

**Запорізький національний університет
Міністерства освіти і науки України**

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого
засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

Адреса редакції:
Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

В і с н и к
Запорізького національного
університету

Телефон
для довідок:
(061) 289-12-52

— **Фізико-математичні науки**

Факс: (061) 764-45-46

№ 2, 2016

Запоріжжя 2016

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2016. – 268 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Наказ Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Вісник індексується під назвою «Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences» у наступних наукометричних базах:

- CiteFactor (<http://www.citefactor.org/>);
- ResearchBib (<http://paper.researchbib.com/>);
- Journal Factor (<http://www.journalfactor.org/>).

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 4 від «25» жовтня 2016 р.)

РЕДАКЦІЙНА РАДА

Головний редактор	– Грищак В.З.,	доктор технічних наук, професор
Заступник головного редактора	– Гребенюк С.М.,	кандидат технічних наук, доцент
Відповідальні редактори	– Гоменюк С.І., Приварников А.К., Клименко М.І., Чопоров С.В.,	доктор технічних наук, професор доктор фізико-математичних наук, професор кандидат фізико-математичних наук, доцент кандидат технічних наук, доцент

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Андріанов І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина)
Ванько В.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія)
Гіржон В.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гоман О.Г.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гудрамович В.С.	– доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Козін І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Колаковські З.	– доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща)
Кондрат'єва Н.О.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кузьменко В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Маневич Л.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія)
Морачковський О.К.	– доктор технічних наук, професор
Ольшанецький В.Ю.	– доктор технічних наук, професор
Перепелиця В.О.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Пожуєв В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Толок О.В.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкин», Росія)
Швидка С.П.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент

ЗМІСТ

АЛАТАМНЕХ Х. Х. М ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ЗАСОБИ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ПАРАМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ	5
АЛЬ-ОМАРИ М. А. В. ЯЗЫК ОПИСАНИЯ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ FORTU-F	15
ВЕЛИЧКО І. Г., ТКАЧЕНКО І. Г., БАЛАБАНОВА В. В. ЗАСТОСУВАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	26
ГОРОДЕЦКИЙ В. Г. РЕКОНСТРУКЦИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ПО СКАЛЯРНОМУ ВРЕМЕННОМУ РЯДУ	34
ГРИГОРЕНКО О. Я., ЄФІМОВА Т. Л., КОРОТКИХ Ю. А. ОСЕСИМЕТРИЧНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З НЕПЕРЕРВНО НЕОДНОРІДНОГО МАТЕРІАЛУ НЕСИМЕТРИЧНОЇ БУДОВИ	42
ГРИГОРЕНКО А. Я., ПАНКРАТЬЕВ С. А., ЯРЕМЧЕНКО С. Н. ОСОБЕННОСТИ ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ	51
GRISTCHAK V. Z., FATIEIEVA YU. A. NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED SHALLOW SHELLS WITH TIME DEPENDENT PARAMETERS UNDER STATIC LOADING	60
ГРИЩАК Д. Д. УПРАВЛІННЯ ВИМУШЕНИМИ КОЛИВАННЯМИ ОБЕРТОВОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА З ДОВЖИНОЮ І МАСОЮ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСУ	69
ГРОМОВ В. А. СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА С НЕПОСТОЯННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ	82
ГУК Н. А., СТЕПАНОВА Н. И. НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЖАТО-ИЗОГНУТОЙ ПЛАСТИНЫ С РАЗРЕЗОМ	89
ЕМЕЦ О. А., ЕМЕЦ А. О., ПОЛЯКОВ И. М. О ГРЯНЯХ ОБЩЕГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА	102
ЗІНЧУК М. О., СВЯТОВЕЦЬ І. Ф., ТЕТЕРЯТНИК О. В. ПРО АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА ТА РІККАТІ ДЛЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ	110
КВАШНІВСЬКА Н. М. ВПЛИВ ІНТЕРКАЛЯЦІЇ ВОДНЕМ НА ЕЛЕКТРОХІМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МОНОСЕЛЕНІДУ ІНДІЮ	121
КЛИМЕНКО М. І., ГРЕБЕНЮК С. М., СМОЛЯНКОВА Т. М. ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ ЗСУВУ ОДНОСПРЯМОВАНОГО КОМПЗИТУ ПРИ НОРМАЛЬНОМУ РОЗПОДІЛІ РАДІУСА ВОЛОКНА	127
КОЗИН И. В., БАТОВСКИЙ С. Е., САРДАК В. И. ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ	136
ЛАТИФОВ Ф. С., АБАСОВ М. М. АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ, АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ	144
ЛАТИФОВ Ф. С., АГАЛАРОВА И. У. КОЛЕБАНИЕ РЕБРИСТЫХ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ, ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ	155
ЛИТВИН О. М., КОВАЛЕНКО Г. В. ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНОГО ПОЛІНОМА 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ	165

ЛИТВИН О. М., СЛАВІК О. В. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЇХ СЛІДІВ НА СИСТЕМІ ПЕРЕТИННИХ СМУГ, РОЗТАШОВАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ	175
ОБОДАН Н. И., ГУК Н. А., КОЗАКОВА Н. Л. КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛОЯ С ОСНОВАНИЕМ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ.....	182
ОВСЬКИЙ О. Г., ЛЕОНТЬЄВА В. В., КОНДРАТ'ЄВА Н. О. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМУВАННЯ ТРИЩАРОВОЇ ПЛАСТИНИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ	192
ПОЖУЄВ В. І., ПОЖУЄВ А. В., ФАСОЛЯК А. В. НЕСТАЦІОНАРНА ДЕФОРМАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРИ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНИХ ПОВЕРХНЕВИХ НАВАНТАЖЕНЬ.....	201
PROTSENKO V. S., UKRAYNETS N. A. JUSTIFICATION OF THE GENERALIZED FOURIER METHOD FOR THE MIXED PROBLEM OF ELASTICITY THEORY IN THE HALF-SPACE WITH THE CYLINDRICAL CAVITY.....	213
РЕШЕВСКАЯ Е. С., НАУМЕНКО Д. А. ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛАСТОМЕРНОГО ВИБРОИЗОЛЯТОРА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ.....	221
СВЯТОВЕЦЬ І. Ф. ФОРМУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ДИСКРЕТНОЇ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕКТОРА КЕРУВАННЯ	229
ЧОПОРОВ С. В., ЛИСНЯК А. А., БОРИСОВСКАЯ Ю. А., КОЗЛОВА О. С., СНЕЖКОВА Л. С. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ: НЕСТРУКТУРИРОВАННЫЕ СЕТКИ.....	237
ЯРЕМЕНКО М. І. ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ В $L^p(\mathbb{R}^1, d^1x)$ ПРОСТОРАХ, ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ	251
ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ».....	265

УДК 519.6

ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ЗАСОБИ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ПАРАМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Алатамнех Х. Х. М., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*

bega_88@mail.ru

Комп'ютерні системи, що використовують засоби геометричного моделювання, є важливими інструментами дослідження в машинобудуванні, архітектурі, комп'ютерній графіці тощо. Для подання геометричних об'єктів у комп'ютерних системах використовують інструментальні засоби, що дозволяють описувати геометричну конфігурацію. У статті запропоновані інструментальні засоби для геометричного моделювання із застосуванням параметричних функцій, які використані для граничного подання геометричних об'єктів. Розроблені операції для знаходження результатів об'єднання, перетину та різниці областей, поданих параметричними функціями.

Ключові слова: геометричне моделювання, геометричний об'єкт, граничне подання, параметрична функція.

ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Алатамнех Х. Х. М., аспірант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина*

bega_88@mail.ru

Компьютерный системы, использующие средства геометрического моделирования, являются важными инструментами исследования в машиностроении, архитектуре и т.д. Для представления геометрических объектов в компьютерных системах используют инструментальные средства, позволяющие описывать геометрическую конфигурацию. В статье предложены инструментальные средства для геометрического моделирования с применением параметрических функций, которые использованы для граничного представления геометрических объектов. Разработаны операции для нахождения результатов объединения, пересечения и разности областей, представленных параметрическими функциями.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, геометрический объект, граничное представление, параметрическая функция.

INSTRUMENTAL TOOLS FOR GEOMETRIC MODELLING USING PARAMETRIC FUNCTIONS

Al-Athamneh H. K. M., postgraduate

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine, 69600*

bega_88@mail.ru

Computer-aided design (CAD) systems have become important in engineering, architecture, computer graphics etc. These systems use abstract rigid solid to model physical solids. Solid geometry plays significant role in many scientific applications of CAD. Hence, geometry of solids is represented in CAD by special symbol structures. The subsystem which provides tools for entering, storing and editing object representation is called geometric modelling system.

In computer-aided design and solid modelling, boundary representation (B-rep) is a method for representing shapes using the limits. A solid is represented as a collection of its boundaries.

In this article, parametric functions are used for boundary representation. Solids are represented in terms of parametric curves and surfaces. Particularly, analytical curves and surfaces, and spline patches are used.

Ray parity test is used to check whether a point is inside a region defined by parametric functions. This even-odd test also known as the Jordan Curve theorem. Essentially, it says that a point is inside a region if for any ray from this point, there is an odd number of crossings of the ray with the region boundaries. This parity test allows representation of complex solids in logical set operations.

Key words: discrete model, mesh, grid, triangle, quadrilateral, tetrahedron, hexahedron.

ВСТУП

Дослідження сучасних технічних об'єктів та інженерних систем пов'язане з використанням комп'ютерної техніки для аналізу їх математичних моделей. Таке моделювання часто називають комп'ютерним, вагомою перевагою якого є можливість заміни вартісні натурні експерименти серією комп'ютерних. Більшість технічних об'єктів і систем мають певну кінцеву форму та обмежені розміри, тобто, є геометричними об'єктами. Для їх подання в комп'ютері використовують спеціальні засоби, а саме підсистеми моделювання геометричних об'єктів. Отже актуальною науково-технічною проблемою є розробка математичного забезпечення для створення інструментальних засобів комп'ютерного моделювання геометричних об'єктів.

Проблема автоматизації побудови геометричних моделей об'єктів складної форми може бути умовно розділена на дві складові:

- 1) формалізації опису геометричної моделі області складної форми;
- 2) побудова на її базі адекватної комп'ютерної моделі, придатної для дискретизації на скінченні елементи заданої форми.

Поширені інструментальні засоби спеціалізованих програмних систем дозволяють описувати геометричну модель, як деяку комбінацію базових геометричних примітивів і логічних операцій (об'єднання, перетину і віднімання). Такий підхід застосовується, наприклад, у таких відомих системах автоматизації проектування, як ANSYS [1], COSMOS [2-3], COSAR [4], LS-DYNA [5], NASTRAN [6-7], Pro-ENGINEER [8] та інших. Такий спосіб геометричного моделювання є досить ефективним і зручним для кінцевого користувача, однак, з його допомогою важко будувати геометричні моделі об'єктів неklasичної форми (особливо в тому випадку, якщо в бібліотеці типових елементів відсутні необхідні примітиви).

Більш природним з точки зору інженерної практики є підхід, який базується на так званому твердотілому моделюванні [9-10] геометричних об'єктів, коли тривимірна геометрична модель об'єкта будується за кресленнями його проєкцій. Наприклад, системи SolidEdge [9], AutoCAD [11-12], КОМПАС [13-14] підтримують цей спосіб моделювання геометричних об'єктів. Однак його трудомісткість є досить значною, крім того, побудована геометрична модель не завжди є зручною для подальшої дискретизації на скінченні елементи.

Третій, мабуть, найбільш ефективний спосіб побудови моделей геометричних об'єктів – використання параметричного подання до опису топології об'єктів різної форми. Для цього використовують різні формальні мови [15-18], що дозволяють описувати набір геометричних примітивів і операцій над ними. На відміну від першого з вищеописаних способів геометричного моделювання, параметричне подання об'єктів є більш гнучким і адекватним, але також і більш трудомістким.

Альтернативним і досить універсальним підходом для створення інструментального забезпечення математичного моделювання геометричних об'єктів є використання неявних математичних функцій. Як один з можливих найбільш перспективних підходів тут може бути використаний математичний апарат R-функцій академіка В.Л. Рвачева [19-24], який дозволяє «конструювати» неявні функції для складних моделей, використовуючи операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення. Аргументами таких логічних операцій є значення неявних функцій, що відповідають більш простим частинам об'єкта. Основними недоліками такого

підходу є складність побудови відповідної дискретної моделі. Також досить складно використовувати такий підхід інженером-конструктором.

Отже, проблема математичного моделювання геометричних об'єктів довільної форми як і раніше є актуальною. Одним з можливих варіантів її вирішення є розробка відповідних інструментальних засобів, які дозволять параметризувати моделі для універсалізації підходу.

МОДЕЛЮВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ НА БАЗІ ПАРАМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай двовимірною лінією описана векторною функцією

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad (1)$$

де t – скалярний аргумент; $x(t)$ і $y(t)$ – радіус-вектори точки кривої – неперервні функції параметру t ; \vec{i} та \vec{j} – базисні вектори декартової системи координат двовимірного простору.

Для побудови математичної моделі кривої лінії потрібно знати залежність її радіус-вектора $\mathbf{r}(t)$ від параметра й область зміни значень параметра t . Кожному типу кривої відповідає свій набір даних і свій алгоритм обчислення радіус-вектора. Якщо відома функціональна залежність радіус-вектора від параметра кривої, то визначається вся її геометрична інформація. Для кривої можливо виконати заміну параметру та області його значення.

Розглянемо лінії, координати радіус-вектора яких можуть бути подані як аналітичні функції параметра t . Найпростіші серед таких: прямі, еліпси, спіралі тощо, – геометричні примітиви.

Багато кривих, поданих аналітичними функціями, є або замкнутими, або необмеженими. Для замкнутих кривих областю значень будемо вважати відрізок параметричної осі, в межах якого радіус-вектор проходить один цикл. Необмежені криві необхідно обмежувати, використовуючи мінімальний і максимальний параметри.

Вираз для більшості примітивних кривих має вигляд

$$\text{curve}(t) = P + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad (2)$$

де P – точка прив'язки характерної точки кривої [25]; $x(t)$, $y(t)$, \vec{i} та \vec{j} як у формулі (1).

Однією з простіших є пряма лінія. Вона може бути подана точкою P і вектором \vec{a} . Радіус-вектор прямої лінії визначимо залежністю

$$\text{line}(t) = P + t\vec{a}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (3)$$

Довжина вектора \vec{a} може бути довільною (але відмінною від нуля). Теоретичною областю зміни параметра прямої є вся числова вісь, проте на практиці вводять обмеження. В останньому випадку отримаємо відрізок прямої лінії. Він може бути поданий початковою P_1 і кінцевою P_2 точками:

$$\text{segment}(t) = (1-t)P_1 + tP_2, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

Окружність є плоскою кривою – геометричне місце точок, рівновіддалених від центру. Її можна описати, якщо задати радіус r і координати центра C :

$$\text{circle}(t) = C + r\cos(t)\vec{i} + r\sin(t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (5)$$

Аналогічно еліпс може бути поданий радіус-вектором

$$\text{ellipse}(t) = C + a\cos(t)\vec{i} + b\sin(t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (6)$$

де a і b – піввісі еліпса.

Дуга окружності може бути подана радіус-вектором

$$\text{arc}(t) = C + r\cos(\alpha_0 + t\text{sign})\vec{i} + r\sin(\alpha_0 + t\text{sign})\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq \alpha_1. \quad (7)$$

У багатьох практичних задачах аналітична формула лінії не відома, проте потрібно, наприклад, щоб крива проходила через задані точки, мала певний степінь гладкості або в деяких точках мала задані похідні. У цьому підрозділі розглянемо такі криві.

Достатньо великий клас ліній можна побудувати за сукупністю точок. Такі лінії називаються точково-заданими. Це зламана лінія та різні сплайни (кубічний, Лагранжу, Ньютона, Ерміта тощо). Формулювання задачі є таким: є сукупність точок у просторі, радіус-вектори яких рівні P_i , де $i = 0, 1, 2, \dots, n$ – номери точок; потрібно побудувати лінію, радіус-вектори якої при значеннях параметра t_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ дорівнюють P_i . Іншими словами, потрібно побудувати інтерполяційну криву. Точки P_i , що визначають лінію, – її внутрішні дані, їх називають характеристичними точками кривої. Точки t_i на числовій осі називають вузлами, а відповідні значення параметру t – вузловими.

Простішою точково-заданою лінією є зламана лінія. Вона складається з відрізків, що послідовно з'єднують задані точки. Значення параметра в кожній наступній точці повинно бути більше за значення параметра в попередній точці $t_i < t_{i+1}$. Радіус-вектор ламаної визначається рівністю

$$\text{polyline}(t) = P_i(1-w) + P_{i+1}w, \quad w = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}. \quad (8)$$

У формулі (8) параметр w – місцевий параметр на ділянці кривої між точками P_i та P_{i+1} [25].

Перша похідна розривна в точках P_i . Параметр зламаної лінії змінюється в одномірному просторі. У цьому просторі можливо використовувати будь-яку систему координат. Наприклад, можна використовувати систему координат, у якій значення параметру в точці P_i дорівнює номеру точки: $t_i = i$. У такому випадку параметр є рівномірним (рис. 1).

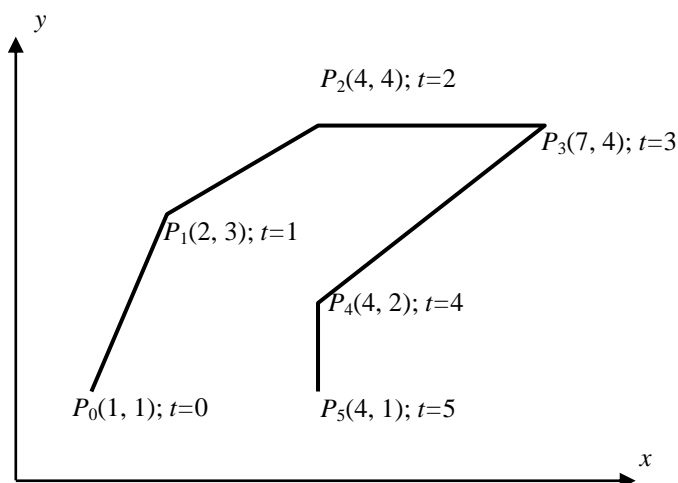


Рис. 1. Зламана лінія

У багатьох практичних задачах потрібно побудувати плавну криву лінію, що проходить через задані точки. У такому випадку використовують сплайни.

Для заданої послідовності $m+1$ точок, через яку повинна пройти крива, сплайн Ерміта описується поліномом степені $2m+1$:

$$\begin{aligned} \text{hermite}(t) &= P_i(1-3w^2+2w^3) + P_{i+1}(3w^2-2w^3) + \\ &+ Q_i(w-2w^2+w^3) + Q_{i+1}(-w^2+w^3) = \\ &= \alpha_0(w)P_i + \alpha_1(w)P_{i+1} + \beta_0(w)Q_i + \beta_1(w)Q_{i+1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$w = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, \quad t_0 \leq t \leq t_m.$$

У (9) введено позначення для функцій:

$$\begin{aligned} \alpha_0(w) &= 1-3w^2+2w^3, \\ \alpha_1(w) &= 3w^2-2w^3, \\ \beta_0(w) &= w-2w^2+w^3, \\ \beta_1(w) &= -w^2+w^3. \end{aligned}$$

Якщо точки P_i розташовані рівномірно, можна прийняти значення параметра в цих точках рівними їх номерам: $t_i = i$. При нерівномірному розташуванні точок P_i параметричну відстань можна покласти пропорційною до відстані між відповідними точками $|P_{i+1} - P_i|$. Складений сплайн Ерміта також може бути замкнутим.

Якщо похідні Q_i невідомі, то їх можливо обчислити за однією з відомих схем. Наприклад, можна вважати

$$Q_i = \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}.$$

При нерівномірному розподілі точок цей спосіб може призвести до виникнення небажаних петель [25], тому більше поширене використання альтернативних схем. Наприклад,

$$Q_i = s_{i+1} \frac{P_i - P_{i-1}}{s_i + s_{i+1}} + s_i \frac{P_{i+1} - P_i}{s_i + s_{i+1}}$$

або

$$Q_i = s_i \frac{P_i - P_{i-1}}{s_i + s_{i+1}} + s_{i+1} \frac{P_{i+1} - P_i}{s_i + s_{i+1}},$$

де $s_i = |P_i - P_{i-1}|$.

На рис. 2, а наведені зламана лінія та складений сплайн Ерміта, побудований з використанням останньої формули для обчислення значень похідної.

Наведені вище схеми не дозволяють отримати похідні на кінцях кривої, якщо вона не замкнена. У цих точках також можна використовувати різні схеми, наприклад, можна покласти, що в цих точках дорівнюють нулю треті похідні сплайн-функції. У такому випадку отримаємо

$$Q_0 = 2(P_1 - P_0) - Q_1, \quad Q_m = 2(P_m - P_{m-1}) - Q_{m-1}.$$

Кубічний сплайн – крива, яку будують на заданій сукупності точок з урахуванням вимог першої і другої похідної радіус-вектора. Для цього на кожній ділянці між сусідніми точками описують радіус-вектор кубічним поліномом третьої степені. Кубічний сплайн описують формулою

$$\text{spline}(t) = (1-w)P_i + wP_{i+1} + \left[(-2w + 3w^2 - w^3)S_i + (-w^2 + w^3)S_{i+1} \right] \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{6}, \quad (10)$$

$$w = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1},$$

де значення других похідних $\text{spline}''(t_i) = S_i$ визначають з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$S_{i-1}(t_i - t_{i-1}) + 2S_i(t_{i+1} - t_{i-1}) + S_{i+1}(t_{i+1} - t_i) = 6 \frac{P_{i+1} - P_i}{t_{i+1} - t_i} - 6 \frac{P_i - P_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, \quad (11)$$

у якій можна вважати кінці кривої вільними, можна покласти $S_0 = S_m = [0 \ 0]^T$.

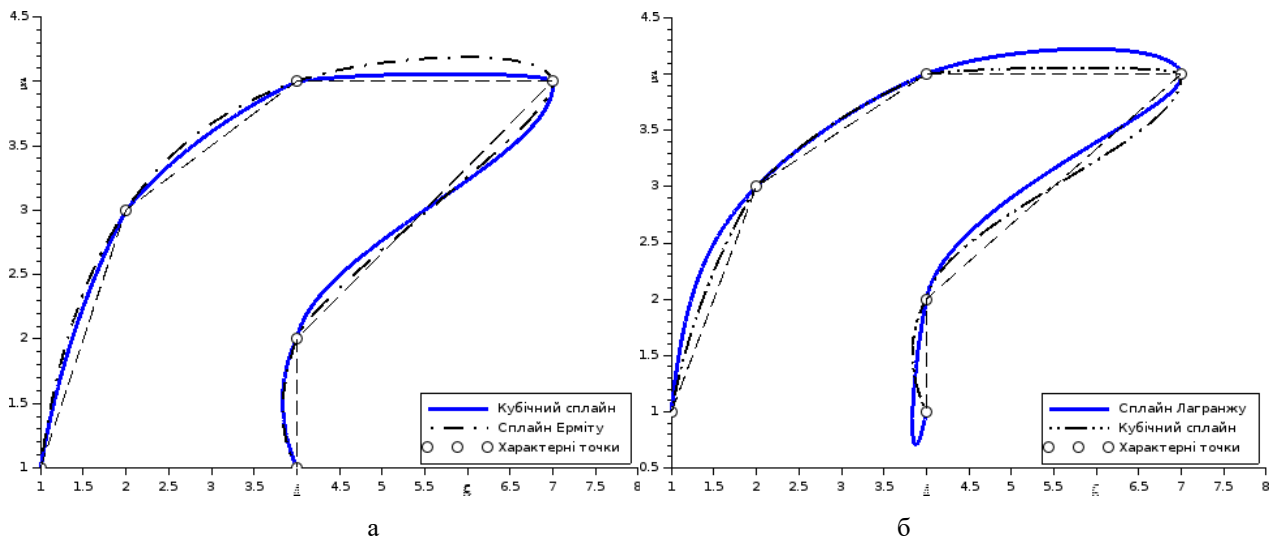


Рис. 2. Зламана лінія та сплайни

Інтерполяційна формула Лагранжу (рис. 2, б) є розв'язком задачі побудови кривої за заданими точками у вигляді

$$\text{lagrange}(t) = \sum_{i=0}^m \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^m (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^m (t_i - t_j)} P_i, \quad t_0 \leq t \leq t_m. \quad (12)$$

З декількох параметричних кривих можна побудувати складену криву – найбільш загальний тип кривої. Для складених кривих характерним є розрив першої похідної в точці складання. Криві, що утворюють складену криву, називають сегментами. При побудові складеної кривої початок кожного наступного сегмента повинен збігатися з кінцем попереднього сегмента. Якщо сегменти стикуються не гладко, то складена крива матиме злами.

Якщо складена крива замкнена, її називають контуром. Для контуру початок першого сегмента збігається з кінцем останнього.

Нехай складена крива має n сегментів

$$\text{curve}_i(w_i), \quad \min w_i \leq w_i \leq \max w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Початкове значення параметра t будемо вважати рівним нулю. Параметричну довжину складеної кривої вважатимемо рівною сумі параметричних довжин кривих-складових:

$$t_{\min} = 0, \quad t_{\max} = \sum_{i=1}^n (\max w_i - \min w_i).$$

На першому кроці при обчисленні радіус-вектора складеної кривої необхідно визначити сегмент, до якого належить значення параметру. Далі необхідно визначити відповідне значення власного параметра цього сегмента та з його допомогою обчислити радіус-вектор сегмента або його похідні.

Нехай для параметра t складеної кривої знайдено номер сегмента k , для якого виконується співвідношення

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\max w_i - \min w_i) \leq t < \sum_{i=1}^k (\max w_i - \min w_i).$$

Тоді відповідно до зазначеного радіус-вектор складеної кривої визначається рівністю

$$\text{curve}(t) = \text{curve}_k \left(\min w_k + t - \sum_{i=1}^{k-1} (\max w_i - \min w_i) \right), \quad 0 \leq t \leq t_{\max}. \quad (14)$$

Складена крива – лінія, що базується на інших лініях. Як сегменти складеної кривої не повинні використовуватися інші складені криві. Якщо складена крива повинна стати сегментом іншої складеної кривої, то її необхідно розглядати як сукупність кривих, що додається (сегментами нової кривої).

ЛОГІЧНІ ОПЕРАЦІЇ

Припустимо, що двовимірний область обмежена замкненою кривою $\text{curve}(t)$, $0 \leq t \leq t_{\max}$, яка водночас може бути складеною. Для аналітичного конструювання моделей складних геометричних об'єктів необхідно визначити логічну функцію. Нехай така функція дорівнює 1 для внутрішніх точок області та 0 для зовнішніх і граничних, тоді для логічного конструювання геометричних моделей можна буде використовувати функції алгебри логіки: кон'юнкцію, диз'юнкцію та заперечення. Такою функцією можна вважати співвідношення

$$\text{lo}(P, \text{curve}(t)) = n_p \text{ mod } 2, \quad (15)$$

де n_p – кількість перетинів довільним променем кривої $\text{curve}(t)$; $x \text{ mod } y$ – функція знаходження залишку від ділення x на y .

