівняння нормальних переміщень за кутовою координатою

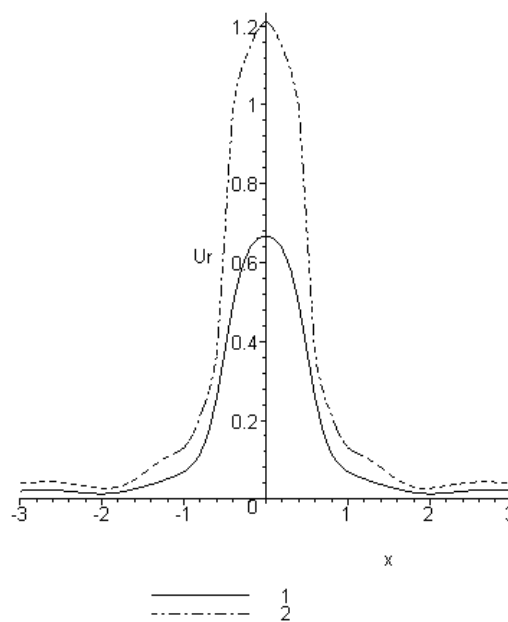


Рис. 9. Порівняння нормальних переміщень за осьовою координатою

З рис. 7 видно, що підкріплення оболонки повздовжніми ребрами жорсткості майже вдвічі зменшує нормальні переміщення (на 48%).

На рис. 8 показано аналогічні результати порівняння, але за кутовою координатою при  $\tau = 6$ ,  $x_* = 0$ , а на рис. 9 – за осьовою (при  $\tau = 6$ ,  $\theta = 0$ ). Причому на рис. 8-9 крива 1 ілюструє підкріплену оболонку, а крива 2 – непідкріплену.

### ВИСНОВКИ

Отримано розв'язок динамічної задачі для дискретно підкріпленої поздовжніми ребрами жорсткості циліндричної оболонки у пружному середовищі. При цьому вирази для переміщень і напружень в оболонці і довільній точці середовища подано у вигляді рядів Фур'є від подвійних невластних інтегралів Фур'є та Лапласа. Для отримання результатів



запропоновано ефективний чисельний алгоритм, який ґрунтується на методі Файлона та многочленів Лежандра. Проілюстровано графічно розподіл за кутовою та осьювою координатою в різні моменти часу нормальних переміщень оболонки на межі контакту з пружним середовищем. Проаналізовано вплив кількості ребер. Проведено порівняння з невідкріпленою оболонкою при аналогічних навантаженнях. Отримані результати і запропоновані алгоритми можуть використовуватися при динамічному розрахунку підземних споруд, зокрема тунелів метро та підземних трубопроводів.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Горшков А. Г., Пожуев В. И. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. Москва: Изд-во МАИ, 1992. 136 с.
2. Пожуев А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2015. № 2. С. 108–114.
3. Пожуев А. В., Фасоляк А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 200–213.
4. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Москва: Наука, 1972. 432 с.
6. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. Москва: Машиностроение, 1970. 736 с.
7. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 524 с.
8. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. Москва: Наука, 1966. 370 с.
9. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. Москва: Наука, 1974. 223 с.

### REFERENCES

1. Gorshkov, A. G. & Pozhuev, V. I. (1992). Planes and shells on inertial foundations under action of moving loads. Moscow: Izd-vo MAI.
2. Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2015). Non-stationary non axi-symmetrical deformation cylindrical shell in elastic space subjected to moving surface loads. *Novi materialy i technologii v metalurgiyi ta mashynobuduvanni*, No. 2, pp. 108-115.
3. Pozhuev, A. V. & Fasoliak, A. V. (2016). Non-stationar deformation of cylindrical shell in elastic medium, subjected to extended surface loads. *Visnyk of Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Fyzyko-matematychni nauky*, No. 1, pp. 200-213.
4. Novatskiy, V. (1975). Elastic theory. Moscow: Mir.
5. Volmir, A. S. (1972). Non-linear dynamic of planes and shells. Moscow: Nauka.
6. Filippov, A. P. (1970). Vibrations of deformable systems. Moscow: Mashynostroenie.
7. Lantsosh, K. (1961). Practical methods of applied analysis. Moscow: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit.
8. Krylov, V. I. & Shulina, L. T. (1966). Reference book of numerical integrations. Moscow: Nauka.
9. Krylov, V. I. & Skoblya, N. S. (1974). Methods of approximately Fourier transform and inverse of Laplace transform. Moscow: Nauka.

УДК 539.3

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ

Фильштинский Л. А., д. ф.-м. н., профессор, Сушко Т. С., к. ф.-м. н.,  
Еременко А. А., аспирант

*Сумский государственный университет,  
ул. Римского-Корсакова, 2, г. Сумы, Украина*

leonid@mphis.sumdu.edu.ua

В рамках комплексной модели двумерной магнитоэластичности рассмотрена краевая задача механики разрушения для МЭУ пластины, ослабленной трещинами. Выписаны комплексные представления механических, магнитных и электрических полевых величин. Краевая задача для  $N$  трещин сведена к системе из  $N$  матричных сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядром Коши и  $N$  дополнительных матричных условий. Для прямолинейной произвольно ориентированной трещины получено точное решение краевой задачи. Выведены асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности механических, электрических и магнитных величин, а также энергосток в вершины дефектов. Рассмотрены примеры расчетов для нескольких конфигураций.

*Ключевые слова: магнитоэластичная керамика, двумерная модель ЭМУ, макротрещины, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты интенсивности полевых величин, энергостоки в вершинах трещины.*

## ПЛОСКА ЗАДАЧА МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНИ З ТРІЩИНАМИ

Фильштинський Л. А., д. ф.-м. н., професор, Сушко Т. С., к. ф.-м. н.,  
Єременко Г. А., аспірант

*Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, Україна*

leonid@mphis.sumdu.edu.ua

У рамках комплексної моделі двовимірної магнитоелектропружності розглянута крайова задача механіки руйнування для МЕУ пластины, послабленої тріщинами. Виписано комплексні подання механічних, магнітних і електричних польових величин. Крайова задача для  $N$  тріщин зведена до системи з  $N$  матричних сингулярних інтегральних рівнянь першого роду з ядром Коші і  $N$  додаткових матричних умов. Для прямолінійної довільно орієнтованої тріщини отримано точний розв'язок крайової задачі. Виведені асимптотичні формули для коефіцієнтів інтенсивності механічних, електричних і магнітних величин, а також енергостоків у вершини дефектів. Розглянуто приклади розрахунків для декількох конфігурацій.

*Ключові слова: магнитоелектропружна керамика, двовимірна модель ЕМП, макротріщини, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності польових величин, енергостоки у вершини тріщин.*

## PLANE PROBLEMS MAGNETOELECTROELASTICITY FOR PLATE WITH CRACKS

Filshinskii L. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Sushko T. S., Ph.D. in Physics and Maths,  
Yeremenko H. A., Graduate Student

*Sumy State University,  
Rimsky-Korsakov str., 2, Sumy, Ukraine,*

leonid@mphis.sumdu.edu.ua

Possessing the ability to transform mechanical, electrical and magnetic fields, magnetoelastic (MEE) materials are of great interest for research in various fields of technology, as a class of important functional materials. However, the main disadvantage of MEE materials is their fragility and low fracture viscosity. Therefore, it is important to study the fracture mechanics problems of the MEE materials.

In this paper, an effective analytical-numerical method has been developed for investigating coupled mechanical, magnetic, and electric fields in medium with defects. The fracture characteristics near the cracks vertices are determined.

A model of a two-dimensional MEE medium is described. The problem is reduced to the problem of the complex variable functions theory with respect to four analytical functions in corresponding affine domains. The fracture mechanics boundary value problem of the MEE plate, weakened by cracks, is considered. It is assumed that the cracks are two-sided mathematical sections whose curvatures are satisfied the Hölder condition. The boundary-value problem for N cracks reduced to a system of N first kind matrix singular integral equations (SIE) with the Cauchy type kernels. The solutions of the SIE system from physical considerations are sought in the class of functions with root singularities at the ends of the cuts. In this class, the solutions of the equations are not completely defined. To fix the solution, it is necessary to fulfill additional conditions: conditions for the uniqueness of mechanical displacements, electric and magnetic potentials on each of the cracks. The recent conditions lead to a system of homogeneous integral equations.

Asymptotic expressions for the field values near the cracks vertices are obtained using the asymptotics of Cauchy type integrals at the ends of the integration line. Expressions for the intensity coefficients of mechanical, electric and magnetic fields near the tips of the crack are determined.

The constructed analytical algorithm is applicable to the study of the effects of field interaction as a function of the geometric and physical parameters of the model. The algorithm is implemented numerically. The results of calculations are presented.

*Key words: magneto-electroelastic ceramics, two-dimensional model of MEE, macrocracks, singular integral equations, intensity factors of field quantities, the energy flows passing to the tip of the cracks.*

Обладея способностью преобразовывать механическую, электрическую и магнитную энергии, МЭУ материалы вызывают большой интерес для исследования в нескольких областях техники, как класс важных функциональных материалов. Тем не менее, большим недостатком магнитоэлектростатических материалов является их хрупкость и низкая вязкость разрушения. Как правило, эти материалы могут преждевременно выходить из строя из-за наличия некоторых дефектов (таких, как трещины и отверстия), возникающих в ходе производственного процесса и последующей обработки. Поэтому, большое значение имеет изучение проблемы разрушения МЭУ материалов. Ван и Мей в [1], основываясь на формализме Стро, рассмотрели задачу о разрушении пьезомагнитоэлектрического материала. В работе [2] авторы с использованием концепции интеграла взаимодействия и процедуры метода конечных элементов рассмотрели ряд задач механики разрушения. Плоская задача магнитоупругости для пластины с трещинами рассмотрена в [3].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве модели двумерной (МЭУ) среды примем:

Материальные уравнения

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & v_{11} & v_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & v_{12} & v_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & v_{11} & v_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & v_{12} & v_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Дифференциальные уравнения равновесия, электро и магнитоэластики [4]

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2), \quad (2)$$

$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0, \quad \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \quad \partial_1 H_2 - \partial_2 H_1 = 0. \quad (3)$$

Соотношения Коши

$$e_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \partial_2 u_2, \quad 2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1. \quad (4)$$

Условие совместности деформаций

$$\partial_1^2 e_{22} + \partial_2^2 e_{11} = 2\partial_1 \partial_2 e_{12}. \quad (5)$$

К этим соотношениям необходимо присоединить соответствующие механические, электрические и магнитные краевые условия на границе тела.

В (1)-(5):  $s_{ij} = s_{ij}^{DB}$  – коэффициенты деформации, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей,  $g_{kj} = g_{kj}^{\sigma D}$  и  $p_{kj} = p_{kj}^{\sigma D}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженности, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях;  $\beta_{kl} = \beta_{kl}^{\sigma}$ ,  $\chi_{kl} = \chi_{kl}^{\sigma}$  и  $\nu_{kl} = \nu_{kl}^{\sigma}$  – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях;  $u = (u_1, u_2)$  – вектор перемещения;  $\sigma_{ij}$  и  $e_{ij}$  – тензоры напряжения и деформации;  $D_i$  и  $B_i$  – компоненты векторов электрической и магнитной индукции;  $E_i$  и  $H_i$  – электрическая и магнитная напряженности полей.

Полевые величины представим в виде:

$$\begin{aligned} \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} &= \{\partial_2^2, -\partial_1 \partial_2, \partial_1^2\} A_{11}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} A_{11}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \\ \{D_1, D_2\} &= \{\partial_2, -\partial_1\} A_{12}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{12}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \\ \{B_1, B_2\} &= \{\partial_2, -\partial_1\} A_{13}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{13}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \{E_1, E_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^E \Phi_k(z_k), \quad \{H_1, H_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^H \Phi_k(z_k) \\ \alpha_k^E &= [g_{16} A_{11}(1, \mu_k) + \beta_{11} A_{12}(1, \mu_k) + \nu_{11} A_{13}(1, \mu_k)] \mu_k, \\ \alpha_k^H &= [p_{16} A_{11}(1, \mu_k) + \nu_{11} A_{12}(1, \mu_k) + \chi_{11} A_{13}(1, \mu_k)] \mu_k. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varphi^E = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_k^E \varphi_k(z_k), \quad \varphi^H = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_k^H \varphi_k(z_k), \quad \varphi_k(z_k) = \int \Phi_k(z_k) dz_k. \quad (8)$$

$$\Phi_k(z_k) = \frac{d^6}{dz_k^6} f_k(z_k) = f_k^{(6)}(z_k).$$

Функции  $f_k(z_k)$  аналитические в своих аффинных областях  $z_k$ .

$$\begin{aligned} \{u_1, u_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{p_k, q_k\} \varphi_k(z_k), \\ p_k &= (s_{11} \mu_k^2 + s_{12}) A_{11}(1, \mu_k) - g_{21} A_{12}(1, \mu_k) - p_{21} A_{13}(1, \mu_k), \\ q_k &= \left( s_{12} \mu_k + \frac{s_{22}}{\mu_k} \right) A_{11}(1, \mu_k) - \frac{g_{22}}{\mu_k} A_{12}(1, \mu_k) - \frac{p_{22}}{\mu_k} A_{13}(1, \mu_k). \end{aligned} \quad (9)$$

### КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МЭУ ДЛЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНАМИ

В декартовых осях  $0x_1x_2$  рассмотрим неограниченную плоскую магнитоэлектроупругую среду, ослабленную в некоторой конечной области трещинами  $\Gamma_m$  ( $m = \overline{1, M}$ ). Будем считать, что  $\Gamma_m$  – двусторонняя ляпуновская дуга [5], на её берегах задано распирающее давление

$p_m$ , а на бесконечности действуют равномерные поля механических напряжений растяжения и сдвига  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , а также электрической и магнитной индукции  $\langle D_1 \rangle$ ,  $\langle D_2 \rangle$  и  $\langle B_1 \rangle$ ,  $\langle B_2 \rangle$  соответственно (рис. 1).

Целью данной работы является построение эффективного аналитико-числового метода, позволяющего исследовать связанные механические, магнитные и электрические поля в теле, а также характеристики разрушения в вершинах трещин: коэффициенты интенсивности полевых величин и потоки энергии в вершинах.

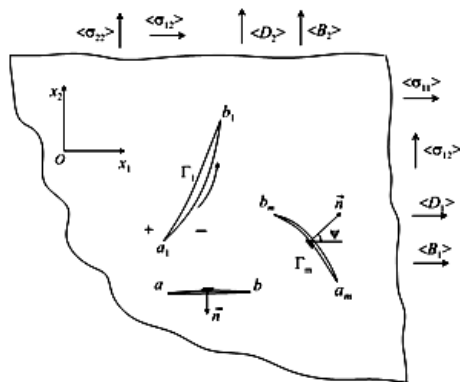


Рис. 1. Пластина с трещинами под действием равномерных полей на бесконечности

При решении краевых задач используем следующие предположения: в недеформируемом состоянии трещина представляет собой двусторонний математический разрез  $\Gamma_m$ ; берега трещины в процессе деформации не контактируют;  $\bigcap_{m=1}^M \Gamma_m = \emptyset$ .

В соответствии со сказанным, механические, электрические и магнитные краевые условия на берегах разреза  $\Gamma_m$  представим в виде

$$X_{1n}^\pm = -p \cos \psi, \quad X_{2n}^\pm = -p \sin \psi, \quad p = \{p_m \in \Gamma_m\}. \quad (10)$$

Здесь верхний знак соответствует левому берегу разреза  $\Gamma_m$  (при движении от его начала  $a_m$  к концу  $b_m$ ),  $\psi$  – угол между положительной нормалью к левому берегу и лучом  $Ox_1$ .

В комплексных переменных краевые условия можно представить следующим образом:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{jk} a_k(\psi) [\Phi_k] = [F_j^0], \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{jk} a_k(\psi) (\Phi_k^+ + \Phi_k^-) = (F_j^+ + F_j^-) \quad (j = \overline{1,4}), \quad (11)$$

$$R_{1k} = \mu_k A_{11}(1, \mu_k), \quad R_{2k} = -A_{11}(1, \mu_k), \quad R_{3k} = A_{12}(1, \mu_k), \quad R_{4k} = A_{13}(1, \mu_k),$$

$$F_1^\pm = -p \cos \psi, \quad F_2^\pm = -p \sin \psi, \quad F_3^\pm = 0, \quad F_4^\pm = 0, \quad [\Phi_k] = \Phi_k^+(z_k) - \Phi_k^-(z_k),$$

где знак «+» относится к левому берегу, а знак «-» – к правому берегу трещины.

Для решения краевой задачи теории функций (11) обобщим формализм, разработанный одним из авторов в [6] при рассмотрении трещин в анизотропных средах.

Комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  представим в виде обобщенных интегралов типа Коши

$$\Phi_k(z_k) = B_k + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - z_k} ds, \quad \Gamma = \bigcup_{m=1}^M \Gamma_m, \quad (12)$$

$$z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z, \quad \zeta_k = \operatorname{Re} \zeta + \mu_k \operatorname{Im} \zeta, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \omega_k(\zeta) = \{\omega_k^{(m)}(\zeta), \zeta \in \Gamma_m\}.$$

Здесь  $ds$  – элемент дуги в физической плоскости,  $B_k$  – постоянные, которые должны обеспечить условия на бесконечности,  $\omega_k$  определяются из краевых условий на  $\Gamma$  и некоторых дополнительных условий.

Следы функций (12) на берегах  $\Gamma_m$  можно определить при помощи формул Сохоцкого-Племеля. Имеем

$$\left\{ \Phi_k(z_k) \right\}_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma_m \\ (z_k \rightarrow \zeta_{0k})}}^{\pm} = B_k \pm \frac{i\omega_k^{(m)}(\zeta_0)}{2a_k(\psi_0)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds, \quad (13)$$

$$\psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta_{0k} = \operatorname{Re} \zeta_0 + \mu_k \operatorname{Im} \zeta_0, \quad \zeta_0 \in \Gamma_m.$$

Интеграл в (13) понимается в смысле главного значения по Коши.

Подставляя предельные значения (13) в краевые условия (11), приходим к следующей смешанной системе алгебраических и интегральных уравнений:

$$-2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \omega_k^{(m)}(\zeta) = [F_n] \quad (n = \overline{1, 4}; m = \overline{1, M}). \quad (14)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \frac{a_k(\psi_0)}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds = \frac{F_n^+ + F_n^-}{2} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} a_k(\psi_0) B_k \quad (n = \overline{1, 4}).$$

Правые части системы (14) имеют вид:

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{1k} a_k(\psi_0) B_k = -(\langle \sigma_{11} \rangle \cos \psi_0 + \langle \sigma_{12} \rangle \sin \psi_0) = -N_1(\zeta_0),$$

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{2k} a_k(\psi_0) B_k = -(\langle \sigma_{12} \rangle \cos \psi_0 + \langle \sigma_{22} \rangle \sin \psi_0) = -N_2(\zeta_0),$$

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{3k} a_k(\psi_0) B_k = -(\langle D_1 \rangle \cos \psi_0 + \langle D_2 \rangle \sin \psi_0) = -N_3(\zeta_0),$$

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{4k} a_k(\psi_0) B_k = -(\langle B_1 \rangle \cos \psi_0 + \langle B_2 \rangle \sin \psi_0) = -N_4(\zeta_0).$$

В дальнейшем анализе целесообразно избавиться от алгебраической системы в (14). Из нее следуют равенства, которые в матричной форме можно представить следующим образом:

$$R\omega = q, \quad \omega = R^{-1}q, \quad \operatorname{Im} q = 0 \quad (15)$$

$$q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}^T, \quad \omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}^T, \quad R_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}, \quad \det R \neq 0$$

константы  $R_{jk}$  определены в (11).

В соответствии с (15), система интегральных уравнений (14) может быть представлена в следующей матричной форме:

$$\int_{\Gamma} K(\zeta, \zeta_0) q(\zeta) ds = \pi N(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma = \bigcup \Gamma_m \quad (m = \overline{1, M}), \quad (16)$$

$$K(\zeta, \zeta_0) = \operatorname{Re} \{ R_1 G(\zeta, \zeta_0) R_1^{-1} \}, \quad q(\zeta) = \{q_1(\zeta), q_2(\zeta), q_3(\zeta), q_4(\zeta)\}^T,$$

$$G(\zeta, \zeta_0) = \text{diag} \left\{ \frac{a_1(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{01}}, \frac{a_2(\psi_0)}{\zeta_2 - \zeta_{02}}, \frac{a_3(\psi_0)}{\zeta_3 - \zeta_{03}}, \frac{a_4(\psi_0)}{\zeta_4 - \zeta_{04}} \right\},$$

$$N(\zeta_0) = \{-p \cos \psi_0 - N_1(\zeta_0), -p \sin \psi_0 - N_2(\zeta_0), -N_3(\zeta_0), -N_4(\zeta_0)\}^T, \quad p = (p_m, \zeta \in \Gamma_m).$$

Таким образом, краевая задача теории функций (11) свелась к матричному сингулярному интегральному уравнению первого рода (16) относительно действительного вектор-столбца  $q(\zeta)$ . Решение этого уравнения из физических соображений разыскиваем в классе функции с корневыми особенностями на концах разрезов. В этом классе решение уравнения (16) определяется не вполне. Для фиксации решения необходимо выполнить некоторые дополнительные условия, которые вытекают из физических соображений.

Из условий однозначности механических перемещений, электрического и магнитного потенциалов получаем дополнительные условия (по четыре условия на каждой трещине)

$$\int_{\Gamma_m} q^{(m)}(\zeta) ds = 0. \tag{17}$$

Таким образом, построенный аналитический алгоритм сводится к решению  $M$  матричных интегральных уравнений (16), совместно с дополнительными условиями (17). Последние фиксируют решения в классе функций неограниченных на концах дуг  $\Gamma_m$ .