Вочевидь, що для будь-якої внутрішньої точки кількість перетинів границі кривої буде непарною. Відповідно, кількість перетинів буде дорівнювати нулю або парною для зовнішніх точок. Проте існують випадки, коли ситуація буде не визначеною: промінь дотикається до границі (рис. 3). У випадку неоднозначності напрям променю необхідно змінити, наприклад, змінивши напрям на кут, рівний δ (параметр методу).

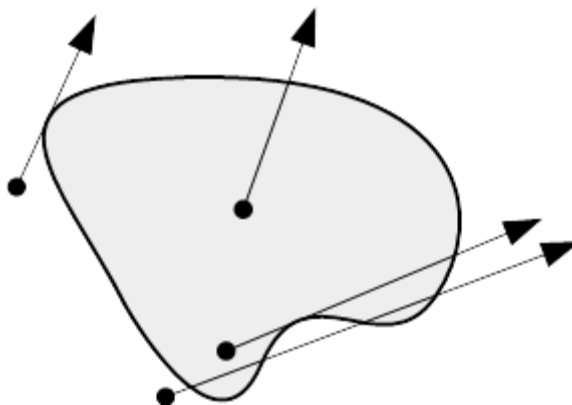


Рис. 3. Тест при належності точки внутрішній частині області, обмеженої замкненою кривою

Отже, послідовність кроків для заданої точки P така:

1. Встановимо: $\alpha = 0$, $n_p = 0$ (α – кут променю та осі Ox , n_p – кількість перетинів кривої променем \vec{P}_α);

2. Знайдемо $B_\alpha = \{X_{\alpha i}\}$ – множину точок променю $\overline{P_\alpha}$, що належать вихідній замкненій кривій $\text{curve}(t)$ (точки, відстань від яких до кривої мала);
3. Для кожної точки $X_{\alpha i} \in B_\alpha$:
 - a. Якщо $X_{\alpha i}$ – точка перетину кривої, встановимо $n_p = n_p + 1$;
 - b. Якщо $X_{\alpha i}$ – точка дотику до кривої (векторний добуток $\overline{P_\alpha} \times \overline{(x', y')} = 0$, x' і y' – похідні компонент рівняння кривої), то встановимо: $\alpha = \alpha + \delta$, перейдемо на крок 2;
4. Результат: $\text{lo}(P, \text{curve}(t)) = n_p \bmod 2$.

ВИСНОВКИ

Отже, параметричні криві дозволяють описувати складні області довільної геометричної конфігурації. Для перевірки умови належності точки області, обмеженої параметричною кривою, запропоновано тест на базі умови парності перетинів променем границі. Можливість використання такого подання у САПР забезпечується теоремою Жордана, яка стверджує, що замкнена крива розбиває площину на дві зв'язні частини зі спільною границею. Тест парності (15) може бути легко узагальнений на тривимірний випадок для перевірки належності точки області, побудованої шляхом логічної композиції областей, обмежених замкненими поверхнями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубинский С. ANSYS 8.0: обзор новых возможностей [Електронний ресурс] / С. Дубинский // САПР и графика. – 2003. – № 11. – Режим доступа : <http://www.sapr.ru/article.aspx?id=8181&iid=329> (дата звернення 01.09.2016). – Назва з екрана.
2. Девятков С. Программы семейства COSMOS – универсальный инструмент конечно-элементного анализа / С. Девятков // CAD-master. – 2002. – № 1. – С. 17-23.
3. Девятков С. Программы семейства COSMOS – универсальный инструмент конечно-элементного анализа (серия вторая) / С. Девятков // CAD-master. – 2002. – № 2. – С. 33-38.
4. Данкерт Дж. Вычислительная система «COSAR» для исследования трехмерной проблемы прочности методом конечных элементов / Дж. Данкерт, У. Габберт // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1978. – Вып. 33. – С. 3-9.
5. Annett M. S. LS-DYNA Analysis of a Full-Scale Helicopter Crash Test / M. S. Annett // Proceedings of 11th International LS-DYNA Users Conference (6-8 Jun. 2010; Dearborn, MI; United States). – Dearborn, United States: 2010. – 20 p.
6. Butler T. G. NASTRAN. A summary of the functions and capabilities of the NASA structural analysis computer system / T. G. Butler, D. Michel. – Washington, 1971. – 22 p. (NASA SP-260).
7. MacNeal R. H. The NASTRAN computer program for structural analysis / R. H. MacNeal, C. W. McCormic // Computer and Structures – 1971. – Volume 7, No 1. – P. 32-35.
8. Степанов А. В. Книга Pro/ENGINEER : специальный справочник / А. В. Степанов. – СПб. : Питер, 2001. – 624 с.
9. Костромин К. А. SolidEdge Intergraph – система твердотельного моделирования [Електронне посилання] / К. А. Костромин // Автоматизация проектирования. – №3. – 1997. – Режим доступа : <http://www.osp.ru/os/1997/02/179103> (дата звернення 01.09.2016). – Назва з екрана.
10. Потемкин А. Трехмерное твердотельное моделирование / А. Потемкин. – М. : КомпьютерПресс, 2002. – 296 с.
11. Климачева Т. Н. 2D черчение в AutoCAD 2007-2010. Самоучитель / Т. Н. Климачева. – М. : ДМК Пресс, 2009. – 560 с.

12. Климачева Т. Н. Трехмерная компьютерная графика и автоматизация проектирования в AutoCAD-2007 / Т. Н. Климачева. – М. : ДМК Пресс, 2008. – 464 с.
13. КОМПАС-3D V12. Руководство пользователя [Электронне посилення]. – АСКОН, 416 с. – Режим доступу : http://sd7.ascon.ru/Public/Documents/Kompas/KOMPAS_V12/kompas_guide1.pdf (дата звернення 01.09.2016). – Назва з екрана.
14. КОМПАС-3D V14. Руководство пользователя [Электронне посилення]. – АСКОН, 2564 с. – Режим доступу : http://download.ascon.ru/public/Documents/Kompas/Kompas_V14/KOMPAS-3D_Guide.pdf (дата звернення 01.09.2017). – Назва з екрана.
15. Бувайло Д. П. FORTU – мова опису схем розв’язання задач математичної фізики / Д. П. Бувайло, С. І. Гоменюк, В. О. Толок // Вісник Запорізького державного університету. – Запоріжжя : ЗДУ. – 2000. – № 1. – С. 19-25.
16. Гоменюк С. И. Объектно-ориентированные модели и методы анализа механических процессов / С. И. Гоменюк. – Никополь : Никопольская коммунальная типография, 2004. – 316 с.
17. Гоменюк С. И. Универсальная система автоматизации проектирования инженерных конструкций и сооружений FORTU-FEM / С. И. Гоменюк // Технологические системы. – 2004. – № 3. – С. 92-95.
18. Рейуорд-Смит В. Дж. Теория формальных языков. Вводный курс / В. Дж. Рейуорд-Смит. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.
19. Максименко-Шейко К. В. R-функции и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве / К. В. Максименко-Шейко, А. М. Мацевитый, А. В. Толок, Т. И. Шейко // Информационные технологии. – 2007. – № 10. – С. 23-32.
20. Максименко-Шейко К. В. R-функции и аналитическое описание геометрических объектов, обладающих симметрией / К. В. Максименко-Шейко, А. В. Толок, Т. И. Шейко // Информационные технологии. – 2009. – № 7. – С. 57-62.
21. Максименко-Шейко К. В. R-функции в аналитическом проектировании с применением системы «РАНОК» / К. В. Максименко-Шейко, А. В. Толок, Т. И. Шейко // Вестник МГТУ Станкин. – 2010. – № 4. – С. 139-151.
22. Максименко-Шейко К. В. R-функции в фрактальной геометрии / К. В. Максименко-Шейко, А. В. Толок, Т. И. Шейко // Информационные технологии. – 2011. – № 7. – С. 24-27.
23. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – К. : Наукова Думка, 1982. – 552 с.
24. Рвачев В. Л. Построение уравнений локусов в 3D с помощью R-функций / В. Л. Рвачев, Р. А. Уваров, Т. И. Шейко // Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – № 1. – С. 158-164.
25. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – М. : Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 472 с.

REFERENCES

1. Dubinskiy, S. (2003), “ANSYS 8.0: What’s New”, CADD and graphic arts, no. 11, available at: <http://www.sapr.ru/article.aspx?id=8181&iid=329> (access August 29, 2016).
2. Devyatov, S. (2002), “Programs COSMOS family - a versatile tool finite element analysis”, *CAD-master*, no. 1, pp. 17-23.
3. Devyatov, S. (2002), “Programs COSMOS family - universal tool of finite element analysis (second series)”, *CAD-master*, no. 2, pp. 33-38.
4. Dankert, Dzh. and Gabbert, U. (1978), “ The computing system «COSAR» for the study of three-dimensional problems of the strength of the finite element method”, *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy*, issue 33, pp. 3-9.
5. Annett, M.S. (2010), “LS-DYNA Analysis of a Full-Scale Helicopter Crash Test”, “*Proceedings of 11th International LS-DYNA Users Conference*”, Dearborn, MI; USA, June 6-8, 2010, Dearborn, USA, 20 p.

6. Butler, T.G. and Michel, D. (1971), "NASTRAN. A summary of the functions and capabilities of the NASA structural analysis computer system", Washington. – 22 p. (NASA SP-260).
7. MacNeal, R.H. and McCormic, R.H. (1971), "The NASTRAN computer program for structural analysis", *Computer and Structures*, vol. 7, no. 1, pp. 32-35.
8. Stepanov, A.V. (2001), *Kniga Pro/ENGINEER: spetsialnyiy spravochnik* [Book PRO/ENGINEER: special reference], Piter, Sankt-Peterburg.
9. Kostromin, K.A. (1997), "Solid Edge Intergraph - solid modeling system", *Design automation*, no. 3, available at: <http://www.osp.ru/os/1997/02/179103/> (access September 01, 2016).
10. Potemkin, A. (2002), *Trehmernoe tverdotelnoe modelirovanie* [Three-dimensional solid modeling], KompyuterPress, Moscow.
11. Klimacheva, T.N. (2009), *2D cherchenie v AutoCAD 2007-2010. Samouchitel* [2D drawing in AutoCAD 2007-2010. Self-teacher], DMK Press, Moscow.
12. Klimacheva, T.N. (2008), *Trehmernaya kompyuternaya grafika i avtomatizatsiya proektirovaniya v AutoCAD-2007* [Three-dimensional computer graphics and design automation in AutoCAD-2007], DMK Press, Moscow.
13. KOMPAS-3D V12. User's Guide, ASCON, 416 p., available at: http://sd7.ascon.ru/Public/Documents/Kompas/KOMPAS_V12/kompas_guide1.pdf (access September 01, 2016).
14. KOMPAS-3D V14. User's Guide, ASCON, 2564 p., available at: http://download.ascon.ru/public/Documents/Kompas/Kompas_V14/KOMPAS-3D_Guide.pdf (access September 01, 2016).
15. Buvaylo, D.P., Gomenyuk, S.I. and Tolok, V.O. (2000), "FORTU – description language schemes for solving problems of mathematical physics", *Visnik Zaporizkogo derzhavnogo universitetu*, no. 1, pp. 19-25.
16. Gomenyuk, S.I. (2004), *Ob'ektno-orientirovannyye modeli i metody analiza mehanicheskikh protsessov* [Object-oriented models and methods of analysis of mechanical processes], Nikopolskaya kommunalnaya tipografiya, Nikopol.
17. Gomenyuk, S.I. (2004), "Universal automation system for design engineering structures and buildings FORTU-FEM", *Tehnologicheskie sistemy*, no. 3, pp. 92-95.
18. Reyuord-Smit, V.Dzh. (1988), *Teoriya formalnykh yazykov. Vvodnyiy kurs* [Theory of formal languages. Introductory course], Radio i svyaz, Moscow.
19. Maksimenko-Sheyko, K.V., Matsevityiy, A.M., Tolok, A.V. and Sheyko, T.I. (2007), "R-functions and the inverse problem of analytic geometry in three-dimensional space", *Informatsionnyie tehnologii*, no. 10, pp. 23-32.
20. Maksimenko-Sheyko, K.V., Tolok, A.V. and Sheyko, T.I. (2009), "R-functions and analytic description of geometric objects with symmetry", *Informatsionnyie tehnologii*, no. 7, pp. 57-62.
21. Maksimenko-Sheyko, K.V., Tolok, A.V. and Sheyko, T.I. (2010), "R-functions in the analytic design using "RANOK" system", *Vestnik MGTU Stankin*, no. 4, pp. 139-151.
22. Maksimenko-Sheyko, K.V., Tolok, A.V. and Sheyko, T.I. (2011), "R-function of fractal geometry", *Informatsionnyie tehnologii*, no. 7, pp. 24-27.
23. Rvachev, V.L. (1982), *Teoriya R-funktsiy i nekotoryie ee prilozheniya* [Theory of R-functions and some of its applications], Naukova Dumka, Kiev.
24. Rvachev, V.L., Uvarov, R.A. and Sheyko, T.I. (2001), "Construction equations of locuses in 3D using the R-functions", *Radioelektronika i informatika*, no. 1, pp. 158-164.
25. Golovanov, N.N. (2002), *Geometricheskoe modelirovanie* [Geometric modeling], Izdatelstvo Fiziko-matematicheskoy literaturyi, Moscow.

УДК 519.688:519.6:514.752

ЯЗЫК ОПИСАНИЯ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ FORTU-F

Аль-Омари М. А. В., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

moh.alo1984@mail.ru

Предложен проблемно-ориентированный язык спецификаций (формального описания моделей) FORTU-F, позволяющий полно, непротиворечиво и однозначно описывать математические модели двух- и трехмерных геометрических областей произвольной формы. Для автоматизации использования предложенного языка реализовано интеллектуальное программное средство QNG аналитического конструирования геометрических моделей инженерных конструкций. Приведены примеры описания с его помощью реальных геометрических объектов.

Ключевые слова: математическая модель, геометрический объект, язык спецификаций, автоматизация, интеллектуальное программное средство, FORTU-F.

МОВА ОПИСУ ТВЕРДОТІЛЬНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ FORTU-F

Аль-Омарі М. А. В., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

moh.alo1984@mail.ru

Запропоновано проблемно-орієнтовану мову специфікацій (формального опису моделей) FORTU-F, яка дозволяє повністю, несуперечливо і однозначно описувати математичні моделі дво- і тривимірних геометричних областей довільної форми. Для автоматизації використання запропонованої мови реалізоване інтелектуальне програмне забезпечення QNG для аналітичного конструювання геометричних моделей інженерних конструкцій. Наведені приклади опису з її допомогою реальних геометричних об'єктів.

Ключові слова: математична модель, геометричний об'єкт, мова специфікацій, автоматизація, інтелектуальне програмне забезпечення, FORTU-F.

LANGUAGE OF SOLID MODELLING FORTU-F

Al-Omari M. A. V., postgraduate

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

moh.alo1984@mail.ru

At present, the analysis of complex processes, objects and phenomena of the real world is virtually impossible without the use of computer simulation. This is due to the fact that the construction and study of mathematical models, based on the cost of wasted resources, are more preferred than the study of the real object (its physical or natural models). The most commonly used in practice, numerical methods, such as method of boundary and finite elements, based on the idea of a transition from the continuous task to some of its discrete analogue, which ultimately requires the establishment of reliable and valid methods for constructing discrete geometrical models of real technical objects complex shape. To automate the geometric modeling of real engineering structures, you must first develop a formal way to describe mathematical relationships and formulas describing the surface of a geometric object suitable for further computer processing. The most effective way to solve this problem is to create a problem-oriented models of formal description languages (specifications), allowing complete, consistent and clearly describe the geometry of objects of arbitrary shape. An example of implementation of such language is FORTU-3. Its main drawback is the inability to describe the R-transactions. Therefore, in this paper, we propose the development of a language, called FORTU-F. Description of a geometric object through language FORTU-F specification consists of the following components (sections): description of the variables and constants; descriptions of functions; describe geometric primitives

support; describing the outcome of a geometric object. The proposed problem-oriented specification language (formal description of models) FORTU-F enables complete, consistent and clearly describe the mathematical models of two- and three-dimensional geometric areas of arbitrary shape. To automate the use of this language is implemented intelligent software tool QNG analytical design of geometric models of engineering structures. The examples describe with the help of real geometric objects.

Key words: mathematical model, geometric object, specification language, automation, intelligent software tool, FORTU-F.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время анализ сложных процессов, объектов и явлений реального мира практически невозможен без использования компьютерного моделирования. Это обусловлено тем фактом, что построение и изучение математических моделей, исходя из стоимости затраченных ресурсов, являются более предпочтительными, чем изучение реального объекта (его физических или натуральных моделей).

Наиболее часто применяемые на практике численные методы, такие, например, как метод граничных или конечных элементов, базируются на идее перехода от непрерывной задачи к ее некоторому дискретному аналогу, что в конечном итоге требует создания надежных и научно обоснованных методов построения дискретных геометрических моделей реальных технических объектов сложной формы. Для автоматизации геометрического моделирования реальных инженерных конструкций необходимо в первую очередь разработать формальный способ описания математических соотношений и формул, описывающих поверхность геометрического объекта, пригодный для последующей компьютерной обработки. Наиболее эффективным способом решения данной задачи является создание проблемно-ориентированных формальных языков описания моделей (спецификаций) [1], позволяющих полно, непротиворечиво и однозначно описывать геометрию объектов произвольной формы [2-4].

Для адекватного описания математических моделей двух- и трехмерных геометрических объектов сложной формы входной язык описания должен:

- 1) позволять описывать все необходимые математические соотношения для описания моделей плоских и пространственных геометрических объектов произвольной формы;
- 2) позволять задавать управляющие параметры, определяющие точность построения твердотельной модели и дискретизации на конечные элементы заданного типа;
- 3) обладать необходимыми встроенными операторами и операциями для реализации булевых геометрических операторов сложения, вычитания и отрицания;
- 4) поддерживать работу с R-функциями и предикатными формулами;
- 5) поддерживать возможность управления процессом визуализации твердотельной и дискретной модели исходного ГО;
- 6) быть полным и непротиворечивым в пределах своего назначения.

Примером реализации подобного языка является FORTU-3 [3, 5]. Его главным недостатком является невозможность описания R-операций. Поэтому в данной работе предлагается развитие данного языка, получившее название FORTU-F. Описание геометрического объекта с помощью языка спецификаций FORTU-F состоит из следующих частей (секций):

- 1) описания переменных и констант;
- 2) описания функций;
- 3) описания вспомогательных геометрических примитивов;
- 4) описания итогового геометрического объекта.

ОСНОВНЫЕ СИМВОЛЫ ЯЗЫКА

Формальное задание проблемно-ориентированного языка должно представляться описанием его синтаксиса и семантики. Синтаксисом языка называется множество правил, описывающих структуру предложений языка и порядок следования его лексем. Семантикой называется множество правил интерпретации смысла предложения в языке. Совокупность правил синтаксиса формального языка образует его формальную грамматику.

Для однозначного описания синтаксиса и семантики языка FORTU-F можно воспользоваться теорией описания формальной грамматики Н. Хомского [6] и Бэкуса-Наура [7].

Согласно определению Хомского, формальная грамматика представляет собой четверку:

$$G = \{N, T, P, a\}, \quad (1)$$

где N – множество нетерминальных символов языка; T – множество терминальных символов языка; P – множество правил подстановки (все правила состоят из левой и правой части, которые соединяются между собой знаком секвенции « \rightarrow »); все части представляют собой цепочки нетерминальных и/или терминальных символов; правая часть правила определяет цепочку символов, которая может замещать цепочку из левой части); a – аксиома грамматики (множество нетерминальных символов, с которых начинается порождение или распознавание любого предложения языка).

Для описания синтаксиса формальных языков очень удобно использовать Бэкуса-Наура форму (БНФ), которая позволяет одни синтаксические категории последовательно представить через другие категории. Развитие БНФ привело к появлению расширенной формы Бэкуса-Наура (РБНФ) [8], которая отличается от БНФ расширенными возможностями описания сложных языковых конструкций.

Формальное описание языка спецификаций FORTU-F с помощью РБНФ выглядит следующим образом:

буква = «A» | «B» | «C» | «D» | «E» | «F» | «G» | «H» | «I» | «J» | «K» | «L» | «M» | «N»
| «O» | «P» | «Q» | «R» | «S» | «T» | «U» | «V» | «W» | «X» | «Y» | «Z» | «a» | «b» | «c» |
«d» | «e» | «f» | «g» | «h» | «i» | «j» | «k» | «l» | «m» | «n» | «o» | «p» | «q» | «r» | «s» |
«t» | «u» | «v» | «w» | «x» | «y» | «z» | «_»

цифра = «0» | «1» | «2» | «3» | «4» | «5» | «6» | «7» | «8» | «9»

знак = «-» | «+»

разделитель = «+» | «-» | «*» | «/» | «^» | «(» | «)» | «,» | «=» |
зарезервированное_слово

зарезервированное_слово = «abs» | «acos» | «and» | «argument» | «asin» | «atan» |
«atan2» | «begin» | «cutcone» | «cos» | «cosh» | «cylinder» | «ellipsoid» | «end» | «exp» |
«not» | «object» | «or» | «cuboid» | «plane» | «result» | «function» | «sin» | «sinh» |
«sphere» | «tan» | «tanh» | «variable»

идентификатор = буква { буква | цифра }

число_без_знака = целое_без_знака | вещественное_без_знака

число_со_знаком = [знак] число_без_знака

целое_без_знака = последовательность_цифр

последовательность_цифр = цифра {цифра}

вещественное_без_знака = целое_без_знака «.» дробная_часть [«E» порядок] |
целое_без_знака [«E» порядок]

дробная_часть = последовательность_цифр

порядок = целое_со_знаком

целое_со_знаком = [знак] целое_без_знака

комментарий = «!» [ASCII_последовательность]

ASCII_последовательность = пусто | ASCII_символ | ASCII_последовательность
ASCII_символ

пусто =

Здесь термин «идентификатор» обозначает различные названия, используемые в конструкциях языка FORTU-F. Имена идентификаторов могут быть произвольными за исключением того, что не допускается совпадение имен идентификаторов с зарезервированными словами языка. Смысл большинства зарезервированных слов будет пояснен ниже. Понятие «ASCII_символ» формально не расписывается (в терминах РБНФ), под ним понимается любой из 256 стандартных символов таблицы ASCII [48].

ТИПЫ ДАННЫХ И ПРАВИЛА ИХ ОБРАЗОВАНИЯ

Язык спецификаций FORTU-F оперирует двумя типами данных: числами (variable) и функциями (function). Другими словами, все типы данных языка являются формулами (число или константа – простейший вид формулы). Числа в FORTU-F бывают двух типов: целые и вещественные с плавающей точкой. Разрядность хранения чисел определяется текущей компьютерной платформой, в которой реализован транслятор языка FORTU-F. Функциональный тип данных предназначен для хранения формульных выражений, значения которых определяются в зависимости от их аргументов, которые в свою очередь являются числами или функциями (argument, variable или function).

С помощью РБНФ формально тип данных в языке FORTU-F определяется следующим образом:

тип_данных = числовой_тип_данных | функциональный_тип_данных

числовой_тип_данных = число_без_знака | число_со_знаком

функциональный_тип_данных = выражение

Понятие выражения будет рассмотрено ниже. Преобразование типов в языке FORTU-F осуществляется по следующему правилу: в арифметических выражениях, содержащих операнды разных типов, происходит их автоматическое преобразование к наиболее старшему типу. Старшинство типов определяется так (снизу-вверх): целое число – вещественное число – функция.

Переменные в FORTU-F описываются (декларируются) следующим образом:

описание_переменных = тип список_переменных

тип = «argument» | «variable» | «function»

список_переменных = описание_переменной | список_переменных «,»
описание_переменной

описание_переменной = переменная [«=» выражение]

переменная = идентификатор

Тип данных «argument» предназначен для декларации координатных переменных (значения которых при вычислениях рассматриваются как координаты) и размерности геометрической модели. Например, выражение языка

ARGUMENT x, y

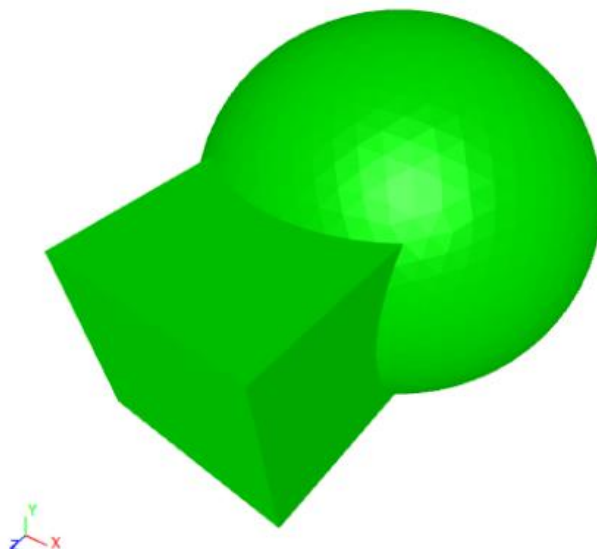


Рис. 1. Область, образованная объединением сферы и прямоугольного параллелепипеда

СТРУКТУРА ОПИСАНИЯ МОДЕЛИ

Структуру описания модели геометрического объекта на языке спецификации FORTU-F можно формально описать следующим образом:

```

FORTU-F_спецификация = блок { блок }
Блок = «object» имя_объекта [«(»[список_параметров]«)»] «begin»
декларативная_часть инструктивная_часть результирующая_часть «end»
имя_объекта = идентификатор
декларативная_часть = описание_переменных { описание_переменных }
инструктивная_часть = { оператор_присваивания }
оператор_присваивания = идентификатор «=» выражение
результирующая_часть = имя_объекта «=» выражение

```

Из приведенного описания следует, что геометрический объект задается с помощью секции «object», которая состоит из трех частей:

- 1) блока деклараций – описания используемых переменных (в т. ч. координатных) и функций;
- 2) блока инструкций, содержащих определения всех ранее задекларированных переменных (этот блок может отсутствовать);
- 3) результирующего блока, задающего итоговую формулу, реализующую математическую модель геометрического объекта.

Следует отметить, что первый блок должен содержать минимум один элемент – секцию «argument», определяющую идентификаторы координат, если геометрическая область описывается в явном виде с использованием, например, R-функций. В случае же, когда используются встроенные геометрические примитивы (будут описаны ниже) или же ранее описанные геометрические объекты, первый блок может быть пустым. Второй блок может отсутствовать, если все необходимые выражения заданы при начальной инициализации переменных или в результирующем выражении. Третий блок, представленный единственным оператором присваивания, определяющим итоговое выражение модели геометрического объекта, также является обязательным.

Таким образом, математическая модель геометрического объекта, описанная с помощью языка спецификации FORTU-F, по сути является непустой совокупностью модулей

(«object»), каждый из которых содержит описание некоторой геометрической фигуры (или ее части). Важно отметить, что описание модуля является параметрическим, т. е. при его декларации имеется возможность задания параметров, которые позволяют обеспечить массовость использования объекта в последующем. Например, описание параметрического объекта «сфера», центр и радиус которой заданы как параметры, может выглядеть так:

OBJECT _sphere_(x0, y0, z0, R)

BEGIN

ARGUMENT x, y, z

$$_sphere_ = R^2 - (x - x0)^2 - (y - y0)^2 - (z - z0)^2$$

END

Здесь в имени объекта используются символы подчеркивания, поскольку, как уже отмечалось выше, не допускается использование имен идентификаторов, совпадающих с зарезервированными словами языка (sphere – название встроенной в FORTU-F функции).

Следует отметить, что описанные объекты в языке спецификаций FORTU-F могут повторно использоваться, в частности для композиции в более сложные объекты. Например, объединение двух сфер (рис. 2) может быть описано как их композиция следующим образом (с учетом ранее приведенного примера):

OBJECT result

BEGIN

result = _sphere_(0, 0, 0, 1) **OR** _sphere_(0, 0, 1.5, 1.5)

END

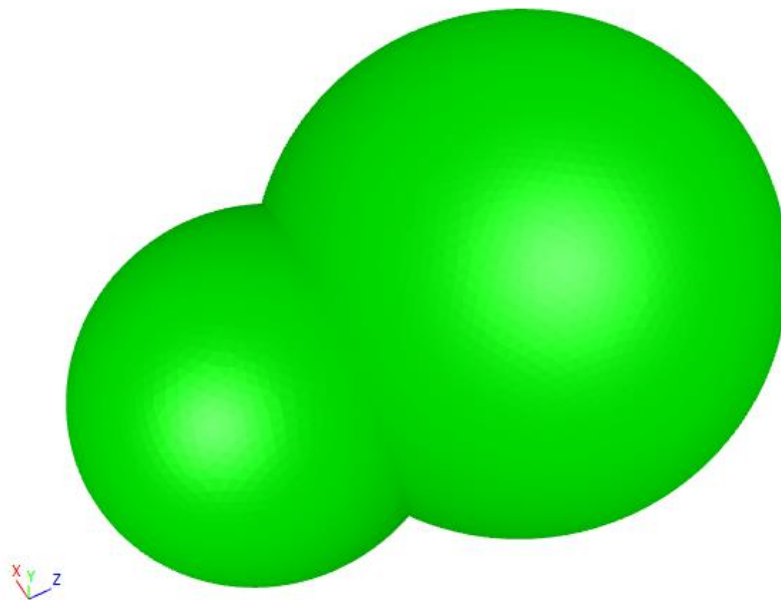


Рис. 2. Пример композиции геометрических объектов

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В языке спецификации FORTU-F имеется набор встроенных функций: элементарных математических и реализующих стандартные геометрические примитивы.

Синтаксис и семантика встроенных математических функций приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Встроенные элементарные математические функции

№	Функция	Описание
1	2	3
1	abs(x)	Абсолютное значение аргумента x
2	acos(x)	Арккосинус
3	asin(x)	Арсинус
4	atan(x)	Арктангенс
5	atan2(x, y)	Арктангенс y/x, выраженный в радианах
6	cos(x)	Косинус
7	cosh(x)	Косинус гиперболический
8	exp(x)	Экспонента
9	sin(x)	Синус
10	sinh(x)	Синус гиперболический
11	tan(x)	Тангенс
12	tanh(x)	Тангенс гиперболический

Синтаксис и семантика встроенных функций, реализующих стандартные геометрические примитивы, приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Встроенные геометрические примитивы

№	Функция	Описание
1	cutcone(x0,y0,z0,R0,x1,y1,z1,R1)	Усеченный конус, нижнее основание которого проходит через точку (x0,y0,z0) и имеет радиус R0, а верхнее – через (x1,y1,z1) и имеет радиус R1
2	cylinder(x0,y0,z0,x1,y1,z1,R)	Цилиндр радиуса R, основания которого проходят через точки (x0,y0,z0) и (x1,y1,z1)
3	ellipsoid(x0,y0,z0,a,b,c)	Эллипсоид с центром в точке (x0,y0,z0) и величинами полуосей a, b, и c
4	cuboid(x0,y0,z0,x1,y1,z1)	Прямоугольный параллелепипед с гранями, ортогональными осям координат, верхний левый угол которой расположен в точке (x0,y0,z0), а нижний правый – в (x1,y1,z1)
5	sphere(x0,y0,z0,R)	Сфера радиуса R с центром в точке (x0,y0,z0)
6	plane(x0,y0,z0,nx,ny,nz)	Плоскость, проходящая через точку (x0,y0,z0), и вектором нормали (nx,ny,nz)

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Описанный в статье язык спецификаций геометрических моделей FORTU-F был программно реализован с использованием кросс-платформенной библиотеки с открытым исходным кодом Qt [9]. На рис. 3 приведено изображение внешнего вида, реализованного

интеллектуального программного средства аналитического конструирования твердотельных геометрических моделей, получившего название QNG (Qt Net Generator).

Рассмотрим пример описания геометрической модели переходного отсека ракетносителя, представляющего собой тонкостенный усеченный конус с цилиндрическими отверстиями – технологическими люками. Эту инженерную конструкцию можно представить в виде логического вычитания из одного усеченного конуса – внешней оболочки другого усеченного конуса – внутренней стороны конструкции.

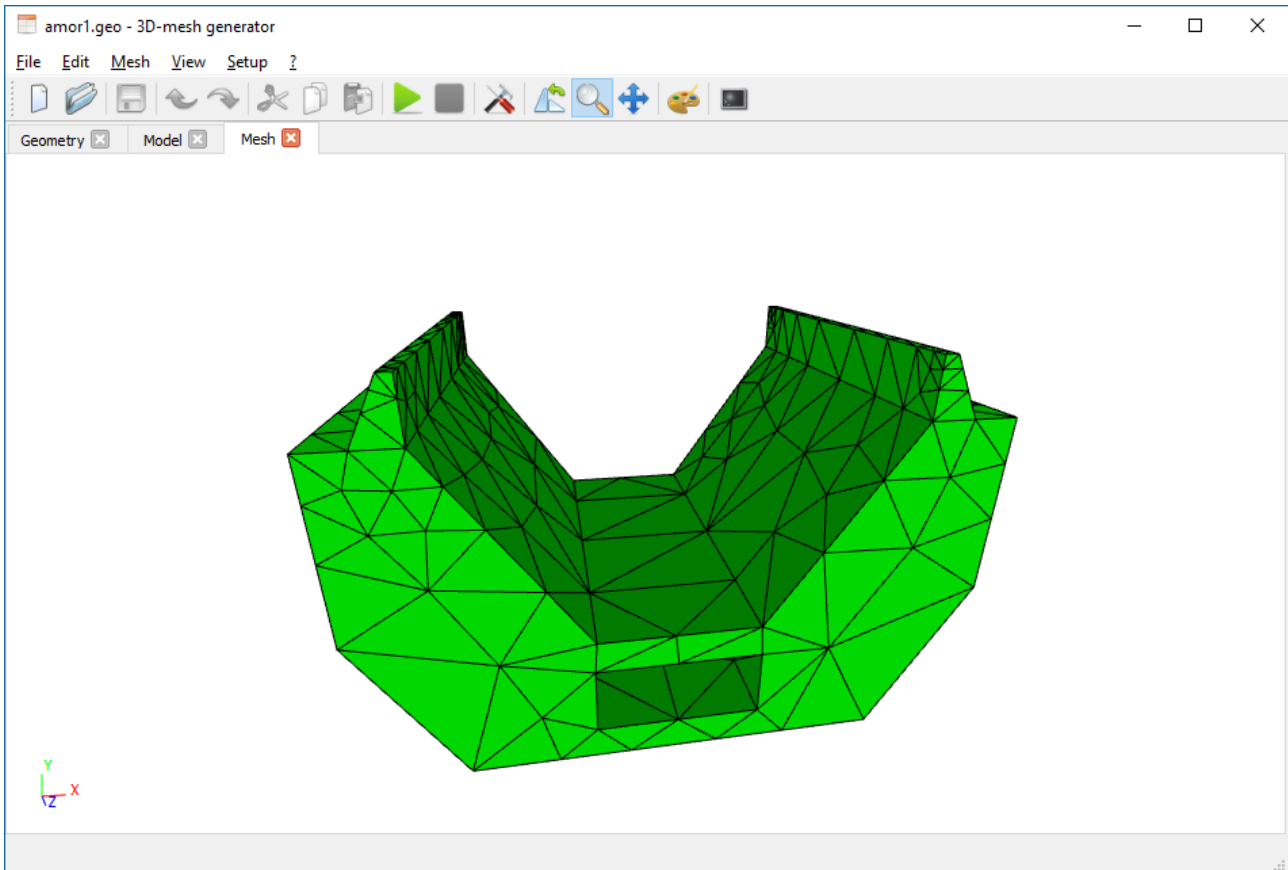


Рис. 3. Внешний вид системы QNG

Описание данной модели с помощью языка спецификаций FORTU-F приведено ниже:

!-----

! Переходный отсек ракетносителя

!-----

! Внешняя поверхность оболочки

OBJECT cone1

BEGIN

cone1 = cutcone (0, 0, 0, 3, 0, 0, 4; 4) **AND** plane (0, 0, 0, 0, 0, -1) **AND**

plane (0, 0, 4, 0, 0, 1)

END

! Внутренняя поверхность оболочки

OBJECT cone2

BEGIN

```
cone1 = cutcone (0, 0, -0.01, 2.9; 0, 0, 4.01, 3.9) AND
plane (0, 0, -0.01, 0, 0, -1) AND plane (0, 0, 4.01, 0, 0, 1)
END
```

! Отверстия в оболочке (технологические люки)

OBJECT cyl

BEGIN

```
cone1 = cylinder (4, 0, 1, -4, 0, 1, 0.5) AND plane (4, 0, 1, 1, 0, 0) AND
plane (-4, 0, 1, -1, 0, 0)
END
```

! Итоговая конструкция

OBJECT shell

BEGIN

```
shell = (cone1 AND NOT cone2) AND NOT cyl
```

END

Результат работы системы QNG – конечно-элементная дискретная модель отсека изображена на рис. 4.

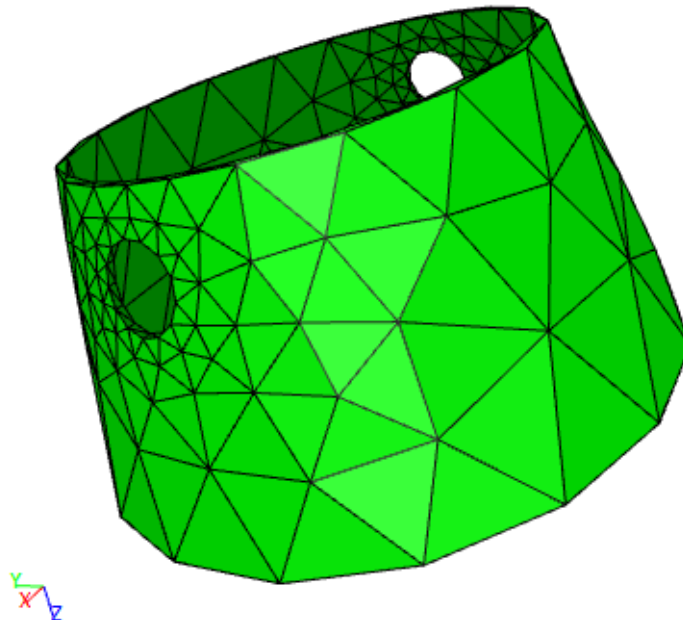


Рис. 4. Дискретная модель переходного отсека

ВЫВОДЫ

Использование функционального подхода является наиболее общим и универсальным способом построения математических моделей геометрических объектов произвольной формы. Его важным преимуществом является возможность создания библиотеки типовых геометрических объектов, которые можно повторно использовать в процессе построения моделей новых объектов произвольной сложности.

Для формализации описания математических моделей геометрических объектов с использованием функционального подхода предложен проблемно-ориентированный язык спецификаций FORTU-F, позволяющий однозначно и формально описывать функциональные математические модели двух- и трехмерных геометрических объектов произвольной формы в виде, удобном для последующей автоматической обработки с помощью компьютера. Приведены примеры описания моделей геометрических объектов на данном языке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bjørner D. Logics of Specification Languages / D. Bjørner, M. C. Henson. – Springer, 2007. – 646 p.
2. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – М. : Издательство Физико-математической литературы, 2002, – 472 с.
3. Гоменюк С. И. Объектно-ориентированные модели и методы анализа механических процессов / С. И. Гоменюк. – Запорожье : Запорож. гос. ун-т., 2004. – 311 с.
4. Фомичёв В. С. Формальные языки, грамматики и автоматы [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://old.eltech.ru/misc/LGA_2007_FINAL/Allpage/content.htm.
5. Толок В. А. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / В. А. Толок, В. В. Киричевский, С. И. Гоменюк [и др.]. – К. : Наукова думка, 2003. – 316 с.
6. Гросс М. Теория формальных грамматик / М. Гросс, А. Лантен. – М. : Мир, 1971. – 296 с.
7. Backus J. W. The syntax and semantics of the proposed international algebraic language of the Zurich ACM-GAMM Conference / J. W. Backus. – Proc. International Conf. On Information Processing, UNESCO, 1959. – P. 125-132.
8. Feynman R. EBNF: A Notation to Describe Syntax / R. Feynman [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.ics.uci.edu/~pattis/misc/ebnf2.pdf>.
9. Qt | Cross-platform software development for embedded & desktop [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.qt.io/>.

REFERENCES

1. Bjørner, D. (2007), Logics of Specification Languages, Springer.
2. Golovanov, N.N. (2002), *Geometricheskoe modelirovanie* [Geometric modeling], Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoy literatury, Moscow.
3. Gomenyuk, S.I. (2004), *Obyektno-orientirovannyye modeli i metody analiza mexanicheskix processov* [Object-oriented models and methods of analysis of mechanical processes], Zaporozhskiy gosudarstvenniy universitet, Zaporozhye.
4. Fomichev, V.S. (2007), “Formal languages, grammars and automata”, available at: http://old.eltech.ru/misc/LGA_2007_FINAL/Allpage/content.htm.
5. Tolok, V.A., Kirichevskiy, V.V., Gomenyuk, S.I., Grebenyuk, S.N. and Buvaylo, D.P. (2003), *Metod konechnykh elementov: teoriya, algoritmy, realizatsiya* [The Finite Element Method: Theory, Algorithms, Implementation], Naukova dumka, Kiev.
6. Gross, M. and Lanten, A. (1971), *Teoriya formal'nykh grammatik* [Theory of formal grammars], Mir, Moscow.
7. Backus, J.W. (1959), “The syntax and semantics of the proposed international algebraic language of the Zurich ACM-GAMM Conference”, *Proc. International Conf. On Information Processing, UNESCO*, pp. 125-132.
8. Feynman, R. “EBNF: A Notation to Describe Syntax”, available at: <http://www.ics.uci.edu/~pattis/misc/ebnf2.pdf>.
9. “Qt | Cross-platform software development for embedded & desktop”, available at: <https://www.qt.io/>.

УДК 511.41+517.927.2

ЗАСТОСУВАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Величко І. Г., к. ф.-м. н., доцент, ¹Ткаченко І. Г., к. ф.-м. н., доцент,
¹Балабанова В. В., студентка

¹Запорізький національний університет,
бул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

tig81@mail.ru

У статті запропоновано спосіб розв'язання систем диференціальних рівнянь, який ґрунтується на представленні шуканого розв'язку у вигляді функціонального ланцюгового дробу. Такий метод розв'язання застосовано вперше. Відмічено також, що отримані наближення є апроксимаціями Паде шуканої функції-розв'язку. Наведено приклади, які ілюструють використання такого способу.

Ключові слова: ланцюговий дріб, наближення Паде, диференціальне рівняння, система диференціальних рівнянь.

ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Величко І. Г., к. ф.-м. н., доцент, ¹Ткаченко І. Г., к. ф.-м. н., доцент,
¹Балабанова В. В., студентка

¹Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

tig81@mail.ru

В статье предложен способ решения систем дифференциальных уравнений, который базируется на представлении искомого решения в виде функциональной цепной дроби. Данный метод предложен впервые. Отмечено, что полученные приближения являются аппроксимациями Паде искомой функции-решения. Для иллюстрации предложенного способа приведены примеры решения.

Ключевые слова: цепная дробь, приближения Паде, дифференциальное уравнение, система дифференциальных уравнений.

PREPARATION CONTINUED FRACTIONS FOR THE APPROXIMATE SOLUTION SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Velichko I. G., ¹Tkachenko I. G., ¹Balabanova V. V.

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

tig81@mail.ru

To describe the processes that occur in real life, using various mathematical models, including those described by ordinary differential equations and systems of such equations. Solutions of some differential equations are known, some of the equations can not be solved in elementary, but have a solution in the special functions. However, most of the equations can not be solved by quadrature, and various approximation methods should be used for them. One of the most effective methods to obtain approximate solutions have rows of the method by which, for example, the Bessel functions are introduced. From the theory of approximations is known that it is often more accurate than the approximation by polynomials, rational functions are approximations. The method of continued fractions, applied to first order differential equations, yields approach to solving systems of differential equations at once in the form of Pade approximants. The development process for the preparation of analytical approximations to the solution in the form of approximations Pade has an urgent task of mathematics. We note also that the Pade approximation of a given type of solutions of differential equations or systems of differential equations with the initial conditions can be obtained directly, using

the method of undetermined coefficients. However, to obtain a more accurate approximation is necessary to carry out all the calculations again. In contrast to the direct construction of Pade approximations proposed in the method allows to improve them using data obtained from the previous iteration.

Key words: continued fraction, Pade approximation, differential equation, system of differential equations.

ВСТУП

Функціональні ланцюгові дроби мають доволі широку область застосування [1, 3, 9, 11]. У праці [11] описано метод, запропонований Ж. Лагранжем, для розв'язання диференціальних рівнянь Ріккати. Розв'язанню рівнянь Ріккати присвячені також роботи [6, 10].

Метою роботи є побудова наближених розв'язків деяких систем диференціальних рівнянь, а також рівнянь старших порядків, які можна звести до систем. Новизною роботи є те, що метод ланцюгових дробів застосовується до нового класу об'єктів – систем диференціальних рівнянь.

Для отримання наближених розв'язків систем застосовують різні методи [7, 12], одним з яких є метод наближення раціональними функціями. Наведений у роботі метод дозволяє отримувати наближення до розв'язку системи диференціальних рівнянь у вигляді наближень Паде [4]. Але, на відміну від безпосереднього знаходження Паде-апроксимацій, запропонований метод дозволяє покращувати їх, використовуючи дані попередньої ітерації. Отримання наближень Ерміта-Паде описано в роботі [5], при цьому використовується не явний вид диференціальних рівнянь, а лише властивості диференціальних та рекурентних рівнянь. У роботі [2] апроксимації Паде застосовуються для доведення існування розв'язків диференціальних рівнянь при деяких обмеженнях.

У доступній для нас літературі не вдалося виявити приклади знаходження наближених розв'язків задач Коші для систем диференціальних рівнянь методом ланцюгових дробів. У запропонованій роботі наводяться такі приклади.

СУТЬ МЕТОДА

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, записану в нормальному вигляді

$$\{y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$y_i(0) = \bar{y}_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Кожну з невідомих функцій будемо шукати у вигляді

$$y_i(x) = \bar{y}_i + C_i x^{\alpha_i},$$

у якому додатні константи α_i та ненульові константи C_i обираються з умови, що різниці між лівими та правими частинами рівнянь системи (1) є при $x \rightarrow 0$ нескінченно малими якомога вищого степеня.

Після визначення констант шукані функції $y_i(x)$ представляємо через нові функції $z_{li}(x)$ за формулами

$$y_i(x) = \bar{y}_i + \frac{C_i x^{\alpha_i}}{1 + z_{li}(x)}, \quad (3)$$

причому будемо вважати, що

$$z_{li}(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Перший із індексів при $z_{li}(x)$ означає номер ітерації.

Зі співвідношень (3) матимемо, що

$$y'_i = \frac{C_i x^{\alpha_i - 1}}{(1 + z_{li})^2} (\alpha_i (1 + z_{li}) + x z'_{li}). \quad (5)$$

Підставимо вирази (3) та (5) в (1). Після перетворень будемо мати систему:

$$\{g_i(z'_{li}, z_{11}, \dots, z_{ln}, x) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (6)$$

з початковими умовами (4).

Для виконання наступної ітерації застосуємо ті ж самі міркування, що наведені вище. Єдина несуттєва різниця полягає в тому, що починаючи з другої ітерації будемо мати нульові початкові умови, і тому при $x \rightarrow 0$ виконуються умови: $z_{li}(x) \sim M_{li} x^{\beta_{li}}$. Для визначення констант M_{li} та β_{li} у цій статті ми будемо використовувати ряди Маклорена.

Так само, як зазначено вище, для пошуку нових невідомих функцій $z_{li}(x)$ маємо представлення:

$$z_{li}(x) = \frac{M_{li} x^{\beta_{li}}}{1 + z_{2i}(x)}, \quad (7)$$

де нові шукані функції $z_{2i}(x)$ задовольняють нульовим початковим умовам.

Для запису результатів першої ітерації ми повинні в (3) покласти рівним нулю $z_{li}(x)$. Для запису результатів другої ітерації ми повинні в (7) покласти $z_{2i}(x) = 0$ та отриманий результат підставити в (3), й так далі. На кожній ітерації для кожної з шуканих функцій отримуємо функціональний ланцюговий дріб, який шляхом алгебраїчних перетворень зводиться до звичайного дробу.

У випадку, якщо розглядається задача Коші для диференціального рівняння степеня, більшого за одиницю, яке можна розв'язати відносно старшої похідної, то після запису цієї задачі у вигляді еквівалентної їй нормальної системи також можна застосувати наведену методику.

ЧИСЕЛЬНІ ПРИКЛАДИ

Приклад 1 [8]. Розглянемо лінійну систему

$$\begin{cases} y'_1 = 4y_1 + y_2 - e^{2t}, \\ y'_2 = -2y_1 + y_2 \end{cases} \quad (8)$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = -1. \end{cases} \quad (9)$$

Розв'язок цієї системи має вигляд $y_1 = e^{3t} + (t+1)e^{2t}$, $y_2 = -e^{3t} - 2te^{2t}$.

Вважаємо, що шукані функції можуть бути розкладені в ряди Маклорена. Підставимо $x=0$ в (9), та, з урахуванням (8), знаходимо, що $y'_1(0) = 6$, $y'_2(0) = -5$. Для того, щоб виконувалися умови

$$\begin{cases} y_1' - 4y_1 - y_2 + e^{2x} = o(x), \\ y_2' + 2y_1 - y_2 = o(x), \end{cases}$$

потрібно взяти $C_1 = 6, \alpha_1 = 1, C_2 = -5, \alpha_2 = 1$. Отже шукані функції представляємо у вигляді:

$$y_1 = 2 + \frac{6x}{1+z_{11}}, \quad y_2 = -1 + \frac{-5x}{1+z_{12}}. \quad (10)$$

Підставимо (10) в (8), та для зручності помножимо перше рівняння на $(1+z_{11})^2(1+z_{12})$, а друге – на $(1+z_{11})(1+z_{12})^2$. Отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned} (6-24x)(1+z_{11})(1+z_{12}) - 6xz_{11}'(1+z_{12}) + (e^{2x}-7)(1+z_{11})^2(1+z_{12}) + 5x(1+z_{11})^2 &= 0, \\ (5x-5)(1+z_{11})(1+z_{12}) + 5xz_{12}'(1+z_{11}) + 5(1+z_{11})(1+z_{12})^2 + 12x(1+z_{12})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Розкладемо ліві частини цих виразів у ряди з урахуванням того, що $z_{11}(0) = z_{12}(0) = 0$. Отримаємо співвідношення:

$$(-17-12z_{11}'(0))x + o(x), \quad (10z_{12}'(0)+17)x + o(x).$$

Прирівнявши дужки до нуля, знаходимо, що $z_{11}'(0) = -\frac{17}{12}x, z_{12}'(0) = \frac{17}{10}x$. Звідси визначаємо, що $z_{11} = -\frac{17}{12}x + o(x), z_{11} = -\frac{17}{12}x + o(x), z_{12} = -\frac{17}{10}x + o(x)$. У результаті другої ітерації отримуємо такі вирази

$$y_1 = 2 + \frac{6x}{1-\frac{17}{12}x} = \frac{38x+24}{-17x+12}, \quad y_2 = -1 + \frac{-5x}{1-\frac{17}{10}x} = \frac{33x+10}{17x-10}. \quad (12)$$

Наступну ітерацію шукаємо у вигляді:

$$z_{11} = \frac{-\frac{17}{12}x}{1+z_{21}(x)}, \quad z_{12} = \frac{-\frac{17}{10}x}{1+z_{22}(x)}. \quad (13)$$

Підставляємо (13) в (11) та для зручності помножимо перше рівняння на $(1+z_{21})^2(1+z_{22})$, а друге – на $(1+z_{21})(1+z_{22})^2$. Розкладаємо ліві частини в ряди Маклорена з урахуванням того, що $z_{21}(0) = z_{22}(0) = 0$:

$$\left(-\frac{51}{2}z_{21}'(0) + \frac{101}{8}\right)x^2 + o(x^3) = 0, \quad \left(\frac{51}{2}z_{22}'(0) - \frac{357}{20}\right)x^2 + o(x^3) = 0.$$

Звідси знаходимо, що $z_{21}'(0) = \frac{101}{204}, z_{22}'(0) = \frac{7}{10}$. Отже,

$$z_{21} = \frac{101}{204}x + o(x), \quad z_{22} = \frac{7}{10}x + o(x).$$

Маємо результати третьої ітерації

$$y_1 = 2 + \frac{6x}{1 - \frac{17}{12}x} = \frac{303x^2 + 424x + 204}{-94x + 102}, \quad y_2 = -1 + \frac{-5x}{1 - \frac{10}{7}x} = \frac{7x^2 + 8x + 2}{2x - 2}.$$

Як можна безпосередньо переконатися, отримані в результаті ітерацій вирази є наближеннями Паде шуканих функцій. У результаті першої ітерації отримано наближення типу [1,0] для першої ітерації, типу [1,1] для другої та типу [2,1] для третьої.