Для вывода асимптотических выражений полевых величин в вершинах трещин введем параметризацию контура  $\Gamma_m$  (ниже индекс  $m$  опускаем)

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad a = \zeta(-1), \quad b = \zeta(1), \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma = \bigcup \Gamma_m, \quad -1 \leq \beta, \quad \beta_0 \leq 1. \tag{18}$$

Плотности  $\omega_k(\zeta)$ , фигурирующие в представлениях (12), имеют корневые особенности. Положим

$$\omega_k(\zeta) = \frac{\omega_k^*(\zeta)}{\sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)}} = \frac{\Omega_k(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad s'(\beta) = \frac{ds}{d\beta}. \tag{19}$$

Используя асимптотику интегралов типа Коши на концах линии интегрирования [11], запишем главную асимптотику функции (12) в вершине  $c$ .

$$\Phi_k^c(z_k) = \frac{\Omega_k(\pm 1)}{2\sqrt{2\zeta'_k(\pm 1)}} \frac{(\cos \theta_c + \mu_k \sin \theta_c)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{r}} = \frac{1}{2\sqrt{2r}} \Psi^c, \tag{20}$$

$$\Psi^c = \frac{\Omega_k(\pm 1)}{\sqrt{\zeta'_k(\pm 1)}} (\cos \theta_c + \mu_k \sin \theta_c)^{\frac{1}{2}},$$

Здесь верхний знак соответствует концу трещины  $c = b$ , нижний – началу  $c = a$ ;  $\Omega_k(\beta)$  определяется по соотношениям (19).

Коэффициенты интенсивности полевых величин определяем по формулам

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_n^{(I)}), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \tau_{ns}^{(II)}), \quad K_D = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} D_n^{(D)}), \quad K_B = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} B_n^{(B)}). \tag{21}$$

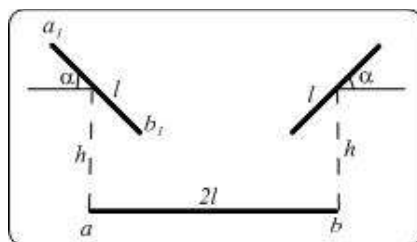


Рис. 2. Конфигурация трещин

В качестве расчетного варианта рассматривалась конфигурация, показанная на рис. 2. Интегральное уравнение (16), в совокупности с дополнительными условиями (17), методом механических квадратур сводилась к системе линейных алгебраических уравнений.

На рис. 3 представлены результаты расчетов коэффициентов интенсивности  $K_I$  в вершинах наклонной трещины в зависимости от угла при  $l=1$ ,  $h=1$ .

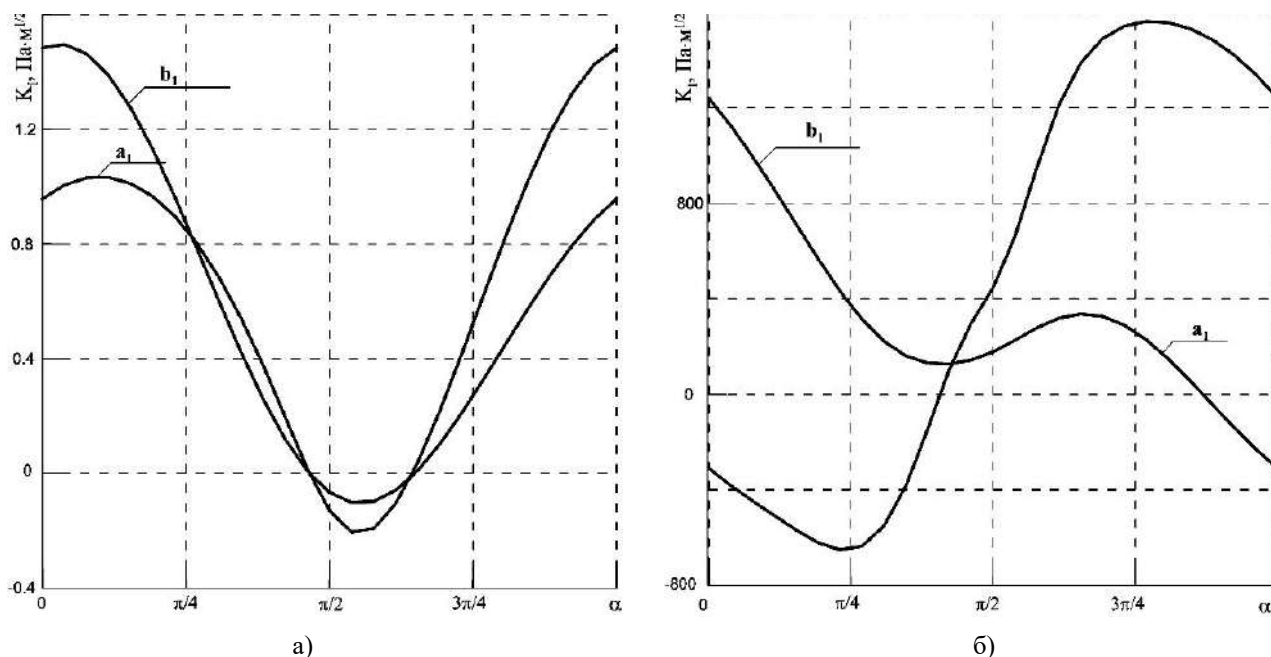


Рис. 3. Графики коэффициентов интенсивности  $K_I$  в вершинах трещин в зависимости от угла  $\alpha$  и действии  $\sigma_{22}^{\infty} = 1$  Па (а); и при действии электрической индукции  $D_2^{\infty} = 1$  Кл/м<sup>2</sup> (б)

## ВЫВОДЫ

Методом сингулярных интегральных уравнений рассмотрена граничная задача электромагнитоупругости для плоскости с трещинами. Получены формулы для КИН, электрических и магнитных величин. Установлена необходимость учета взаимного влияния электрического, магнитного и механического полей на характеристики разрушения пластины в окрестности вершин трещин.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wang B. L., Mai Y. W. Fracture of piezoelectromagnetic materials. *Mech. Res. Commun.* 2004. 31. P. 65–73.
2. Zhou Z. G., Chen Z. T. Basic solution of a Mode-I limited-permeable crack in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials. *Int. J. Solids Struct.* 2008. 45. P. 2265–2296.
3. Фильштинский Л. А., Носов Д. Н., Еременко А. А. Плоская задача магнитоупругости для пьезомагнитной среды с трещинами. *Физико-химическая механика материалов.* 2015. Т. 51, № 2. С. 109–115.
4. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. Москва: Наука, 1986. 160 с.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1973. 512 с.
6. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. *Изв. АН СССР. Мех. тв. тела.* 1976. № 5. С. 91–97.

## REFERENCES

1. Wang, B. L. & Mai, Y. W. (2004). Fracture of piezoelectromagnetic materials. *Mech. Res. Commun.*, 31, pp. 65-73.
2. Zhou, Z. G. & Chen, Z. T. (2008). Basic solution of a Mode-I limited-permeable crack in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials. *Int. J. Solids Struct.*, 45, pp. 2265-2296.



3. Fil'shtinskiy, L. A., Nosov, D. N. & Yeremenko, A. A. (2015). Plane magnetoelasticity problem for a piezomagnetic medium with cracks. *Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov*, Vol. 51, No. 2, pp. 109-115.
4. Novatskiy, V. (1986). *Electromagnetic effects in solids*. Moscow: Nauka.
5. Vladimirov, V. S. (1973). *Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka.
6. Fil'shtinskiy, L. A. (1976). Elastic equilibrium of a plane anisotropic medium, weakened by arbitrary curvilinear cracks. Limit transition to an isotropic medium. *Izv. AN SSSR. Mekh. tv. tela*, No. 5, pp. 91-97.

УДК 539.3

## МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПСЕВДОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

<sup>1</sup>Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор, <sup>2</sup>Стеблянко П. А., д. ф.-м. н., профессор,  
<sup>1</sup>Петров А. Д., аспирант

<sup>1</sup>*Днепро́вский национальный университет им. Олесь Гончара,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49000, Украина*

<sup>2</sup>*Днепро́вский государственный технический университет,  
ул. Днепро́строевская, 2, г. Каменское, Днепропетровская обл., 51900, Украина*

yu.chernyakov@gmail.com, caf-vmi@ukr.net, alex93203@rambler.ru

Рассматривается нестационарная термо-упруго-пластическая задача для тел из псевдоупругого материала. Особенность теории состоит в том, что диаграмма напряжения деформаций представляется в виде трехзвенной ломаной и может иметь ниспадающий участок. При этом характерные точки диаграммы зависят от температуры и фазового состояния материала. Такой характер диаграммы приводит к разрывным решениям и, как следствие, к подвижным границам фазовых переходов. Рассмотрен пример тонкой полосы при одноосном растяжении. Показано, что деформация неоднородна по образцу и её развитие зависит от свойств материала.

*Ключевые слова:* термо-упруго-пластичность, псевдоупругость, фазовые переходы.

## МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ ПСЕВДОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

<sup>1</sup>Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Стеблянко П. О., д. ф.-м. н., професор,  
<sup>1</sup>Петров О. Д., аспірант

<sup>1</sup>*Дніпро́вський національний університет ім. Олесь Гончара,  
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна*

<sup>2</sup>*Дніпро́вський державний технічний університет,  
вул. Дніпро́будівська, 2, м. Кам'янське, Дніпропетровська обл., 51900, Україна*

yu.chernyakov@gmail.com, caf-vmi@ukr.net, alex93203@rambler.ru

Розглядається нестационарна термо-пружно-пластична задача для тіл з псевдопружного матеріалу. Особливість теорії полягає в тому, що діаграма напруги деформацій представляється у вигляді триланкової ламаної і може мати спадаючу ділянку. При цьому характерні точки діаграми залежать від температури і фазового стану матеріалу. Такий характер діаграми призводить до розривних рішень і, як наслідок, до рухливих меж фазових переходів. Розглянутий приклад тонкої смуги при одноосному розтягуванні. Показано, що деформація неоднорідна вздовж зразка і її розвиток залежить від властивостей матеріалу.

*Ключові слова:* термо-пружно-пластичність, псевдопружність, фазові переходи.

## MODEL OF BEHAVIOR OF PSEUDOELASTICITY MATERIAL UNDER NONSTATIONARY LOADING

Chernyakov Yu. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,  
Steblyanko P. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Petrov A. D., Graduate Student

<sup>1</sup>*Oles Honchar Dnipro National University,  
Ave. Gagarin, 72, Dnepr, 49000, Ukraine*

<sup>2</sup>*Dniprovsk State Technical University,  
DniproStroevskaya str., 2, Kamenskoye, Dnepropetrovsk region, 51900, Ukraine*

yu.chernyakov@gmail.com, caf-vmi@ukr.net, alex93203@rambler.ru

The list of alloys that exhibit pseudoelasticity includes Ni-Ti alloys and various copper, iron, silver and gold-based alloys. Pseudoelasticity is the ability of a material to accumulate deformations upon loading at a high temperature regime and then return to its original state after unloading (through the hysteresis loop). The mechanism of this reduction is the transformation from the martensite phase to the original austenite phase. Such alloys as NiTi, CuZnAl, CuAlNi, AuCd and others can restore deformations up to 3%. Important characteristics of some of these materials are internal damping, pseudoelasticity and high yield strength.

A nonstationary thermo-elastic-plastic problem is examined for bodies from pseudoelasticity material. The feature of theory consists of that the diagram of tension of deformations appears as three-unit broken and can have a handing down area. Thus the characteristic points of diagram depend on a temperature and phase state of material. Such character of diagram results in break decisions and as a result to the moving boundaries of phase transitions. The example of thin stripe is considered at monaxonic tension. It is shown that deformation is inhomogeneous according to bar and her development depends on properties of material.

A version of the model of behavior of a pseudoelastic material has been developed and experimentally substantiated. In this model, the possibility of quantitative evaluation of the associated interactions between stresses, temperature, deformation and material loading rate is built that is suitable for modeling the continual level.

We obtained the numerical confirmation that the front of the stepwise change in the strain propagates at a constant rate that depends only on the mechanical properties of the material.

Recurrent formulas allow us to obtain the third (for temperature) and fourth (for the velocities of displacements, stresses and deformations) order of approximation of the method with respect to the coordinates.

*Key words: thermo-elastic-plasticity, pseudoelasticity, phase transitions.*

### ВВЕДЕНИЕ

Список сплавов, которые демонстрируют псевдоупругость, включает сплавы Ni-Ti и много медных, железных, серебряных и полученных на основе золота сплавов. Псевдоупругость относится к способности материала при более высоком температурном режиме накапливать деформации при нагружении и потом возвращаться в исходное положение после разгрузки (через петлю гистерезиса). Механизмом такого восстановления является преобразование из мартенситной фазы в изначальную аустенитную фазу.

Такие сплавы как NiTi, CuZnAl, CuAlNi, AuCd и другие, могут восстанавливать деформации до 3%. Важными характеристиками некоторых из этих материалов являются внутреннее демпфирование, псевдоупругость и высокий предел текучести. При этом отмечается, что количество экспериментальных данных высокого качества макроскопического поведения NiTi остается ограниченным.

Характерной чертой диаграммы материала СПФ при активном нагружении является участок идеальной пластичности (Fig. 2., Fig. 16. NiTi stress-strain response at 70°C [4]). Аналогичные участки имеют место и при разгрузке, но при определенных температурах.

### ЛОКАЛЬНАЯ ДИАГРАММА ПСЕВДОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Для записи локальной зависимости между физическими величинами использовалась модель упругопластического тела с участком разупрочнения (AC) при активном нагружении и постоянной температуре [6]. Температурное поле тела считаем известным, полученным

путем решения соответствующей задачи нестационарной теплопроводности либо из других источников [2].

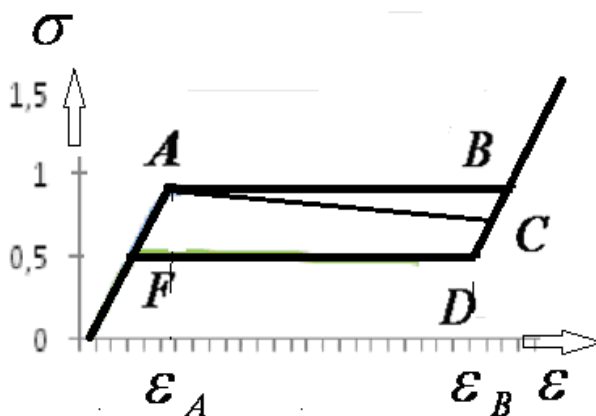


Рис. 1. Локальная диаграмма материала

Координаты точек, полученных на основании обработки экспериментальных данных, приведенных в работе [4], даны в таблице ниже.

Таблица 1

$T^{\circ}C$	$A(\varepsilon\%, \sigma(GPa))$	$B(\varepsilon\%, \sigma(GPa))$	$D(\varepsilon\%, \sigma(GPa))$	$F(\varepsilon\%, \sigma(GPa))$
100	1,00; 0,82	6,50; 0,82	6,05; 0,45	0,55; 0,45
90	1,00; 0,78	6,50; 0,78	6,03; 0,41	0,53; 0,41
80	1,00; 0,67	6,50; 0,67	6,07; 0,38	0,57; 0,38
70	1,00; 0,59	6,30; 0,59	5,81; 0,30	0,51; 0,30
60	1,00; 0,44	6,20; 0,44	5,72; 0,23	0,52; 0,23
50	1,00; 0,42	5,80; 0,42	5,16; 0,15	0,36; 0,15
40	1,00; 0,39	5,70; 0,39	4,88; 0,07	0,18; 0,07

При изменении температуры в процессе нагружения происходит переход от одной диаграммы к другой. Причем в различных точках тела могут использоваться разные локальные диаграммы материала.

### ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕРМО-УПРУГО-ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ПСЕВДОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Определим скорость медленной волны, с которой распространяется поле пластических деформаций вдоль одномерного тела  $x \in [0; L]$ . На краю  $x = 0$  задается скорость растяжения образца  $v = V_0$ , а его край  $x = L$  закреплен и здесь  $v = 0$ .

В общем случае искомыми величинами являются: скорость перемещения в осевом направлении  $v(x, t)$  (перемещение  $u(x, t)$  при необходимости определяется путем интегрирования  $v(x, t)$  по времени); осевое напряжение  $\sigma(x, t)$ ; осевая деформация  $\varepsilon(x, t)$  и температура  $T(x, t)$ . Здесь  $x \in [0; L]$ ,  $t \in [0; \infty)$ .

Для определения искомых величин использована такая система уравнений [1, 2, 6]:

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\sigma = \begin{cases} E_1 \varepsilon - K \alpha_T (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in [0, \varepsilon_S], \\ E_2 (\varepsilon - \varepsilon_S) + \sigma_S - K \alpha_T (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in [\varepsilon_S, \varepsilon_C], \\ E_3 (\varepsilon - \varepsilon_C) + \sigma_C - K \alpha_T (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in (\varepsilon_C, \infty). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала, модули  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  локальной диаграммы материала (рис. 1), а также коэффициент линейного теплового расширения  $\alpha_T$ , которые могут зависеть от температуры.

Перейдем в системе (1) к безразмерным нормированным величинам, для которых сохраним прежние обозначения

$$v \Rightarrow \frac{v}{v_*}, \quad \varepsilon \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ST}}, \quad \sigma \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma_{ST}}, \quad T \Rightarrow \frac{T}{T_*}, \quad x \Rightarrow \frac{x}{x_*}, \quad t \Rightarrow \frac{t}{t_*}. \quad (2)$$

Здесь  $v_*$ ,  $T_*$ ,  $x_*$ ,  $t_*$  – некоторые заданные масштабные величины скорости перемещений, температуры, пространственной координаты и времени. Через  $\sigma_{ST}$ ,  $\varepsilon_{ST}$  ( $\sigma_{ST} = E_1(T_*)\varepsilon_{ST}$ ) обозначены пределы текучести материала по напряжению и деформации, определенные при температуре  $T = T_*$ .

В результате перехода к безразмерным нормированным величинам (2) систему уравнений (1) перепишем так:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k_{1*} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = k_{2*} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\sigma = \begin{cases} E_{1*} \varepsilon - K_* \alpha_{T*} (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in [0; \varepsilon_S], \\ E_{2*} (\varepsilon - \varepsilon_S) + \sigma_S - K_* \alpha_{T*} (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in [\varepsilon_S; \varepsilon_C], \\ E_{3*} (\varepsilon - \varepsilon_C) + \sigma_C - K_* \alpha_{T*} (T - T_0) & \text{при } \varepsilon \in (\varepsilon_C; \infty). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь введены обозначения

$$k_{1*} = \frac{\sigma_{ST} t_*}{\rho x_* v_*}, \quad k_{2*} = \frac{v_* t_*}{x_* \varepsilon_{ST}}, \quad E_{1*} = \frac{E_1(T)}{E_1(T_*)}, \quad E_{2*} = \frac{E_2(T)}{E_2(T_*)},$$

$$E_{3*} = \frac{E_3(T)}{E_3(T_*)}, \quad \alpha_{T*} = \frac{\alpha_T T_*}{\varepsilon_{ST}}, \quad K_* = \frac{E_{1*}}{1 - 2\nu}, \quad k_{3*} = t_* \frac{d^2}{x_*^2}. \quad (4)$$

С целью упрощения вычислений выберем  $k_{2*} = 1$ . Тогда можно взять  $v_* = \varepsilon_{ST} \frac{x_*}{t_*}$ , а  $k_{1*} = \frac{E_{1*} t_*^2}{\rho x_*^2}$ .

**Воспользуемся конечно-разностным методом.** Для численного решения системы (3) введем сетки по времени  $t$  и координате  $x$  следующим образом [2]

$$\omega_t = \{t_p; t_{p+1} = t_p + \tau; t_0 = 0; p = 0; 1; 2; \dots\},$$

$$\omega_x = \left\{ x_i; x_{i+1} = x_i + h; x_0 = 0; h = \frac{L}{n}; i = 0; 1; 2; \dots n \right\}. \quad (5)$$

Тогда явную разностную систему, эквивалентную полной системе дифференциальных уравнений в частных производных (3), можно записать так [2, 3]

$$v^{p+1} = v^p + \tau k_{1*} \lambda(\sigma^p), \quad \varepsilon^{p+1} = \varepsilon^p + \tau \lambda(v^p). \quad (6)$$

Величина напряжения в произвольный момент времени определяется явно по соответствующей формуле из (3). В расчетных формулах (6) введены обозначения для разностных операторов аппроксимирующих первую производную по координате. Они могут задаваться по-разному.

Отметим, что приведенные выше формулы (7), (9) имеют второй порядок аппроксимации, а формулы (8) дают погрешность первого порядка. Более высокая точность вычисления производных достигается при помощи разностных формул, полученных в работе [2]. Здесь для аппроксимации первых производных получены такие разностные формулы:

$$\begin{aligned} \lambda(y_i^p) &= \frac{n_0 [y_{i+1}^p - y_{i-1}^p] - k_0 [y_{i+2}^p - y_{i-2}^p]}{12h}, \quad i = 2; 3; \dots; n-2, \\ \lambda(y_0^p) &= \frac{-k_1 y_0^p + k_2 y_1^p - k_3 y_2^p + k_4 y_3^p}{6h}, \\ \lambda(y_1^p) &= \frac{-k_4 y_0^p - k_5 y_1^p + k_6 y_2^p - k_0 y_3^p}{6h}, \\ \lambda(y_{n-1}^p) &= \frac{k_4 y_n^p + k_5 y_{n-1}^p - k_6 y_{n-2}^p + k_0 y_{n-3}^p}{6h}, \\ \lambda(y_n^p) &= \frac{k_1 y_n^p - k_2 y_{n-1}^p + k_3 y_{n-2}^p - k_4 y_{n-3}^p}{6h}. \end{aligned} \quad (7)$$

В формулах (7) применены коэффициенты, которые были определены с использованием сплайн-функции. Если используются кубические В-сплайны, которые имеют четвертый порядок аппроксимации, то

$$n_0 = 8; \quad k_0 = 1; \quad k_1 = 11; \quad k_2 = 18; \quad k_3 = 9; \quad k_4 = 2; \quad k_5 = 3; \quad k_6 = 6.$$

В случае использования напряженных сплайнов, которые имеют пятый порядок аппроксимации,

$$\begin{aligned} n_0 &= 7,9136; \quad k_0 = 0,9568; \quad k_1 = 11,2646; \quad k_2 = 18,4641; \\ k_3 &= 9,1344; \quad k_4 = 1,9349; \quad k_5 = 3,0870; \quad k_6 = 5,9787. \end{aligned}$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим серию численных результатов. На рис. 2 в левом столбце показано изменение во времени поля деформаций и напряжений при активном нагружении. Переход из А в В, аустенит – мартенсит ( $A \rightarrow M$ ) при  $V_0 = -1,3v_*$ , а в правом столбце показано изменение во времени поля деформаций и напряжений при обратном переходе ( $M \rightarrow A$ ) из D в F при  $V_0 = 1,7v_*$ . Линии 1 дают распределение деформаций по длине стержня в фиксированные моменты времени, а линии 2 показывают соответствующее распределение напряжений в теле.

Полученные результаты подтверждают предположение о том, что фронт скачкообразного изменения деформации распространяется с постоянной скоростью, которая зависит лишь от механических свойств материала [5].

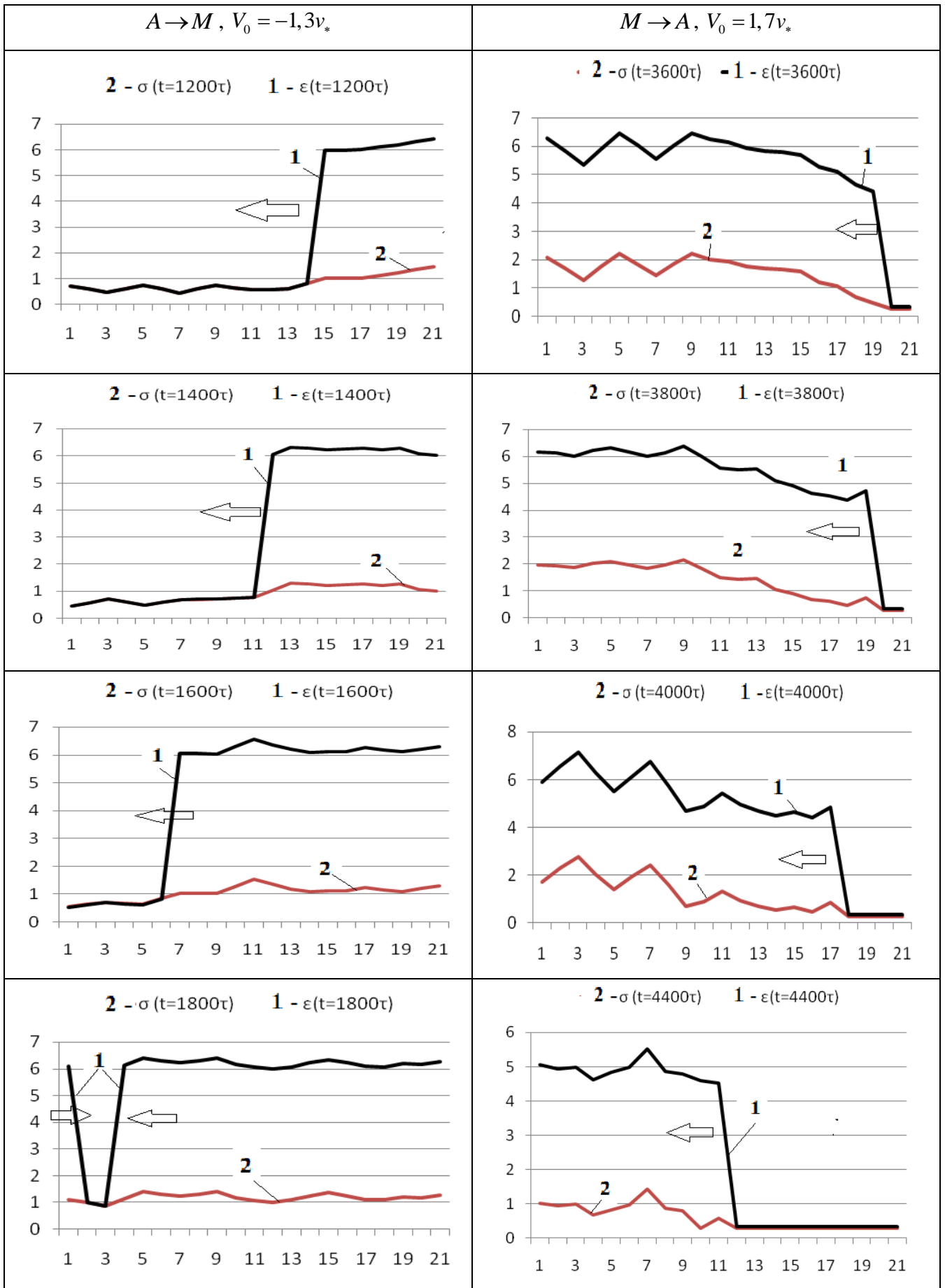


Рис. 3. Распределение напряжений и пластических деформаций для различных моментов времени ( $\tau = 0,001$ )

## ВЫВОДЫ

Разработан и экспериментально обоснован вариант модели поведения псевдоупругого материала. В этой модели заложена возможность количественной оценки связанных взаимодействий между напряжениями, температурой, деформацией и скоростью нагружения материала, которые будут пригодны и для моделирования континуального уровня.

Получено численное подтверждение того, что фронт скачкообразного изменения деформации распространяется с постоянной скоростью, которая зависит лишь от механических свойств материала.

Рекуррентные формулы позволяют получить соответственно третий (для температуры) и четвертый (для скоростей перемещений, напряжений и деформаций) порядок аппроксимации метода по координатам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Петров О. Д., Черняков Ю. А. Термо-напряжено-деформированный стан стрижения з неоднорідного матеріалу при наявності фазових перетворень. *Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету*. 2015. Вип. 1(26): додаток. С. 26–36.
2. Стеблянюк П. А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. Киев: Наукова думка, 1998. 304 с.
3. Шевченко Ю. Н., Стеблянюк П. О., Петров А. Д. Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць*. 2014. Вип. 22. С. 250–264.
4. Shaw J. A., Kyriakides S. Thermomechanical aspects of NiTi. *J. Mechanics and Physics of Solids*. 1995. 43. P. 1243–1281.
5. Shaw J. A., Kyriakides S. On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy. *Acta Materialia*. 1997. 45. P. 683–700.
6. Abeyaratne R., Knowles J. K. Evolution of phase transitions. *Cambridge University Press*, 2006. 258 p.

## REFERENCES

1. Petrov, O. D. & Chernyakov, Yu. A. (2015). Thermo-stressed-deformed state of a shear from a non-uniform material in the presence of phase transformations. *Zbirnyk naukovykh prats' Dniprodzerzhyn's'koho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu*, Iss. 1(26): addition, pp. 26-36.
2. Steblyanko, P. A. (1998). Methods of splitting in the spatial problems of the theory of plasticity. Kiev: Naukova Dumka.
3. Shevchenko, Yu. N., Steblyanko, P. O. & Petrov, A. D. (2014). Numerical methods in nonstationary problems of thermoplasticity theory. *Problemy obchysliuvalnoi mekhaniky i mitsnosti konstruktzii*. *Zbirnyk naukovykh prats*, Iss. 22, pp. 250-264.
4. Shaw, J. A. & Kyriakides, S. (1995). Thermomechanical aspects of NiTi. *J. Mechanics and Physics of Solids*, 43, pp. 1243-1281.
5. Shaw, J. A. & Kyriakides, S. (1997). On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy. *Acta Materialia*, 45, pp. 683-700.
6. Abeyaratne, R. & Knowles, J. K. (2006). Evolution of phase transitions. Cambridge University Press.

УДК 519.6: 004.942

## АВТОМАТИЗАЦИЯ АНАЛИЗА ТЕМПЕРАТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина*

s.choporoff@znu.edu.ua

Рассматривается проблема автоматизации численного анализа температурной устойчивости пластин произвольной формы с использованием метода конечных элементов. Решение представляется последовательностью взаимосвязанных шагов. Для описания геометрических областей предлагается использовать функциональный подход, основанный на неявных функциях и R-функциях В. Л. Рвачева. Для генерации дискретных моделей геометрических объектов используется метод фоновой сетки для четырехугольных конечных элементов. Расчетные модели базируются на теории сдвиговых деформаций второго порядка для пластин и оболочек.

*Ключевые слова: автоматизация, устойчивость, температурные напряжения, пластинка, неявная функция, R-функция, четырехугольный конечный элемент.*

## АВТОМАТИЗАЦІЯ АНАЛІЗУ ТЕМПЕРАТУРНОЇ СТІЙКОСТІ ПЛАСТИН З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*

s.choporoff@znu.edu.ua

Розглядається проблема автоматизації чисельного аналізу температурної стійкості пластин довільної форми з використанням методу скінченних елементів. Розв'язок представляється послідовністю взаємопов'язаних кроків. Для опису геометричних областей пропонується використовувати функціональний підхід, заснований на неявних функціях і R-функціях В. Л. Рвачова. Для генерації дискретних моделей геометричних об'єктів використовується метод фонові сітки для чотирикутних скінченних елементів. Розрахункові моделі базуються на теорії зсувних деформацій другого порядку для пластин і оболонок.

*Ключові слова: автоматизація, стійкість, температурні напруження, пластинка, неявна функція, R-функція, чотирикутний скінченний елемент.*

## AUTOMATING THE FINITE ELEMENT METHOD FOR THE THERMAL BUCKLING ANALYSIS OF PLATES

Choporov S. V., PhD in Engineering, Associate Professor

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine, 69600, Ukraine*

s.choporoff@znu.edu.ua

The finite element method is the most successful numerical method for simulation of mechanical problems. It can be viewed as a virtual machine that automates simulation taking as input geometry of a domain, meshing the domain into finite elements of the same shape and producing a system of discrete equations. Implementations of the finite element method are usually specialized. Implementations often use meshes as input and allow simulate a small set of variational problems. But only a little set of implementations allows carry out the thermal buckling analysis.

This article reviews researches that devoted to an automation of the finite element method. In particular, this work discusses an approach for a representation of a domain, an algorithm for a meshing procedure and an approach for the thermal buckling analysis of a plate.

As input, implicit functions are employed to represent a plate as a geometric object. Logical R-functions (conjunction, disjunction and negation) allow construct an implicit function for a complex domain in



constructive manner. In the first step, the meshing routine uses a background mesh to generate a set of quadrilaterals. Obtained meshes are refined by local smoothing. In the next step, the second-order shear deformation theory for plates and shells is used in the discretization of differential equations. Finally, solving the generalized eigenvalue problem we get eigenvalues and eigenvectors. Eigenvalues correspond to critical temperature; eigenvectors correspond to a field of nodal displacements.

In the article, developed approach is used to carry out the thermal buckling analysis of complex domains (for example, automotive clutches).

*Key words: automation, buckling, thermal stresses, plate, implicit function, R-function, quadrilateral finite element.*

## ВВЕДЕНИЕ

Сегодня метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее распространенных в автоматизации моделирования проблем механики. Достоверность и точность конечно-элементного анализа зависит от множества факторов, включающих особенности представления геометрических областей, генерации дискретных моделей и упрощающие гипотезы. В то же время, конечно-элементный анализ может быть рассмотрен как виртуальная машина, автоматизирующая его основные этапы. Программные реализации МКЭ часто являются специализированными. Их исходными данными, как правило, являются сетки конечных элементов и описания краевых задач. Однако, лишь небольшое количество реализаций МКЭ позволяет выполнять анализ устойчивости пластин, находящихся под действием температурных деформаций.

Целью настоящей работы является разработка подхода к автоматизации анализа устойчивости пластин, находящихся под действием температурных напряжений, с использованием МКЭ.

## ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Для виртуализации моделирования проблем механики в практике инженерно-исследовательской деятельности наибольшее распространение получили два подхода: 1) использование систем функционального проектирования (CAE – Computer-aided Engineering); 2) разработка специализированных программ с использованием библиотек конечно-элементного анализа.

На сегодня разработано значительное число как отечественных, так и зарубежных САЕ, которые предоставляют средства для инженерного анализа. Среди этих систем наиболее распространенными являются ANSYS [1-2], NASTRAN [3], PATRAN [4], ABAQUS [5], COSMOS [6], ЛИРА [7] и другие. Такие программные средства позволяют производить конечно-элементный расчет напряженно-деформированного состояния, запасов прочности, собственных частот и форм колебаний, анализ устойчивости, исследование установившихся и неустановившихся динамических процессов, решать задачи теплопередачи, акустических явлений и т. д. при исследовании конструкций из композитов, ламинатов и т. п. Стоит отметить, что такие программные системы доступны под проприетарными лицензиями и являются весьма дорогостоящими.

Среди отечественных САЕ известны программные комплексы (ПК) ЛИРА [7] и МОНОМАХ [8], разработанные под руководством профессора А. С. Городецкого. ПК ЛИРА предназначен для проектирования и расчета (в том числе исследования прочности и устойчивости) строительных и машиностроительных конструкций, а ПК МОНОМАХ – для автоматизированного проектирования железобетонных конструкций и многоэтажных каркасных зданий. Другой отечественный ПК МИРЕЛА+ [9] разработан под руководством профессора В. В. Киричевского. Данный ПК написан на языке FORTRAN и позволяет автоматизировать конечно-элементный анализ конструкций из эластомерных материалов. Система FORTU-FEM [10] основана на использовании объектно-ориентированного языка FROTU-3 для описания конечно-элементных моделей сложных объектов и процессов. При этом пользователь имеет возможность, используя FORTU-3, самостоятельно определить функционал энергии, минимизация которого будет соответствовать состоянию моделируемой системы. Среди данных САЕ выполнять анализ устойчивости конструкций позволяет только ПК ЛИРА (применяется метод итерации подпространств [11]).

Среди специализированных программных библиотек для автоматизации МКЭ можно выделить FreeFem++, Elmer, deal.II, FeniCS и другие. Такие библиотеки в большинстве своем предоставляют проблемно-ориентированные языки для описания краевых задач. Автоматизировать исследования устойчивости позволяют FreeFem++ и Elmer, однако, в этих библиотеках не предусмотрены подсистемы анализа устойчивости пластин или оболочек под действием температурных полей.

Разработка подходов для конечно-элементного анализа устойчивости пластин и оболочек, находящихся под действием температурных напряжений, является предметом исследований многих публикаций, детальный обзор которых можно найти в работе [12]. В работе [13] исследована устойчивость несовершенных пластин, находящихся под действием температурных деформаций. Исследованию устойчивости оболочек из композитных материалов, находящихся под действием равномерного температурного поля, посвящено исследование, основанное на использовании МКЭ и теории сдвиговых деформаций высокого порядка [14]. В работе [15] исследована устойчивость находящихся под действием температурного поля цилиндрических панелей, сделанных из функционально-градиентных материалов. Сравнение аналитического и численного исследования устойчивости композитных пластин, находящихся под действием температурных напряжений, можно найти в работе [16]. Особенности использования рядов Фурье в конечно-элементном анализе рассмотрены в работе [17].

### ПРОЦЕСС АВТОМАТИЧЕСКОГО КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА

Традиционная схема автоматизации конечно-элементного анализа состоит из трех основных фаз: формулировка задачи, формализация задачи, численный эксперимент (рис. 1). На первой фазе происходит выбор физической и геометрической структуры проектируемого объекта, определение режимов функционирования и взаимодействия с окружающей средой. Вторая фаза связана с построением формальной идеализированной модели: геометрические объекты представляются в виде аналитических моделей, формализуются математические модели физических процессов в виде систем дифференциальных и/или интегральных уравнений, начальных и граничных условий и т.п. Третья фаза связана с непосредственным проведением численного эксперимента: строятся дискретные модели геометрических объектов, в соответствии с математическими моделями физических процессов реализуются конечно-элементные модели, визуализируются и обрабатываются результаты. Фаза физической постановки считается наименее алгоритмизируемой и является предметом исследований, посвященных искусственному интеллекту [18-19]. Предметом настоящего исследования является методологическая и алгоритмическая база последних двух фаз.



Рис. 1. Схема конечно-элементного анализа

## ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Технические объекты (детали, конструкции, строения) обладают определенной формой и конечными размерами. Для их моделирования в системах автоматизации проектных работ используются абстрактные понятия сплошных тел (solids) – замкнутые и ограниченные подмножества трехмерного евклидова пространства. При этом для моделирования геометрических объектов с постоянной толщиной (например, пластин) используются двумерные сплошные множества. Способы описания модели сплошного тела принято называть схемами представления. Одна из наиболее универсальных схем представления сплошных тел основана на использовании неявных функций и аппарата теории R-функций В. Л. Рвачева [20] для логического конструирования моделей сложных геометрических объектов. Простейшие формы (примитивы) представляются элементарными функциями. Например, если предположить, что неявная функция должна быть положительна внутри области, равна нулю на ее границе и, соответственно, быть меньше нуля вне ее, то функция

$$\text{circle}(x, y, r) = 1 - \frac{x^2 + y^2}{r}, \quad r > 0, \quad (1)$$

определяет область, ограниченную окружностью радиуса  $r$  с центром в начале координат.

Для логического конструирования неявных функций, соответствующих более сложным областям, используются системы R-функций [20]. Например, одна из наиболее распространенных на практике систем R-функций – система  $\mathfrak{R}_0$ , имеет вид [20]

$$\begin{cases} \neg x \equiv -x, \\ x_1 \wedge x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ x_1 \vee x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – значения неявных функций. Эта система определяет логическое отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, операндами которых выступают неявные функции, соответствующие более простым логическим примитивам.

Например, пластинка прямоугольной формы может быть представлена как пересечение двух полос:

$$\text{rectangle}(x, y, w, h) = \left[ 1 - \left( \frac{2}{w} x \right)^2 \right] \wedge \left[ 1 - \left( \frac{2}{h} y \right)^2 \right], \quad w > 0, \quad h > 0, \quad (3)$$

где  $w$  – ширина,  $h$  – высота.

Аналогичным образом можно представить более сложные геометрические области.

### ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Один из наиболее оптимальных подходов к построению дискретных моделей двумерных областей, представленных неявными функциями, основан на использовании фоновой сетки (например, равномерной), которая покрывает исходную область. Из фоновой сетки удаляются ячейки, которые пересекаются границей или являются внешними. Затем новые элементы строятся непосредственно в области анализа заполнением пространства между границей и оставшимися элементами фоновой сетки. Такой подход реализован для треугольников [22] и четырехугольников [23], он может быть описан следующим алгоритмом.

**algorithm** background-grid-mesh

**input:**

$w(x, y)$  – уравнение двумерного геометрического объекта;

$G = \{v_i = (p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}))\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  – фоновая сетка, состоящая из  $n$  – ячеек,

по  $m$  вершин в каждой;

$$V = \{p_k = (x_k, y_k)\}, \quad k = \overline{1, c} - \text{множество характерных точек};$$

**begin**

**for each**  $p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ :

**if**  $w(x_{i,j}, y_{i,j}) \leq 0$  **then**  $G = G \cup \{v_i\}$ ;

**for each**  $p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ :

$$\bar{n}_{i,j} = \frac{1}{k} \sum_{f=1}^k \bar{n}(e_{i,f}), \text{ где } \{e_{i,f}\} - \text{множество ребер инцидентных вершине } p_{i,j};$$

**for each**  $p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ :

**if**  $n_{i,j} > 0$  **then**  $b_{i,j} = \text{binary}(w(x, y), p_{i,j}, p_{i,j} + d\bar{n}_{i,j})$ ;

**for each**  $e_{i,j} = (p_{i,j_1}, p_{i,j_2}) \in G$ :

**if**  $\exists b_{i,j_1}$  **and**  $\exists b_{i,j_2}$  **then**  $G = G \cup \text{element}((p_{i,j_1}, p_{i,j_2}, b_{i,j_2}, b_{i,j_1}))$ ;

smooth(G);

**return**  $G$ .

В приведенном выше алгоритме функция  $\text{binary}(w(x, y), a, b)$  ищет корень функции  $w(x, y)$  на отрезке  $[a; b]$ , функция  $\text{element}(a, b, c, d)$  формирует два треугольника (по диагоналям) или один четырехугольник в зависимости от выбранной формы элемента. Завершающим шагом является процедура сглаживания, которая при простейшей реализации предполагает, что каждый узел перемещается в позицию среднего арифметического координат соседних узлов. Например, для формулы (3) при  $w = h = 10$ , если использовать в качестве фоновой равномерную сетку  $10 \times 10$  элементов, будет получена дискретная модель, приведенная на рис. 2.

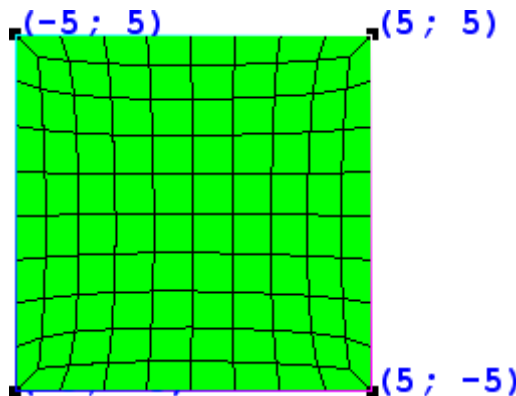


Рис. 2. Дискретная модель квадратной пластинки

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ

Двух- и трехмерные конечные элементы (солиды) считаются весьма эффективными в анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) сплошных объектов. Трехмерные конечные элементы (КЭ) можно непосредственно применять при расчете пластинок, уменьшая их размер в направлении толщины. Тем не менее, при их применении возникают определенные трудности. Во-первых, наличие трех степеней свободы в каждом узле приводит к большим коэффициентам жесткости для перемещений по толщине оболочки [24], что может быть причиной плохой обусловленности системы уравнений, если толщина пластинки мала по сравнению с остальными размерами КЭ. Во-вторых, использование нескольких узлов по толщине оболочки является неэкономичным. Поэтому на практике, как правило, для исследования НДС пластинок используют специальные КЭ – элементы пластинок.

Теория сдвиговых деформаций для пластинок является развитием положений теории Тимошенко-Миндлина. Используя стандартные гипотезы о малости перемещений и деформаций, а также о несжимаемости и сохранении нормалей срединной поверхности, данная теория учитывает поперечные сдвиговые деформации [25]. Поле предполагаемых перемещений определяется соотношением

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z\theta_x(x, y), \\ v(x, y, z) = z\theta_y(x, y), \\ w(x, y, z) = w_0(x, y), \end{cases} \quad (4)$$

где  $w_0(x, y)$  – прогиб точек срединной поверхности пластинки,  $\theta_x(x, y)$  и  $\theta_y(x, y)$  – повороты нормали относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно. Значения  $(w_0, \theta_x, \theta_y)$  называются обобщенными перемещениями.

Вектор деформаций определяется дифференцированием перемещений:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Вектор поперечных сдвиговых деформаций представляется в виде

$$\{\boldsymbol{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Соотношения между напряжениями и деформациями для изотропного материала могут быть представлены как

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad (7)$$

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}]\{\boldsymbol{\gamma}\}, \quad (8)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $G$  – модуль сдвига.