Приклад 2. Як другий приклад розглянемо наближене розв'язання задачі Коші для рівняння Бесселя нульового порядку

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

з початковими умовами $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, розв'язком якої є функція Бесселя $J_0(x)$. Задане рівняння запишемо у вигляді системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} y' - z = 0, \\ x^2 z' + xz + x^2 y = 0 \end{cases} \quad (14)$$

з умовами $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Для зручності, щоб не перевантажувати приклад індексами, будемо дещо інакше позначати функції, ніж це описано в теоретичній частині статті. Розклад лівих частин рівнянь системи (14) в ряд Маклорена має вигляд

$$(y'(0) - z(0)) + (y''(0) - z'(0))x + o(x), \quad (15)$$

$$(z(0))x + (2z'(0) + y(0))x^2 + \left(\frac{3}{2}z''(0) + y'(0)\right)x^3 + o(x^3). \quad (16)$$

З рівності $y'(0) - z(0) = 0$ отримуємо, що

$$y'(0) = 0. \quad (17)$$

Оскільки перша дужка в (16) дорівнює нулю, то зробимо так, щоб вираз (16) не містив і другого доданку. З умови

$$2z'(0) + y(0) = 0$$

знаходимо, що

$$z'(0) = -\frac{1}{2}. \quad (18)$$

Для наступної ітерації нам потрібно знайти перші ненульові доданки розвинень функцій $y(x)$ та $z(x)$ в ряди. Для цього прирівняємо до нуля і другу дужку в (15). Отримаємо, що

$$y''(0) = z'(0) = -\frac{1}{2}. \text{ Отже, робимо висновок, що } y(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2), \quad z(x) = -\frac{1}{2}x + o(x).$$

У результаті першої ітерації отримуємо наближення

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{4}, \quad z(x) = -\frac{1}{2}x,$$

а для наступної ітерації маємо представлення

$$y(x) = 1 - \frac{\frac{x^2}{4}}{1 + y_1(x)}, \quad z(x) = \frac{-\frac{1}{2}x}{1 + z_1(x)}, \quad (19)$$

у якому нові шукані функції задовольняють нульовим початковим умовам

$$y(0) = z(0) = 0. \quad (20)$$

Підставимо (19) в (14) та для зручності помножимо перше рівняння на $(1 + y_1)^2(1 + z_1)$, а друге – на $(1 + y_1)(1 + z_1)^2$. Ліві частини отриманих рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{x}{4}(xy_1'(1 + z_1) + 2y_1^2 + 2y_1 - 2y_1z_1 - 2z_1) &= 0, \\ \frac{x^2}{4}(2xz_1'(1 + y_1) + 4z_1 + 4y_1z_1 + 4z_1^2 + 4z_1^2y_1 - 2x^2z_1 - x^2z_1^2 - x^2) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

розкладемо в ряди Маклорена. Маємо відповідні представлення (з урахуванням однорідних початкових умов):

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}y_1'(0) - \frac{1}{2}z_1'(0)\right)^2 x^2 + (2y_1''(0) + 2y_1'^2(0) - y_1'(0)z_1'(0) - z_1''(0))\frac{x^3}{4} + o(x^4), \\ \frac{3}{2}z_1'(0)x^3 + \left(z_1'^2(0) + z_1''(0) + \frac{3}{2}y_1'(0)z_1'(0) - \frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Усі виписані члени рядів будуть дорівнювати нулю, якщо $y_1'(0) = z_1'(0) = 0$, $y_1''(0) = \frac{1}{8}$, $z_1''(0) = \frac{1}{4}$. Отже,

$$y_1 = \frac{x^2}{16} + o(x^2), \quad z_1 = \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

У результаті другої ітерації отримуємо наближення

$$y(x) = 1 - \frac{\frac{x^2}{4}}{1 + \frac{x^2}{16}} = \frac{16 - 3x^2}{x^2 + 16}, \quad z(x) = \frac{-\frac{1}{2}x}{1 + \frac{x^2}{8}} = -\frac{4x}{x^2 + 8}, \quad (22)$$

а для наступної ітерації маємо представлення

$$y(x) = 1 - \frac{\frac{x^2}{4}}{1 + \frac{16}{1 + y_2}}, \quad z(x) = \frac{-\frac{1}{2}x}{1 + \frac{8}{1 + z_2}}, \quad (23)$$

у якому нові шукані функції задовольняють нульовим початковим умовам

$$y_2(0) = z_2(0) = 0. \quad (24)$$

Підставимо (24) в (21) та, для зручності, помножимо перше рівняння на $(1+y_2)^2(1+z_2)x^4$, а друге – на $(1+y_2)(1+z_2)^2x^5$. Ліві частини отриманих рівнянь розкладемо в ряди Маклорена. Маємо такі представлення (з урахуванням однорідних початкових умов):

$$\left(\frac{1}{16}z_2'(0) - \frac{5}{64}y_2'(0)\right) + (1 + 24y_2'(0)z_2'(0) - 24y_2''(0) + 16z_1''(0) - 32y_1'^2(0))\frac{x}{512} + o(x),$$

$$\frac{-5}{16}z_2'(0) - (8z_2'^2(0) + 6z_2''(0) + 10y_2'(0)z_2'(0) + 1)\frac{x}{32} + o(x).$$

Усі виписані члени рядів дорівнюватимуть нулю, якщо $y_2'(0) = z_2'(0) = 0$, $y_2''(0) = -\frac{5}{72}$, $z_2''(0) = -\frac{1}{6}$. Отже,

$$y_2 = -\frac{5x^2}{144} + o(x^2), \quad z_2 = -\frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

У результаті третьої ітерації отримуємо наближення

$$y(x) = 1 - \frac{\frac{x^2}{4}}{1 + \frac{16}{1 - \frac{5x^2}{144}}} = \frac{5x^4 - 128x^2 + 576}{16(x^2 + 36)}, \quad z(x) = \frac{-\frac{1}{2}x}{1 + \frac{8}{1 - \frac{x^2}{12}}} = \frac{x^3 - 12x}{x^2 + 24}. \quad (25)$$

Зауважимо, що в результаті ітерацій для функції $y(x)$ ми отримали вирази, які співпадають з наближеннями Паде порядків (2,0), (2,2), (4,2) до її точного виразу $J_0(x)$. Аналогічно для функції $z(x) = y'(x)$ ми отримали вирази, які співпадають з наближеннями Паде порядків (1,0), (1,2), (3,2) до її точного виразу $J_0'(x) = -J_1(x)$.

ВИСНОВКИ

Запропоновано спосіб розв'язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, який ґрунтується на методі ланцюгових дробів. У математичній літературі зустрічається описання застосування цього методу лише для знаходження наближеного розв'язку звичайних диференціальних рівнянь, запропонований Ж.Л. Лагранжем. У статті описано алгоритм пошуку наближень та на прикладах показано, що в результаті кожного з наближень отримуються апроксимації Паде шуканих функцій. Без обмеження загальності розв'язок шукається в околі початку координат. Для пошуку нескінченно малих степеневих функцій, еквівалентних до шуканих функцій, пропонується апарат рядів Маклорена. У другому прикладі будуються апроксимації Паде для функцій Бесселя першого роду першого та другого порядків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Цепные дроби / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2001. – 40 с.
2. Вишневский В. Э. Аппроксимация Паде решения задачи Коши / В. Э. Вишневский, А. В. Зубов, О. А. Иванова // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. – 2012. – № 4. – С. 3-17.
3. Джоунс У. Непрерывные дроби: аналитическая теория и приложения / У. Джоунс, В. Трон [Перев. с англ. под ред. И. Д. Софронова]. – М. : Мир, 1985. – 410 с.

4. Лабьч Ю. А. Приближение непрерывных функций рациональными дробями Паде-Чебышева / Ю. А. Лабьч, А. П. Старовойтов // ПФМТ. – 2011. – № 1. – С. 69-78.
5. Макаров Ю. Н. Паде-приближения решений дифференциальных уравнений / Ю. Н. Макаров // Фундамент. и прикл. матем. – 1999. – Т. 5, вып. 2. – С. 527-537.
6. Маурер Г. В. Решение одного дифференциального уравнения Риккати с помощью цепных дробей / Г. В. Маурер // В сб. : Цепные дроби и их применения. – К. : Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 76-77.
7. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – М. : Высш. шк., 1989. – 383 с.
8. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.
9. Хинчин А. Я. Цепные дроби / А. Я. Хинчин. – М. : Наука, 1978. – 112 с.
10. Хлопонин С. С. Решение одного дифференциального уравнения Риккати с помощью цепной дроби Стильтеса / С. С. Хлопонин // Изв. ВУЗов. Математика. – 1969. – № 3. – С. 78-85.
11. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщение к вопросам приближенного анализа / А. Н. Хованский. – М. : ГИИТЛ, 1956. – 204 с.
12. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Эдиториал УРСС, 2002. – 320 с.

REFERENCES

1. Arnol'd, V.I. (2003), *Сепные дроби* [Continued fraction], MCNMO, Moskow, Russia.
2. Vishnevskij, V.Je., Zubov, A.V. and Ivanova, O.A. (2012), “Pade approximation of the Cauchy problem”, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*, no. 4, pp. 3-17.
3. Dzhouns, U. and Tron, V. (1985), *Neprreryvnye drobi: analiticheskaja teorija i prilozhenija* [Continued fractions: analytical theory and applications], Translated by Sofronov I.D., Moskow, Russia.
4. Labych, Ju.A. and Starovojtov, A.P. (2011), «Approximation of continuous functions by rational fractions Pade-Chebyshev», *Problemy fiziki, matematiki i tehniki*, no. 1, pp. 69-78.
5. Makarov, Ju.N. (1999), “Pade-approximations to solutions of differential equations”, *Fundamental'naja i prikladnaja matematika*, vol. 5, issue 2, pp. 527-537.
6. Maurer, G.V. (1976), *Reshenie odnogo differencial'nogo uravnenija Rikkati s pomoshh'ju cepnyh drobej*, [Solution of Riccati differential equation by means of continued fractions], Institut matematiki AN USSR, Kyiv, Ukraine.
7. Samojlenko, A.M., Krivosheja, S.A. and Perestjuk, N.A. (1989), *Differencial'nye uravnenija: primery i zadachi*, [Differential equations: examples and problems], Visshaja shkola, Moskow, Russia.
8. Filippov, A.F. (2000), *Sbornik zadach po differencial'nyh uravnenijam* [Problems in Differential Equations], NIC “Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika”, Izhevsk, Russia.
9. Hinchin, A.Ja. (1978), *Сепные дроби* [Continued fraction], Nauka, Moskow, Russia.
10. Hloponin, S.S. (1969), «Solution of Riccati differential equation by means of a Stieltjes continued fraction», *Izvestie VUZov. Matematika*, no. 3, pp. 78-85.
11. Hovanskij, A.N. (1956), *Prilozhenie cepnyh drobej i ih obobshhenie k voprosam priblizhennogo analiza*, [The application of continued fractions and their generalization to the issues of the approximate analysis], GIITL, Moskow, Russia.
12. Jel'sgol'c, L.Je. (2002), *Differencial'nye uravnenija i variacionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations], Jeditorial URSS, Moskow, Russia.

УДК 517.925

РЕКОНСТРУКЦИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ПО СКАЛЯРНОМУ ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

Городецкий В. Г., к. ф.-м. н., доцент

*Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського»,
просп. Перемоги, 37, г. Київ, 03056, Україна*

v.gorodetskyi@ukr.net

В статье рассматривается частный случай обратной задачи – реконструкция нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с внешним возбуждением по единственной наблюдаемой переменной, представленной скалярным временным рядом. Доказаны теоремы для систем с периодическим внешним возбуждением, которые могут быть положены в основу алгоритма для решения данной задачи. Возможность практического применения теорем проиллюстрирована численным методом. Выявлены возможные трудности, которые могут возникнуть при реализации алгоритма.

Ключевые слова: реконструкция, система дифференциальных уравнений, внешнее возбуждение, периодическая функция, скалярный временной ряд, алгебраическая система, число обусловленности.

РЕКОНСТРУКЦІЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ НЕАВТОНОМНИХ СИСТЕМ ПО СКАЛЯРНОМУ ТИМЧАСОВОМУ РЯДУ

Городецкий В. Г., к. ф.-м. н., доцент

*Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського»,
просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056, Україна*

v.gorodetskyi@ukr.net

У статті розглядається окремий випадок оберненої задачі – реконструкція нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь із зовнішнім збудженням за єдиною спостережуваною змінною, яку представлено скалярним часовим рядом. Доведені теореми для систем з періодичним зовнішнім збудженням, які можуть бути покладені в основу алгоритму для вирішення даного завдання. Можливість практичного застосування теорем проілюстрована чисельним методом. Виявлені труднощі, які можливі при реалізації алгоритму.

Ключові слова: реконструкція, система диференціальних рівнянь, зовнішнє збудження, періодична функція, скалярний часовий ряд, алгебраїчна система, число обумовленості.

RECONSTRUCTION OF SOME NONLINEAR NONAUTONOMOUS SYSTEMS BY USE OF SCALAR TIME SERIES

Gorodetskyi V.G.

*National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,
37, Prosp. Peremogy, Kyiv, Ukraine, 03056*

The problem of obtaining mathematical models for systems with external excitation is of interest both from a theoretical and practical point of view. Such systems are widely used in physics, engineering, biology and other applications. The article deals with the special case of the inverse problem - reconstruction of nonlinear system of ordinary differential equations with external excitation by use of a single observed variable represented by a scalar time series. We try to establish a strict mathematical conditions for identification of the systems with unknown periodic excitation. Such problem may arise especially in the case when the system is acting in the regime of deterministic chaos. This study proposes the formulation and proof of the theorems, which establish the necessary and sufficient conditions for periodicity of the unknown outer excitation. They also allow to find unknown period of the outer excitation. The identification of other unknown parameters of the system thus becomes less complicated. The possibility of practical application of proposed theory is illustrated by a numerical examples. The possible difficulties that may arise in the implementation of the algorithm are identified. One of them is the bad condition number, that may appear while forming the matrix to solve inverse

problem. This is clearly demonstrated by numerical examples and graphs. To create algebraic system for solving the inverse problem one must use numerical differentiation. This operation also may be the reason of increasing errors because of numerical noise. That is why the researcher must use special type of numerical differentiation, filtering, smoothing, etc. The proved theorems can be useful for building an algorithm identifying some systems with external excitation on the basis of data on a single observable variable.

Key words: reconstruction, the system of differential equations, the external excitation, periodic function, a scalar time series, algebraic system, the condition number.

ВВЕДЕНИЕ

Задача получения математической модели систем с внешним возбуждением представляет интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения [1, с. 72]. Такие системы получили широкое распространение в физике [2; 3, с. 93], технике [4; 5, с. 33], биологии [6, 7] и других приложениях.

Преобладающим подходом при математическом моделировании устройств и процессов с внешним возбуждением является решение так называемой прямой задачи. В этом случае на основании знания физических процессов, происходящих в моделируемом объекте, выводятся уравнения, описывающие эти процессы. Например, это могут быть системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ – вектор фазовых переменных $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, t – время. Решив систему (1), можно оценить адекватность модели, сравнив полученные функции $x_i(t)$ с реальными.

Если информации для получения модели (1) недостаточно, можно попытаться решить обратную задачу [8], то есть, получить модель, зная $x_i(t)$. Важным частным случаем такой задачи является реконструкция математической модели по скалярному временному ряду [9, с. 295], а именно, по единственной известной наблюдаемой переменной, например $x_1(t)$. Известен ряд подходов, достаточно эффективных при реконструкции некоторых автономных систем [10, 11]. В то же время, случай неавтономных систем менее изучен и, следовательно, требует дальнейших исследований в этом направлении [12]. В данном исследовании предлагается формулировка и доказательство теорем, которые могут быть полезны при построении алгоритма реконструкции некоторых систем с внешним возбуждением на основе данных о единственной наблюдаемой переменной.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим частный случай системы (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = C_0(t) + \sum_{j=1}^m c_j f_j(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2) переменное внешнее воздействие задано функцией времени $C_0(t)$, которую считаем известной наряду с постоянными коэффициентами \tilde{n}_j ($j = 1, \dots, m$) и f_j – непрерывными функциями переменных x_1, \dots, x_n . В общем случае $n \neq m$.

Сформулируем обратную задачу для системы (2). Будем считать известными функцию $x_1(t)$ – решение системы (2) и вид функций $f_j(x_1, \dots, x_n)$. Из уравнений этой системы легко определяются $x_2(t), \dots, x_n(t)$. В свою очередь неизвестными станут внешнее воздействие $C_0(t)$ и постоянные коэффициенты \tilde{n}_j . Если $C_0(t) = c_0 = const$, то для нахождения коэффициентов c_0, \dots, c_m достаточно решить алгебраическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t_0) = c_0 + c_1 f_1(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) + c_2 f_2(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \dots, c_m f_m(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \\ \dot{x}_n(t_1) = c_0 + c_1 f_1(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) + c_2 f_2(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)), \dots, c_m f_m(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)), \\ \dots \\ \dot{x}_n(t_m) = c_0 + c_1 f_1(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)) + c_2 f_2(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)), \dots, c_m f_m(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)), \end{cases} \quad (3)$$

где t_0, \dots, t_m – произвольные моменты времени. Если главный определитель системы (3) $\Delta \neq 0$, то решение системы (3) существует.

Рассмотрим случай $C_0(t) \neq const$. Сформируем алгебраическую систему (4) аналогично системе (3):

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t_0) = C_0^4(t_0) + c_1^4 f_1(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) + c_2^4 f_2(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \dots, c_m^4 f_m(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \\ \dot{x}_n(t_1) = C_0^4(t_1) + c_1^4 f_1(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) + c_2^4 f_2(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)), \dots, c_m^4 f_m(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)), \\ \dots \\ \dot{x}_n(t_m) = C_0^4(t_m) + c_1^4 f_1(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)) + c_2^4 f_2(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)), \dots, c_m^4 f_m(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь верхний индекс 4 при коэффициентах \tilde{n}_j указывает на принадлежность этих коэффициентов к системе (4). В этой системе неизвестными являются $C_0^4(t_0), \dots, C_0^4(t_m)$, $\tilde{n}_1^4, \dots, \tilde{n}_m^4$. Отсюда число неизвестных равно $2m+1$, что больше $m+1$ – числа уравнений в системе (4). Следовательно, система (4) неразрешима методом, аналогичным решению системы (3).

СИСТЕМА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Пусть в (2)

$$C_0(t) = p_T(t), \quad (5)$$

где $p_T(t)$ – периодическая функция времени периода T . В этом случае справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Если для системы (2) выполняется условие (5) и при формировании системы (4) моменты времени t_0, \dots, t_m выбраны таким образом, что

$$\begin{cases} t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m, \\ t_1 = t_0 + k_1 \tau, t_2 = t_0 + k_2 \tau, \dots, t_m = t_0 + k_m \tau, k_j \in N, j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (6)$$

и при этом $\tau = T$, то при решении системы (4) аналогично решению системы (3) получим $\tilde{n}_1^4 = \tilde{n}_1, \tilde{n}_2^4 = \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_m^4 = \tilde{n}_m$.

Доказательство. Так как $p_T(t)$ – периодическая функция периода T , то $p_T(t_0) = p_T(t_0 + k_1 T) = p_T(t_0 + k_2 T) = \dots = p_T(t_0 + k_m T)$. Следовательно, в системе (4) при

выборе моментов времени согласно (6) получим $C_0^4(t_0) = C_0^4(t_1) = \dots = C_0^4(t_m)$, то есть для этих моментов времени $C_0^4 = const$. Отсюда решение системы (4) может быть получено аналогично системе (3). Конец доказательства.

Для решения системы (4) в данном случае необходимо знать величину T , которая может быть неизвестной. Это возможно, например, когда при определенных наборах параметров, система (2), являясь детерминированной, демонстрирует хаотическое поведение. При этом определение периода T при реконструкции модели становится серьезной проблемой [12].

Очевидно, что при изменении величины τ , решая обратную задачу для системы (4), можно получить разные значения коэффициентов $\tilde{n}_1^4, \dots, \tilde{n}_m^4$. Также очевидно, что при произвольных τ коэффициенты $\tilde{n}_1^4, \dots, \tilde{n}_m^4$ могут зависеть и от момента времени t_0 , с которого начинается формирование системы (4). Поэтому эти коэффициенты являются функциями от t_0 и τ , то есть $\tilde{n}_j^4 = \tilde{n}_j^4(t_0, \tau)$. Введем обозначение $\mathbf{c}(t_0, \tau) = \{\tilde{n}_1(t_0, \tau), \tilde{n}_2(t_0, \tau), \dots, \tilde{n}_m(t_0, \tau)\}$, где $\mathbf{c}(t_0, \tau)$ – вектор искомых постоянных коэффициентов. Сформируем две системы типа (4) согласно (6) для двух разных моментов времени: $t_0 = t_{01}$ и $t_0 = t_{02}$.

Теорема 1. Если выполняется соотношение (5), то для того, чтобы $\tau = T$, необходимо, чтобы существовала хотя бы одна пара значений t_{01} и t_{02} , для которых выполняется равенство

$$\mathbf{c}(t_{01}, \tau) = \mathbf{c}(t_{02}, \tau). \tag{7}$$

Доказательство. Справедливость теоремы следует из леммы 1.

Теорема 2. Если выполняется соотношение (5), то для того, чтобы $\tau = T$, достаточно, чтобы при формировании системы (4) в соответствии с (6) для двух любых начальных моментов времени t_{01} и t_{02} выполнялось соотношение (7).

Доказательство. Пусть $\tau = T$, и при этом равенство (7) для некоторых t_{01} и t_{02} не выполняется, то есть $\mathbf{c}(t_{01}, T) \neq \mathbf{c}(t_{02}, T)$. Это означает, что при решении обратной задачи для систем вида (4), сформированных для разных t_0 , наборы полученных коэффициентов $\tilde{n}_1^4, \dots, \tilde{n}_m^4$ отличаются друг от друга. Но это противоречит лемме 1, согласно которой для $\tau = T$ при решении системы (4) получим $\tilde{n}_1^4 = \tilde{n}_1, \tilde{n}_2^4 = \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_m^4 = \tilde{n}_m$ независимо от t_0 . Конец доказательства.

После определения $\tilde{n}_1^4, \dots, \tilde{n}_m^4$ несложно получить значения $C_0(t) = p_T(t)$ в любой момент времени. Для этого достаточно любое из уравнений системы (4) решить относительно $C_0(t)$, например:

$$C_0(t_0) = c_1^4 f_1(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) + c_2^4 f_2(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \dots, c_m^4 f_m(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) - \dot{x}_n(t_0). \tag{8}$$

Все величины в правой части (8) в любой момент времени известны, что позволяет найти $C_0(t_0)$.

Рассмотрим частный случай. Пусть

$$C_0(t) = p_T(t) = a + c_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi), \tag{9}$$

где a – постоянная, а c_0, ω, φ – амплитуда, круговая частота и угол сдвига синусоиды, соответственно. Очевидно, что зная значение $p_T(t)$ в любой момент времени, можно

определить амплитуду синусоиды c_0 , величину смещения a , частоту $\omega = 2\pi/T$ и фазовый сдвиг φ .

ЧИСЛЕННАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим в качестве примера осциллятор Уэды [2], динамика которого описывается системой Дуффинга [3, с.93]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = c_0 \cos(t) + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_1^3 \end{cases} \quad (10)$$

с параметрами $\tilde{n}_0 = 10$, $\tilde{n}_1 = 1$, $\tilde{n}_2 = -0,1$, $\tilde{n}_3 = -1$. Система была решена методом Рунге-Кутты на интервале $100c$ с шагом $\Delta t = 10^{-3}c$. Решение представлено в виде временного ряда, содержащего 10^5 точек. Зависимости $x_1(t)$ и $x_2(t)$ для системы (10) представлены на рис. 1, а ее фазовый портрет – на рис. 2.

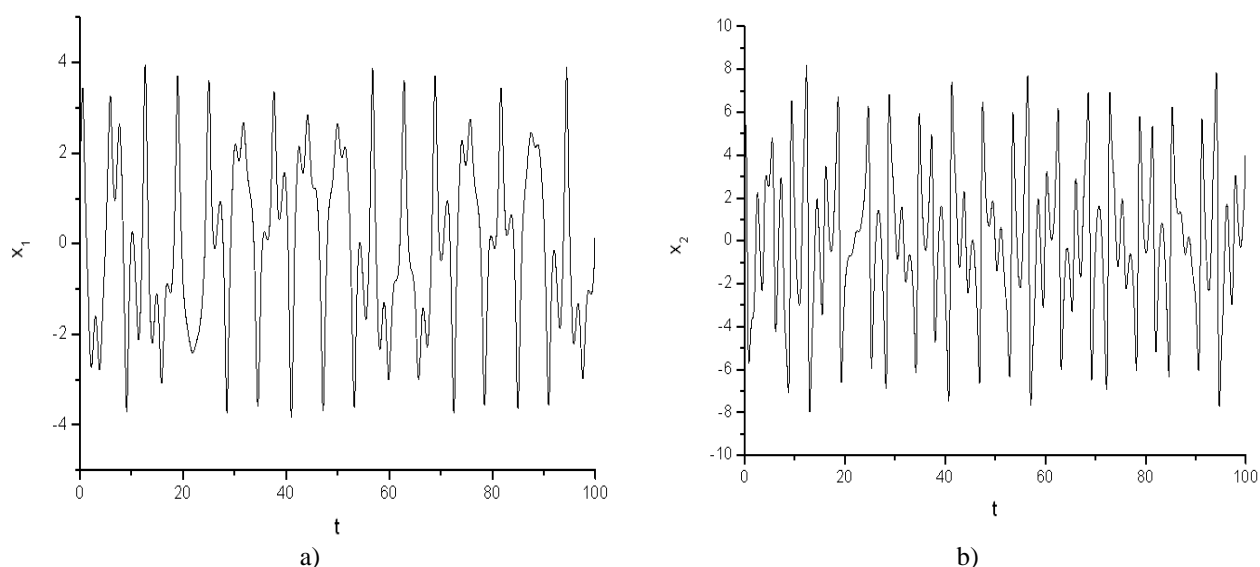


Рис. 1. Временные зависимости для системы (10): а – $x_1(t)$, б – $x_2(t)$

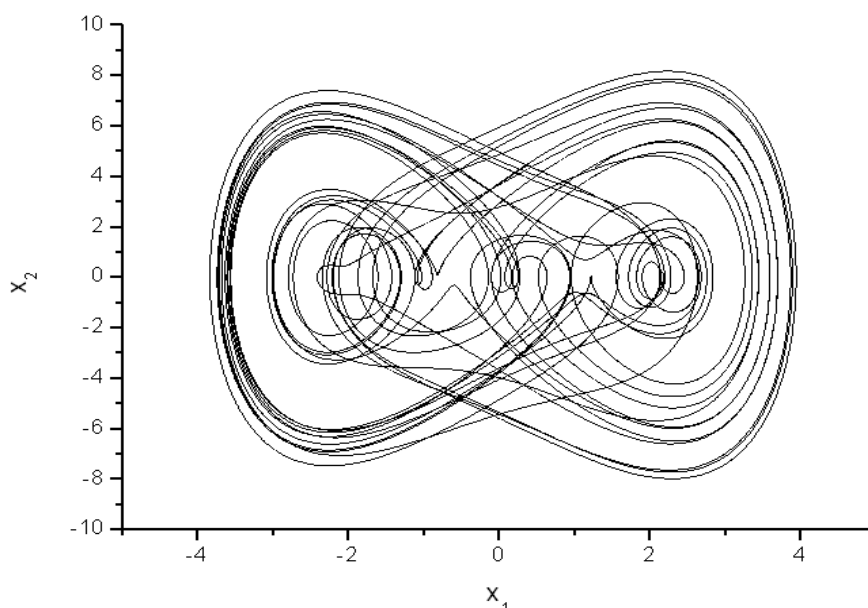


Рис. 2. Фазовый портрет системы (10)

Алгебраическая система для решения обратной задачи в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t_0) = c_0 \cos(t_0) + c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + c_3 x_1^3(t_0), \\ \dot{x}_2(t_1) = c_0 \cos(t_1) + c_1 x_1(t_1) + c_2 x_2(t_1) + c_3 x_1^3(t_1), \\ \dot{x}_2(t_2) = c_0 \cos(t_2) + c_1 x_1(t_2) + c_2 x_2(t_2) + c_3 x_1^3(t_2), \\ \dot{x}_2(t_3) = c_0 \cos(t_3) + c_1 x_1(t_3) + c_2 x_2(t_3) + c_3 x_1^3(t_3), \end{cases} \quad (11)$$

где $t_1 = t_0 + T$, $t_2 = t_0 + 2T$, $t_3 = t_0 + 3T$, $T = 2\pi/\omega$. С учетом обозначений, принятых в выражении (9), в системе (10) получим $a = 0$, $\varphi = 0$, $\omega = 1$, откуда $T = 2\pi$.