Энергия деформаций, элементарного объема пластинки  $V_e$ , находящейся под действием начальных напряжений, после исключения в градиентах перемещений членов выше второго порядка может быть представлена формулой

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{V_e} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV_e + \frac{1}{2} \iiint_{V_e} \{\boldsymbol{\tau}\}^T \{\boldsymbol{\gamma}\} dV_e + \iiint_{V_e} \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \{\boldsymbol{\varepsilon}_L\} dV_e, \quad (8)$$

где  $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$  – вектор начальных напряжений элементарного объема;  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_L\}$  – вектор градиентов «больших» перемещений, который имеет вид [26]

$$\{\varepsilon_L\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}. \quad (9)$$

Начальные напряжения вычисляются интегрированием в каждой точке после исследования плоско-напряженного состояния пластинки, находящейся в температурном поле. Для этого решается задача вида

$$\iiint_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV_e = \iiint_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\varepsilon_t\} dV_e, \quad (10)$$

где  $\{\varepsilon_t\} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix}$  – вектор температурных деформаций ( $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,  $T$  – температура);  $[\mathbf{B}]$  – матрица связей между напряжениями и деформациями.

В результате задача исследования устойчивости пластинки требует решения обобщенной проблемы собственных значений вида

$$([\mathbf{K}] - \lambda_i [\mathbf{G}]) \{\mathbf{V}_i\} = 0, \quad (11)$$

где  $[\mathbf{K}]$  – матрица жесткости;  $[\mathbf{G}]$  – геометрическая матрица;  $\lambda_i$  – собственное число (множитель для вектора сил);  $\{\mathbf{V}_i\}$  – собственный вектор перемещения точек на пластинке, соответствующих  $i$ -му режиму потери устойчивости.

### ЭКСПЕРИМЕНТЫ

1. Прямоугольная пластинка, находящаяся под действием равномерной температуры.

Прямоугольная пластинка представляется формулой (3). Если использовать в качестве фоновой сетку с шагом 0,05, при  $w = 10$  м,  $E = 1$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $t = 0,1$  м (толщина пластинки),  $\alpha = 1 \times 10^{-6}$  °С (коэффициент температурного расширения), то при помощи описанного выше подхода будут получены результаты для различных соотношений толщины и высоты, приведенные в табл. 1.

Таблица 1 – Сравнение критических температур (°С) для свободно опертой пластинки

$w/h$	Критическая температура из [27]	Критическая температура	Погрешность
0,25	0,6727	0,7148	0,0626
0,5	0,7913	0,8266	0,0446
0,75	0,989	1,0204	0,0317
1,0	1,2657	1,3002	0,0272
1,25	1,6234	1,6678	0,0273
1,5	2,0561	2,1216	0,0318
1,75	2,5696	2,6638	0,0367
2,0	3,1617	3,2902	0,0406
2,25	3,8324	4,0018	0,0442

Продолжение табл. 1

$w/h$	Критическая температура из [27]	Критическая температура	Погрешность
2,5	4,5817	4,7992	0,0475
2,75	5,4096	5,6781	0,0496
3,0	6,3144	6,6419	0,0519

2. Квадратная пластинка с треугольным вырезом.

Квадратная пластинка со стороной  $a$  и треугольным вырезом по центру может быть представлена формулой

$$\text{quadtri}(x, y) = \text{rectangle}(x, y, a, a) \wedge \neg \text{regular}(x, y, r, 3), \tag{12}$$

где функция  $\text{regular}(x, y, r, n)$  представляет правильный  $n$ -угольник, вписанный в окружность радиуса  $r$  с центром в начале координат. Функция  $\text{regular}(x, y, r, n)$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{regular}(x, y, r, n) = & [(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)] \wedge \\ & \wedge [(y - y_2)(x_3 - x_2) - (x - x_2)(y_3 - y_2)] \wedge \dots \wedge \\ & \wedge [(y - y_n)(x_n - x_{n-1}) - (x - x_n)(y_n - y_{n-1})], \end{aligned} \tag{13}$$

$$x_i = r \cos(\alpha_i), \quad y_i = r \sin(\alpha_i), \quad \alpha_i = \frac{2\pi}{n}(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r > 0, \quad n > 0.$$

В результате применения алгоритма background-grid-mesh с равномерной сеткой  $100 \times 100$  элементов будет построена дискретная модель, представленная на рис. 3.

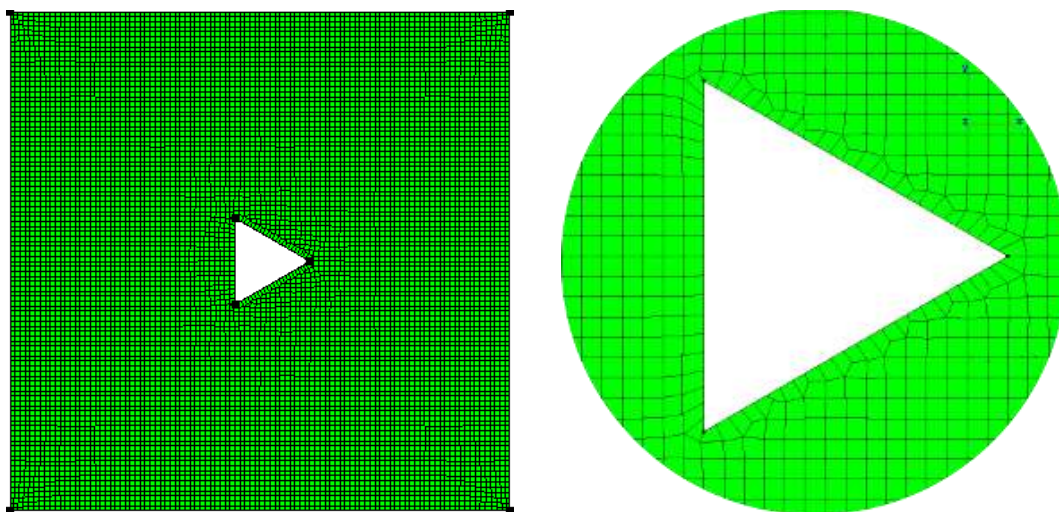


Рис. 3. Дискретная модель пластинки с треугольным отверстием

Изменяя радиус описанной окружности в формуле (12) в интервале от  $[a/10; a/3]$ , приняв  $a = 10$  м,  $E = 1$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $t = 0,1$  м (толщина пластинки),  $\alpha = 1 \times 10^{-6}$  °С, при условии, что пластинка оперта по внешнему контуру и контур отверстия является свободным, можно получить зависимость критической температуры от размера отверстия в виде графика, представленного на табл. 2.

Таблица 2 – Зависимость критической температуры от радиуса отверстия

$r, \text{ м}$	$a/10$	$a/9$	$a/8$	$a/7$	$a/6$	$a/5$	$a/4$	$a/3$
$T_{cr}, \text{ °С}$	1,2702	1,2359	1,1937	1,1367	1,0647	0,9722	0,8590	0,7352

На рис. 4 сопоставляются формы потери устойчивости при  $r = a/10$  и  $r = a/3$ .

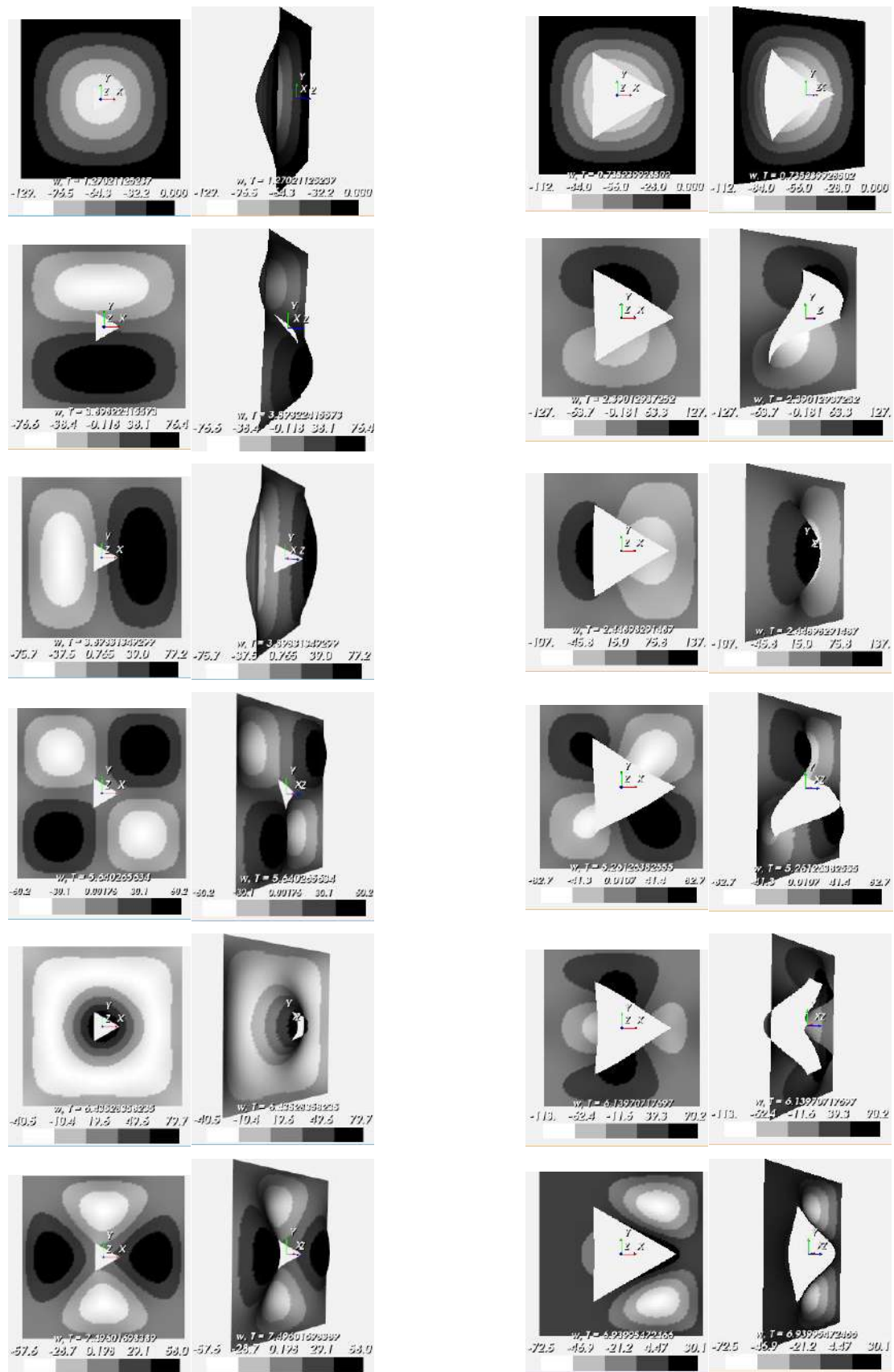


Рис. 4. Формы потери устойчивости пластинки с треугольным отверстием

### 3. Фрикционный диск сцепления.

Фрикционный диск сцепления (рис. 5) может быть представлен следующей неявной функцией



$$\text{clutch}(x, y) = [\text{strip}(x \cos(\alpha_0) + y \sin(\alpha_0), w) \vee \text{strip}(x \cos(\alpha_1) + y \sin(\alpha_1), w) \vee \dots \vee \text{strip}(x \cos(\alpha_4) + y \sin(\alpha_4), w) \vee \text{circle}(x, y, R)] \wedge \text{circle}(x, y, S) \wedge \neg \text{circle}(x, y, r), \quad (14)$$

где  $S$  – радиус окружности вершин зубьев (рис. 5);  $R$  – радиус окружности впадин зубьев;  $r$  – радиус центрального отверстия;  $w$  – ширина зубца муфты;  $\text{strip}(x, w) = 1 - \frac{4x^2}{w^2}$  – функция, представляющая вертикальную полосу;  $\text{circle}(x, y, r)$  – функция (1).

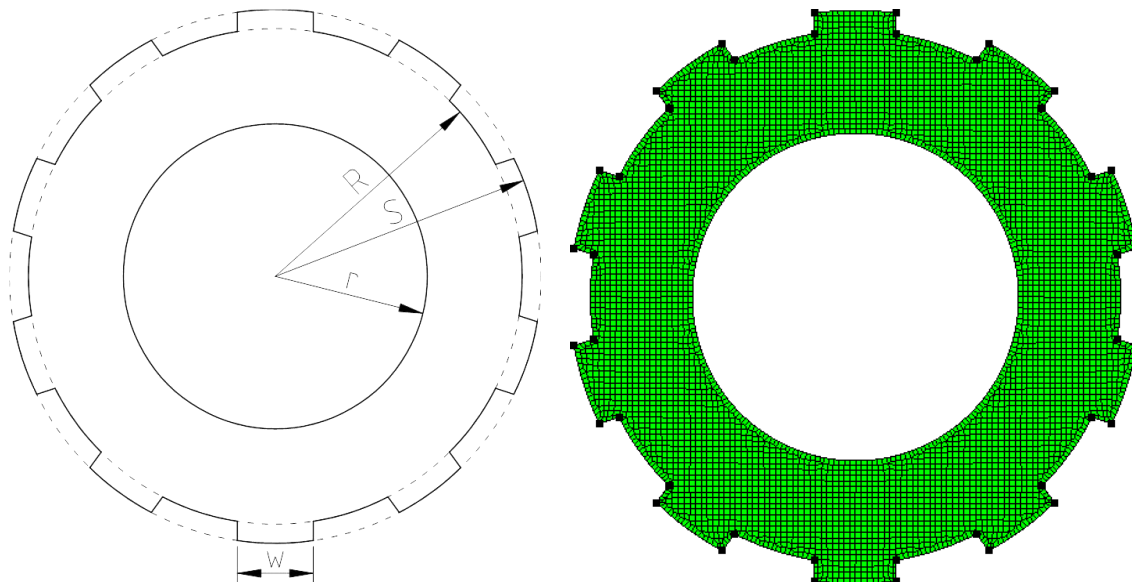
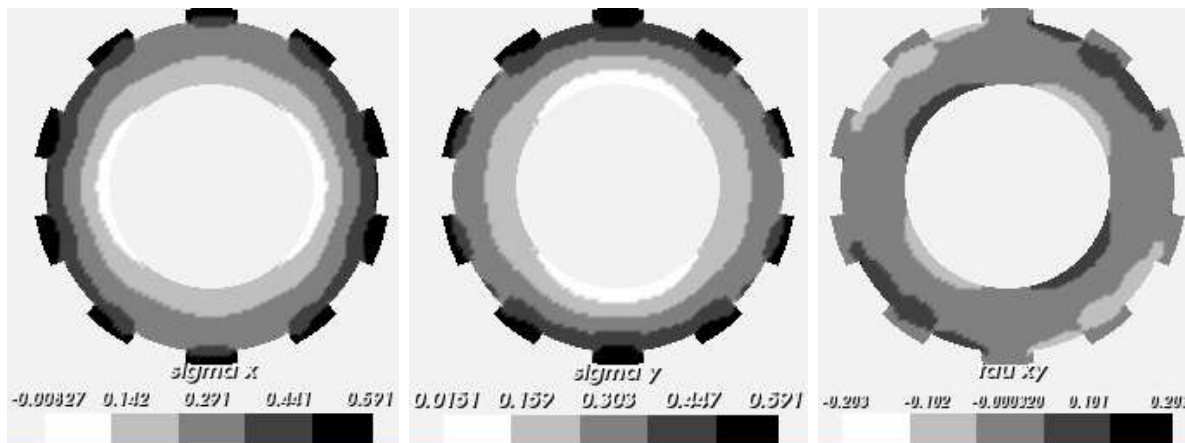


Рис. 5. Геометрическая и дискретная модели фрикционного диска

Например, если предположить, что муфта находится в температурном поле, заданном

зависимостью  $T(x, y) = \begin{cases} 250 \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - r}{R - r}, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, \\ 250, & \sqrt{x^2 + y^2} > R \end{cases}$ , а также принять  $S = 0,14$  м,

$R = 0,13$  м,  $r = 0,08$  м,  $w = 0,04$  м, толщину пластинки принять равной 0,006 м, модуль Юнга – равным 110 ГПа, коэффициент Пуассона – равным 0,3, коэффициент температурного расширения –  $\alpha = 1,25 \times 10^{-5}$  в результате решения задачи (10) получим распределение напряжений, вызванных температурными деформациями (рис. 6). Критические значения и соответствующие им формы потери устойчивости для такого начального НДС, если считать, что муфта закреплена по контуру окружности вершин зубьев, будут иметь вид, представленный на рис. 7.



Рим. 6. Распределение температурных напряжений в муфте

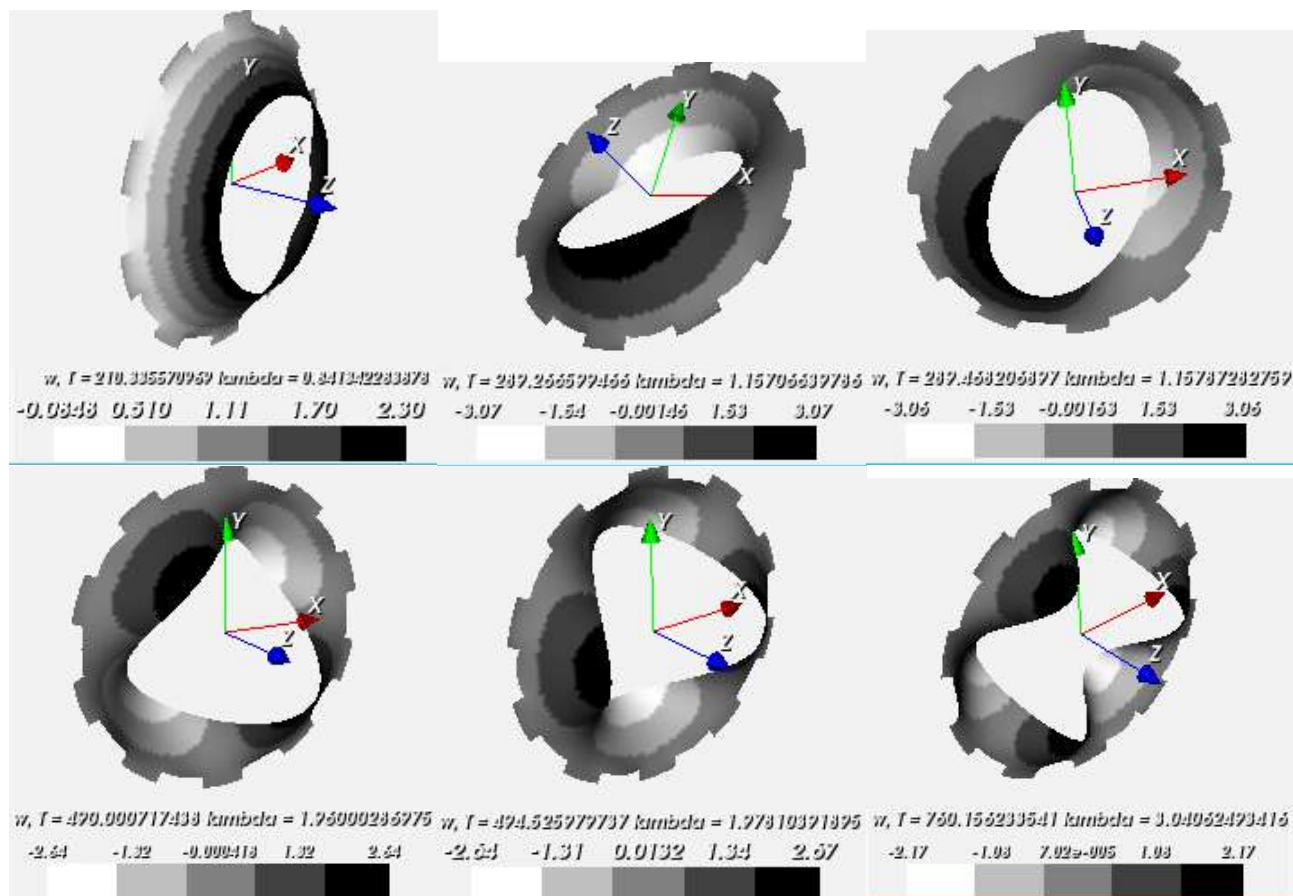


Рис. 7. Критические значения температуры и формы потери устойчивости муфты

## ВЫВОДЫ

Таким образом, в настоящей работе предложен подход к автоматизации исследования устойчивости пластин, находящихся под действием температурных напряжений. Использование функционального подхода позволяет описывать пластинки произвольной конфигурации. Построенные с помощью фоновой сетки дискретные модели при задействовании конечного элемента пластинки позволяют уменьшить размерность задачи относительно стандартных трехмерных элементов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Madenci E., Guven I. The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS. New York: Springer, 2015. 656 p.
2. ANSYS LS-DYNA. URL: <http://www.ansys.com/Products/Structures/ANSYS-LS-DYNA>. (Дата звернення 15.08.2016).
3. MSC Nastran – Multidisciplinary Structural Analysis. URL: <http://www.mscsoftware.com/product/msc-nastran>. (Дата звернення 15.08.2016).
4. Patran – Интегрирующая среда для систем анализа, моделирования и проектирования на основе универсального графического пользовательского интерфейса. URL: <http://www.mscsoftware.ru/products/patran>. (Дата звернення 15.08.2016).
5. Puri G. Python Scripts for Abaqus. Learn by Example. USA, 2011. 725 p.
6. Kettenis D. L. COSMOS: A simulation language for continuous, discrete and combined models. *SIMULATION*. 1992. Vol. 58. P. 32–41.
7. ЛИРА 9.4. Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие / Е. Б. Стрелец-Стрелецкий и др. Киев: Факт, 2008. 164 с.
8. МОНОМАХ 4.2 Примеры расчета и проектирования. Учебное пособие / С. В. Юсипенко и др. Киев: Факт, 2007. 292 с.

9. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Киев: Наук. Думка, 2002. 653 с.
10. Гоменюк С. И. Объектно-ориентированные модели и методы анализа механических процессов. Запорожье: Запорож. гос. ун-т, 2004. 311 с.
11. Евзеров И. Д. Задачи устойчивости для стержней и пластин. *Инженерно-строительный журнал*. 2014. № 1. С. 6–11.
12. Thornton E. A. Thermal Buckling of Plates and Shells. *Applied Mechanics Review*. 1993. Vol. 46, Iss. 10. P. 485–506.
13. Murphy K. D., Ferreira D. Thermal Buckling of Rectangular Plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38, Iss. 22/23. P. 3979–3994.
14. Chang J. S., Chui W. C. Thermal Buckling Analysis of Antisymmetric Laminated Cylindrical Shell Panels. *International Journal of Solids and Structures*. 1991. Vol. 27, Iss. 1. P. 1295–1309.
15. Ahmadi S. A., Pourshahsavari H. Three-Dimensional Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Cylindrical Panels Using Differential Quadrature Method (DQM). *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2016. Vol. 54, Iss. 1. P. 135–147.
16. Al-Waily M. Analytical and Numerical Thermal Buckling Analysis Investigation of Unidirectional and Woven Reinforcement Composite Plate Structural. *International Journal of Energy and Environment*. 2015. Vol. 6, Iss. 2. P. 125–142.
17. Chen Z., Yi Y.-B., Zhao J. Fourier Finite Element Model for Prediction of Thermal Buckling in Disc Clutches and Brakes. *Journal of Thermal Stresses*. 2016. Vol. 39, Iss. 10. P. 1241–1251.
18. Wriggers P., Siplivaya M., Joukova I., Slivin R. Intelligent Support of Engineering Analysis using Ontology and Case-based Reasoning. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2008. Vol. 20. P. 709–720.
19. Sun W., Ma Q., Chen S. A Framework for Automated Finite Element Analysis with an Ontology-based Approach. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2009. Vol. 23. P. 3209–3220.
20. Рвачев В.Л., Шейко Т. И. Введение в теорию R-функций. *Проблемы машиностроения*. 2001. Т. 4, № 1-2. С. 46–58.
21. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН України, 2009. 305 с.
22. Чопоров С. В. Метод фоновой сетки для триангуляции двумерных областей при функциональном подходе. *Радиоэлектроника, информатика, управление*. 2015. № 4(35). С. 31–38.
23. Чопоров С. В., Лисняк А. А., Гоменюк С. И. Дискретизация геометрических областей, заданных R-функциями, на четырехугольные конечные элементы. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2009. № 1. С. 199–207.
24. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method. Vol. 2. Solid Mechanics. London: Butterworth-Heinemann, 2000. 460 p.
25. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2003. 854 p.
26. Ferreira A. J. M. MATLAB Codes for Finite Element Analysis. Netherlands: Springer Netherlands, 2009. 235 p.
27. Chandrashekhara K. Thermal buckling of laminated plates using a shear flexible finite element. *Finite Elements in Analysis and Design*. 1992. Vol. 12, Iss. 1. P. 51–61.

## REFERENCES

1. Madenci, E. & Guven, I. (2015). The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS. New York: Springer.
2. ANSYS LS-DYNA. Retrieved from <http://www.ansys.com/Products/Structures/ANSYS-LS-DYNA>.
3. MSC Nastran – Multidisciplinary Structural Analysis. Retrieved from <http://www.mscsoftware.com/product/msc-nastran>.
4. Patran – Complete FEA Modeling Solution. Retrieved from <http://www.mscsoftware.com/products/patran>.

5. Puri, G. (2011). Python Scripts for Abaqus. Learn by Example. USA.
6. Kettenis, D. L. (1992). COSMOS: A simulation language for continuous, discrete and combined models. SIMULATION, Vol. 58, pp. 32-41.
7. Strelec-Streleckij, E. B., Bogovis, V. E., Genzerskij, Ju. V., Gerajmovich, Ju. D., Marchenko, D. V. & Titok, V. P. (2008). LIRA 9.4. User Guide. Basics. Tutorial. Kiev: Fakt.
8. Jusipenko, S. V., Batrak, L. G., Gorodeckij, D. A., Lazarev, A. A., Laznjuk, M. V. & Rasskazov, A. A. (2007). MONOMAKH 4.2 Computing and Design. Tutorial. Kiev: Fakt.
9. Kirichevskiy, V. V. (2002). The Finite Element Method in the Mechanics of Elastomers Метод конечных элементов в механике эластомеров. Kiev: Nauk. Dumka.
10. Gomenyuk, S. I. (2004). Object-oriented Models and Methods in the Analysis of Mechanical Processes. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya State University..
11. Ievzerov, I. D. (2014). The Stability Problems for Bars and Plates. Magazine of Civil Engineering, No. 1, pp. 6-11.
12. Thornton, E. A. (1993). Thermal Buckling of Plates and Shells. Applied Mechanics Review, Vol. 46, Iss. 10, pp. 485-506.
13. Murphy, K. D. & Ferreira, D. (2001). Thermal Buckling of Rectangular Plates. International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, Iss. 22/23, pp. 3979-3994.
14. Chang, J. S. & Chui, W. C. (1991). Thermal Buckling Analysis of Antisymmetric Laminated Cylindrical Shell Panels. International Journal of Solids and Structures, Vol. 27, Iss. 1, pp. 1295-1309.
15. Ahmadi, S. A. & Pourshahsavari, H. (2016). Three-Dimensional Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Cylindrical Panels Using Differential Quadrature Method (DQM). Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 54, Iss. 1, pp. 135-147.
16. Al-Waily, M. (2015). Analytical and Numerical Thermal Buckling Analysis Investigation of Unidirectional and Woven Reinforcement Composite Plate Structural. International Journal of Energy and Environment, Vol. 6, Iss. 2, pp. 125-142.
17. Chen, Z., Yi, Y.-B. & Zhao, J. (2016). Fourier Finite Element Model for Prediction of Thermal Buckling in Disc Clutches and Brakes. Journal of Thermal Stresses, Vol. 39, Iss. 10, pp. 1241-1251.
18. Wriggers, P., Siplivaya, M., Joukova, I. & Slivin, R. (2008). Intelligent Support of Engineering Analysis using Ontology and Case-based Reasoning. Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 20, pp. 709-720.
19. Sun, W., Ma, Q. & Chen, S. (2009). A Framework for Automated Finite Element Analysis with an Ontology-based Approach. Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 23, pp. 3209-3220.
20. Rvachev, V. L. & Sheiko, T. I. (2001). Introduction in the Theory of R-functions. Problemy mashinostroeniia, Vol. 4, No. 1-2, pp. 46-58.
21. Maksimenko-Sheiko, K. V. (2009). R-functions in Mathematical Modeling of Geometric Objects and Physical Fields. Kharkiv: IPMach NAS of Ukraine.
22. Choporov, S. V. (2015). Background Grid Method for Plane Shapes Triangulation in Functional Approach. Radio Electronics, Computer Science, Control, No. 4(35), pp. 31-38.
23. Choporov, S. V., Lisnyak, A. A. & Gomenyuk, S. I. (2009). Generation of Quadrilateral Element Meshes of Geometrical Regions Defined by R-functions. Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences, No. 1, pp. 199-207.
24. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (2000). The Finite Element Method. (vol. 2) Solid Mechanics. London: Butterworth-Heinemann.
25. Reddy, J. N. (2003). Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press.
26. Ferreira, A. J. M. (2009). MATLAB Codes for Finite Element Analysis. Netherlands: Springer Netherlands.
27. Chandrashekhara, K. (1992). Thermal buckling of laminated plates using a shear flexible finite element. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 12, Iss. 1, pp. 51-61.

УДК 539.375

**ЗАДАЧА ЗГИНУ ПЛАСТИНИ ІЗ ЗАПОВНЕНОЮ ЩІЛИНОЮ**<sup>1</sup>Шацький І. П., д. ф.-м. н., <sup>2</sup>Курташ І. С.<sup>1</sup>*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна*<sup>2</sup>*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна*

ipshatsky@gmail.com, ira.K@meta.ua

У рамках класичної теорії Кірхгофа розглянуто задачу про згин пружної пластини, послабленої вузькою прямолінійною наскрізною щілиною, заповненою низькомодульним матеріалом. Для включення малої ширини прийнято гіпотезу пружного вінклерівського прошарку. Сформульовано крайову задачу для бігармонічного рівняння з ускладненими крайовими умовами на розрізі. Побудовано аналітичний розв'язок сингулярного інтегродиференціального рівняння задачі для випадку еліптичної форми щілини та рівномірного згинального навантаження. Особлива увага приділяється питанню граничної рівноваги композиції. Розглянуто два механізми руйнування: розтріскування пластини біля вершин щілини та порушення цілісності заповнювача. Знайдено величину відносної жорсткості заповнювача, для якої руйнівне навантаження сягає максимуму.

*Ключові слова: пластина, заповнена щілина, згин, класична теорія, руйнування, гранична рівновага.*

**ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ С ЗАПОЛНЕННОЙ ЩЕЛЬЮ**<sup>1</sup>Шацкий И. П., д. ф.-м. н., <sup>2</sup>Курташ И. С.<sup>1</sup>*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна*<sup>2</sup>*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна*

ipshatsky@gmail.com, ira.K@meta.ua

В рамках классической теории Кирхгофа рассмотрена задача об изгибе упругой пластины, ослабленной узкой прямолинейной сквозной щелью, заполненной низко модульным материалом. Для включения малой ширины принята гипотеза упругой винклеровской прослойки. Сформулирована краевая задача для би гармонического уравнения с усложненными краевыми условиями на разрезе. Построено аналитическое решение сингулярного интегродифференциального уравнения задачи для случая эллиптической формы щели и равномерной изгибающей нагрузки. Особенное внимание уделяется вопросу предельного равновесия композиции. Рассмотрены два механизма разрушения: растрескивание пластины возле вершин щели и нарушение целостности заполнителя. Определена величина относительной жесткости заполнителя, при которой разрушающая нагрузка достигает максимума.

*Ключевые слова: пластина, заполненная щель, изгиб, классическая теория, разрушение, предельное равновесие.*

**PROBLEM OF BENDING OF A PLATE WITH FILLED SLIT**<sup>1</sup>Shatskyi I. P., Dr. Phys. & Math. Sc., <sup>2</sup>Kurtash I. S.<sup>1</sup>*Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, Mykutyynetska str., 3, Ivano-Frankivsk, 76002, Ukraine*<sup>2</sup>*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gaz, Karpatska str., 15, Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine*

ipshatsky@gmail.com, ira.K@meta.ua

The problem of bending of an elastic plate weakened by narrow rectilinear through slit filled with low-modulus material is considered within framework the classical Kirchhoff's theory. It is supposed that the filler and plate are in perfect mechanical contact. For the inclusion of narrow width the hypothesis of elastic Winkler's layer is accepted. The boundary problem for the biharmonic equation with complicated boundary conditions on the cut is formulated. The analytical solution of singular integrodifferential equation of the problem is built in case of the elliptical form of slit and uniform bending load. The jump of the normal rotation angle on the cut, the stress intensity factor for crack tips and the stresses in the filler are obtained. Special attention is paid to the issue of limited equilibrium of composition. The two mechanisms of fracture are considered: cracking of the plate near the peak of a slit and breach of filler integrity. The first of them is described by the criterion of the linear mechanics of fracture and the second one is described by the classical theory of strength. The considered model of the filled slit allows analytically to evaluating the results of the renovation of defective lamellar structures under bending conditions. The key parameters that determine the reinforcement efficiency are relative stiffness and relative strength of the filler. For a given strength value there is a rigidity value for which the composition is equable according to the criteria of the boundary state of the plate and inclusion. In this case the ultimate bending load reaches the maximum.

*Key words: plate, filled slit, bending, classical theory, fracture, limited equilibrium.*

### ВСТУП

Проблема подовження ресурсу виробів, споруд та біологічних об'єктів залишається актуальною для сучасного матеріалознавства. Одним із продуктивних засобів реновації пошкоджених конструкцій є ін'єкційні технології заліковування дефектів [1]. Заповнення тріщиноподібної порожнини іншим матеріалом може суттєво розвантажити її вершини. Однак, заповнювач щілини, розвантажуючи її окіл, сам сприймає частину зовнішнього навантаження. Тому врахування концентрації напружень у підкріпленні є обов'язковим елементом розрахунку на міцність композиційної конструкції.

Рівновагу тіл із заповненими податливим матеріалом тріщинами часто розглядають в рамках моделі прошарку Вінклера і зводять задачу до розв'язання інтегродиференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень на розрізах [1]. У такій постановці досліджено багато плоских та просторових задач. Стосовно задач згину пластин відомі праці [2, 3], де розглядалися тонкостінні включення з довільною жорсткістю. Модель тріщини, частково залікованої неконтрастним матеріалом, запропоновано в публікаціях [4, 5].

У цій роботі розглядаємо задачу згину пластини, послабленої прямолінійною щілиною, заповненою низькомодульним матеріалом, який моделюється прошарком Вінклера. Мета дослідження полягає у докладному аналізі граничної рівноваги пластини з заповненим дефектом як гетерогенного об'єкта.

### ПОСТАНОВКА ТА ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо безмежну пружну пластину  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$ , послаблену наскрізною щілиною завдовжки  $2l$  та завширшки  $2b(x)$ , розташованою вздовж відрізка осі абсцис  $(-l, l)$ . Щілина вважається вузькою:  $\max_x b(x) \ll l$ . Нехай такий дефект заповнено матеріалом, який набагато податливіший від матеріалу пластини. Вважаємо, що заповнювач і пластини перебувають в ідеальному механічному контакті. Композиція зазнає дії згинальних моментів, рівномірно розподілених на безмежності; лицьові поверхні пластини та включення вільні від зовнішнього навантаження. Досліджуємо вплив низькомодульного заповнювача на пружну та граничну рівновагу пластини з тріщиною. При цьому використовуємо співвідношення класичної теорії пластин та модель Вінклера для моделювання прошарку заповнювача.

За умов симетрії об'єкта та навантаженнями відносно осі абсцис крайова задача буде такою: рівняння рівноваги в області:

$$\Delta \Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \quad (1)$$

крайові умови на розрізі:

$$M_y = -\frac{2E_0 h^3}{3} \frac{[\theta_y]}{2b(x)}, \quad y = 0, \quad x \in (-l, l); \quad (2)$$

умови на безмежності:

$$M_y = m, \quad M_x = M_{xy} = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

$w$  – прогин пластини,  $\Delta$  – двовимірний оператор Лапласа,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  – згинальні та крутний моменти,  $[\theta_y]$  – розрив кута повороту нормалі на розрізі;  $E_0$  – модуль Юнга матеріалу заповнювача.

Для побудови розв’язку крайової задачі (1)-(3) використали метод сингулярних інтегральних рівнянь. Інтегральне подання згинального моменту на лінії розрізу через похідну від стрибка кута повороту має вигляд [6]:

$$M_y(x, 0) = m - \frac{D(3-2\nu-\nu^2)}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{[\theta_y]'(\xi) d\xi}{\xi-x}, \quad (4)$$

де  $D = 2Eh^3 / (3(1-\nu)^2)$ ,  $E$  і  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Перший доданок у виразі (4) відповідає напруженому стану бездефектної пластини, другий – відображає вплив щілини.

Після підстановки подання (4) у крайову умову (2) отримали сингулярне інтегродиференціальне рівняння відносно розриву кута повороту:

$$\frac{D(3-2\nu-\nu^2)}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{[\theta_y]'(\xi) d\xi}{\xi-x} - \frac{2E_0 h^3}{3} \frac{[\theta_y]}{2b(x)} = m, \quad x \in (-l, l), \quad (5)$$

яке слід розв’язувати за додаткової умови однозначності переміщень:

$$[\theta_y](\pm l) = 0. \quad (6)$$

### ПОБУДОВА РОЗВ’ЯЗКУ

За довільної форми щілини  $b(x)$  розв’язок задачі (5), (6) можливо побудувати лише числовими методами. У цій статті скористаємося можливістю [7] побудувати аналітичний розв’язок рівняння (5) для щілини спеціальної форми, а саме еліптичної:

$$b(x) = \beta \sqrt{l^2 - x^2}, \quad (7)$$

де  $\beta = b_0/l$ ,  $2b_0 = 2b(0)$  – максимальна ширина дефекту.

Отже, за умови (7) розв’язок задачі шукаємо у вигляді  $[\theta_y](x) = A \sqrt{l^2 - x^2}$ ,  $A$  – довільна стала. Після підстановки у рівняння (5) та обчислення сингулярного інтеграла, знаходимо:

$$A = -\frac{4}{D(3-2\nu-\nu^2)} \frac{m}{1+\omega},$$

і остаточно:

$$[\theta_y](x) = -\frac{4}{D(3-2\nu-\nu^2)} \frac{m}{1+\omega} \sqrt{l^2-x^2}. \quad (8)$$

Тут  $\omega = \frac{2\varepsilon\kappa}{3\beta}$  – ключовий безрозмірний параметр задачі, а  $\varepsilon = \frac{E_0}{E}$ ,  $\kappa = \frac{3(1+\nu)}{3+\nu}$ .

За припущенням  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$ . При зміні  $\nu$  від 0 до 1/2 величина  $\kappa$  змінюється від 1 до 9/7. Тому в розглянутій моделі  $\omega = O(\varepsilon/\omega)$ .

За знайденим стрибком кута повороту нормалі вираховуємо коефіцієнт інтенсивності згинальних моментів поблизу вершини щілини [8]:

$$K_M = -\frac{D(3-2\nu-\nu^2)}{4} \sqrt{l} \lim_{x \rightarrow \pm l} \frac{[\theta_y](x)}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{m\sqrt{l}}{1+\omega} \quad (9)$$

та згинальний момент у заповнювачі:

$$M_y = \frac{m\omega}{1+\omega}. \quad (10)$$

За результатами (9), (10) можемо відновити розподіл характеристик напруженого стану по товщині пластини та включення:

$$k_1(z) = \frac{3z}{2h^3} K_M = \frac{3z}{2h^3} \frac{m\sqrt{l}}{1+\omega}, \quad (11)$$

$$\sigma_y(z) = \frac{3z}{2h^3} M_y = \frac{3z}{2h^3} \frac{m\omega}{1+\omega}. \quad (12)$$

### ОЦІНКА ГРАНИЧНОЇ РІВНОВАГИ

Питання міцності пластини із заповненою щілиною аналізуємо, розглядаючи її як гетерогенне тіло. Мислимі два механізми руйнування: розтріскування пластини в місцях високої концентрації напружень поблизу вершин дефекту та порушення цілісності заповнювача, який сприймає частину зовнішнього навантаження.

Для першого варіанту скористаємось локальним силовим критерієм лінійної механіки руйнування [9]:

$$\max_z k_1(z) \leq \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi}} \equiv \sqrt{\frac{2E\gamma_*}{\pi}}, \quad (13)$$

а для другого варіанту застосуємо класичну теорію міцності заповнювача:

$$\max_z \sigma_y(z) \leq [\sigma_0]. \quad (14)$$

Тут  $K_{Ic} = \sqrt{2E\gamma_*}$  – тріщиностійкість, а  $\gamma_*$  – питома поверхнева енергія матеріалу пластини,  $[\sigma_0]$  – допустиме напруження для матеріалу заповнювача.

Враховуючи, що за результатами (11), (12)

$$\max_z k_1(z) = k_1(h \operatorname{sgn} m) = \frac{3|m|\sqrt{l}}{2h^2} \frac{1}{1+\omega},$$

$$\max_z \sigma_y(z) = \sigma_y(h \operatorname{sgn} m) = \frac{3|m|}{2h^2} \frac{\omega}{1+\omega},$$



отримуємо оцінки допустимих згинальних навантажень:

$$\frac{3|m|}{2h^2} \leq \sigma^0 (1 + \omega), \tag{15}$$

$$\frac{3|m|}{2h^2} \leq \eta \sigma^0 (1 + \omega^{-1}), \tag{16}$$

за яких зберігається цілісність пластини та включення відповідно.

Тут  $\sigma^0 = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi l}} = \sqrt{\frac{2E\gamma_*}{\pi l}}$  – Гріффітсове напруження для розтягнутої пластини з наскрізною тріщиною завдовжки  $2l$ ,  $\eta = \frac{[\sigma_0]}{\sigma^0}$  – відносний показник міцності заповнювача.

За параметр руйнівного навантаження слід, вочевидь, обрати меншу з величин (15), (16):

$$\frac{3|m_*|}{2h^2} = \sigma^0 F(\eta, \omega), \quad F(\eta, \omega) = \min \{1 + \omega, \eta(1 + \omega^{-1})\}. \tag{17}$$

Графіки на рис. 1 демонструють вплив параметра відносної жорсткості заповнювача  $\omega$  на його підкріплювальну здатність для різних значень параметра  $\eta$ , відповідального за відносну міцність заповнювача.

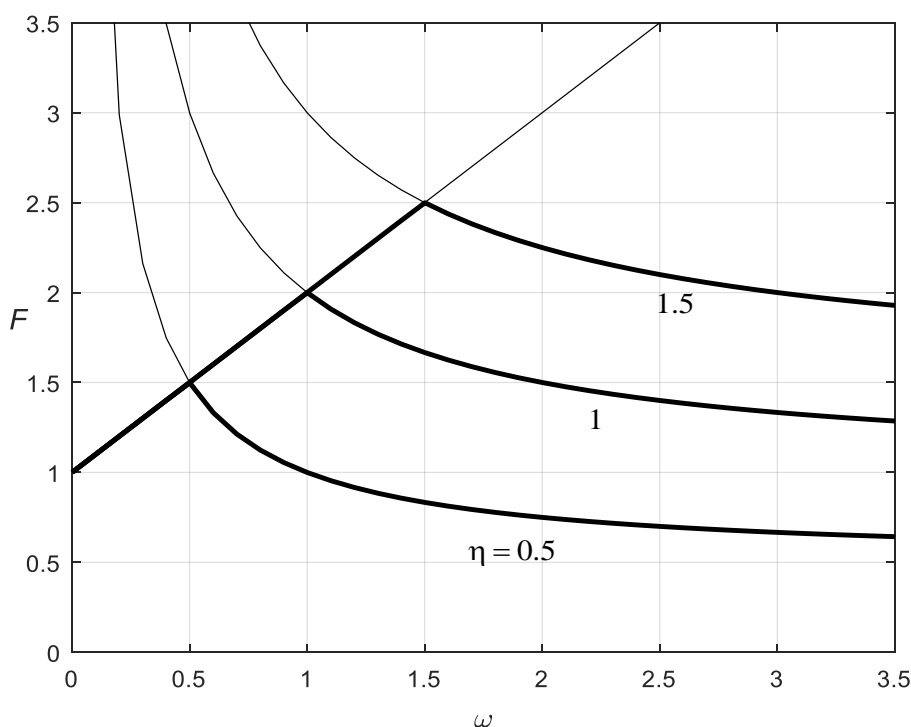


Рис. 1. Функція руйнівного навантаження для пластини із заповненою щілиною

При  $\varepsilon = 0$  або/і  $\eta = 0$  отримуємо результат для пластини з незаповненою щілиною (тріщиною) [9]:

$$F(0, 0) = 1.$$

За фіксованих  $\eta$  найбільше значення функції (17) («стеля» конструкції) досягається на перетині кривих при  $\omega = \eta$ :

$$\max_{\omega} F(\eta, \omega) = F(\eta, \eta) = 1 + \eta.$$

У цьому разі обидва критерії міцності дають один і той самий результат. При  $\omega < \eta$  за відповідного значення  $m = m_*$  руйнується пластина, а при  $\omega > \eta$  – заповнювач.