Преобразуем (11) к виду:

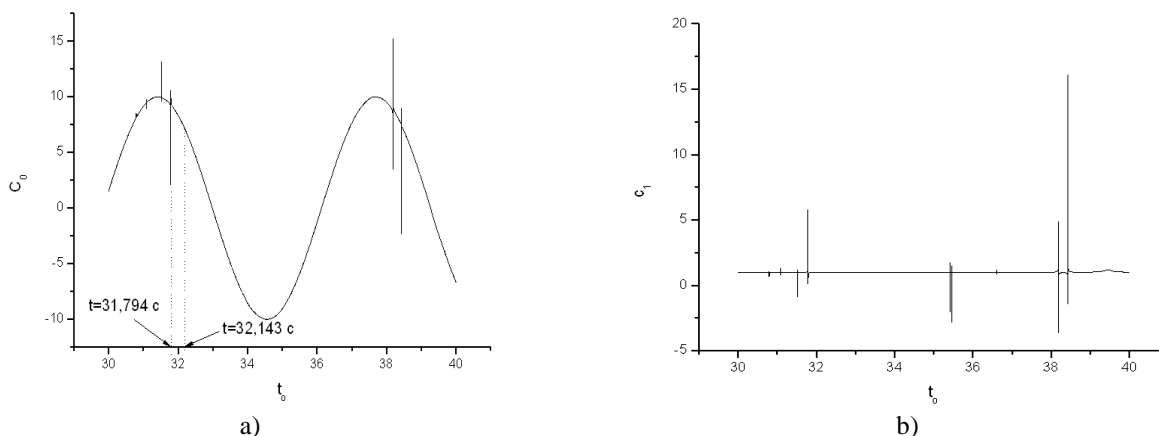
$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1(t_0) & x_2(t_0) & x_1^3(t_0) \\ 1 & x_1(t_0+T) & x_2(t_0+T) & x_1^3(t_0+T) \\ 1 & x_1(t_0+2T) & x_2(t_0+2T) & x_1^3(t_0+2T) \\ 1 & x_1(t_0+3T) & x_2(t_0+3T) & x_1^3(t_0+3T) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t_0) \\ \dot{x}_2(t_0+T) \\ \dot{x}_2(t_0+2T) \\ \dot{x}_2(t_0+3T) \end{pmatrix},$$

$$C_0 = c_0 \cos(t_0) = c_0 \cos(t_0 + T) = c_0 \cos(t_0 + 2T) = c_0 \cos(t_0 + 3T).$$

Система (12) была решена для всех моментов времени из диапазона $t_0 = 0, \dots, 70c$. На рис. 3 представлены временные зависимости коэффициентов $C_0(t_0)$, $c_1(t_0)$, $c_2(t_0)$, $c_3(t_0)$ для интервала $t_0 = 30, \dots, 40c$. Как и ожидалось, зависимость $C_0(t_0)$ имеет синусоидальный характер, а зависимости $c_1(t_0)$, $c_2(t_0)$, $c_3(t_0)$ близки к постоянным. Скачки величин в некоторых точках на графиках объясняются плохой обусловленностью [13, с. 110] матрицы \mathbf{A} , сформированной для некоторых t_0 . Например, при $t_0 = 31,794c$ имеет место значительное отклонение C_0 на графике 3,а. При этом величина числа обусловленности с евклидовой метрикой $cond(\mathbf{A}) = 7,016 \cdot 10^5$ в этой точке указывает на плохую обусловленность матрицы. Кроме того, ее определитель в этой точке принимает близкое к нулю значение $|\mathbf{A}| = 5,005 \cdot 10^{-3}$. Для сравнения, на соседних участках графика ситуация противоположна. Например, в произвольно выбранной точке $t_0 = 32,143c$ получим приемлемые значения $cond(\mathbf{A}) = 109,336$ и $|\mathbf{A}| = -5,63$.



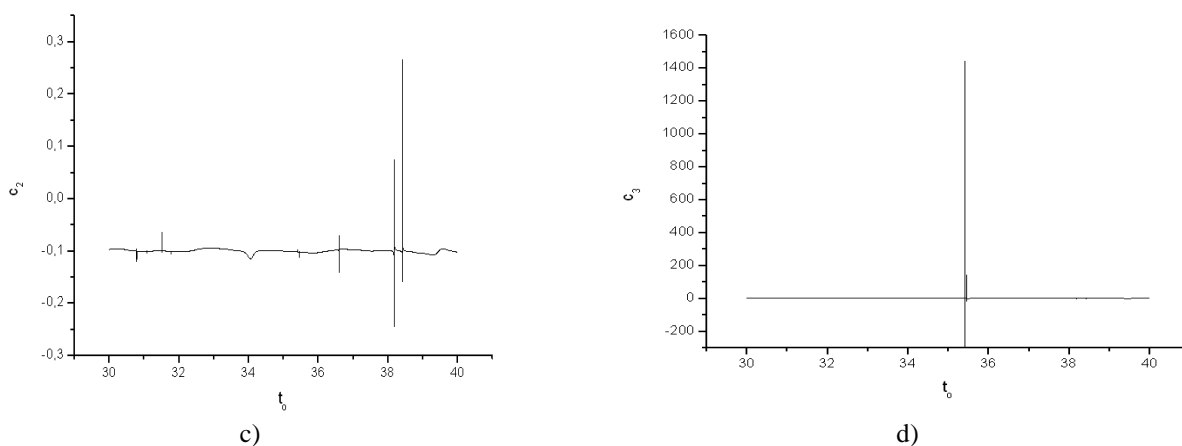


Рис. 3. Временные зависимости коэффициентов системы (10): а – $C_0(t_0)$, б – $c_1(t_0)$, в – $c_2(t_0)$, д – $c_3(t_0)$

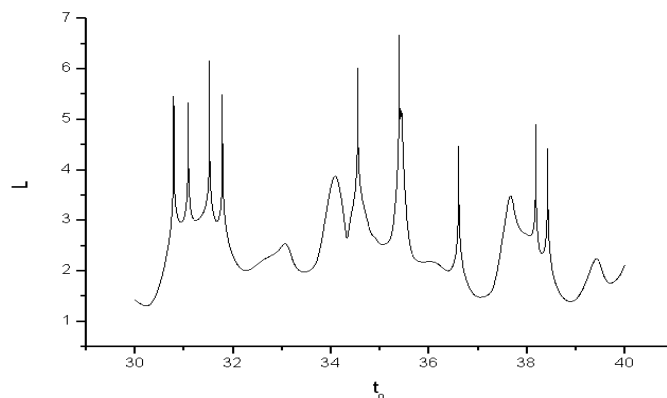


Рис. 4. График зависимости $L(t_0)$, $L = \log_{10}(\text{cond}(\mathbf{A}))$

Более наглядное представление о количестве возможных сингулярностей дает график зависимости $L(t_0)$, где $L = \log_{10}(\text{cond}(\mathbf{A}))$, представленный на рис. 4. Из графика видно, что при построении алгоритма следует решить проблемы, вызванные плохой обусловленностью матрицы, сформированной для некоторых наборов исходных данных при решении обратной задачи. Также источником погрешности может быть дискретный характер исходного временного ряда $x_1(t)$. Это обстоятельство влияет на результат численного дифференцирования при нахождении значений x_2, \dots, x_n в системе (2). Особенно эта проблема актуальна для временных рядов с шумом, полученных при реальных измерениях.

ВЫВОДЫ

Исследование посвящено решению важного частного случая обратной задачи – реконструкции нелинейных неавтономных динамических систем по единственной наблюдаемой переменной. Предложенные в работе теоремы могут служить основой для построения алгоритма реконструкции систем вида (2). Сформулированные в статье необходимые и достаточные условия позволяют строго определить период внешнего возбуждающего воздействия, что существенно облегчает поиск остальных параметров системы. Источником погрешности при реализации данных теорем в вычислительном алгоритме может быть плохая обусловленность матрицы, сформированной для решения алгебраической системы вида (12). Это наглядно продемонстрировано на численных примерах и графически на рис. 4.

С повышением порядка производных возрастает погрешность численного дифференцирования. Для решения этой проблемы необходимо применять специальные методы дифференцирования, сглаживания и другие приемы. Особенно эта проблема актуальна для реальных зашумленных временных рядов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Краснопольская Т. С. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением / Т. С. Краснопольская, А. Ю. Швец. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2008. – 208 с.
2. Ueda Y. Randomly Transitional Phenomena in the System Governed by Duffing's Equation / Y. Ueda // *J. Stat. Phys.* – 1979 – Vol. 20. – P. 181-196.
3. Мун Ф. Хаотические колебания / Ф. Мун. – М. : Мир, 1990. – 312 с.
4. Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series Analysis / [R. Hegger, H. Kantz, F. Schmuser, M. Diestelhorst, R.-P. Kapsch and H. Beige] // *Chaos.* – 1998. – Vol. 8, № 3. – P. 727-754.
5. Потужна дисипація енергії коливань гірничих машин гетерогенними ліофобними системами / [Єрошенко В. А., Сліденко В. М., Шевчук С. П., Студенець В. П.]. – К. : НТУУ «КПІ», 2016. – 184 с.
6. Gong P.-L. Global dynamics and stochastic resonance of the forced FitzHugh-Nagumo neuron model / P.-L. Gong, J.-X. Xu // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 63. – P. 031906.
7. Феоктистов А. В. Динамика системы Фитцхью-Нагумо под внешним периодическим воздействием / А. В. Феоктистов, В. С. Анищенко // *Изв. Вузов : Прикладная нелинейная динамика.* – Т. 19, № 5. – 2011. – С. 35-44.
8. Tarantola A. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation / A. Tarantola. – Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. – 344 p.
9. Анищенко В. С. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / [В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова и др.]. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 544 с.
10. Lainscsek C. Ansatz library for global modeling with a structure selection / C. Lainscsek, C. Letellier, F. Schurrer // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 64. – P. 016206.
11. Gorodetskyi V. Analytic reconstruction of some dynamical systems / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // *Physics Letters A.* – 2013. – Vol. 377. – P. 703-713.
12. Bezruchko V. P. Constructing nonautonomous differential equations from a time series / V. P. Bezruchko, D. A. Smirnov // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 63. – P. 016207.
13. Воеводин В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, В. А. Кузнецов. – М. : Наука, 1984. – 320 с.

REFERENCES

1. Krasnopolskaya, T.S. and Shvets, A.Yu. (2008), *Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika sistem s ogranichenym vozbuзhdeniem* [Regular and chaotic dynamics of the systems with limited excitation], Institute of computer science, Moscow-Izhevsk.
2. Ueda, Y. (1979), “Randomly Transitional Phenomena in the System Governed by Duffing's Equation”, *J. Stat. Phys.*, vol. 20, pp. 181-196.
3. Moon, F. (1987), *Khaoticheskie kolebaniya* [Chaotic vibrations], Wiley&Sons, New York.
4. Hegger, R., Kantz, H., Schmuser, F., Diestelhorst, M., Kapsch, R.-P. and Beige, H. (1998), “Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series Analysis”, *Chaos*, vol. 8, no. 3, pp. 727-754.
5. Eroshenko, V.A., Slidenko, V.M., Shevchuk, S.P. and Studenets, V.P. (2016), *Potuzhna dysypatsiya enerhiyi kolyvan' hirnychykh mashyn heterohennymy liofobnymy systemamy* [Powerful vibrational energy dissipation of mining machines by use of lyophobic heterogeneous systems], NTUU “KPI”, Kyiv.
6. Gong, P.-L. and Xu, J.-X. (2001), “Global dynamics and stochastic resonance of the forced Fitz-Hugh-Nagumo neuron model”, *Phys. Rev. E.*, vol. 63, pp. 031906.
7. Feoktistov, A.V. and Anisichenko, V.S. (2011), “Dynamics of the FitzHugh–Nagumo system under outer periodic action”, *Izvestiya VUZov: Aplied nonlinear dynamics*, vol. 19, no. 5, pp. 35-44.
8. Tarantola, A. (2005), “Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

9. Anischenko, V.S., Astakhov, V.V., Vadivasova, T.E., Neyman, A. B., Strelkova, G.I. and Shimanskiy-Gayer, L. (2003), *Nelineynye efekty v khaoticheskikh i stokhasticheskikh sistemakh* [Nonlinear effects in chaotic and stochastic systems], Institute of Computer Science, Moscow-Izhevsk.
10. Lainscsek, C., Letellier, C. and Schurrer, F. (2001), “Ansatz library for global modeling with a structure selection”, *Phys. Rev. E*, vol. 64, pp. 016206.
11. Gorodetskyi, V. and Osadchuk, M. (2013), “Analytic reconstruction of some dynamical systems”, *Physics Letters A*, vol. 377, pp. 703-713.
12. Bezruchko, B.P. and Smirnov, D.A. (2001), “Constructing nonautonomous differential equations from a time series”, *Phys. Rev. E*, vol. 63, pp. 016207.
13. Voevodin, V.V. and Kuznetsov, V.V. (1984), *Matritsy i vychisleniya* [Matrix and calculations], Nauka, Moscow.

УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З НЕПЕРЕРВНО НЕОДНОРІДНОГО МАТЕРІАЛУ НЕСИМЕТРИЧНОЇ БУДОВИ

¹Григоренко О. Я., д. ф.-м. н., професор, ¹Єфімова Т. Л., к. ф.-м. н.,
²Коротких Ю. А., асистент

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 01057, Україна*

²*Київський національний університет будівництва і архітектури,
просп. Повітрофлотський, 31, м. Київ, 03680, Україна*

ayagrigorenko@yandex.ru; efimovatl@yandex.ru

На базі уточненої теорії Тимошенка-Міндліна досліджуються вільні коливання нетонких циліндричних оболонок з неперервно неоднорідних матеріалів з несиметричною будовою відносно серединної поверхні. Вивчається вплив різних законів зміни механічних властивостей на динамічні характеристики циліндричних оболонок при осесиметричних вільних коливаннях.

Ключові слова: уточнена теорія Тимошенка-Міндіна, осесиметричні вільні коливання, неперервно неоднорідні матеріали.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ НЕПРЕРЫВНО НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА НЕСИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ

¹Григоренко А. Я., д. ф.-м. н., профессор, ¹Ефимова Т. Л., к. ф.-м. н.,
²Коротких Ю. А., ассистент

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, г. Киев, 01057, Украина*

²*Киевский национальный университет строительства и архитектуры,
просп. Воздухофлотский, 31, г. Киев, 03680, Украина*

ayagrigorenko@yandex.ru; efimovatl@yandex.ru

На базе уточненной теории Тимошенко-Миндлина исследуются осесимметричные свободные колебания нетонких цилиндрических оболочек из непрерывно неоднородных материалов с несимметричным строением относительно срединной поверхности. Изучается влияние различных законов изменения механических свойств на динамические характеристики цилиндрических оболочек при осесимметричных свободных колебаниях.

Ключевые слова: уточненная теория Тимошенко-Миндлина, осесимметричные свободные колебания, непрерывно неоднородный материал.

AXISYMMETRIC FREE VIBRATIONS OF CYLINDRICAL MEDIUM - THICKNESS SHELLS MADE OF A CONTINUOUSLY INHOMOGENEOUS MATERIAL WITH ASYMMETRICAL STRUCTURE

¹Grigorenko A. Ya., D. Sc., Professor, ¹Efimova T. L., Ph.D.,
²Korotkih Yu.A., Post graduate student

¹*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
Nesterov str., 3, Kyiv, 01057, Ukraine*

²*Kyiv National University of Construction and Architecture,
Povitroflotskiy avenue, 31, m. Kuib, 03680, Ukraine*

ayagrigenko@yandex.ru; efimovatl@yandex.ru

Modern technologies in the science of materials made it possible to produce new materials with predictable properties among which functionally gradient materials occupy important place [4]. The distinctive feature of these materials is smooth change of mechanical properties in certain direction. In this case, the model of an isotropic inhomogeneous material in the direction with varying elastic properties is chosen as mechanical one. The gradient materials may be used in mechanical engineering, radio engineering, instrument-making industry, medicine, etc.

The general elastic problems for bodies made of hypothetical gradient materials have been considered in [1, 2]. However, due to strong inhomogeneity of the materials, the employment of the three-dimensional elasticity theory for solving dynamical problems of bodies made of the functionally gradient materials is problematical. In [3, 5-10], the natural vibrations of cylindrical bodies were studied using different shell theories.

The present paper studies whether the refined Timoshenko-Mindlin shell theory can be applied to solving problems on natural axisymmetric vibrations of cylindrical shells, whose mechanical parameters vary smoothly over the thickness, as well as in estimating of how different rules of variations of these parameters influence the dynamical characteristics of the shells under radial-longitudinal axisymmetric vibrations. The elastic equations for circular cylindrical shells of the functionally gradient materials are derived taking into account the symmetry of elastic properties with respect to the mid-surface.

It is shown that the above shell theory can be used for determining vibration frequencies of cylindrical shells made of the functionally gradient materials with power-behaved elastic properties. In this case, the elastic properties of the functionally gradient material of the metal-metal type may be determined, as a rule, by the concentration of components. The shells manufactured from the functionally gradient materials based on the aluminum-SiC and stainless steel-nickel compositions are considered also. In the last case, the change in the elastic properties of the material at the relevant temperature regime is taken into account. The axisymmetric vibrations of circular cylindrical shells of functionally gradient materials under different boundary conditions are studied.

Key words: Timoshenko–Mindlin theory, free axisymmetric vibrations, the material with continuously varying properties

ВСТУП

Поява нових технологій у матеріалознавстві дозволила створити нові матеріали з прогнозованими властивостями, серед яких важливе місце займають функціонально градієнтні матеріали (ФГМ) [4], які мають механічні властивості, що плавно змінюються в деякому напрямку. При цьому механічною моделлю таких матеріалів обирається модель ізотропного неоднорідного в напрямку зміни пружних властивостей матеріалу. Градієнтні матеріали можна використовувати в машинобудуванні, радіопромисловості, приладобудуванні, медицині тощо.

Загальні задачі теорії пружності тіл з гіпотетичних градієнтних матеріалів розглянуто в роботах [1, 2]. Однак у зв'язку з суттєвою неоднорідністю матеріалу застосування тривимірної теорії пружності для задач динаміки тіл з ФГМ є проблематичним. У роботах [3, 5-10] досліджувались вільні коливання тіл циліндричної форми на базі різних теорій оболонок.

У цьому повідомленні досліджуються питання можливості застосування уточненої теорії оболонок Тимошенка-Міндліна до задач про вільні коливання циліндричних оболонок з механічними параметрами, що плавно змінюються вздовж товщини, а також вплив різних законів зміни властивостей на динамічні характеристики циліндричних оболонок при радіально-повздожніх осесиметричних коливаннях.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу про вільні коливання кругових циліндричних оболонок з функціонально градієнтного матеріалу з градієнтом зміни пружних властивостей у напрямку, перпендикулярному до серединної поверхні оболонки. Застосуємо уточнену модель Тимошенка-Міндіна, яка базується на гіпотезі прямої лінії. Сутність цієї гіпотези полягає в тому, що прямолінійний елемент нормалі вихідної координатної поверхні при малих деформаціях зберігає свою довжину та прямолінійність, але не залишається перпендикулярним до координатної поверхні. Згідно з прийнятою гіпотезою в системі координат γ, θ, z , пов'язаній з серединною поверхнею оболонки (γ – координата в напрямку нормалі серединної поверхні, $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq L$), малі переміщення точок можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} u_\gamma(\gamma, \theta, z, t) &= w(\theta, z, t), \quad u_\theta(\gamma, \theta, z, t) = v(\theta, z, t) + \gamma \psi_\theta(\theta, z, t), \\ u_z(\gamma, \theta, z, t) &= u(\theta, z, t) + \gamma \psi_z(\theta, z, t). \end{aligned} \quad (1)$$

де $u(\theta, z, t)$, $v(\theta, z, t)$, $w(\theta, z, t)$ – переміщення координатної поверхні, $\psi_\theta(\theta, z, t)$, $\psi_z(\theta, z, t)$ – функції, що характеризують незалежний повний поворот нормалі.

Відповідно до (1) вирази для деформацій набувають вигляду:

$$\begin{aligned} e_\theta(\gamma, \theta, z, t) &= \varepsilon_\theta(\theta, z, t) + \gamma \kappa_\theta(\theta, z, t), \\ e_z(\gamma, \theta, z, t) &= \varepsilon_z(\theta, z, t) + \gamma \kappa_z(\theta, z, t), \\ e_{\theta z}(r, \theta, z, t) &= \varepsilon_{\theta z}(\theta, z, t) + 2\gamma \kappa_{\theta z}(\theta, z, t), \\ e_{\gamma\theta}(r, \theta, z, t) &= \gamma_\theta(\theta, z, t), \\ e_{\gamma z}(r, \theta, z, t) &= \gamma_z(\theta, z, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $\varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{\theta z}$ – тангенціальні деформації координатної поверхні, $\kappa_\theta, \kappa_z, \kappa_{\theta z}$ – компоненти згинальної деформації, γ_θ, γ_z – кути повороту нормалі, зумовлені поперечними зсувами. Зв'язок деформацій та переміщень серединної поверхні оболонки задається формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \kappa_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}, \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \right), \quad 2\kappa_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \gamma_\theta &= \psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v, \quad \gamma_z = \psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння руху мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} &= I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial \psi_z}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta &= I_0 \frac{\partial v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta &= I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z &= I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial \psi_z}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta &= I_1 \frac{\partial v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

причому $N_{z\theta} - M_{\theta z} R^{-1} - N_{\theta z} = 0$. Тут $N_z, N_\theta, N_{\theta z}, N_{z\theta}$ – тангенціальні зусилля, Q_θ, Q_z – перерізувальне зусилля, $M_\theta, M_z, M_{\theta z}, M_{z\theta}$ – згинальні та обертальний моменти, $\rho(\gamma)$ – густина матеріалу оболонки. Інерційні члени I_0, I_1, I_2 , що входять в рівняння (4), обчислюються з урахуванням наявності градієнта пружних властивостей:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} \rho(\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix} d\gamma. \quad (5)$$

Співвідношення пружності для циліндричних оболонок з функціонально градієнтного матеріалу з урахуванням відсутності симетрії пружних властивостей відносно серединної поверхні запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} N_z &= C_{11}\varepsilon_z + C_{12}\varepsilon_\theta + K_{11}\kappa_z + K_{12}\kappa_\theta, \\ N_\theta &= C_{12}\varepsilon_z + C_{22}\varepsilon_\theta + K_{12}\kappa_z + K_{22}\kappa_\theta, \\ N_{z\theta} &= C_{66}\varepsilon_{\theta z} + 2D_{66} \frac{1}{R} \kappa_{\theta z}, \\ M_z &= K_{11}\kappa_z + K_{12}\kappa_\theta + D_{11}\kappa_z + D_{12}\kappa_\theta, \\ M_\theta &= K_{12}\kappa_z + K_{12}\kappa_\theta + D_{12}\kappa_z + D_{22}\kappa_\theta, \\ M_{\theta z} &= M_{z\theta} = 2D_{66}\kappa_{\theta z}, \\ Q_\theta &= K_2\gamma_\theta, \quad Q_z = K_1\gamma_z, \quad N_{\theta z} = C_{66}\varepsilon_{\theta z}, \end{aligned} \quad (6)$$

де жорсткісні характеристики оболонки, приведені до координатної поверхні, обчислюються за формулами:

$$\begin{pmatrix} C_{ij} \\ K_{ij} \\ D_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} B_{ij}(\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix} d\gamma, \quad (i, j) \in \{(1,1); (1,2); (2,2); (6,6)\}. \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} B_{11}(\gamma) &= B_{22}(\gamma) = E(\gamma)/(1-\nu^2(\gamma)), \\ B_{12}(\gamma) &= \nu(\gamma)E(\gamma)/(1-\nu^2(\gamma)), \quad B_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned}$$

E, G, ν – модулі пружності, зсуву та коефіцієнт Пуассона відповідно, які для градієнтного матеріалу з напрямком градієнта вздовж товщинної координати є функціями координати γ .

Необхідно зазначити, що для симетричної відносно серединної поверхні будови матеріалу у співвідношеннях пружності (6) коефіцієнти $K_{ij}(\gamma)$ для $(i, j) \in \{(1,1); (1,2); (2,2); (6,6)\}$, а в рівняннях руху (4) інерційний коефіцієнт I_1 дорівнюють нулю, і система рівнянь (3), (4), (6) значно спрощується.

На торцях $z = 0$ и $z = L$ будемо розглядати такі граничні умови:

- 1) контур шарнірно обпертий та вільний у напрямку твірної $-\frac{\partial u}{\partial z} = v = w = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \psi_\theta = 0$;
- 2) вільний контур $-N_z = 0, M_z = 0, Q_z = 0$.

При розгляді осесиметричних вільних коливань (усі функції, що входять до рівнянь (3), (4), (6), не залежать від θ , а їх похідні по θ дорівнюють нулю: $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$) система рівнянь руху (4) розпадається на дві незалежні системи, одна з яких відповідає радіально-повздожнім, а друга – крутильним коливанням. При цьому рівняння руху радіально-повздожніх коливань запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} &= I_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_z}{\partial z} - \frac{1}{R} N_\theta = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} - Q_z &= I_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Спрощуються рівняння зв'язку з переміщеннями серединної поверхні тангенціальних та згинальних деформацій серединної поверхні, а також кута повороту нормалі, зумовленого поперечними зсувами:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \kappa_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R^2} w, \quad \gamma_z = \psi_z + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (9)$$

Необхідні співвідношення пружності з урахуванням розгляду радіально-повздожніх коливань запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} N_z &= C_{11} \varepsilon_z + C_{12} \varepsilon_\theta + K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta, \quad N_\theta = C_{12} \varepsilon_z + C_{22} \varepsilon_\theta + K_{12} \kappa_z + K_{22} \kappa_\theta, \\ M_z &= K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta + D_{11} \kappa_z + D_{12} \kappa_\theta, \quad M_\theta = K_{11} \kappa_z + K_{12} \kappa_\theta + D_{11} \kappa_z + D_{12} \kappa_\theta, \\ Q_z &= K_1 \gamma_z. \end{aligned} \quad (10)$$

Вважаємо, що всі точки циліндричної оболонки гармонійно коливаються з круговою частотою ω , тобто

$$\{u(z, t), w(z, t), \psi_z(z, t)\} = \{\tilde{u}(z), \tilde{w}(z), \tilde{\psi}_z(z)\} e^{i\omega t} \quad (11)$$

(надалі знак \sim опускається).