Цікавими є лише дані, для яких  $F > 1$  (досягається позитивний ефект). При  $\eta \geq 1$  ефект підкріплення реалізується для всіх  $\omega$ , при  $\eta < 1$  – лише для  $\omega < \eta / (1 - \eta)$ .

### ВИСНОВКИ

Розглянута у статті модель заповненої щілини дозволяє аналітично оцінювати результати відновлення дефектних пластинчастих конструкцій за умов згину. Ключовими параметрами, які визначають ефективність підкріплення, є показники відносної жорсткості  $\omega$  та відносної міцності  $\eta$  заповнювача. При заданому  $\eta$  існує значення  $\omega$ , для якого композиція є рівномірною за критеріями міцності пластини та включення і має найбільшу утримувальну здатність.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Marukha V. I., Panasyuk V. V., Sylovanyuk V. P. Injection technologies for the repair of damaged concrete structures. New York: Springer, 2014. 230 p.
2. Грилицкий Д. В., Драган М. С., Опанасович В. К. Изгиб плиты с прямолинейным тонкостенным включением. *Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела.* 1979. № 3. С. 83–88.
3. Грилицкий Д. В., Опанасович В. К., Драган М. С. Изгиб плиты с системой тонких упругих включений. *Прикл. механика.* 1984. Т. 20, № 9. С. 81–86.
4. Шацький І. П. Задачі згину пластини з частково залікованою тріщиною. *Вісник Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки.* 2014. № 1. С. 91–93.
5. Шацький І. П. Гранична рівновага пластини з частково залікованою тріщиною. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2015. Т. 51, № 3. С. 25–31.
6. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
7. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Москва: ГИТТЛ, 1950. 252 с.
8. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985. 224 с.
9. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.

### REFERENCES

1. Marukha, V. I., Panasyuk, V. V. & Sylovanyuk, V. P. (2014). Injection technologies for the repair of damaged concrete structures, New York: Springer, USA.
2. Grilitskii, D. V., Dragan, M. S. & Opanasovich, V. K. (1979). Bending of a plate with a rectilinear thin-walled inclusion. *Mekh. Tverd. Tela*, No. 3, pp. 83-88.
3. Grilitskii, D. V., Opanasovich, V. K. & Dragan, M. S. (1984). Bending of a plate with a system of thin elastic inclusions. *Sov. Appl. Mech.*, Vol. 20, No. 9, pp. 848-852.
4. Shatsky, I. P (2014). Problems of bending of plate with partially healed crack. *Visnyk Donez. naz. un-tu. Ser. A. Pryrodnychi nauky*, No. 1, pp. 91-93.
5. Shats'kyi, I. P (2015). Limiting equilibrium of a plate with partially healed crack. *Mater. Sci.*, Vol. 51, No. 3, pp. 322-330.
6. Savruk, M. P. (1981). Two-dimensional problems of elasticity for cracked bodies. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.
7. Vekua, N. P. (1950). Systems of singular integral equations and some boundary problems. Moscow: GITTL, USSR.
8. Osadchuk, V. A. (1985). Stress-strain state and limit equilibrium of shells with the cuts. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.
9. Berezhnitskii, L. T., Delyavskii, M. V. & Panasyuk, V. V. (1979). Bending of thin plates with crack defects. Kiev: Naukova dumka, Ukraine.

УДК 539.374

## ТЕОРИЯ ГИПЕРУПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ МИКРОДЕФОРМАЦИИ

Шнейдер В. П., к. ф.-м. н.

ООО «Завод Мастер-Профи»,  
г. Днепр, 49010, Украина

shneider\_vova@mail.ru

Пластическое течение, вызванное скольжением дислокаций, тесно связано с механизмом тепловой активации в широком диапазоне скоростей деформации. С другой стороны, пластическая деформация с высокой скоростью может приводить к явному повышению температуры. Поэтому, влияния скорости деформации и температуры должны учитываться одновременно при изучении поведения материалов. Такой подход в рамках теории микродеформации был реализован в работе [7] при построении гипоупруго-вязкопластической теории. В настоящей работе предлагается вариант гиперупруго-вязкопластической теории, позволяющей устранить некоторые недостатки гипоупругого подхода.

*Ключевые слова:* гипоупругость, теория микродеформации, вязкопластичность, конечная деформация.

## ТЕОРІЯ ГІПЕРПРУЖНО-В'ЯЗКОПЛАСТИЧНОСТІ, ЯКА ВРАХОВУЄ МІКРОДЕФОРМАЦІЇ

Шнейдер В. П., к. ф.-м. н.

ТОВ «Завод Майстер-Профі»,  
м. Дніпро, 49010, Україна

shneider\_vova@mail.ru

Пластична течія, викликана ковзанням дислокацій, тісно пов'язана з механізмом теплової активації в широкому діапазоні швидкостей деформації. З іншого боку, пластична деформація з високою швидкістю може призводити до явного підвищення температури. Тому, впливи швидкості деформації і температури повинні враховуватися одночасно при вивченні поведінки матеріалів. Спроба реалізації такого підходу була зроблена у праці [7] при побудові гіпопружно-в'язкопластичної теорії. У цій роботі пропонується варіант гіперпружно-в'язкопластичної теорії, що дозволяє усунути деякі недоліки гіпопружного підходу.

*Ключові слова:* гіпопружність, теорія мікродеформації, в'язкопластичність, кінцева деформація.

## THE THEORY OF HYPERELASTIC-VISCOPLASTICITY, WHICH TAKES INTO ACCOUNT THE MICRODEFORMATION

Shneider V. P., PhD

"Zavod Master-Profi", LLC,  
Dnipro, Ukraine

shneider\_vova@mail.ru

Introduction. The plastic flow caused by the slip of dislocations is closely related to the mechanism of thermal activation over a wide range of strain rates. On the other hand, plastic deformation at high speed can lead to an obvious increase in temperature. Therefore, the effects of strain rate and temperature should be taken into account simultaneously when studying the behavior of materials.

A number of theories have been proposed to describe the plastic deformation of materials over a wide range of strain rates and temperatures over the past three decades. These theories are conditionally divided into two main groups; Physical and phenomenological. A small number of material constants and simple calibration characterizes phenomenological models, but they have a limited scope of applicability. Physical theories usually contain a larger number of material constants, and thus their use is more complex than using phenomenological theories, but their scope is much broader.

The main point, of the construction of the defining relations of the theory of large viscoplastic deformations, is the separation of total deformations and their velocities into elastic and plastic components. The solution of this question is related to the configuration in which the theory is formulated. Two main approaches are usually used. In the first one, the defining relations in the current

configuration (hypoelasticity) are stated, and in the second relationship the relationships are formed with respect to the intermediate unloaded configuration (hyperelasticity).

In work [7] the theory of hypoelastic-viscoplasticity, taking into account microdeformation was formulated. The disadvantages of this approach are known. These include: the work of stresses on a closed cycle by deformation is not exactly zero; The requirement of isotropy of elastic relations; Isotropy of the yield function; The need to integrate the hypoelastic relationships over time to determine the stresses.

In the present paper, these shortcomings are eliminated by introducing a hyperelastic-viscoplastic formulation, in which the elastic behavior is given by a hyperelastic potential. This allows to eliminate some disadvantages of the hypoelastic approach.

Conclusions. To eliminate imperfections of the previously proposed theory of hypoelastic-viscoplasticity, a variant of the hyperelastic-viscoplastic theory, taking into account microdeformation, is developed, in which the elastic behavior is given by the hyperelastic potential. An algorithm for numerical investigation of viscoplastic flow for a given deformation gradient trajectory is proposed.

Preliminary calculations showed the effectiveness of the proposed version of the theory.

*Key words:* Hypoelasticity, theory of microdeformation, viscoplasticity, finite deformation.

## ВВЕДЕНИЕ

Пластическое течение, вызванное скольжением дислокаций, тесно связано с механизмом тепловой активации в широком диапазоне скоростей деформации. С другой стороны, пластическая деформация с высокой скоростью может приводить к явному повышению температуры. Поэтому, влияния скорости деформации и температуры должны учитываться одновременно при изучении поведения материалов.

За последние три десятилетия предложен целый ряд теорий для описания пластической деформации материалов в широком диапазоне скоростей деформации и температур. Эти теории условно разделяют на две основные группы: физические [1-3] и феноменологические [4, 5]. Феноменологические модели характеризуются незначительным количеством материальных констант и простой калибровкой, однако имеют ограниченную область применимости. Физические теории обычно содержат большее число материальных констант, и таким образом их использование оказывается более сложным, чем при использовании феноменологических теорий, но их область применимости намного шире.

В работах [6, 7] была развита теория ползучести, учитывающая микронапряжения и микродеформации, как при малых, так и при конечных деформациях. Такая теория позволила установить связь между феноменологическим и физическим подходом и получила экспериментальное подтверждение при сравнительно небольшом числе констант материала.

Ключевым моментом построения определяющих соотношений теории больших вязкопластических деформаций является разделение полных деформаций и их скоростей на упругую и пластическую составляющие. Решение этого вопроса связано с тем, в какой конфигурации формулируется теория. Обычно применяются два основных подхода. В первом записываются определяющие соотношения в текущей конфигурации (гипоупругость), а во втором соотношения формируются по отношению промежуточной разгруженной конфигурации (гиперупругость). В работе [7] была сформулирована теория гипоупруго-вязкопластичности, учитывающая микродеформации. В работе [8] были отмечены недостатки гипоупруго-(вязко)пластического подхода, а именно: работа напряжений на замкнутом цикле по деформации не равна точно нулю; требование изотропности упругих соотношений; изотропность функции текучести; необходимость интегрирования гипоупругих соотношений по времени для определения напряжений.

Для устранения этих недостатков были развиты феноменологические гиперупруго-(вязко)пластические модели [8, 9-11], в которых упругое поведение задается гиперупругим потенциалом. В настоящей работе идеи, изложенные в работе [7], обобщаются на случай гиперупруго-вязкопластической формулировки, позволяющей описывать вязкопластическое течение в широком диапазоне скоростей деформации и температур.

### РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

**Кинематика.** Ключевым моментом построения определяющих соотношений теории больших вязкопластических деформаций является разделение полных деформаций и их скоростей на упругую и пластическую составляющие. Существенным отличием между рассматриваемой здесь моделью и представленной в работе [7] состоит в том, что вместо аддитивного разложения градиента скорости на упругую и пластическую часть используется схема протекания пластической деформации, предложенная Тейлором еще в работе [12], в соответствии с которой пластическая деформация развивается благодаря движению дислокаций через кристаллическую решетку, тогда как сама решетка подвергается только упругой деформации и поворотам. Эта идея в работе [14] нашла свое отражение в представлении градиента полной деформации  $\mathbf{F}$ , в форме

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p, \tag{10}$$

где  $\mathbf{F}_p, \mathbf{F}_e$  – части полного градиента деформации  $\mathbf{F}$ , обусловленные упругой деформацией решетки и пластической деформацией, соответственно. Соотношение (10) подразумевает наличие трех конфигураций: исходной  $K_0$ , текущей  $K_t$  и промежуточной разгруженной  $K_p$ . Градиент пластической деформации  $\mathbf{F}^p$  отображает точку  $\mathbf{X}_0$  в исходной конфигурации  $K_0$  в точку  $\mathbf{X}_p$  в промежуточной разгруженной конфигурации  $K_p$ , а затем с помощью градиента упругой деформации  $\mathbf{F}^e$  в точку  $\mathbf{x}$  текущей конфигурации  $K_t$ .

На основании (10) определяется градиент скорости деформации в текущей конфигурации

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} &= \left( \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right)_s + \left( \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right)_a = \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{W} = \dot{\mathbf{F}}_e \cdot \mathbf{F}_e^{-1} + \mathbf{F}_e \cdot \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \end{aligned} \tag{11}$$

где  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{W}$  – тензоры скорости деформации и вращения материала в текущей конфигурации  $K_t$ , соответственно. Нижние индексы  $s$  и  $a$  обозначают симметричную и антисимметричную часть тензора, соответственно.

В настоящей работе разрешающие уравнения первоначально записываются в промежуточной (разгруженной) конфигурации  $K_p$ , в которой по определению все деформации и вращения являются чисто пластическими и определяются градиентом  $\mathbf{F}_p$ . В таком случае, градиент скорости пластической деформации в  $K_p$  примет вид

$$\mathbf{L}_p \equiv \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = \left( \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \right)_s + \left( \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \right)_a = \mathbf{D}_p + \left( \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \right)_a, \tag{12}$$

где  $\mathbf{D}_p = \left( \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \right)_s$  – скорость пластической деформации в  $K_p$ ,  $\left( \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \right)_a$  – вращение материала в  $K_p$ .

**Основные гипотезы теории.** Оставаясь в рамках основных гипотез теории пластичности и ползучести, учитывающей микродеформации [6], примем, что представительный объем материала состоит из некоторой совокупности  $\alpha \in N$  взаимосвязанных микрочастиц (зерен), напряженно-деформированное состояние которых однородно и определяется микронапряжениями и микродеформациями. Обозначим через  $v_\alpha$  относительный объем зерна в исходном состоянии как отношение объема зерна к представительному объему. Однородную в пределах зерна скорость вязкопластической деформации будем характеризовать интенсивностью  $\dot{\rho}_\alpha$  в направлении  $\mathbf{N}_\alpha \in \Omega$ , где  $\Omega$  – область направлений активного микропластического деформирования ( $\dot{\rho}_\alpha > 0$ ) в разгруженной конфигурации  $K_p$ . Материал принимается первоначально изотропным, следовательно, все возможные

направления микропластического деформирования должны быть распределены равномерно в исходной конфигурации.

Предполагая в дальнейшем использовать гиперупругие соотношения с тензором упругой деформации Грина  $\mathbf{E}_e$ , представляется удобным определить напряжение в  $K_p$  как симметричный второй тензор напряжения Пиола-Кирхгоффа  $\mathbf{\Pi}$ , который является сопряженным к  $\dot{\mathbf{E}}_e$ . Имеем

$$\mathbf{\Pi} = |\mathbf{F}_e| \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}_e^{-T}. \quad (13)$$

Вместо определяющего уравнения в скоростях для напряжения, как принято в теории гиперупруго-(вязко)пластичности, воспользуемся общим гиперупругим определяющим уравнением для напряжения. Пусть запасенная энергия упругой деформации  $\Psi$  зависит от упругой деформации Грина  $\mathbf{E}^e$  и гомологической температуры  $\theta$ , тогда гиперупругие соотношения представятся в следующем виде

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}_e, \theta)}{\partial \mathbf{C}_e}. \quad (14)$$

В таком случае требование инвариантности при вращении твердого тела в конфигурации  $K_p$  сводится к выполнению условия изотропности  $\Psi$  и  $\partial \Psi / \partial \mathbf{C}_e$ .

Ограничимся здесь рассмотрением нео-гуковского материала, который при малых упругих деформациях принимает форму обычного закона

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{G}_e : \mathbf{E}_e, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{G}_e = 2G_0 g(\theta) \left[ \frac{1}{2} \mathbf{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} \right], \quad (16)$$

а  $G_0$  и  $\nu$  – модуль сдвига при  $T = 0^\circ \text{K}$  и коэффициент Пуассона, соответственно,  $\mathbf{I}, \mathbf{i}$  – единичные тензоры четвертого и второго ранга,  $g(\theta)$  – функция, характеризующая зависимость упругого модуля сдвига от гомологической температуры  $\theta$  ( $\theta = T/T_m$ , где  $T$  – температура в Кельвинах,  $T_m$  – температура плавления). Зависимость упругого модуля сдвига от температуры зададим в виде [19]:

$$g(\theta) = \left\{ 1 - \theta \exp \left[ \theta^* \left( \frac{\theta - 1}{\theta} \right) \right] \right\} \quad \theta > 0, \quad (17)$$

где  $\theta^*$  – характеристическая гомологическая температура.

Воспользуемся полярным разложением градиента упругой деформации

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{U}_e \cdot \mathbf{R}_e,$$

где  $\mathbf{R}_e$  – тензор ротации,  $\mathbf{U}_e$  – симметричный положительно определенный тензор второго ранга, называемый правым тензором искажения. В случае малых упругих деформаций порядка  $\varepsilon$  и больших вращениях, имеем

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{U}_e \cdot \mathbf{R}_e = (\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{U}') \cdot \mathbf{R}_e \cong \mathbf{R}_e. \quad (18)$$

Рассмотрим пластическое течение в таком диапазоне температур и скоростей деформации, в котором диффузионная ползучесть не является доминирующей и деформация происходит в основном за счет движения дислокаций. Обозначим девиатор тензора напряжения,

действующий в зерне с номером  $\alpha$  в разгруженной конфигурации, через  $\mathbf{S}_\alpha$  и представим его в виде суммы двух составляющих

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{T}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha, \quad (19)$$

где  $\mathbf{T}_\alpha$  – тензор активных (диссипативных) напряжений,  $\mathbf{R}_\alpha$  – тензор внутренних (остаточных) напряжений в зерне. Такое представление используется в целом ряде работ, в частности в [1, 2], и оно перекликается с принятыми в теории микродеформации представлениями. Природа  $\mathbf{T}_\alpha$  связана с близкодействующими препятствиями, которые включают точечные дефекты, такие, как вакансии, включения, дислокации, пересекающие плоскость скольжения, легирующие элементы и растворенные атомы (межузельные и замещения). Преодолению таких препятствий содействует тепловая активация [1, 2] и в силу этого запишем

$$\mathbf{T}_\alpha = \bar{\mathbf{T}}_\alpha(\dot{p}_\alpha, \theta), \quad (20)$$

где  $\bar{\mathbf{T}}_\alpha$  – функция, определяющая зависимость напряжения течения  $\mathbf{T}_\alpha$  от скорости деформации ползучести и температуры. Внутренние (остаточные) напряжения  $\mathbf{R}_\alpha$  связаны со структурой материала и не могут быть преодолены за счет тепловой энергии кристалла [1, 2]. Они возникают за счет сил сопротивления далекодействующих препятствий, вызванных полями напряжений от леса дислокаций и границ зерен [15], т.е. накопленной в зерне пластической деформацией. Влияние температуры на  $\mathbf{R}_\alpha$  осуществляется только через зависимость упругого модуля от температуры. В таком случае можем записать

$$\mathbf{R}_\alpha = g(\theta)\bar{\mathbf{R}}_\alpha(p_\alpha). \quad (21)$$

Таким образом, в теории микродеформации состояние материала в разгруженной конфигурации  $K_p$  определено наряду с напряжениями  $\mathbf{\Pi}$ , внутренними переменными  $\mathbf{R}_\alpha$  и  $\mathbf{N}_\alpha$ . В текущей конфигурации  $K_t$  этим переменным отвечают напряжение Коши  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\rho_\alpha$  и  $\mathbf{n}_\alpha$ , соответственно.

Для установления связи между этими переменными можно воспользоваться подходом, изложенным в работе [13], и названным упругим встраиванием. Подобный подход может быть применен и для перехода от  $\mathbf{n}_\alpha$  к  $\mathbf{N}_\alpha$ . В теории микродеформации принято, что направление течения зерна  $\mathbf{n}_\alpha$  связано непосредственно с зерном и может изменяться при конечной деформации за счет поворота зерна. В силу этого имеем

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \quad \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e. \quad (22)$$

С другой стороны, упругое встраивание от  $\rho_\alpha$  к  $\mathbf{R}_\alpha$  отражает физические свойства  $\rho_\alpha$ , так как  $\mathbf{R}_\alpha$  остается связанным с материалом в  $K_p$  как тензор, характеризующий макроскопическое состояние материала даже после того, как  $\boldsymbol{\sigma}$ , и, следовательно,  $\mathbf{\Pi}$  было изменено.

Запишем теперь определяющие уравнения для градиента скорости пластической деформации и эволюции для  $\mathbf{R}_\alpha$  в разгруженной конфигурации  $K_p$ . Первая задача решается обычным способом и скорость макропластической деформации поликристалла по отношению к промежуточной конфигурации получается осреднением локальной скорости вязкопластической деформации по всему представительному макрообъему

$$\mathbf{L}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \dot{p}_\alpha \mathbf{N}_\alpha v_\alpha = \mathbf{D}_p + \left( \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \right)_\alpha, \quad (23)$$

где  $\mathbf{D}_p = (\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1})_s$  – скорость пластической деформации в промежуточной конфигурации,  $(\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1})_a$  – скорость вращения материала в  $K_p$ . Здесь и во всех последующих формулах сумма распространяется только на направления активного микропластического деформирования  $\dot{p}_\alpha \geq 0$ . Можем также записать

$$\mathbf{D}_p = (\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1})_s = \sum_{\alpha=1}^n \dot{p}_\alpha \mathbf{P}_\alpha \nu_\alpha, \quad (\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1})_a = \sum_{\alpha=1}^n \dot{p}_\alpha \mathbf{M}_\alpha \nu_\alpha, \quad \dot{P} = \sum_{\alpha=1}^n \dot{p}_\alpha \nu_\alpha, \quad (24)$$

где  $\mathbf{P}_\alpha$  – симметричный направляющий девиатор, определяющий направление вязкопластического деформирования зерна,  $\mathbf{M}_\alpha$  – кососимметричный тензор, определяющий поворот. Имеем

$$\mathbf{P}_\alpha = (\mathbf{N}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha^T)/2, \quad \mathbf{M}_\alpha = (\mathbf{N}_\alpha - \mathbf{N}_\alpha^T)/2. \quad (25)$$

Для формулировки уравнения эволюции остаточных напряжений  $\mathbf{R}_\alpha$  требуется установить, каким образом они связаны с материалом при пластической деформации в промежуточной конфигурации  $K_p$ . Самый простой способ решения этой проблемы заключается в том, чтобы записать уравнения, отвечающие за изменение величины и направления  $\mathbf{R}_\alpha$ , отдельно. Как было предложено в работе [13, 20], воспользуемся базисом направляющих векторов, вращающимся с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ , тогда для скорости развития  $\mathbf{R}_\alpha$  можем записать

$$\mathbf{R}_\alpha^\nabla \equiv \dot{\mathbf{R}}_\alpha - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega} = g(\theta) \bar{\mathbf{R}}_\alpha(\Pi, \mathbf{R}_\alpha). \quad (26)$$

В последней формуле присутствует вращательная составляющая  $\mathbf{R}_\alpha^\nabla$ , которая включает  $\boldsymbol{\omega}$ , а функция  $\bar{\mathbf{R}}_\alpha(\Pi, \mathbf{R}_\alpha)$  определяет изменение величины  $\mathbf{R}_\alpha$ . Для выполнения условия инвариантности при жестком вращении тела требуется, чтобы  $\boldsymbol{\omega}$  не зависело от вращения, а  $\bar{\mathbf{R}}_\alpha(\Pi, \mathbf{R}_\alpha)$  была изотропной тензорной функцией переменных  $\Pi$  и  $\mathbf{R}_\alpha$ .