Запишемо систему рівнянь (8), (9), (10) з урахуванням (11) у переміщеннях:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d^2 u}{dz^2} + K_{11} \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} &= -I_0 \omega^2 u - C_{12} \frac{1}{R} \frac{dw}{dz} + K_{12} \frac{1}{R^2} \frac{dw}{dz} - I_1 \omega^2 \psi_z, \\ K_{11} \frac{d^2 u}{dz^2} + D_{11} \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} &= -I_1 \omega^2 u - K_{12} \frac{1}{R} \frac{dw}{dz} + D_{12} \frac{1}{R^2} \frac{dw}{dz} + K_1 \frac{dw}{dz} + K_1 \psi_z - I_1 \omega^2 \psi_z, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\psi_z}{dz^2} = \frac{C_{12}}{K_1 R} \frac{1}{dz} \frac{du}{dz} + \frac{C_{22}}{K_1 R^2} w + \frac{K_{22}}{K_1 R^2} w - \frac{I_0}{K_1} \omega^2 w - \frac{d\psi_z}{dz} + \frac{K_{12}}{K_1 R} \frac{1}{dz} \frac{d\psi_z}{dz}, \quad (12)$$

яка після перетворень набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{-D_{11}I_0 + K_{11}I_1}{\Delta} \omega^2 u + \frac{-D_{11}I_1\omega^2 + K_{11}I_2\omega^2 - K_{11}K_1}{\Delta} \psi_z + \\ &+ \frac{D_{11}K_{12} - D_{12}K_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} + \frac{K_{11}K_{12} - D_{11}C_{12}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} - \frac{K_{11}K_1}{\Delta} \frac{dw}{dz}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{d\psi_z^2}{dz} = -\frac{C_{11}I_0\omega^2}{\Delta} u - \frac{C_{11}I_2\omega^2}{\Delta} \psi_z + \frac{K_1C_{11}}{\Delta R^2} \psi_z + \frac{-C_{11}K_{12}}{\Delta} \frac{dw}{dz} + \frac{D_{11}C_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz} + \frac{C_{11}K_1}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz},$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{C_{22}}{K_{11} R^2} w - \frac{I_0}{K_1} \omega^2 w + \frac{K_{22}}{K_1 R^2} w + \frac{C_{12}}{K_{11} R} \frac{1}{dz} \frac{du}{dz} - \frac{d\psi_z}{dz} - \frac{K_{12}}{K_1 R} \frac{1}{dz} \frac{d\psi_z}{dz} + \frac{D_{11}C_{11}}{\Delta R^2} \frac{dw}{dz}.$$

Система звичайних диференціальних рівнянь (13) разом з відповідними умовами при $z = 0$ і $z = L$ – це задача на власні значення.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Увівши позначення $\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial z}$, $\bar{\psi}_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}$, $\bar{w} = \frac{\partial w}{\partial z}$, $\bar{Y} = \{u, \bar{u}, \psi_z, \bar{\psi}_z, w, \bar{w}\}^T$, систему (13) з відповідними граничними умовами можна представити у вигляді

$$\frac{d\bar{Y}}{dz} = A(z, \omega)\bar{Y}, \quad (0 \leq z \leq L), \quad (14)$$

$$B_1\bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2\bar{Y}(L) = \bar{0}, \quad (15)$$

де $A(z, \omega)$ – квадратна матриця порядку 6×6 , B_1 та B_2 – прямокутні матриці порядку 3×6 . Задачу (14) з відповідними граничними умовами (15) можна розв'язати із застосуванням методів дискретної ортогоналізації та покрокового пошуку.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо циліндричну оболонку з функціонально градієнтного двокомпонентного матеріалу, для якого зміна пружних властивостей відбувається вздовж товщинної координати. Для градієнтного матеріалу типу «метал-метал» пружні властивості вдається визначити за концентрацією вхідних матеріалів. Відповідний зв'язок між модулем пружності E , коефіцієнтом Пуассона ν та густиною ρ функціонально градієнтного матеріалу з відповідними параметрами матеріалів, що входять до композиції, визначимо формулами

$$E = (E_2 - E_1)V + E_1, \quad \nu = (\nu_2 - \nu_1)V + \nu_1, \quad \rho = (\rho_2 - \rho_1)V + \rho_1, \quad (16)$$

де E_1, ν_1, ρ_1 и E_2, ν_2, ρ_2 – механічні параметри відповідно першого та другого матеріалів, V – концентрація другого з матеріалів композиції залежно від координати γ . Вважаємо, що ці залежності відповідають степеневому закону зміни пружних властивостей ФГМ вздовж координати γ : $V = \left(\frac{2\gamma + h}{2h}\right)^m$.

Передусім розглядався ФГМ на основі композиції «алюміній – SiC». Пружні параметри матеріалів композиції наведено в табл. 1.

Таблиця 1

	E , ГПа	ν	ρ , кг/м ³
Алюміній	70	0,3	2707
SiC	427	0,17	3100

У табл. 2 наведено перші п'ять частот $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}} \cdot 10^2$ вільних коливань циліндричної оболонки з ФГМ, які обчислено за тривимірною теорією пружності [1] та теорією Тимошенко-Міндліна для $m=0,5$. Тут $\rho_0 = 1$ кг/м³, $G_0 = 1$ ГПа. Торці оболонки шарнірно обперті. Геометричні параметри оболонки такі: довжина оболонки $L = 20l_0$, $R = 10l_0$, $h = 2l_0$.

Таблиця 2 – Порівняння частот вільних коливань циліндричної оболонки за різними теоріями

$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$
Теорія Тимошенка-Міндліна	3,1605	3,5005	4,6404	5,2606	6,5207
Тривимірна теорія	3,3005	3,6605	4,8407	5,5506	6,8507

Аналізуючи результати, наведені у таблиці, можна зробити висновок про малу відмінність частот вільних коливань циліндричної оболонки з ФГМ за вказаними теоріями, а, отже, і про можливість застосування методики до розрахунків частот вільних осесиметричних коливань циліндричної оболонки з несиметричною будовою відносно координатної поверхні.

У табл. 3 наведено перші три частоти $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}}$ вільних коливань вказаної вище вільної по торцях циліндричної оболонки з ФГМ, що обчислені за теорією Тимошенка-Міндліна, для різних значень параметра m .

Таблиця 3

m	0,5	1	2	5	10
$\bar{\omega}_1$	0,03160	0,02862	0,02481	0,02081	0,01860
$\bar{\omega}_2$	0,03181	0,02881	0,02543	0,02123	0,01901
$\bar{\omega}_3$	0,03262	0,02950	0,02588	0,02182	0,01983

Необхідно зазначити, що при зростанні параметра m жорсткість матеріалу зростає, що приводить до зменшення частот.

Розглядалися коливання циліндричних оболонок з ФГМ, який є композицією нержавіючої сталі та нікелю. Властивості матеріалів залежно від температури визначаються за формулою [10]:

$$P = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3), \quad (17)$$

де коефіцієнти P_i для визначення властивостей матеріалів наведено у табл.4.

Таблиця 4 – Коефіцієнти для визначення властивостей матеріалів [10]

P_i	Нержавіюча сталь			Нікель		
	$E, \text{н/м}^2$	ν	$\rho, \text{кг/м}^3$	$E, \text{н/м}^2$	ν	$\rho, \text{кг/м}^3$
P_0	$201,04 \times 10^9$	0,3262	8166	$223,95 \times 10^9$	0,31	8900
P_{-1}	0	0	0	0	0	0
P_1	$3,079 \times 10^{-4}$	$-2,002 \times 10^{-4}$	0	$-2,794 \times 10^{-4}$	0	0
P_2	$-6,534 \times 10^{-7}$	$3,797 \times 10^{-7}$	0	$-3,998 \times 10^{-9}$	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0

У табл. 5 представлено механічні параметри матеріалів для різних значень температур.

Таблиця 5 – Властивості матеріалів при різних температурах

T	Нержавіюча сталь			Нікель		
	$E, \text{н/м}^2$	ν	$\rho, \text{кг/м}^3$	$E, \text{н/м}^2$	ν	$\rho, \text{кг/м}^3$
300^0K	$2,07788 \times 10^{11}$	0,317756	8166	$2,05098 \times 10^{11}$	0,31	8900
400^0K	$2,04783 \times 10^{11}$	0,319895	8166	$1,98778 \times 10^{11}$	0,31	8900
500^0K	$1,99150 \times 10^{11}$	0,324512	8166	$1,92440 \times 10^{11}$	0,31	8900

У табл. 6 наведено перші чотири частоти $\bar{\omega}_i = \omega_i l_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}} \cdot 10^2$ вільних коливань циліндричної

оболонки з ФГМ (композиція «нержавіюча сталь-нікель») за температури $T = 300^0\text{K}$, які обчислено за теорією Тимошенка-Міндліна ($\rho_0 = 1 \text{ кг/м}^3$, $G_0 = 1 \text{ ГПа}$). Геометричні параметри оболонки такі: довжина оболонки $L = 20l_0$, $R = 4l_0$, $h = 2l_0$. Закон зміни властивостей вздовж товщинної координати є степеневим з $m = 0,5$.

Таблиця 6 – Частоти вільних коливань циліндра з ФГМ за різних граничних умов

Граничні умови	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
Шарнірне обпирання	0,02150	0,03524	0,03914	0,04164
Жорстке закріплення	0,02242	0,03776	0,04048	0,04276

ВИСНОВКИ

У роботі з використанням уточненої теорії Тимошенка-Міндліна досліджено вільні осесиметричні коливання циліндричних оболонок середньої товщини з неперервно неоднорідного матеріалу з будовою, що є несиметричною відносно до координатної поверхні. Обґрунтовано можливість застосування теорії для розрахунку частот коливань циліндричних оболонок з функціонально градієнтних матеріалів зі степеневим законом зміни пружних властивостей. При цьому розглянуто оболонки з ФГМ «Алюміній-*SiC*» та «нержавіюча сталь-нікель». В останньому випадку враховано зміни пружних властивостей за відповідного температурного режиму. Розглянуто коливання оболонок за різних граничних умов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кашталян М. Ю. Общее представление решения Лява в линейной неоднородной трансверсально-изотропной теории упругости / М. Ю. Кашталян, Я. Я. Рушицкий // Прикл. механика. – 2010. – 46, №2. – С. 3-14.
2. Кашталян М. Ю. Общее представление решения Лява в линейной неоднородной трансверсально-изотропной теории упругости при зависимости упругих постоянных от радиальной координаты / М. Ю. Кашталян, Я. Я. Рушицкий // Прикл. механика. – 2010. – 46, №4. – С. 3-13.
3. Alinaghizadenand M. R. Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects clamped-clamped boundary conditions / M. R. Alinaghizadenand, M. R. Isvandzihaei // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2011. – 73. – P. 825-831.
4. Birman V. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // V. Birman, L. W. Byrd // Applied Mechanics Reviews. – 2007. – 60. – P. 195-215.
5. Isvandzibaei M. R. Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects free-free and clamped-clamped boundary conditions / M. R. Isvandzibaei, A. Jahani // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2010. – 45. – P. 152-157.
6. Kumar J. S. Higher order theory for free vibration analysis of functionally graded material plates / J. S. Kumar, B. S. Reddy, S. E. Reddy, K. V. Kumar Reddy // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2011. – 6, №10. – P. 105-111.
7. Loy C. T. Vibration of functionally graded cylindrical shells / C. T. Loy, K. Y. Lam, J. N. Reddy // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 1999. – 41. – P. 309-324.
8. Najafizadeh M. M. Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order deformation plate theory with ring support / M. M. Najafizadeh, M. R. Isvandzihaei // Acta Mechanica. – 2007. – 191. – P. 75-91.
9. Pradhan S. C. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions / S. C. Pradhan, C. T. Loy, K. Y. Lam, J. N. Reddy // Appl. Acoustics. – 2000. – 61. – P. 111-129.
10. Loy C. T. Vibration of functionally graded cylindrical shells / C. T. Loy, K. Y. Lam, S. N. Reddy // International Journal of Mechanical Sciences. – 1999. – 41. – P. 309-324.

REFERENCES

1. Kashtalyan, M.Yu. and Ruschitsky, J.J. (2010), “Love solution in the linear inhomogeneous transversely isotropic theory of elasticity”, *Prikladnaya mekhanika*, 46, no. 2, pp. 121-129.
2. Kashtalyan, M.Yu. and Ruschitsky, J.J. (2010), “General Love solution in the linear inhomogeneous transversely isotropic theory of radius-dependent elasticity”, *Prikladnaya mekhanika*, 46, no. 4, pp. 367-376.
3. Alinaghizadenand, M.R. and Isvandzihaei, M.R. (2011), “Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects clamped-clamped boundary conditions”, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 73, pp. 825-831.
4. Birman, V. and Byrd, L.W. (2007), “Modeling and analysis of functionally graded materials and structures”, *Applied Mechanics Reviews*, 60, pp. 195-215.
5. Isvandzibaei, M.R. and Jahani, A. (2010), “Vibration of functionally graded cylindrical shells under effects free-free and clamped-clamped boundary conditions”, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 45, pp. 152-157.
6. Kumar, J.S., Reddy, B.S., Reddy, S.E. and Kumar Reddy, K.V. (2011), “Higher order theory for free vibration analysis of functionally graded material plates”, *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, 6, no. 10, pp. 105-111.
7. Loy, C.T., Lam, K.Y. and Reddy, J.N. (1999), “Vibration of functionally graded cylindrical shells”, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 41, pp. 309-324.
8. Najafizadeh, M.M. and Isvandzihaei, M.R. (2007), “Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order deformation plate theory with ring support”, *Acta Mechanica*, 191, pp. 75-91.
9. Pradhan, S.C., Loy, C.T., Lam, K.Y. and Reddy, J.N. (2000), “Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions”, *Appl. Acoustics*, 61, pp. 111-129.
10. Loy, C.T., Lam, K.Y. and Reddy, S.N. (1999), “Vibration of functionally graded cylindrical shells”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 41, pp. 309-324.

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Григоренко А. Я., д. ф.-м. н., профессор, Панкратьев С. А., аспирант,
Яремченко С. Н., к. ф.-м. н.

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, Украина*

ayagrigorenko@yandex.ua

В статье изложены основные положения подхода для статического анализа ортотропных пластин сложной формы на базе уточненной теории. Рассмотрен переход от неортогональной системы координат к ортогональной при помощи соответствующего преобразования, что позволило применить для решения рассматриваемых задач методы сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации.

Особенности применения подхода исследованы на примере серии изотропных пластин в форме дельтоидов и трапеций под воздействием равномерно распределенной нагрузки. Показано влияние геометрических параметров пластин и различных вариантов краевых условий на характеристики поверхности прогиба.

Ключевые слова: пластина сложной формы, напряженно-деформированное состояние, метод сплайн-коллокации, теория типа Тимошенко.

ОСОБЛИВОСТІ ПІДХОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Григоренко О. Я., д. ф.-м. н., професор, Панкратьев С. А., аспірант,
Яремченко С. М., к. ф.-м. н.

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, Україна*

ayagrigorenko@yandex.ua

У статті викладені основні положення підходу для статичного аналізу ортотропних пластин складної форми на базі уточненої теорії. Розглянуто перехід від неортогональної системи координат до ортогональної за допомогою відповідного перетворення, що дозволило застосувати для розв'язання розглянутих задач методи сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації.

Особливості застосування підходу досліджені на прикладі серії ізотропних пластин у формі дельтоїдів і трапецій під впливом рівномірно розподіленого навантаження. Показано вплив геометричних параметрів пластин і різних варіантів граничних умов на характеристики поверхні прогину.

Ключові слова: пластина складної форми, напружено-деформований стан, метод сплайн-колокації, теорія типу Тимошенка.

SOME FEATURES OF APPROACH TO SOLVING PROBLEMS ON THE STRESS-STRAIN STATE OF PLATES OF COMPLEX SHAPE

Grigorenko A. Ya., D.Sc. in Physics and Math, Professor,
Pankratiev S. A., graduate student, Yaremchenko S. N., Ph.D. in Physics and Math

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
Nesterova str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

ayagrigorenko@yandex.ua

The article describes the main points of approach for the static analysis of orthotropic plates of complex shape based on refined plates theory. Transition from non-orthogonal to an orthogonal coordinate

system using the corresponding transform is considered. This has made it possible applying the methods of spline-collocation and discrete orthogonalization for solution of these problems.

At the first stage, the basic relations that describe the stress-strain state of plates of complex shape in a non-orthogonal coordinate system are reduced by the transformation to a problem on the study of a rectangular plate in the orthogonal coordinate system. Modified in a way the boundary value problem is solved by numerical and analytical approach, which consists of two steps: conversion of two-dimensional boundary value problem in a one-dimensional by the method of spline collocation and resolving it with method of discrete orthogonalization.

Features of the approach that may appear as a difficulties in the calculations are studied by the example of series of isotropic plates in the form of deltoids and trapezoids with different geometry parameters under the influence of a uniformly distributed load. The boundary conditions for the hard, simply supported and free fixation of the edges are considered. The effect of the geometric parameters of the plates and the various options for the boundary conditions on the characteristics of the deflection surface is shown.

Key words: plates of complex shape, static analysis, method of spline-approximation, refined theory.

ВВЕДЕНИЕ

Широкое использование пластин из композитных материалов в качестве элементов механизмов и сооружений обуславливает постоянный интерес к методам анализа их прочностных характеристик. Среди используемых подходов, наряду с конечноэлементными и конечноразностными схемами, также широко применяются численно-аналитические методы анализа с использованием сплайн-аппроксимации [1–3], позволяющие сводить исходную двумерную краевую задачу к одномерной. Существующие для подобных подходов ограничения позволяют анализировать пластины в форме прямоугольника или диска, но испытывают сложности либо требуют применения специальных преобразований для задач со сложной геометрией объекта [3–5].

В данной статье авторами предложен подход на основе методов сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации с применением преобразования координат, которое позволяет свести исследуемую область к квадрату $[0..1, 0..1]$. Это дает возможность проводить решение задач о напряженно-деформированном состоянии ортотропных пластин, имеющих в плане форму произвольного выпуклого четырехугольника, на основе уточненной теории при различных вариантах распределения поверхностной нагрузки и закрепления краев.

В данной работе особое внимание уделено особенностям предложенного подхода для анализа четырехугольных пластин сложной формы, при исследовании которых могут возникать трудности вычислительного характера.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии прямоугольной $(0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b)$ ортотропной пластины толщиной h под воздействием равномерно распределенной поверхностной нагрузки q и запишем уравнения равновесия в соответствии с уточненной теорией на базе гипотезы прямой линии [6]:

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} + q = 0, \quad M_{1,1} + M_{21,2} - Q_1 = 0, \quad M_{2,2} + M_{12,1} - Q_2 = 0, \quad (1)$$

где Q_1, Q_2 — усилия среза, M_1, M_2, M_{21}, M_{12} — моменты изгиба и скручивания. Здесь и далее индексами после запятой обозначено дифференцирование по соответствующей координате.

Соотношения упругости для ортотропной пластины, чьи оси ортотропии совпадают с координатными осями, записываются как:

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2, \quad M_2 = D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2, \\ M_{12} &= M_{21} = 2D_{66}\kappa_{12}, \quad Q_1 = K_1\gamma_1, \quad Q_2 = K_2\gamma_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{12} = \nu_2 D_{11}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)},$$

$$D_{66} = \frac{G_{12}h^3}{12}, K_1 = \frac{5}{6}hG_{13}, K_2 = \frac{5}{6}hG_{23}.$$

Под $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ подразумеваем деформации изгиба, E_1, E_2, ν_1, ν_2 — модули упругости и коэффициенты Пуассона в направлениях x_1 и x_2 , G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига.

Выражения для деформаций через полные углы поворота ψ_1, ψ_2 прямолинейного элемента:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \psi_{1,1}, & \kappa_2 &= \psi_{2,2}, & 2\kappa_{12} &= \psi_{1,2} + \psi_{2,1}, \\ \gamma_1 &= \psi_1 + w_{,1}, & \gamma_2 &= \psi_2 + w_{,2}, \end{aligned} \tag{3}$$

Граничные условия для жесткого закрепления на сторонах $x_1 = const$ имеют вид:

$$w = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 = 0,$$

для шарнирного —

$$w = 0, \psi_{1,1} = 0, \psi_2 = 0,$$

а для свободного края —

$$Q_1 = \psi_1 + w_{,1} = 0, \quad M_1 = \psi_{1,1} + \nu_2\psi_{2,2} = 0, \quad M_{12} = \psi_{1,2} + \psi_{2,1} = 0$$

и на сторонах $x_2 = const$ задаются аналогично. Объединив уравнения равновесия (1) соотношения упругости (2) и выражения для деформаций (3), получим разрешающую систему уравнений относительно прогиба w и углов ψ_1, ψ_2 :

$$\begin{aligned} K_1\psi_{1,1} + K_1w_{,11} + K_2\psi_{2,2} + K_2w_{,22} &= -q, \\ D_{11}\psi_{1,11} + D_{12}\psi_{2,12} + D_{66}\psi_{1,22} + D_{66}\psi_{2,12} - K_1\psi_1 - K_1w_{,1} &= 0, \\ D_{22}\psi_{2,22} + D_{12}\psi_{1,12} + D_{66}\psi_{2,11} + D_{66}\psi_{1,12} - K_2\psi_2 - K_2w_{,2} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Для описания произвольной области в пространстве координат x_1, x_2 , ограниченной сторонами выпуклого четырехугольника, переведем ее в нормированную область $[0 \leq \xi_1 \leq 1], [0 \leq \xi_2 \leq 1]$ в новой системе координат ξ_1, ξ_2 с помощью замены переменных

$$\bar{x} = T \cdot \bar{\xi}, \tag{5}$$

где вектор \bar{x} имеет компоненты $\{x_1, x_2\}$, вектор $\bar{\xi}$ компоненты $\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2\}$, а компоненты t_{ij} матрицы перехода T определяются геометрией срединной поверхности четырехугольной пластины. Для четырехугольника с вершинами в точках $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), (x_{13}, x_{23}), (x_{14}, x_{24})$ они выражаются как

$$\begin{aligned} t_{11} &= x_{12}, & t_{12} &= x_{13} - x_{12}, & t_{13} &= x_{11} - x_{12}, & t_{14} &= x_{14} - x_{13} + x_{12} - x_{11}, \\ t_{21} &= x_{22}, & t_{22} &= x_{23} - x_{22}, & t_{23} &= x_{21} - x_{22}, & t_{24} &= x_{24} - x_{23} + x_{22} - x_{21}. \end{aligned}$$

Для записи разрешающей системы уравнений (4) в новых координатах с учетом преобразования (5) используем вектор \bar{f} с 18 компонентами $\{\psi_1, \psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,11}, \psi_{1,22}, \psi_{1,12}, \psi_2, \dots, w_{,12}\}$ и соответствующую матрицу коэффициентов S размером 3×18 . Уравнения (4) примут вид:

$$S \cdot \bar{f} = \bar{q}, \tag{6}$$

где вектор правых частей $\bar{q} = \{-q, 0, 0\}$.

Определение элементов матрицы \tilde{S} , аналогичной S и представляющей коэффициенты уравнений (4) в новой системе координат, требует нахождения выражений для всех компонентов вектора \bar{f} с учетом преобразования (5). Приведем вывод этих соотношений на примере функции прогиба $w(x_1, x_2)$.

Первые производные находятся из системы уравнений, составленной на основе известных выражений для частной производной сложной функции

$$w_{;1} = w_{,1}x_{1;1} + w_{,2}x_{2;1}, \quad w_{;2} = w_{,1}x_{1;2} + w_{,2}x_{2;2}.$$

Ее решением будут выражения

$$w_{;1} = Aw_{,1} + Bw_{,2}, \quad w_{;2} = Cw_{,1} + Dw_{,2}, \quad (7)$$

где A, B, C, D — выражения относительно ξ_1, ξ_2 :

$$A = x_{2;2}/(x_{1;1}x_{2;2} - x_{1;2}x_{2;1}), \quad B = -x_{2;1}/(x_{1;1}x_{2;2} - x_{1;2}x_{2;1}), \\ C = -x_{1;2}/(x_{1;1}x_{2;2} - x_{1;2}x_{2;1}), \quad D = x_{1;1}/(x_{1;1}x_{2;2} - x_{1;2}x_{2;1})$$

или в явном виде

$$A = (t_{24}\xi_1 + t_{23})/\chi, \quad B = -(t_{24}\xi_2 + t_{22})/\chi, \\ C = -(t_{14}\xi_1 + t_{13})/\chi, \quad D = (t_{14}\xi_2 + t_{12})/\chi, \quad (8)$$

с обозначением $\chi = (t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})\xi_1 + (t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13})\xi_2 + (t_{12}t_{23} - t_{22}t_{13})$.