На основании (19) получаем локальное динамическое условие текучести в направлении  $\mathbf{N}_\alpha$

$$\mathbf{S}_\alpha : \mathbf{N}_\alpha = \bar{\tau}_\alpha(\dot{p}_\alpha, \theta) + g(\theta) \bar{\rho}_\alpha(p_\alpha). \quad (27)$$

где

$$\bar{\tau}_\alpha(\dot{p}_\alpha, \theta) = \mathbf{T}_\alpha : \mathbf{N}_\alpha, \quad \bar{\rho}_\alpha(p_\alpha) = \mathbf{R}_\alpha : \mathbf{N}_\alpha. \quad (28)$$

Равенство в последнем соотношении выполняется только для направлений активного микро-вязко-пластического деформирования.

Для построения функции  $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$  воспользуемся подходом, принятым в работе [6], и зададим скорость ее изменения в следующем обобщенном виде:

$$\dot{\bar{\rho}}_\alpha(p_\alpha) = R \dot{p}_\alpha - \gamma \dot{p}_\alpha \bar{\rho}_\alpha + R_2 \mathbf{D}_p : \mathbf{N}_\alpha, \quad (29)$$

где

$$R = \begin{cases} R_1 & \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{N}_{\alpha'}, \\ 0 & \mathbf{N}_\alpha \neq \mathbf{N}_{\alpha'}, \\ -R_4 & \mathbf{N}_\alpha = -\mathbf{N}_{\alpha'} \end{cases}$$

и  $\mathbf{N}_{\alpha'}$  – направление активного микропластического течения частицы,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_4$ ,  $\gamma$  – константы материала.

При формулировке законов вязкопластического течения важное место занимает вопрос выбора функции  $\bar{\tau}_\alpha$  термически активированных напряжений течения. В простейшем варианте, можно воспользоваться подходом, предложенным в работе [16], с использованием



параметра  $Z_\alpha = \dot{p}_\alpha \exp(Q_\alpha/kT)$ , который объединяет влияние температуры и скорости деформации в единую «базовую кривую», где  $Q_\alpha$  – энергия активации зерна, и  $k$  – постоянная Больцмана. Используя этот подход, можем записать

$$\dot{p}_\alpha = \dot{p}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) F\left(\frac{\bar{\tau}_\alpha}{\bar{\tau}_0(P, \theta)}\right). \quad (30)$$

Уравнение эволюции для  $\bar{\tau}_0$  зададим в следующем виде:

$$\dot{\bar{\tau}}_0 = R_3 (r_0 - \bar{\tau}_0) \dot{P}, \quad (31)$$

где  $R_3, r_0$  – константы материала, при начальном условии  $\bar{\tau}_0(0) = \tau_0$ .

Сравнительный анализ различных вариантов представления функции  $F$ , проведенный в работе [17], показал, что приемлемым является вариант, предложенный в работе [18]

$$F(x) = (\sinh x^{3/2})^m. \quad (32)$$

Для замкнутости разрешающих уравнений теории микродеформации необходимо установить связь локальных законов микро- и макроскопического деформирования. Воспользуемся простейшими соотношениями

$$\mathbf{S}_\alpha = \langle \mathbf{S}_\alpha \rangle = \mathbf{S}, \quad (33)$$

которые означают, что микронапряжения  $\mathbf{S}_\alpha$  во всех зернах одинаковы и равны средним  $\langle \mathbf{S}_\alpha \rangle$ , тогда из (27), с учетом (19)-(33), находим

$$\bar{\tau}_\alpha(\dot{p}_\alpha, \theta) = \mathbf{S} : \mathbf{N}_\alpha - g(\theta) \rho_\alpha(p_\alpha), \quad (34)$$

а из формул (24) и (30), получаем

$$\mathbf{L}_p = \dot{p}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) \sum_{\alpha=1}^n F\left(\frac{\mathbf{S} : \mathbf{N}_\alpha - g(\theta) \bar{\rho}_\alpha(p_\alpha)}{\bar{\tau}_0(p, \theta)}\right) \mathbf{N}_\alpha v_\alpha. \quad (35)$$

### АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Пусть  $t$  обозначает текущее время,  $\Delta t$  – бесконечно малое приращение времени, и  $\tau = t + \Delta t$ .

Считаем заданными:  $\mathbf{F}(t), \mathbf{F}(\tau), \mathbf{n}_\alpha(t), \mathbf{F}_p(t), \bar{\rho}_\alpha(t), \bar{\tau}_0(t), \mathbf{S}(t)$ .

Требуется вычислить:  $\mathbf{F}_p(\tau), \bar{\rho}_\alpha(\tau), \bar{\tau}_0(\tau), \mathbf{S}(\tau)$  и  $\mathbf{n}_\alpha(\tau)$  в момент времени  $\tau$

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \quad \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e.$$

Процедура вычислений имеет вид:

1. Вычисляем упругую деформацию  $\mathbf{E}^e(\tau)^{tr}$ :

$$\mathbf{F}^e(\tau)^{tr} = \mathbf{F}(\tau) : \mathbf{F}^p(\tau)^{-1},$$

$$\mathbf{C}^e(\tau) = (\mathbf{F}^e(\tau))^{tr} : \mathbf{F}^e(\tau),$$

$$\mathbf{E}^e(\tau)^{tr} = (1/2) \{ \mathbf{C}^e(\tau)^{tr} - \mathbf{1} \}.$$

2. Вычисляем напряжения:

$$\mathbf{\Pi}(\tau)^{tr} = \mathbf{G}_e : \mathbf{E}^e(\tau)^{tr}.$$

3. Обновляем градиент пластической деформации  $\mathbf{F}^p(\tau)$

$$\Delta \mathbf{L}_p = \dot{p}_0 \Delta t \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) \sum_{\alpha=1}^n F \left( \frac{\mathbf{S} : \mathbf{N}_\alpha - g(\theta) \bar{\rho}_\alpha(p_\alpha)}{\bar{\tau}_0(p, \theta)} \right) \mathbf{N}_\alpha v_\alpha,$$

$$\Delta P = \dot{p}_0 \Delta t \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) \sum_{\alpha=1}^n F \left( \frac{\mathbf{S} : \mathbf{N}_\alpha - g(\theta) \bar{\rho}_\alpha(p_\alpha)}{\bar{\tau}_0(p, \theta)} \right) v_\alpha;$$

$$\mathbf{F}_p(\tau) = (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{L}_p) \cdot \mathbf{F}_p(t).$$

4. Проверяем равенство  $\det \mathbf{F}_p(\tau) = 1$ . Если оно не выполняется, нормируем  $\mathbf{F}_p(\tau)$  как

$$\mathbf{F}_p(\tau) = [\det \mathbf{F}_p(\tau)]^{-1/3} \mathbf{F}_p(\tau).$$

5. Вычисляем градиент упругой деформации  $\mathbf{F}^e(\tau)$

$$\mathbf{F}^e(\tau) = \mathbf{F}(\tau) \cdot \mathbf{F}_p^{-1}(\tau).$$

6. Обновляем переменные  $\bar{\rho}_\alpha(\tau)$ ,  $\bar{\tau}_0(\tau)$

$$\Delta \dot{\bar{\rho}}_\alpha = R \Delta p_\alpha - \gamma \Delta p_\alpha \bar{\rho}_\alpha + R_2 \Delta \mathbf{L}_p : \mathbf{N}_\alpha,$$

$$\Delta \bar{\tau}_0 = R_3 (r_0 - \bar{\tau}_0) \Delta P$$

и осуществляем переход к п. 1.

После завершения итерационного процесса 1-6 вычисляем «текстуру»

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \quad \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e.$$

Предварительные расчеты показали эффективность предложенного варианта теории.

## ВЫВОДЫ

Для устранения недостатков построенной ранее теории гипопруго-вязкопластичности развит вариант гиперупруго-вязкопластической теории, учитывающей микродеформации, в котором упругое поведение задается гиперупругим потенциалом.

Предложен алгоритм численного исследования вязкопластического течения при заданной траектории градиента деформации. Предварительные расчеты показали эффективность предложенного варианта теории.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Zerilli F. J., Armstrong R. W. The effect of dislocation drag on the stress-strain behavior of FCC metals. *Acta Metallurgica et Materialia*. 1992. Vol. 40. P. 1803–1808. doi: 10.1016/0956-7151(92)90166-c.
2. Nemat-Nasser S., Li Y. Flow stress of FCC polycrystals with applications to OFHC Cu. *Acta Materialia*. 1998. Vol. 46(2). P. 565–577. doi: 10.1016/s1359-6454(97)00230-9.
3. Gao C. Y., Zhang L. C. Constitutive modeling of plasticity of FCC metals under extremely high strain rates. *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 32-33. P. 121–133. doi: 10.1016/j.ijplas.2011.12.001.
4. Klepaczko J. R. A practical stress-strain-strain rate-temperature constitutive relation of the power form. *J. Mech. Work. Technol.* 1987. Vol. 15. P. 143–165.
5. Khan A. S., Liang R. Behavior of three BCC metals during non-proportional multi-axial loadings. *International Journal of Plasticity*. 2000. Vol. 16. P. 1443–1458. doi: 10.1016/s0749-6419(00)00016-4.
6. Kadashevich Yu. I., Chernyakov Yu. A. Theory of plasticity, taking into account microstresses. *Advances in mechanics*. 1992. Vol. 15, No 3-4. P. 3–39.

7. Онищенко И. С., Черняков Ю. А., Шнейдер В. П. Разработка теории микродеформации, чувствительной к скорости деформации и температуре. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2015. Vol. 4/7(76). С. 4–9.
8. Belytchko T. W., Liu K., Moran B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. 2006.
9. Miehe C. Aspects of the formulation and finite element implementation large strain isotropic elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37. P. 1981–2004.
10. Moran B., Ortiz V., Shih C. F. Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1990. Vol. 29. P. 483–514.
11. Simo J. C., Ortiz M. A unified approach to finite deformation plasticity based on the use of hyperelastic constitutive equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1985. Vol. 49. P. 221.
12. Taylor G. I. Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals*. 1938. Vol. 62. P. 307–325.
13. Dafalias Y. F. The plastic spin in viscoplasticity. *Int. J. Solids Structures*. 1990. Vol. 26. P. 149–163. doi: 10.1016/0020-7683(90)90048-z.
14. Lee E. H. Elastic–plastic deformations at finite strains. *J. Appl. Mech. ASME*. 1969. Vol. 36. P. 1–6.
15. Kocks U. F., Mecking H. Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case. *Prog Mater Sci*. 2003. Vol. 48. P. 171–273.
16. Zener C., Hollomon J. H. Effect of strain rate upon plastic flow of steel. *J. Appl. Phys.* 1944. Vol.15. P. 22–32.
17. Onischenko I. S., Chernykov Yu. A., Shneider V. P. Numerical integration of the equations of the theory of creep, which taken into account the microstrains. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць*. 2014. Вип. 22. С. 281–290.
18. Miller A. K., Krauss A. S., Krauss K. Improvements in the MATMOD equations for modeling solute effects and yield–surface distorsion. *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*. Academic Press Inc. 1996. P. 153–227.
19. Rusinek A., Rodríguez–Martínez J. A., Klepaczko J. R., Pecherski R. B. Analysis of thermo–visco–plastic behavior of six high strength steels. *J Mater Des*. 2009. Vol. 30. P. 1748.–1761. doi: 10.1016/j.matdes.2008.07.034.
20. Mandel J. *Plasticité classique et viscoplasticité*. CISM Courses and Lectures No. 97. Udine, Berlin: Springer, 1971.

## REFERENCES

1. Zerilli, F. J. & Armstrong, R. W. (1992). The effect of dislocation drag on the stress-strain behavior of F.C.C. metals. *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 40, pp. 1803-1808. doi: 10.1016/0956-7151(92)90166-c.
2. Nemat-Nasser, S. & Li, Y. (1998). Flow stress of f.c.c. polycrystals with application to OFHC Cu. *Acta Materialia*, Vol. 46(2), pp. 565–577. doi: 10.1016/s1359-6454(97)00230-9.
3. Gao, C. Y. & Zhang, L. C. (2012). Constitutive modelling of plasticity of fcc metals under extremely high strain rates. *International Journal of Plasticity*, Vol. 32-33, pp. 121-133. doi: 10.1016/j.ijplas.2011.12.001.
4. Klepaczko, J. R. (1987). A practical stress–strain–strain rate–temperature constitutive relation of the power form. *J. Mech. Work. Technol*, Vol. 15, pp. 143-165.
5. Khan, A. S. & Liang, R. (2000). Behaviors of three BCC metals during non-proportional multi-axial loadings: experiments and modeling. *International Journal of Plasticity*, Vol. 16, pp. 1443-1458. doi: 10.1016/s0749-6419(00)00016-4.
6. Kadashevich, Yu. I. & Chernyakov, Yu. A. (1992). Theory of plasticity, taking into account microstresses. *Advances in mechanics*, Vol. 15, pp. 3-39.
7. Onishchenko, I. S., Chernyakov, YU. A. & Shneider, V. P. (2015). Development of the theory of microdeformation, sensitive to the rate of deformation and temperature. *Vostochno-Yevropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy*, Vol. 4/7(76), pp. 4-9.
8. Belytchko, T., Liu, K. & Moran, B. (2006). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*.
9. Miehe, C. (1994). Aspects of the formulation and finite element implementation large strain isotropic elasticity *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 1981-2004.

10. Moran, B., Ortiz, V. & Shih, C. F. (1990). Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, pp. 483-514.
11. Simo, J. C. & Ortiz, M. (1985). A unified approach to finite deformation plasticity based on the use of hyperelastic constitutive equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 49, p. 221.
12. Taylor, G. I. (1938). Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals*, Vol. 62, pp. 307-325.
13. Dafalias, Y. F. (1990). The plastic spin in viscoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 26(2), pp. 149-163. doi: 10.1016/0020-7683(90)90048-z.
14. Lee, E. H. (1969). Elastic-plastic deformations at finite strains. *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 36, pp. 1-6.
15. Kocks, U. F. & Mecking, H. (2003). Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case. *Prog Mater Sci*, Vol. 48, pp. 171-273.
16. Zener, C. & Hollomon, J. H. (1944). Effect of strain rate upon plastic flow of steel. *J. Appl. Phys*, Vol. 15, pp. 22-32.
17. Onischenko, I. S., Chernykov, Yu. A. & Shneider, V. P. (2014). Numerical integration of the equations of the theory of creep, which taken into account the microstrains. *Problems of Computational Mechanics and strength of structures, technologies*, Iss. 22, pp. 281-290.
18. Miller, A. K., Krauss, A. S., Krauss, K. (1996). Improvements in the MATMOD equations for modeling solute effects and yield-surface distortions. *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*. Academic Press Inc., pp. 153-227.
19. Rusinek, A., Rodríguez-Martínez, J. A., Klepaczko, J. R. & Pęcherski, R. B. (2009). Analysis of thermo-visco-plastic behaviour of six high strength steels. *Materials & Design*, Vol. 30, pp. 1748-1761. doi: 10.1016/j.matdes.2008.07.034.
20. Mandel, J. (1971). *Plasticité classique et viscoplasticité*. CISM Courses and Lectures No. 97. Udine, Berlin: Springer.

УДК 533.6

## УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ КОНИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧЕК КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Янчевский И. В., д. ф.-м. н., профессор, Бабаев А. А., к. ф.-м. н., доцент

*Национальный технический университет Украины «КПИ имени Игоря Сикорского»,  
просп. Победы, 37, г. Киев, 03056, Украина*

babaevaa@ukr.net

В данной статье с привлечением обобщенных на случай электромеханики гипотез Кирхгофа-Лява записаны уравнения осесимметричных колебаний биморфных цилиндрической и конической оболочек конечной длины, составленных из упругого и радиально поляризованного электроупругого слоев. Приведены граничные условия механической и электрической групп, которые соответствуют случаю шарнирного закрепления торцов оболочки, при работе электроупругого слоя в режиме прямого или обратного пьезоэффекта. Целью настоящей работы является развитие аналитических методов исследования колебаний тонкостенных оболочек, в которых проявляется связанность механических и электрических полевых величин. В данной публикации, в частности, представлены уравнения движения конической и цилиндрической оболочек конечной длины, составленных из тонких упругого и электроупругого слоев.

*Ключевые слова: биморфная электроупругая оболочка, гипотезы Кирхгофа-Лява, нестационарные осесимметричные колебания, уравнения движения.*

## РІВНЯННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ КОНІЧНОЇ ТА ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНОК КІНЦЕВОЇ ДОВЖИНИ

Янчевський І. В., д. ф.-м. н, професор, Бабаєв О. А., к. ф.-м. н., доцент

*Національний технічний університет України «КПІ імені Ігоря Сікорського»,  
просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056, Україна*

babaevaa@ukr.net

У статті із залученням узагальнених на випадок електромеханіки гіпотез Кірхгофа-Лява наведені рівняння осесиметричних коливань біморфних циліндричної і конічної оболонок кінцевої довжини, що містять пружний і радіально поляризований електропружні шари. Наведено граничні умови механічної та електричної груп, які відповідають випадку шарнірного закріплення торців оболонки, при роботі електропружного шару в режимі прямого або зворотного п'єзоефекту. Метою цієї роботи є розвиток аналітичних методів дослідження коливань тонкостінних оболонок, у яких проявляється зв'язаність механічних і електричних польових величин. У нашій публікації представлені рівняння руху конічної і циліндричної оболонок кінцевої довжини, складених з тонких пружного і електропружного шарів.

*Ключові слова: біморфна електропружна оболонка, гіпотези Кірхгофа-Лява, нестационарні осесиметричні коливання, рівняння руху.*

## EQUATIONS OF NON-STATIONARY OSCILLATIONS ELECTROELASTIC BONIC AND CYLINDRICAL SHELLS OF FINITE LENGTH

Yanchevskiy I. V., D. of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Babaev A. A., Doctor of Philosophy, associate Professor

*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",  
37, Peremohy Ave., Kyiv, Ukraine, 03056*

babaevaa@ukr.net

The subject of this work is devoted to the study of dynamic processes in electro-elastic systems and relates to one of the modern directions of mechanics of a deformable solid, and has intensive development in this direction in our time. The received fundamental scientific results in this area are widely used in improving existing ones and the creation of fundamentally new technical devices, the action of which is based on the use of the phenomenon of piezoelectric effect, which indicates their relevance.

Expansion of knowledge on this problem requires the formulation of new classes of tasks, which, if possible, more fully take into account the design features and operating conditions of the real equipment, the development of effective methods for their solution and the discovery of new mechanical laws of processes in hydroelectric-elastic systems.

In this paper, using the Kirchhoff-Love hypotheses generalized for the case of electromechanics, equations of axisymmetric oscillations of bimorph cylindrical and conical shells of finite length composed of an elastic and radially polarized electroelastic layer are recorded. The boundary conditions of the mechanical and electrical groups are given, which correspond to the case of hinging the ends of the shell, when the electroelastic layer is operating in the regime of a direct or inverse piezoelectric effect. The aim of this work is the development of analytical methods for studying the oscillations of thin-walled shells in which the mechanical and electrical field values are related. In this publication, in particular, the equations of motion of a conical and cylindrical shell of finite length, composed of thin elastic and electroelastic layers are presented.

*Key words: bimorph electroelastic shell, Kirchhoff-Love hypotheses, nonstationary axisymmetric oscillations, equations of motion.*

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкое применение в различных отраслях техники находят электроупругие преобразователи энергии с тонкостенными активными элементами. Достаточно широкий перечень современных устройств, работа которых основана на пьезоэффекте, создаются на базе пьезоактивных элементов в виде оболочек вращения, в частности, конической и цилиндрической форм. Такие элементы характеризуются высокой эффективностью преобразования электрической/механической энергии и достаточной механической прочностью.

Вместе с тем прикладные вопросы, связанные с колебаниями электроупругих конической и цилиндрической оболочек конечной длины, к настоящему времени остаются недостаточно изученными. Среди единичных публикаций по данной проблематике следует отметить [1-3], которые посвящены изучению установившихся колебаний оболочек упомянутой геометрии. Вопросы, связанные с переходными режимами работы и демпфированием колебаний таких оболочек при действии гармонических электромеханических нагрузок, затронуты в публикациях [4, 5].

Следует отметить, что для электроупругих сферической и бесконечно длинной цилиндрической оболочек такие уравнения приведены в [6], для тороидальной – в [3].

### КРУГОВАЯ КОНИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

Рассматривается круговая коническая оболочка, которая составлена из жестко соединенных между собой внутреннего металлического слоя толщиной  $h_m$  и внешнего слоя из поляризованной по толщине  $h_p$  пьезокерамики класса симметрии 6 mm [7]. Длина оболочки обозначена через  $l$ , а минимальный и максимальный радиусы торцевых поверхностей – через  $r_1$  и  $r_2$ , соответственно. На поверхностях электроупругого слоя имеются сплошные тонкие электроды, внутренний из которых поддерживается на нулевом электрическом потенциале, а потенциал на внешнем обозначен через  $V$ .