Имея выражения для первых производных (7), можно получить и вторые частные производные, заменяя в правой части (7) функцию w на $w_{,1}$ либо $w_{,2}$:

$$w_{;11} = (AA_{;1} + BA_{;2})w_{,1} + (AB_{;1} + BB_{;2})w_{,2} + A^2w_{;11} + B^2w_{;22} + 2ABw_{;12}, \\ w_{;22} = (CC_{;1} + DC_{;2})w_{,1} + (CD_{;1} + DD_{;2})w_{,2} + C^2w_{;11} + D^2w_{;22} + 2CDw_{;12}, \\ w_{;12} = (AC_{;1} + BC_{;2})w_{,1} + (AD_{;1} + BD_{;2})w_{,2} + ACw_{;11} + BDw_{;22} + (AD + BC)w_{;12}. \quad (9)$$

Далее рассмотрим некий вектор \bar{m} с компонентами $\{w_{,1}, w_{,2}, w_{;11}, w_{;22}, w_{;12}\}$, которые являются производными функции $w(x_1, x_2)$ в исходной системе координат, соответствующий ему вектор \bar{m}^* с компонентами $\{w_{;1}, w_{;2}, w_{;11}, w_{;22}, w_{;12}\}$ в новых координатах и матрицу перехода L , для которых справедливо соотношение

$$\bar{m} = L \cdot \bar{m}^*. \quad (10)$$

Имея из (7) и (9) соотношения между компонентами \bar{m} и \bar{m}^* , можно записать ненулевые элементы матрицы перехода L :

$$l_{11} = A, \quad l_{12} = B, \quad l_{21} = C, \quad l_{22} = D, \\ l_{31} = AA_{;1} + BA_{;2}, \quad l_{32} = AB_{;1} + BB_{;2}, \quad l_{33} = A^2, \quad l_{34} = B^2, \quad l_{35} = 2AB, \\ l_{41} = CC_{;1} + DC_{;2}, \quad l_{42} = CD_{;1} + DD_{;2}, \quad l_{43} = C^2, \quad l_{44} = D^2, \quad l_{45} = 2CD, \\ l_{51} = AC_{;1} + BC_{;2}, \quad l_{52} = AD_{;1} + BD_{;2}, \\ l_{53} = AC, \quad l_{54} = BD, \quad l_{55} = AD + BC.$$

По аналогии с вектором \bar{f} для исходной системы координат введем вектор \bar{f}^* с 18 компонентами $\{\psi_1, \psi_{1;1}, \psi_{1;2}, \psi_{1;11}, \psi_{1;22}, \psi_{1;12}, \psi_2, \dots, w_{;12}\}$ и матрицу перехода P такую, что

$$P \cdot \bar{f}^* = \bar{f}. \quad (11)$$

В состав компонентов векторов \bar{f} и \bar{f}^* входят производные трех функций, для каждой из которых применимо соотношение (10). Введем обозначения: O — нулевая матрица размером 5×5 , o_c — нулевой вектор-столбец из пяти компонент, o_r — нулевая вектор-строка из пяти компонент. Тогда матрица P будет иметь вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & o_r & 0 & o_r & 0 & o_r \\ o_c & L & o_c & O & o_c & O \\ 0 & o_r & 1 & o_r & 0 & o_r \\ o_c & O & o_c & L & o_c & O \\ 0 & o_r & 0 & o_r & 1 & o_r \\ o_c & O & o_c & O & o_c & L \end{pmatrix}$$

С учетом (11) уравнения (6) запишутся в новой системе координат как

$$S \cdot (P \cdot \bar{f}^*) = \bar{q}^*$$

или

$$\tilde{S} \cdot \bar{f}^* = \bar{q}^*, \tag{12}$$

где \bar{f}^* и \bar{q}^* — аналоги векторов \bar{f} и \bar{q} в новой системе координат.

Уравнения (12) представляют собой разрешающую систему уравнений (4) в системе координат $\xi_1 0 \xi_2$ и содержат в себе информацию о геометрии исследуемой четырехугольной пластины.

В случае использования граничных условий, содержащих производные функции прогиба w и углов ψ_1, ψ_2 (шарнирное закрепление, свободный край), для решения задачи необходимо учесть изменения, обусловленные переходом к новой системе координат согласно (10). Граничные условия при шарнирном закреплении на сторонах $\xi_1 = const$ принимают вид:

$$w = 0, \quad A\psi_{1;1} + B\psi_{1;2} = 0, \quad \psi_2 = 0$$

с аналогичными поправками для ψ_2 на сторонах $\xi_2 = const$. В свою очередь, соотношения для свободного края на сторонах $\xi_1 = const$ изменяются на

$$\begin{aligned} \psi_1 + Aw_{;1} + Bw_{;2} &= 0, \\ A\psi_{1;1} + B\psi_{1;2} + v_2(C\psi_{2;1} + D\psi_{2;2}) &= 0, \\ C\psi_{1;1} + D\psi_{1;2} + A\psi_{2;1} + B\psi_{2;2} &= 0. \end{aligned}$$

Выражения A и B подразумеваются в значении, приведенном в (8).

В сочетании с теми или иными граничными условиями уравнения (12) образуют двумерную краевую задачу в уточненной постановке. Поскольку исходная область в виде произвольного четырехугольника в новых координатах имеет вид квадрата, упрощается задание граничных условий и для решения краевой задачи становится возможным использование метода дискретной ортогонализации в сочетании с методом сплайн-коллокации.

Для анализа ограничений на форму четырехугольной пластины, которые обусловлены применением предложенного подхода, рассмотрим два набора фигур: дельтоиды и трапеции. Переменным параметром, допустимые значения которого предстоит определить, будет угол α (рис. 1) в первом случае и соотношение оснований a/b (рис. 2) во втором. Для угла α дельтоидов рассмотрим как предельно малые, так и предельно большие значения. Длина сторон дельтоида, непосредственно образующих угол α , принята за 1, а оставшиеся углы β приняты равными. У равнобедренной трапеции приняты за 1 длины основания a и боковых сторон.

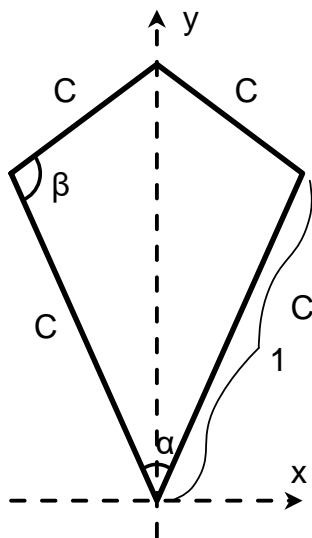


Рис. 1

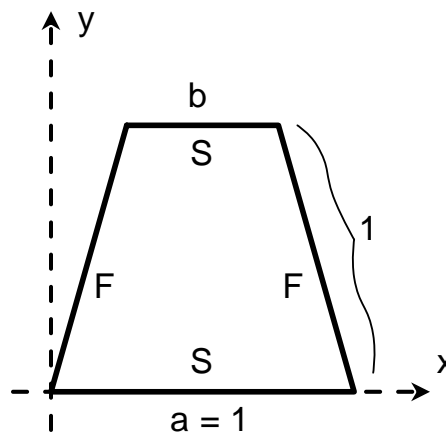


Рис. 2

Граничные условия для дельтоидов рассмотрены в виде жесткого защемления (clamped, C), а для трапеций — с шарнирным закреплением на основаниях (simply supported, S) и свободным краем на сторонах (free edge, F).

Поверхностную нагрузку $q(x_1, x_2)$ будем полагать равномерно распределенной ($q = q_0$), а пластины толщиной $h = 0,1$ с целью упрощения расчета — изотропными ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Для решения сформированного набора задач применен многократно описанный в научной литературе и публикациях [2, 6, 7] метод дискретной ортогонализации (дискретной прогонки) в сочетании с методом сплайн-коллокации.

Поскольку разрешающая система уравнений получена на базе уточненной теории пластин и, соответственно, в уравнениях присутствуют частные производные искомых функций до второго порядка включительно, для сплайн-аппроксимации использованы В-сплайны третьей степени. Решение задачи, например для функции прогиба $w(x_1, x_2)$, ищется в виде

$$w(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^N w_i(x_1) \varphi_i(x_2), \quad (13)$$

где w_i — неизвестные функции, φ_i — линейные комбинации В-сплайнов третьей степени. Расчет аппроксимирующих функций φ_i с учетом условий закрепления на краях производится по схеме, приведенной в [5]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_2) &= \alpha_{11} B_3^{-1} + \alpha_{12} B_3^0, \\ \varphi_1(x_2) &= B_3^{-1} + \alpha_{21} B_3^0 + \alpha_{22} B_3^1, \\ \varphi_i(x_2) &= B_3^i, \quad i = 2, \dots, N-2, \\ \varphi_{N-1}(x_2) &= B_3^{N+1} + \beta_{21} B_3^N + \beta_{22} B_3^{N-1}, \\ \varphi_N(x_2) &= \beta_{11} B_3^{N+1} + \beta_{12} B_3^N. \end{aligned}$$

Сплайн-функции B_3^i строятся на равномерной сетке узлов Δ с шагом $x_2^{i+1} - x_2^i$; коэффициенты α_{ij}, β_{ij} , с учетом обозначений

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad A_\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix},$$

для жесткого закрепления на краях $x_2 = const$ равны

$$A_\alpha = A_\beta = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

а для шарнирного —

$$A_\alpha = A_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

С целью повышения точности аппроксимации, точки коллокации выбираются внутри интервалов между узлами сетки x_2^{2i}, x_2^{2i+1} по схеме: $\epsilon_{2i} = x_2^{2i} + t_1(x_2^{2i+1} - x_2^{2i})$, $\epsilon_{2i+1} = x_2^{2i} + t_2(x_2^{2i+1} - x_2^{2i})$, где t_1, t_2 — корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0; 1]$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Используя представление искомых функций в форме (13), из исходной двумерной краевой задачи получаем одномерную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Последняя решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [7].

При расчетах для всех обозначенных ранее задач была использована аппроксимация по координате ξ_2 с 30 парами точек коллокации. Решение полученной таким образом системы ОДУ произведено для 1500 точек интегрирования.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Влияние формы изотропных пластин в виде дельтоида на численное решение задачи и параметры искомой поверхности прогиба $w(x_1, x_2)$ при воздействии равномерно распределенной нагрузки было исследовано для 10 вариантов значений угла α . Последние наряду с нормированной величиной максимального прогиба $\hat{w} = wE/q_0$ и координатами соответствующих точек приведены в табл. 1.

Общая форма поверхности прогиба для угла $\alpha = 15^\circ$ показана на рис. 3 с сохранением масштаба по осям, а на рис. 4 — с числовыми значениями изолиний поверхности без сохранения масштаба. Поверхность прогиба для некоторых других значений α показана на рис. 6–9. При значении $\alpha = 1^\circ$ расчет привел к некорректному результату, что нашло свое отражение в табл. 1 и на рис. 5.

Таблица 1 — Результаты расчетов максимального прогиба \hat{w} и координат соответствующей точки для дельтоидов при различных значениях угла α

α	\hat{w}_{max}	x_1	x_2
1°	—*	—	—
2°	0,0043426	9,31E-05	0,962714
5°	0,0257738	8,72E-05	0,931212
10°	0,103236	-5,81E-05	0,896618
15°	0,245628	-5,22E-04	0,872174
165°	33,8905	-0,00132193	0,600752
170°	33,8474	-0,00199239	0,593863
175°	33,6256	-0,00266413	0,587146
178°	33,4112	-9,99E-16	0,579916
179°	33,3252	0,00133328	0,577947

* получен некорректный результат

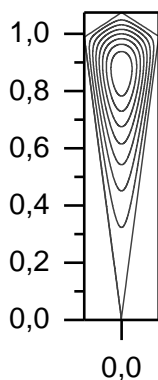


Рис. 3. $\alpha = 15^\circ$

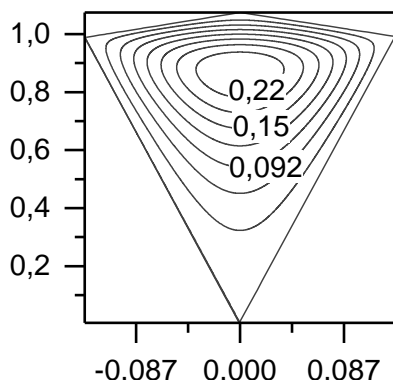


Рис. 4. $\alpha = 15^\circ$

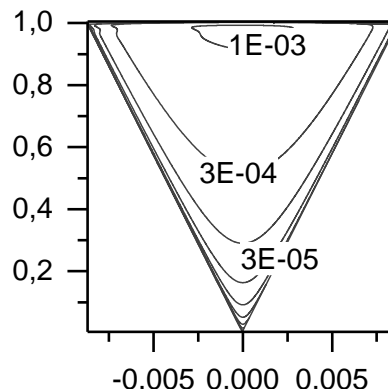


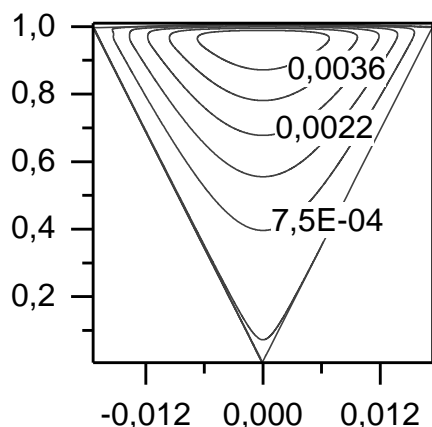
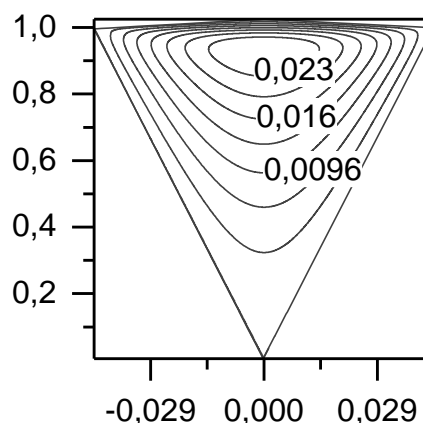
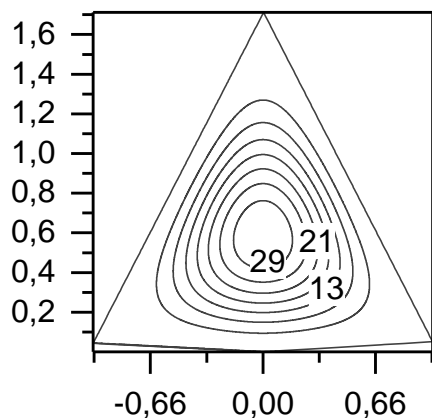
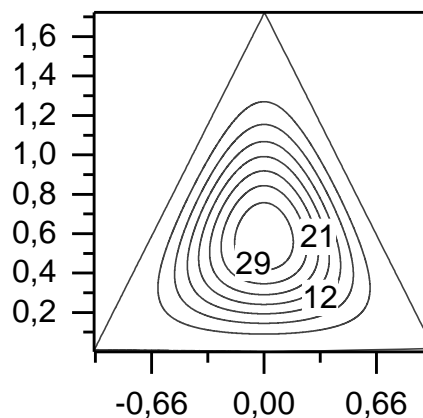
Рис. 5. $\alpha = 1^\circ$

Как видно из схемы (рис. 1) и вида поверхностей прогиба (рис. 3–7) при малых значениях α пластина, фактически, приобретает форму «плоской иглы». При этом предложенный численно-аналитический подход для статического анализа обеспечивает корректный результат для значений угла $\alpha \geq 2^\circ$.

Для больших значений углов (165° – 179°), когда дельтоид приближается по форме к треугольнику (рис. 8, 9), все варианты задач получили корректное решение: с приближением к треугольнику и, соответственно, уменьшением площади воздействия нагрузки q_0 происходит уменьшение значений максимального прогиба \hat{w}_{max} . Координата x_1 соответствующей точки для всех вариантов угла α близка к 0, что говорит о высокой степени симметрии поверхности относительно оси x_2 .

Влияние соотношения оснований трапеции a/b (схема рис. 2) на ход расчета и вид результирующей поверхности прогиба \hat{w} произведен для значений $a/b = 1..1000$, т.е. в крайних значениях трапеция превращается в квадрат ($a/b = 1$) или почти треугольник

($a/b = 1000$). Числовые значения рассмотренных вариантов параметра a/b и результаты расчета максимального прогиба $\hat{w} = wE/q_0$ приведены в табл. 2. Вид поверхности прогиба для некоторых из них приведен на рис. 10, 11.

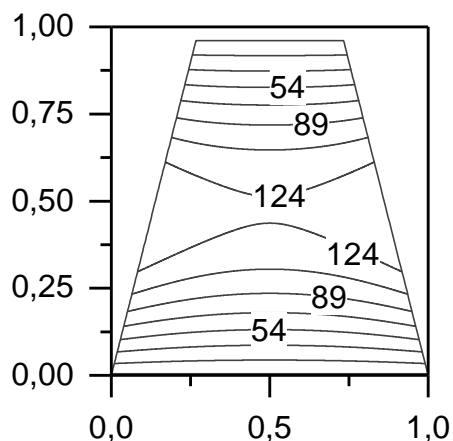
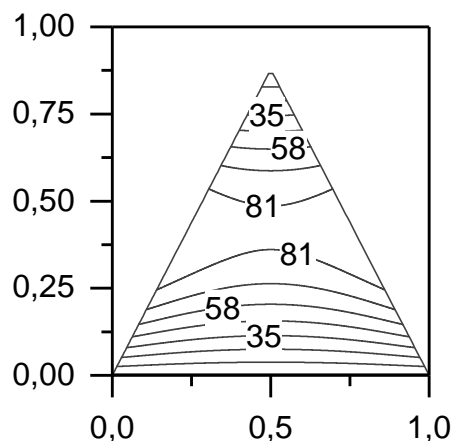
Рис. 6. $\alpha = 2^\circ$ Рис. 7. $\alpha = 5^\circ$ Рис. 8. $\alpha = 175^\circ$ Рис. 9. $\alpha = 179^\circ$

Поскольку условия закрепления на боковых сторонах трапеции приняты свободными, максимальный прогиб достигается в двух точках, на краю левой и правой стороны. Соответственно для значений максимального прогиба \hat{w}_{max} в табл. 2 приведены два значения координаты x_1 и только одно для x_2 .

По характеру изменения значений в табл. 2 видно, что величина прогиба \hat{w} , начиная со значений $a/b = 100$, изменяется незначительно, а расчет остается корректным для всех рассмотренных вариантов значений a/b вплоть до 1000.

Таблица 2 — Результаты расчетов максимального прогиба \hat{w} и координат соответствующих точек для трапеций при различных значениях соотношения оснований a/b

a/b	\hat{w}_{max}	x_1	x_2
1,000	170,35	0,000 / 1,000	0,501
2,154	141,39	0,126 / 0,874	0,452
4,641	114,25	0,178 / 0,822	0,416
10,00	101,17	0,201 / 0,799	0,399
21,54	95,87	0,211 / 0,789	0,389
46,41	93,71	0,216 / 0,784	0,385
100,0	92,79	0,219 / 0,781	0,384
215,4	92,37	0,220 / 0,780	0,383
464,1	92,18	0,221 / 0,779	0,383
1000	92,10	0,221 / 0,779	0,383

Рис. 10. $a/b = 2,154$ Рис. 11. $a/b = 100,0$

ВЫВОДЫ

В статье приведено решение задач о напряженно-деформированном состоянии четырехугольных пластин сложной геометрии в уточненной постановке. Для рассматриваемого класса объектов исходные соотношения уточненной теории пластин записываются в неортогональной системе координат. Авторами предложен численно-аналитический подход, который позволяет проводить статический анализ пластин сложной формы с различными геометрическими параметрами.

На первом этапе основные соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние пластин сложной формы в неортогональной системе координат, приводятся с помощью преобразования к задаче по исследованию прямоугольной пластины в ортогональной системе координат. Модифицированная таким способом краевая задача решается с помощью численно-аналитического подхода, который состоит из двух этапов. На первом этапе двумерная краевая задача в частных производных преобразуется в одномерную задачу с помощью метода сплайн-коллокации. Полученная краевая задача для системы ОДУ решается устойчивым методом дискретной ортогонализации.

В качестве примера рассмотрены задачи о напряженно-деформированном состоянии серии пластин в форме дельтоидов и трапеций. Рассмотрены граничные условия для жесткого, шарнирного и свободного закрепления краев. Показаны особенности применения предложенного подхода в случае различных геометрических параметров пластин. Показано влияние геометрии пластины и граничных условий на характеристики поверхности прогиба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grigorenko Ya. M. Using spline-functions to solve boundary-value problems for laminated orthotropic trapezoidal plates of variable thickness / Ya. M. Grigorenko, N. N. Kryukov, N. S. Yakovenko // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – 41, No. 4. – P. 413–420.
2. Grigorenko A. Ya. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory / A. Ya. Grigorenko et al. – *SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Continuum Mechanics.* – 2016. – Vol. 1.
3. Kryukov N. N. Design of oblique and trapezoidal plates using spline functions / N. N. Kryukov // *Prikl. Mekh.* – 1997. – 33, No. 5. – P. 3–27.
4. Shufrin I. A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates / I. Shufrin, O. Rabinovitch, M. Eisenberger // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2010. – 52. – P. 1588–1596.
5. Shahidi A. R. Nonlinear static analysis of arbitrary quadrilateral plates in very large deflections / A. R. Shahidi, M. Mahzoon, M. M. Saadatpour, M. Azhari // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2007. – 12. – P. 832–848.

6. Григоренко Я. М. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів : навчальний посібник / Я. М. Григоренко, В. Д. Будак, О. Я. Григоренко. – Миколаїв : Ліон, 2010. – 294 с.
7. Godunov S. K. Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations / S. K. Godunov // Usp. Mat. Nauk. – 1961. – 16, No. 3. – P. 171–174.

REFERENCES

1. Grigorenko, Ya.M., Kryukov, N.N. AND Yakovenko, N.S. (2005), “Using spline-functions to solve boundary-value problems for laminated orthotropic trapezoidal plates of variable thickness”, *Int. Appl. Mech.*, **41**, no. 4, pp. 413–420.
2. Grigorenko, A.Ya. et al. (2016), *Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory*, vol. 1, SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Continuum Mechanics.
3. Kryukov, N.N. (1997), “Design of oblique and trapezoidal plates using spline functions”, *Prikl. Mekh.*, **33**, no. 5, p. 3–27.
4. Shufrin, I., Rabinovitch, O. and Eisenberger, M. (2010), “A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **52**, pp. 1588–1596.
5. Shahidi, A.R., Mahzoon, M., Saadatpour, M.M. and Azhari, M. (2007), “Nonlinear static analysis of arbitrary quadrilateral plates in very large deflections”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **12**, pp. 832–848.
6. Grigorenko, Ya.M., Budak, V.D. and Grigorenko, A.Ya. (2010), *Rozv'yazannya zadach teoriyi obolonok na osnovi dyskretno-kontynual'nykh metodiv* [Solving the problems of shells based on discrete-continuous methods] Ilion, Nikolaev.
7. Godunov S.K. (1961), “Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations,” *Usp. Mat. Nauk*, **16**, no. 3, pp. 171–174.

УДК 539.3

NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED SHALLOW SHELLS WITH TIME DEPENDENT PARAMETERS UNDER STATIC LOADING

Gristchak V. Z., Dr. Techn. Sci., professor, Fatieieva Yu. A., PhD student

*Zaporizhzhya national university,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

fateevajulia@gmail.com

This paper deals with research of nonlinear vibration of imperfect shallow shells made of functionally graded materials (FGM) with thickness dependent from time under static and dynamic loadings. The material properties are changing in the thickness direction according to the given power law distribution and the non-linear strain-displacement relationships based on the von Karman theory for moderately large normal deflections. Initial nonlinear system of differential equations transforms to singular ordinary differential equations with variable in time coefficients, which is solved by hybrid perturbation and WKB-Galerkin methods in three steps. Comparison of numerical integration of initial equation and approximate analytical solutions are given.

Key words: Asymptotic approach, nonlinear dynamic problem, FGM shallow shells, time dependent parameters.

НЕЛІНІЙНИЙ ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ З ПАРАМЕТРАМИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСУ, ПІД ДІЄЮ СТАТИЧНИХ ЗУСИЛЬ

Грищак В. З., д. т. н., професор, Фатеева Ю. О., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*

fateevajulia@gmail.com

Стаття присвячена нелінійним коливанням пологих оболонок із функціонально градієнтних матеріалів (ФГМ) під дією статичних зусиль. Властивості матеріалу змінюються в напрямку товщини відповідно до степеневого закону. Нелінійні залежності деформації-переміщення ґрунтуються на теорії Кармана для відносно великих нормальних переміщень. Початкова нелінійна система диференціальних рівнянь трансформується до сингулярного нелінійного диференціального рівняння зі змінними за часом коефіцієнтами, яке вирішується гібридним трикроковим збуренням – ВКБ-Гальоркін методом. Надається порівняння результатів чисельного інтегрування основного рівняння проблеми із запропонованим наближеним аналітичним розв'язком.

Ключові слова: асимптотичний підхід, нелінійна динамічна проблема, ФГМ пологі оболонки, залежні від часу параметри.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ СТАТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Грищак В. З., д. т. н., профессор, Фатеева Ю. А., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина*

fateevajulia@gmail.com

Данная статья посвящена нелинейным колебаниям пологих оболочек из функционально градиентных материалов (ФГМ) под действием статических усилий. Свойства материала изменяются по толщине в соответствии со степенным законом. Нелинейные зависимости деформации-перемещения основаны на теории Кармана для относительно больших перемещений. Исходная нелинейная система дифференциальных уравнений преобразуется к сингулярному нелинейному дифференциальному уравнению с переменными во времени коэффициентами, которое решается гибридным трехшаговым возмущением – ВКБ-Галеркин методом. Дается сравнение результатов численного интегрирования основного уравнения проблемы с предложенным приближенным аналитическим решением.

Ключевые слова: асимптотический поход, нелинейная динамическая проблема, ФГМ пологие оболочки, зависящие от времени параметры.

INTRODUCTION

Thin walled structures made of functionally graded materials (FGM) with metal inner surface and ceramic in outer surface are widely used, for example, in modern air-space systems, shipbuilding, electronics and other fields of science and technology because of their flexibility in design to have desired strength and durability.

FGMs are the heterogeneous composite materials in which the material properties are changing in the thickness direction or discontinuous as a stepwise gradation of the material constituents [1, 2, 4, 11]. Composite shell structures which are used for modern flying apparatus undergo large deflection and/or static and nonlinear dynamic external mechanical loads. That is why it is important to take into account the geometrically nonlinear effects to ensure more accurate structural analysis and design. In recent years, important studies about vibration and stability of FGM plates and shells under static, dynamic loading and in high temperature environment have been carried out, with using mostly numerical approaches [1-6, 17-19] and just few ones deal with analytical-numerical approaches [12-15].

The present paper deals with an approximate analytical solution of nonlinear dynamic problem of FGM imperfect shallow shells based upon the von Karman theory for moderately large normal deflections with time dependent parameters (for example, with thickness depending on time) on the basis of hybrid (P-WKB) asymptotic method, which was successfully applied earlier [7-10, 16, 20, 21].

FORMULATION OF THE PROBLEM. AN APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION

Suppose the FGM imperfect shallow shell is simply supported at its edges and subjected to a transverse load $q_0(t)$ and compressive edge loads $r_0(t)$, $p_0(t)$. With respect to paper [1, 9, 10, 16] it is assumed that modulus of elasticity and the mass density changes in the thickness direction, while the Poisson ratio is assumed to be constant and thickness of shell is function of time. In this analysis, some mechanical properties of shell material are function of time. For this reason, mathematical model became more complicated from the point of view for analytical solution.

In the spirit of [1] consider that initial imperfections in the middle shell surface, a system of nonlinear differential equations for functions of the normal stress and displacement based on the von Karman theory for large deflections are:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)} \Delta \Delta (w - w_0) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = q_0, \\ \frac{1}{E_1} \Delta \Delta \varphi = -k_1 \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x_2^2} - k_2 \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x_1^2} + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] - \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where q_0 is intensity of transverse load, φ is stress function w is deflection.

For the given boundary conditions the deflection function $w = (x_1, x_2, t)$ is chosen here as

$$w(x_1, x_2, t) = f(t) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}. \quad (2)$$

The regular initial imperfection of middle surface of shell are taken in the form

$$w_0(x_1, x_2) = f_0 \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad (3)$$

where f_0 is the amplitude of initial imperfection.