Для моделирования поведения рассматриваемой оболочки ввиду ее тонкостенности привлекаются механические гипотезы Кирхгофа-Лява для двухслойной структуры в целом, которые дополняются аналогичной точности допущениями для характеристик электрического поля в электроупругом слое [8]. Тогда уравнения, описывающие осесимметричные колебания рассматриваемой оболочки, могут быть получены из классических уравнений теории тонких оболочек [9], если в них подставить коэффициенты первой квадратичной формы и радиусы координатной поверхности в виде

$$A_1=1; \quad A_2=r=x\sin\alpha; \quad R_1=\infty; \quad R_2=xtg\alpha, \quad (1)$$

где  $x$  – координата, отсчитываемая от вершины конуса вдоль образующей;  $\alpha$  – полуугол раствора в вершине конуса.

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (A_2 N_1) - \frac{\partial A_2}{\partial x} N_2 \right] + \frac{Q_1}{R_1} + q_1 = m_h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2 Q_1}{\partial x} - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + q_3 = m_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

в которой  $w$  и  $u_0$  – нормальная и меридиональная составляющие вектора перемещения точек поверхности приведения, положение которой определяется расстоянием  $\zeta_0$  относительно поверхности соединения слоев;  $m_h = \rho_p h_p + \rho_m h_m$ ;  $\rho_j$  – плотности материалов;  $t$  – время; силовые факторы с индексом «1» направлены вдоль образующей оболочки  $x$ , с «2» – в окружном направлении  $\theta$ ;  $Q_1 = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (A_2 M_1) - \frac{\partial A_2}{\partial x} M_2 \right]$ .

Значение  $\zeta_0$  принимается таким, чтобы обеспечивалась наиболее простая связь между усилиями  $N_i$  и моментами  $M_i$  ( $i=1,2$ ) с параметрами деформации поверхности приведения:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= D_N(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) - e_1 \frac{h_p}{\zeta_0 - \zeta_1} V; \quad N_2 = D_N(\nu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - e_1 \frac{h_p}{\zeta_0 - \zeta_1} V; \\
 M_1 &= D'_M(\kappa_{11} + \nu'\kappa_{22}) - e_1 \frac{h_p \zeta_p}{\zeta_0 - \zeta_1} V; \quad M_2 = D'_M(\nu'\kappa_{11} + \kappa_{22}) - e_1 \frac{h_p \zeta_p}{\zeta_0 - \zeta_1} V.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

В свою очередь, деформации и изменения кривизн с учетом (1) выражаются через составляющие вектора перемещения следующим образом [9] –

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{u_0}{x} + \frac{w}{x} \operatorname{ctg} \alpha; \quad \kappa_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_{22} = -\frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Расчетные выражения для жесткостных коэффициентов  $D_N$  и  $D'_M$  (см. (3)), коэффициентов Пуассона  $\nu$  и  $\nu'$  совпадают с приведенными в [10];  $\zeta_p = -\zeta_0 + \frac{h_p}{2}$  – смещение срединной поверхности пьезокерамического слоя относительно поверхности приведения.

В результате несложных преобразований из исходной системы (2) получим систему уравнений движения оболочки в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 D_N \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{x^2} u_0 + \frac{\nu}{x} \frac{\partial w}{\partial x} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{x^2} w \operatorname{ctg} \alpha \right) - e_1 \frac{h_p}{\zeta_0 - \zeta_1} \frac{\partial V}{\partial x} + q_1 &= m_h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \\
 D'_M \left( -\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{2}{x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{x^3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \\
 -D_N \left( \nu \frac{1}{x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{x^2} u_0 + \frac{1}{x^2} w \operatorname{ctg} \alpha \right) \operatorname{ctg} \alpha - e_1 \frac{h_p}{\zeta_0 - \zeta_1} \frac{1}{x} \left( V \operatorname{ctg} \alpha + \zeta_p \frac{\partial V}{\partial x} \right) + q_3 &= m_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

В последующем будем пользоваться безразмерными обозначениями, которые введем при помощи следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_0 = \frac{u_0}{R_0}; \quad \bar{w} = \frac{w}{R_0}; \quad \bar{x} = \frac{x}{R_0}; \quad \bar{\zeta}_p = \frac{\zeta_p}{R_0}; \quad \bar{h}_j = \frac{h_j}{R_0}; \quad \bar{l} = \frac{l}{R_0}; \quad \bar{t} = t \sqrt{\frac{D_N}{R_0^2 m_h}}; \\
 \bar{q}_i = \frac{q_i}{D_N}; \quad \bar{N}_i = \frac{N_i}{R_0 D_N}; \quad \bar{M}_i = -\frac{M_i}{R_0^2 D'_M} \quad (i=1,2,3); \quad \bar{V} = \frac{e_1}{R_0 D_N} \frac{h_p}{\zeta_0 - \zeta_1} V; \quad \bar{D}_3 = \frac{D_3}{e_1},
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где  $R_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$  – средний радиус оболочки.

С использованием безразмерных обозначений система (2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} - \nabla^2 \bar{u}_0 + \frac{1}{\bar{x}^2} \bar{u}_0 - \frac{\nu}{\bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\bar{x}^2} \bar{w} \operatorname{ctg} \alpha &= \bar{q}_1 - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}; \\
 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \delta \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} + \frac{1}{\bar{x}^2} \bar{w} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \left( \frac{1}{\bar{x}^2} \bar{u}_0 + \nu \frac{1}{\bar{x}} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \bar{x}} \right) \operatorname{ctg} \alpha &= \bar{q}_3 - \frac{1}{\bar{x}} \left( \bar{V} \operatorname{ctg} \alpha + \bar{\zeta}_p \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} \right),
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

в которой и далее черта над переменными опущена;  $\delta = \frac{D'_M}{D_N}$ ;  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$  – оператор

Лапласа ( $\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} + \frac{2}{\bar{x}} \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} - \frac{1}{\bar{x}^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{\bar{x}^3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$ ).

Уравнения (5) необходимо дополнить начальными условиями для компонент вектора перемещения и граничными условиями, которые в случае шарнирного опирания торцов запишутся в виде

$$w|_{x=x_i} = 0; \quad N_1|_{x=x_i} = 0; \quad M_1|_{x=x_i} = 0, \quad (6)$$

где  $x_i = \frac{r_i}{\sin \alpha}$  ( $i=1, 2$ ), а усилие  $N_1$  и изгибающий момент  $M_1$  с учетом обезразмеривания (4) определяются соотношениями

$$N_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + v \frac{u_0}{x} + v \frac{w}{x} \operatorname{ctg} \alpha - V; \quad M_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v' \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\zeta_p}{\delta} V.$$

Граничные условия электрической группы зависят от режима работы электроупругого слоя. Так, если колебания оболочки возбуждаются электрическим путем, то функция  $V$  считается заданной –

$$V = f(t), \quad (7)$$

а если электроды считаются разомкнутыми, то должно выполняться условие

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_1} D_3 ds = 0, \quad (8)$$

обеспечивающее постоянство суммарного заряда на электродах электроупругого слоя ( $S_1$  – поверхность, занимаемая электродом).

Входящая в (8) нормальная к координатной поверхности  $(x, \theta)$  составляющая электрической индукции  $D_3$ , в рамках обобщенных на случай электромеханики гипотез Кирхгофа-Лява, считается не зависящей от толщинной координаты  $\zeta$  ( $\partial D_3 / \partial \zeta = 0$ ) и определяется равенством [10]:

$$D_3 = e_1 (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + e_1 \zeta_p (\kappa_{11} + \kappa_{22}) + \epsilon_3 \frac{V}{\zeta_0 - \zeta_1},$$

которое с использованием безразмерных переменных (4) запишется следующим образом

$$D_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{x} + \frac{w}{x} \operatorname{ctg} \alpha - \zeta_p \nabla^2 w + \frac{1}{\delta_1} V. \quad (9)$$

Здесь  $\delta_1 = e_1^2 h_p / \epsilon_3 D_N$ .

В результате несложных преобразований для разности потенциалов  $V$  на основании равенств (8) и (9) получим следующую формулу

$$V = \sin \alpha \frac{\delta_1}{l} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{x} + \frac{w}{x} \operatorname{ctg} \alpha - \zeta_p \nabla^2 w \right) x dx. \quad (10)$$

### ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

Для биморфной круговой цилиндрической оболочки с параметрами Ламе и радиусами

$$A_1 = 1; \quad A_2 = R_0; \quad R_1 = \infty; \quad R_2 = R_0,$$

уравнения колебаний в усилиях с учетом (2) запишутся в таком виде



$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + q_1 = m_h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{N_2}{R_0} + q_3 = m_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Здесь  $R_0$  – радиус поверхности приведения оболочки;  $x$  – осевая координата, отсчитываемая от ее края.

Физические соотношения, устанавливающие связь между усилиями и моментами с соответствующими деформациями координатной поверхности, представляются следующим образом –

$$N_1 = D_N \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{w}{R_0} \right) - e_1 \frac{h_p}{\zeta_0 - \zeta_1} V; \quad N_2 = D_N \left( \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w}{R_0} \right) - e_1 \frac{h_p}{\zeta_0 - \zeta_1} V;$$

$$M_1 = -D'_M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - e_1 \frac{h_p \zeta_p}{\zeta_0 - \zeta_1} V,$$

при получении которых также учитывались гипотезы Кирхгофа-Лява, согласно которым компоненты вектора деформации поверхности приведения и изменения кривизн равны

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{w}{R_0}; \quad \kappa_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_{22} = 0.$$

С использованием безразмерных переменных (4) из (11) получим систему уравнений движения в перемещениях, которые представляют собой систему двух линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial w}{\partial x} = q_1 - \frac{\partial V}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + w + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} = q_3 + V - \zeta_p \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (12)$$

При шарнирном закреплении торцов на контурах  $x_1 = 0$  и  $x_2 = l$  задаются граничные условия (6), в которых силовые факторы определяются равенствами

$$N_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu w - V; \quad M_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\zeta_p}{\delta} V.$$

В случае работы электроупругого слоя в режиме «холостого хода» [8] граничное условие электрической группы (8) примет следующий вид:

$$V = \frac{\delta_1}{l} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + w - \zeta_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx. \quad (13)$$

Система уравнений в форме (5) или (12), совместно с начальными условиями и граничными условиями (6), (7), (10) или (13), образует полную систему уравнений начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях биморфной круговой конической и цилиндрической оболочек с шарнирно-закрепленными торцами.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Рассказов А. О., Карнаухова О. В. Параметрические колебания трехслойной конической пьезооболочки. *Механика композитных материалов*. 2003. Т. 39, № 1. С. 25–38.
2. Киричок И. Ф., Венгренюк Ю. А. О влиянии тепловой деполяризации и термомеханической связанности на гармонические колебания и диссипативный разогрев конических оболочек из пьезокерамики. *Прикл. механика*. 1998. Т. 34, № 8. С. 62–67.

3. Tzou H. S., Chai W. K., Arnold S. M. Structronics and actuation of hybrid electrostrictive / Piezoelectric thin shells. *J. of Vibration and Acoustics*. 2006. Vol. 128. P. 79–87. DOI: 10.1115/1.2149397.
4. Li H., Hu S. D., Tzou H. S. Optimal vibration control of conical shells with collocated helical sensor/actuator pairs. *J. of Theoretical and Applied Mechanics*. 2012. Vol. 50, No. 3. P. 769–784.
5. Wang W., Wei Y., Wang C., Zou Zh. Investigation for active vibration control of piezoelectric conical shell. *Engineering mechanics*. 2008. Vol. 25, No. 10. P. 235–240. DOI: 1000-4750(2008)10-0235-06.
6. Савин В. Г., Моргун И. О. Уравнения колебаний пьезокерамических сферических и цилиндрических оболочек. *Наук.-техн. зб. «Інформаційні системи, механіка та керування»*. 2009. Вип. 5. С. 85–96.
7. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И., Сеник Н. А., Фильштинский М. Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. I. Введение в теорию термопьезоэлектричества. Москва: КомКнига, 2010. 312 с.
8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость: Гузь А. Н. (ред.). Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
9. Бабаев А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. Киев: Наук, думка, 1990. 176 с.
10. Подчасов Н. П., Янчевский И. В. Управление нестационарными колебаниями цилиндрической полупассивной оболочки при секционированном электродировании пьезослоя. *Теор. и прикл. механика*. 2011. Вып. 3 (49). С. 93–101.

#### REFERENCES

1. Karnaukhov, V. G., Kozlov, V. I., Rasskazov, A. O. & Karnaukhova, O. V. (2003). Parametric oscillations of a three-layer conical piezo shell. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, Vol. 39, No. 1, pp. 25-38.
2. Kirichok, I. F. & Vengreniuk, Iu. A. (1998). On the influence of thermal depolarization and thermomechanical coupling on harmonic oscillations and dissipative heating of conical shells of piezoceramics. *Prikl. Mekhanika*, Vol. 34, No. 8, pp. 62-67.
3. Tzou, H. S., Chai, W. K. & Arnold, S. M. (2006). Structronics and actuation of hybrid electrostrictive / Piezoelectric thin shells. *J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 128, pp. 79-87. DOI: 10.1115/1.2149397.
4. Li, H., Hu, S. D. & Tzou, H. S. (2012). Optimal vibration control of conical shells with collocated helical sensor/actuator pairs. *J. of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 3, pp. 769-784.
5. Wang W., Wei Y., Wang C., Zou Zh. Investigation for active vibration control of piezoelectric conical shell. *Engineering mechanics*. 2008. Vol. 25, No. 10. P. 235–240. DOI: 1000-4750(2008)10-0235-06.
6. Savin, V. G. & Morgun, I. O. (2009). Equations of oscillations of piezoceramic spherical and cylindrical shells. *Nauk.-tekhn. zb. «Інформаційні системи, механіка та керування»*, Iss. 5, pp. 85-96.
7. Bardzokas, D. I., Zobnin, A. I., Senik, N. A. & Filshtinskii, M. L. (2010). Mathematical modeling in problems of the mechanics of coupled fields. Vol. I. Introduction to the theory of thermoelectric power. Moscow: KomKniga.
8. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shulga, N. A. (1989). Mechanics of bound fields in elements constructions. Vol. 5. Electroelasticity: Guz A. N. (Eds.). Kiev: Nauk. dumka.
9. Babaev, A. E. (1990). Nonstationary waves in continuous media with a system of reflecting surfaces. Kiev: Nauk. dumka.
10. Podchasov, N. P. & Ianchevskii, I. V. (2011). Control of nonstationary oscillations of a cylindrical semi-passive shell under sectionalized electrodes of a piezolayer. *Teor. i prikl. mekhanika*, Iss. 3 (49), pp. 93-101.

УДК .....

## ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

Іванов І. І., д. ф.-м. н., професор

Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

ivan@mail.ru

До друку будуть прийматися лише наукові статті, де присутні такі необхідні елементи

(п. 3 Постанови президії ВАК України № 7 – 05 / 1 від 15 січня 2003 р.):

- **Постановка проблеми** у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.
- **Аналіз останніх досліджень і публікацій**, в яких започатковано порушення даної проблеми і на які спирається автор.
- **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми**, яким присвячується стаття.
- **Формулювання цілей статті** (постановка завдання).
- **Виклад основного матеріалу дослідження** з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.
- **Висновки з даного дослідження і перспективи** подальших розвідок у даному напрямку.

### 1. МАКЕТ СТОРІНКИ

Для оригінал-макета використовується формат А4 з такими полями:

з усіх боків – 2 см.

Шрифт набору – Times New Roman.

У разі необхідності для шрифтових виділень у таблицях і рисунках дозволяється застосовувати шрифт Courier New (наприклад, для ілюстрації текстів програм для ЕОМ). Для стилістичного виділення фрагментів тексту слід вживати начертання *курсив*, **напівжирний**, *напівжирний курсив* зі збереженням гарнітури, розміру шрифту та інтервалу абзацу.

Гарнітури, розміри шрифтів та начертання:

- а) для УДК: Times New Roman, – 14 пт, усі літери прописні;
- б) для заголовку статті: Times New Roman, – 14 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- в) для підзаголовків: Times New Roman, – 12 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- г) для прізвищ, ініціалів авторів, адреси електронної пошти: Times New Roman – 12 пт, усі строчні;
- д) для назв і адрес організацій: Times New Roman – 12 пт, курсив, усі строчні;
- е) для анотацій, виносков, посилань, підписів до рисунків та надписів над таблицями: Times New Roman – 10 пт;
- ж) для ключових слів: Times New Roman – 10 пт, курсив;
- з) для основного тексту: Times New Roman – 12 пт, як у реченні.

Інтервал між абзацами – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

### 2. ТИПОГРАФСЬКІ ПОГОДЖЕННЯ ТА СТИЛІ

УДК вказується в першому рядку сторінки і вирівнюється за лівим краєм. Заголовок статті набирається в наступному за УДК рядку і вирівнюється по центру. У третьому рядку з вирівнюванням по центру зазначаються прізвища, ініціали авторів. У наступному рядку розміщується інформація про назву та адресу організації, де працює (навчається) автор, яка також вирівнюється по центру. Четвертий рядок містить адресу електронної пошти авторів, розміщену по центру. Далі розташовується анотація (3-5 речень) і ключові слова мовою оригіналу та анотація українською або російською мовами (залежно від мови оригіналу). З наступного абзацу послідовно набираються і вирівнюються по центру заголовки статті англійською мовою, транслітеровані прізвища, ініціали авторів, назви і адреси організацій, які повинні бути подані англійською мовою, із зазначенням міста і країни, без назви вулиці, яка подається транслітерацією. З наступного рядка розміщується розширена (обсягом не менше 3,5 тис. знаків) анотація із ключовими словами англійською мовою. Після анотацій з абзацу викладається основний текст статті.

Заголовки наукових статей повинні бути інформативними та містити тільки загальноприйняті скорочення. У перекладі заголовків статей англійською мовою не повинно бути жодних транслітерацій, окрім неперекладних назв власних імен, приладів та інших об'єктів, що мають власні назви; також не використовується неперекладний сленг. Це стосується також анотацій і ключових слів.

**Початок абзацу** основного тексту виділяється збільшеним інтервалом між абзацами і не виділяється відступом або пустим рядком.

Ілюстрації мають бути оригінальними рисунками або фотографіями. Фотографії скануються у 256 градаціях сірого. Ілюстрації розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні бути підписані та послідовно пронумеровані арабськими цифрами: Рис. 1, Рис. 2. Номер рисунка та підпис розміщуються безпосередньо під рисунком. Кожен рисунок та підписи до нього включаються до тексту публікації. Створення графічних об'єктів може здійснюватися будь-яким графічним редактором у форматі BMP файлів. Виконання рисунків засобами Microsoft Word здійснюється через використання команд панелі «Рисование». Підписи здійснюються командою «Надпись». Усі графічні компоненти рисунка і підписи об'єднуються командою «Группировать» (меню «Действия» на панелі «Рисование») і подаються у вигляді одного графічного об'єкта, прив'язаного до тексту з об'єктом «В тексте». Ілюстрації готують та масштабують так, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір літер основного тексту статті більше, ніж на 50%.

Ілюстрації, так само як і підписи до них, вирівнюються на середину рядка (за виключенням невеликих рисунків – не більш 7 см, які можуть розташовуватися по декілька в ряд).

Таблиці розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні містити назву та бути послідовно пронумерованими арабськими цифрами: Таблица 1, Таблица 2. Номер та назва таблиці розміщують над таблицями.

Посилання на літературні джерела послідовно нумеруються арабськими цифрами в порядку появи в тексті статті і зазначаються у квадратних дужках, де вказуються порядковий номер джерела та через кому конкретна сторінка [8, с.16]. Перелік літературних джерел мовою оригіналу подається в порядку їх нумерації після основного тексту статті з підзаголовком «ЛІТЕРАТУРА», який вирівнюється по центру. Список літератури оформлюється відповідно до ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання».

З наступного абзацу подається перелік літературних джерел латиницею з підзаголовком «REFERENCES», який вирівнюється по центру.

### 3. СТИЛІСТИЧНІ ПОГОДЖЕННЯ

- Не допускається закінчення сторінки одним або декількома пустими рядками, за винятком випадків, спричинених необхідністю дотримання попереднього пункту (висячі підзаголовки і початок абзацу) та кінця статті.
- Не допускається починати сторінку незакінченим рядком (переноси в останньому рядковій заборонені).
- Не дозволяється підкреслювання в заголовках, підписах і надписах.
- Слід дотримуватися правила про мінімальні зміни в шрифтовому та стильовому оформленні сторінки для того, щоб максимально уникнути різноманітності макета і зберегти єдиний стиль збірника.
- Не допускається часте використання виносок (виноска повинна розглядатися як виняток і вживатися тільки у випадку дійсної необхідності).
- Ілюстрації мають бути підготовані та масштабовані таким чином, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір букв основного тексту статті більш ніж на 50%.
- Сторінки тексту статті слід пронумерувати.
- Диск треба підписати, вказавши прізвище, ініціали автора, імена файлів.
- На диску повинно бути **два файли**:
  - ✓ **перший** – із текстом статті та анотацій з ключовими словами,
  - ✓ **другий** – із відомостями про авторів (прізвище, ім'я, по батькові; посада; вчений ступінь; учене звання; місце роботи або навчання; адреса електронної пошти; домашня адреса; номери контактних телефонів).

### 4. ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ СТАТТІ АВТОРУ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО РЕДАКЦІЇ ЗБІРНИКА:

1. Роздрукований текст статті з анотаціями та ключовими словами.
2. Відомості про авторів.
3. Витяг з протоколу засідання кафедри або факультету.
4. Зовнішню рецензію.
5. Диск із текстом статті, анотацій, ключовими словами та відомостями про авторів.

**Адреса редакції:** Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

**Довідки за телефонами:**

(061) 289-12-52 – відповідальний за випуск (технічний редактор)

(061) 228-75-21 – редакційно-видавничий відділ (IV корпус, кімн. 323)

**Адреса електронної пошти:**

kpmf.mf@znu.edu.ua

**ДЛЯ НОТАТОК**

Збірник наукових праць

***Вісник Запорізького національного університету***  
***Фізико-математичні науки***  
**№ 2, 2017**

Технічний редактор – *Н. В. Ярош*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані  
в редакційно-видавничому відділі  
Запорізького національного університету  
тел. (061) 289-12-98

Підписано до друку 18.12.2017. Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».

Умовн.-друк. арк. 47,1

Замовлення № 173. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет  
69600, м. Запоріжжя, МСП-41  
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції  
ДК № 5229 від 11.10.2016