Then, applying the Bubnov-Galerkin procedure to the Karman equations (1), we obtain the nonlinear second order ordinary differential equation with variable in time coefficients for function $f(t)$ in the following form:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{d^2 f}{dt^2} + f \left(1 + 2f_0 \bar{A}_2(t) - \bar{A}_3(t) f_0^2 - \bar{A}_1(t) \right) + f^2 \left(-3\bar{A}_2(t) \right) + f^3 \bar{A}_3(t) = \\ = Q_0 - \bar{A}_0(t) + f_0 - \bar{A}_2(t) f_0^2, \end{aligned} \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = \frac{1}{\omega_{mn}^2}, \quad A_0(t) = \frac{16h(t)}{\pi^2 mn} (k_1 r_0 + k_2 p_0), \quad A_1(t) = \frac{\pi^2 h(t)}{a^2} (m^2 r_0 + n^2 \lambda^2 p_0), \\ A_2(t) = \frac{16E_1(t) mn \lambda^2 (k_1 n^2 \lambda^2 + k_2 m^2)}{3a^2 (m^2 + n^2 \lambda^2)^2}, \quad A_3(t) = \frac{512E_1(t) m^2 n^2 \lambda^4}{9a^4 (m^2 + n^2 \lambda^2)^2}, \quad \bar{A}_i = \frac{A_i}{\omega_{mn}^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho_1(t)} \left[\frac{(E_1 E_3 - E_2^2)}{E_1 (1 - \nu^2)} \cdot \frac{(m^2 + n^2 \lambda^2) \pi^2}{a^4} + \frac{E_1 (k_1 n^2 \lambda^2 + k_2 m^2)^2}{(m^2 + n^2 \lambda^2)^2} \right],$$

$$E(t) = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k + 1} \right) h(t), \quad \rho = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k + 1} \right) h(t), \quad \nu(z) = const,$$

where k_1, k_2 are curvatures of middle surface shell in x_1 and x_2 directions, $E(t)$ is Young's modulus, ρ is mass density, $\nu(z)$ – Poisson's ratio, $h(t)$ is thickness of construction, which is depends of time. The volume-fractions of the metal and ceramic phases base by power law $V_m + V_c = 1$, (m – belongs to metal, c – to ceramic), V_c can be express as $V_c = \left(\frac{2z + h(t)}{2h(t)} \right)^k$, k is the volume-fraction exponent ($k \geq 0$).

Basic differential equation (4) is rewritten in the form

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 f}{dt^2} + B_1(t) f + \mu (B_2(t) f^2 + B_3(t) f^3) = \bar{Q}_0(t), \tag{6}$$

where

$$B_1(t) = 1 + 2f_0 \bar{A}_2(t) - \bar{A}_3(t) f_0^2 - \bar{A}_1(t), \quad B_2(t) = \frac{-3}{\mu} \bar{A}_2(t), \quad B_3(t) = \frac{1}{\mu} \bar{A}_3(t), \tag{7}$$

$$\bar{Q}_0(t) = Q_0 - \bar{A}_0(t) + f_0 - \bar{A}_2(t) f_0^2,$$

ε, μ are small parameters.

According to the perturbation method with respect to the parameter of nonlinearity μ , a solution of the differential equation (6) is presented in the form of the following two terms approximation [7]:

$$f(t) = \varphi_0(t) + \mu \varphi_1(t). \tag{8}$$

Substituting (7) into equation (5) and acquainted the terms with the same order of the small parameter we obtain the system equations for unknown functions $\varphi_0(t)$ and $\varphi_1(t)$:

$$\mu^0: \quad \varepsilon^2 \varphi_0''(t) + B_1(t) \varphi_0 = \bar{Q}_0, \tag{9}$$

$$\mu^1: \quad \varepsilon^2 \varphi_1''(t) + B_1(t) \varphi_1 = -B_2(t) \varphi_0^2 - B_3(t) \varphi_0^3. \tag{10}$$

The system of ordinary singular differential equations with variable in time coefficient B_1 is solved by two terms WKB-approximation [5]. Finally, we have obtained the solution of nonlinear problem on the basis of the perturbation two-terms WKB method as

$$f(t) = \varphi_0(t) + \mu \varphi_1(t) = \sin K(t) (c_1 + \bar{c}_1(t)) + \cos K(t) (c_2 + \bar{c}_2(t)) +$$

$$+ \mu \left(\sin K(t) (d_1 + \bar{d}_1(t)) + \cos K(t) (d_2 + \bar{d}_2(t)) \right) = \tag{11}$$

$$= B_1(t)^{0.25} \left\{ \sin K(t) [c_1 + \bar{c}_1(t) + \mu \bar{d}_1(t)] + \cos K(t) [c_2 + \bar{c}_2(t) + \mu \bar{d}_2(t)] \right\},$$

where

$$K(t) = \int \varepsilon^{-1} B_1^{\frac{1}{2}}(t) dt, \tag{12}$$

$$\bar{c}_1(t) = \varepsilon \int \frac{\bar{Q}_0(t) \cos K(t)}{B_1^{0.25}(t)} dt, \quad \bar{c}_2(t) = -\varepsilon \int \frac{\bar{Q}_0(t) \sin K(t)}{B_1^{0.25}(t)} dt, \tag{13}$$

$$\bar{d}_1(t) = \varepsilon \int \frac{(-B_2(t)\varphi_0^2 - B_3(t)\varphi_0^3)\bar{Q}_0(t)\cos K(t)}{B(t)^{-0.25}} dt, \quad (14)$$

$$\bar{d}_2(t) = -\varepsilon \int \frac{(-B_2(t)\varphi_0^2 - B_3(t)\varphi_0^3)\bar{Q}_0(t)\sin K(t)}{B_1(t)^{-0.25}} dt. \quad (15)$$

Initial conditions are taken in the following form:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1, \\ \varphi'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

In the third step on the hybrid (P-WKB-G) asymptotic method we will keep the perturbation functions but replaced the gauge functions by new amplitudes which depend on ε . In the Bubnov-Galerkin orthogonally principle one seeks an approximate solution in the form of a linear combination of specified (known) coordinate functions with unknown amplitude δ_0 which is a function of ε :

$$f_H(t, \varepsilon) = \exp \int \delta_0(\varepsilon) \varphi_0(t) dt, \quad (17)$$

where

$$\delta_{01,2} = -\frac{\bar{Q}_0(b) - \bar{Q}_0(a)}{\pm 4 \int_a^b \left(i \bar{Q}_0(t)^{\frac{3}{2}} \right) dx} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{Q}_0(b) - \bar{Q}_0(a)}{4 \int_a^b \left(i \bar{Q}_0(t)^{\frac{3}{2}} \right) dx} \right)^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}}. \quad (18)$$

The result of three-step hybrid asymptotic solution of initial non-homogeneous nonlinear differential equation with variable coefficients for function $f^H(t)$ is given in the following form:

$$\begin{aligned} f^H(t) &= B_1(t) \left\{ \sin I^H(t, \delta_{01}) \left[c_1 + \bar{c}_1(\bar{Q}_0(t), N(f_0)) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos I^H(t, \delta_{02}) \left[c_2 + \bar{c}_2(Q_0(t), N(f_0)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

where

$$I^H(t) = \pm \int \delta_{01,2} i Q_0(t)^{1/2} dt. \quad (20)$$

INFLUENCE OF STATIC LOADING AND INITIAL IMPERFECTION OF THE MIDDLE SHELL SURFACE

In this section, we presented the influence of static loading and imperfections of the middle shell surface, where thickness given in form (21). On the Figure 1 there is comparison of asymptotic solution with direct numerical calculation of initial equation, where parameter of static loading is 0.5, amplitude of imperfection is 0.1. On the Figure 2 there is a mold of imperfect shell under static loading, where forced vibration function and parameter a are given by relations (22), (23) respectively. Shapes of shell vibrations for different wave numbers are presented on the Figure 3-9.

$$h(t) = h_0(1 - \eta t), \quad (21)$$

$$Q_0 = \sin \Omega t, \quad (22)$$

$$a = k_1 p_0 + k_2 r_0. \quad (23)$$

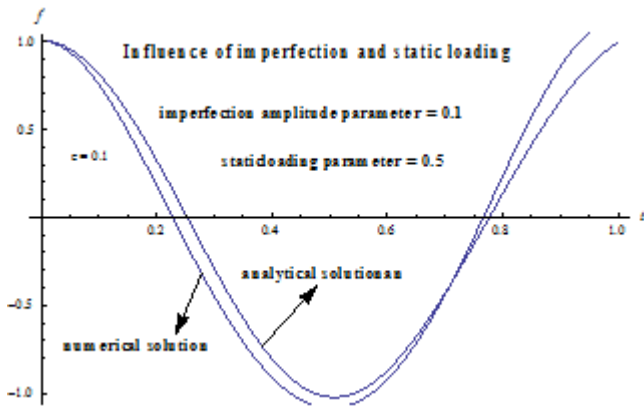


Fig. 1. Comparison of analytical and numerical solutions

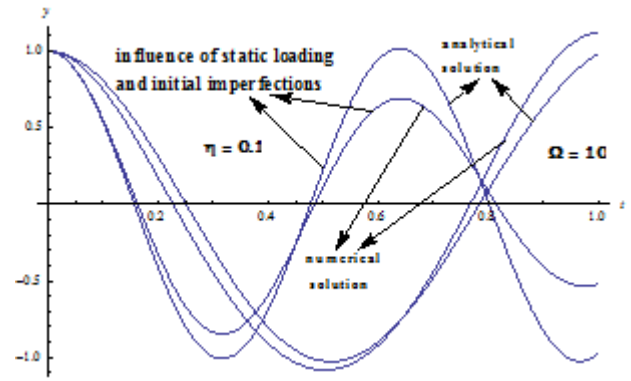


Fig. 2. Influence of static loading and initial imperfection parameters

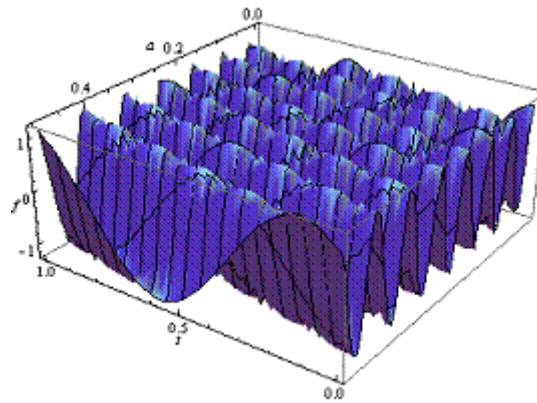


Fig. 3. Vibration mold of imperfect shell under static loading

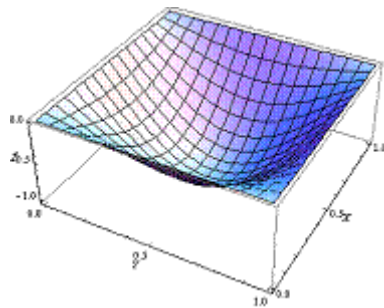


Fig. 4. Shapes of shell vibrations for:
 $m=1, n=1, t=0.5, a=0.1$

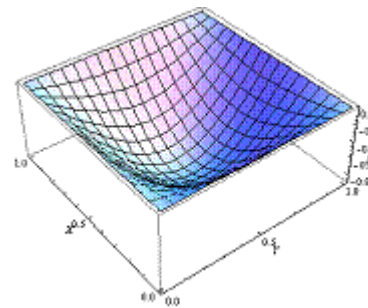


Fig. 5. Shapes of shell vibrations for:
 $m=1, n=1, t=0.5, a=0.2$

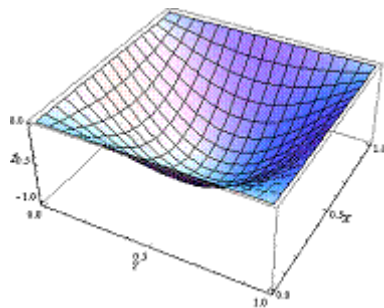


Fig. 6. Shapes of shell vibrations for:
 $m=1, n=1, t=0.5, a=0.25$

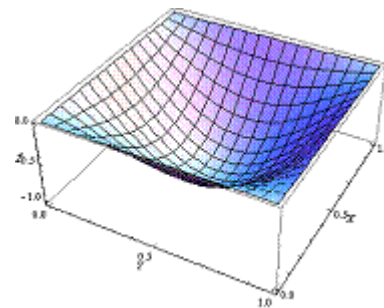


Fig. 7. Shapes of shell vibrations for:
 $m=1, n=1, t=0.5, a=0.5$

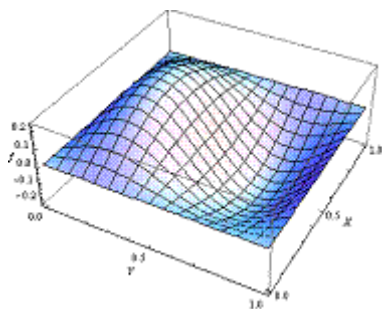


Fig. 8. Shapes of shell vibrations for:
 $m = 2, n = 1, t = 0.5, a = 0.1$

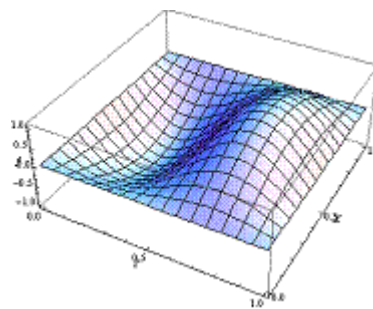


Fig. 9. Shapes of shell vibrations for:
 $m = 2, n = 1, t = 0.5, a = 0.5$

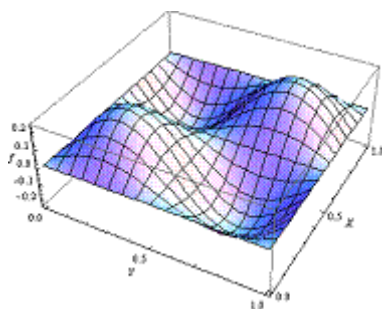


Fig. 10. Shapes of shell vibrations for:
 $m = 2, n = 1, t = 0.5, a = 0.8$

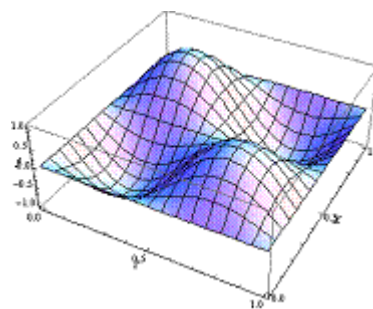


Fig. 11. Shapes of shell vibrations for:
 $m = 2, n = 1, t = 0.5, a = 0.6$

CONCLUSIONS

An approximate analytical solution for forced vibrations of non-linear FGM shallow cylindrical shells with time dependent thickness on the basis of hybrid perturbation-two-terms WKB approximation method are obtained. In particularly influence of static loading parameter leads to changing of vibration shapes of structure. For some parameters of structure, analytical solutions are in a good enough correlations with direct numerical simulation of initial nonlinear differential equation with variable in time coefficients. Further investigations will be devoted to analyze the nonlinear dynamic behavior of complex shape FGM shell including temperature effects.

REFERENCES

1. Dao Huy Bich. Nonlinear Dynamical Analysis of Imperfect Functionally Graded Materials Shallow Shells / Dao Huy Bich, Yu Do Long // Int. Vietnam Journal of Mechanics. – 2010 – P. 1-14.
2. Vu Thi Thuy Anh. Nonlinear Axisymmetric Response of Thin FGM Shallow Spherical Shells with Ceramic-Metal-Ceramic Layers under External Pressure and Temperature / Vu Thi Thuy Anh, Nguyen Dinh Duc // Int. VNU Journal of Mathematics, physics. – 2013 – P. 1-15.
3. Katarzhyna Kowal-Michalska. Static and Dynamic Thermomechanical Buckling Load of Functionally Graded Plate / Katarzhyna Kowal-Michalska, Radoslaw J. Mania // Int. Mechanics and Mechanical Engineering, – 2013 – P. 99-112.
4. Khaire P. D. Nonlinear Free Vibration Response of FGM Cylindrical Shell in Thermal Environment / P. D. Khaire, N. H. Amhore, K. R. Jagtap // Int. Journal on Mech. Engineering and Robotics. – 2014 – Vol. 2. – P. 37-41.
5. Kurpa L. V. Determination of eigen frequencies of functionally graded material shallow shells with using of R-function and spline-approximation. / L. V. Kurpa, A. A. Osetrov, T. V. Shmatko // Int. Announcer of NTU KhPI. – 2014. – Vol. 6. – P. 99-111.
6. Stronzzi M. Nonlinear Vibrations of Functionally Graded Shells Subjected Harmonic External Load / M. Stronzzi, F. Pellicano // Proc. 4-th Int. Conf. on Nonlinear Dynamics, Sevastopol. – 2014. – P. 341-346.
7. Geer J. F. Natural Frequency Calculations Using a Hybrid Perturbation Galerkin Technique / J. F. Geer, C. V. Andersen // Pan-American Congress on Appl. Mech. – 1991. – P. 571-574.

8. Gristchak V. Z. A Hybrid WKB-Galerkin Method Applied to a Piezoelectric Sandwich Plate Vibration Problem Considering Shear Force Effects / V. Z. Gristchak, O. A. Ganiilova // *Journal of Sound and Vibration*. – 2008. – Vol. 317. – P. 366-377.
9. Грищак В. З. Влияние начальных несовершенств на нелинейное динамическое поведение оболочечных конструкций из функционально-градиентных материалов переменной во времени толщины / В. З. Грищак, Ю. А. Фатеева // *Вестник ЗНУ. Физико-математические науки*. – 2015. – № 3. – С. 58-66.
10. Gristchak V. Z. An approximate analytical solution for nonlinear FGM Shell structure with variable in time parameters / V. Z. Gristchak, Yu. A. Fatieieva // *ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Crete Island, Greece, 5-10 June 2016. – 2016. – Vol. 4, № 4. – P. 8654-8664.
11. Swaminathan K. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates / K. Swaminathan, D. T. Naveenkumar // *Int. A state-of-the-art review Composite Structures*. – 2015. – Vol. 120. – P. 10-31.
12. Obata Y. Transient thermal stresses in a plate of functionally gradient material / Y. Obata, N. Noba // *Int. Ceramic Trans Funct Grad Mater*. – 1993. – Vol. 34. – P. 403-410.
13. Aboudi J. Response of functionally graded to thermal gradients / J. Aboudi, S. M. Arnold, M. J. Pindara // *Int. Compos. Eng*. – 1994. – Vol. 4, № 1. – P. 1-18.
14. Aboudi J. Thermo-inelastic response of functionally graded composites / J. Aboudi, M. J. Pindara, S. M. Arnold // *Int. J Solids Struct*. – 1995. – Vol. 32, № 12. – P. 675-710.
15. Aboudi J. A coupled higher-order theory for functionally graded composites with partial homogenization / J. Aboudi, M. J. Pindara, S. M. Arnold // *Int. Compos. Eng*. – 1995. – Vol. 5, № 7. – P. 771-992.
16. Gristchak V. Z. An approximate analytical solution of vibration problem for imperfect FGM shallow shell with time dependent thickness under static loading / V. Z. Gristchak, Y. A. Fatieieva // *Int. 5th INTERNATIONAL CONFERENCE NONLINEAR*, V.L. Rvachev, September 27-30, 2016. – 2016. – Vol. 1. – P. 298.
17. Dao Huy Bich. Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects / Dao Huy Bich, Dao Van Dung, Le Kha Hoa // *Int. Vietnam Journal of Mechanics*. – 2012. – P. 2952-2962.
18. Hoang Van Tung. Nonlinear thermomechanical stability of shear deformable FGM shallow spherical shells resting on elastic foundations with temperature dependent properties / Van Tung Hoang // *Int. Composite Structures*. – 2014. – 114. – P. 107-116.
19. Nguyen Dinh Duc. Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic-metal-ceramic FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations and subjected to axial compression / Dinh Duc Nguyen, Toan Thang Pham // *Int. Composite Structures*. – 2014. – 110. – P. 200-206.
20. Gristchak V. Z. Influence of initial imperfections on nonlinear dynamic behavior of functionally graded material shell structures with variable in time thickness / V. Z. Gristchak, Y. A. Fatieieva // *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*. – 2015. – No 3. – P. 58-66.
21. Fatieieva Yu. Influence of external periodic oscillation of a shallow shell structures made of FGM with variable thickness in time / Y. A. Fatieieva // *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*. – 2016. – No 1. – P. 251-256.

REFERENCES

1. Dao Huy Bich and Yu Do Long (2010), “Nonlinear Dynamical Analysis of Imperfect Functionally Graded Materials Shallow Shells”, *Int. Vietnam Journal of Mechanics*, pp. 1-14.
2. Vu Thi Thuy Anh and Nguyen Dinh Duc (2013), “Nonlinear Axisymmetric Response of Thin FGM Shallow Spherical Shells with Ceramic-Metal-Ceramic Layers under External Pressure and Temperature”, *Int. VNU Journal of Mathematics, physics*, pp. 1-15.

3. Katarzhyna, Kowal-Michalska and Radoslaw, J. Mania (2013), "Static and Dynamic Thermomechanical Buckling Load of Functionally Graded Plate", *Int. Mechanics and Mechanical Engineering*, pp. 99-112.
4. Khaire, P.D., Amhore. N.H. and Jagtap, K.R. (2014), "Nonlinear Free Vibration Response of FGM Cylindrical Shell in Thermal Environment", *Int. Journal on Mech. Engineering and Robotics*, vol. 2, pp. 37-41.
5. Kurpa, L.V., Osetrov, A.A. and Shmatko, T.V. (2014), "Determination of eigen frequencies of functionally graded material shallow shells with using of R-function and spline-approximation", *Int. Announcer of NTU KhPI*, vol. 6, pp. 99-111.
6. Stronzzi, M. and Pellicano, F. (2014), "Nonlinear Vibrations of Functionally Graded Shells Subjected Harmonic External Load", *Proc. 4-th Int. Conf. on Nonlinear Dynamics*, Sevastopol, pp. 341-346.
7. Geer, J.F. and Andersen, C.V. (1991), "Natural Frequency Calculations Using a Hybrid Perturbation Galerkin Technique", *Pan-American Congress on Appl. Mech.*, pp. 571-574.
8. Gristchak, V.Z. and Ganilova, O.A. (2008), "A Hybrid WKB-Galerkin Method Applied to a Piezoelectric Sandwich Plate Vibration Problem Considering Shear Force Effects", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 317, pp. 366-377.
9. Gristchak, V.Z. and Fatieieva, Yu. (2015), "Influence of initial imperfections on nonlinear dynamic behavior of functionally graded material shell structures with variable in time thickness", *Vestnik ZNU*, no. 3, pp. 58-66.
10. Gristchak, V.Z. and Fatieieva, Yu.A. (2016), "An approximate analytical solution for nonlinear FGM Shell structure with variable in time parameters", *ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Crete Island, Greece, 5-10 June 2016, vol. 4, no. 4, pp. 8654-8664.
11. Swaminathan, K. and Naveenkumar, D.T. (2015), "Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates", *Int. A state-of-the-art review Composite Structures*, vol. 120, pp. 10-31.
12. Obata, Y. and Noba, N. (1993), "Transient thermal stresses in a plate of functionally gradient material", *Int. Ceramic Trans Funct Grad Mater.*, vol. 34, pp. 403-410.
13. Aboudi, J., Arnold, S.M. and Pindara, M.J. (1994), "Response of functionally graded to thermal gradients", *Int. Compos. Eng.*, vol. 4, no. 1, pp. 1-18.
14. Aboudi, J., Thermo-inelastic response of functionallygraded composites / J. Aboudi, M. J. Pindera, S. M. Arnold // *Int. J Solids Struct.* – 1995. – Vol. 32, № 12. – P. 675-710.
15. Aboudi J. Pindara, M.J. and Arnold, S.M. (1995), "A coupled higher-order theory for functionally graded composites with partial homogenization", *Int. Compos. Eng.*, vol. 5, no. 7, pp. 771-992.
16. Gristchak, V.Z. and Fatieieva, Yu.A. (2016), "An approximate analytical solution of vibration problem for imperfect FGM shallow shell with time dependent thickness under static loading", *Int. 5th INTERNATIONAL CONFERENCE NONLINEAR V.L. Rvachev*, September 27-30, 2016, vol. 1, pp. 298.
17. Dao Huy Bich, Dao Van Dung and Le Kha Hoa (2012), "Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects", *Int. Vietnam Journal of Mechanics*, pp. 2952-2962.
18. Hoang Van Tung (2014), "Nonlinear thermomechanical stability of shear deformable FGM shallow spherical shells resting on elastic foundations with temperature dependent properties", *Int. Composite Structures*, 114, pp. 107-116.
19. Nguyen Dinh Duc and Toan Thang Pham (2014), "Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic-metal-ceramic FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations and subjected to axial compression", *Int. Composite Structures*, 110, pp. 200-206.
20. Gristchak, V.Z. and Fatieieva, Yu.A. (2015), "Influence of initial imperfections on nonlinear dynamic behavior of functionally graded material shell structures with variable in time thickness", "Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences", no. 3, pp. 58-66.
21. Fatieieva, Yu.A. (2016), "Influence of external periodic oscillation of a shallow shell structures made of FGM with variable thickness in time", *Visnyk of Zaporizhzhya National University, Physical and Mathematical Sciences*, no. 1, pp. 251-256.

УДК 539.3

УПРАВЛІННЯ ВИМУШЕНИМИ КОЛИВАННЯМИ ОБЕРТОВОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА З ДОВЖИНОЮ І МАСОЮ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСУ

Грищак Д. Д.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

gristchak@gmail.com

У статті запропоновано метод дослідження проблеми управління вимушеними коливаннями обертого математичного маятника з довжиною і масою, залежними від часу при заданому характері зовнішнього навантаження. Дається порівняння здобутого аналітичного розв'язку з прямим чисельним інтегруванням основного рівняння задачі. На основі гібридного асимптотичного підходу надається вирішення нелінійної проблеми.

Ключові слова: математичний маятник, змінні за часом довжина та маса, асимптотичний розв'язок, нелінійна задача.

УПРАВЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ДЛИНОЙ И МАССОЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ

Грищак Д. Д.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

gristchak@gmail.com

В работе предложен метод исследования проблемы управления вынужденными колебаниями вращающегося математического маятника с длиной и массой, зависящими от времени, при заданном характере внешнего нагружения. Дается сравнение полученного аналитического решения с прямым численным интегрированием основного уравнения задачи. На основе гибридного асимптотического подхода дается решение нелинейной проблемы.

Ключевые слова: математический маятник, переменные во времени длина и масса, асимптотическое решение, нелинейная задача.

CONTROL FOR FORCED VIBRATIONS OF ROTATING MATHEMATICAL PENDULUM WITH DEPENDENT FROM TIME LENGTH AND MASS

Gristchak D. D.

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

gristchak@gmail.com

This paper deals with the proposed method for investigation of control problem for forced vibrations of rotating mathematical pendulum with dependent from time length and mass under the given external loading. Rotating pendulum with time dependent parameters as a mathematical model of a dynamical system is discussed. The model includes a vibrating ball with dependent from time mass, which is embedded in the inner surface of the solid thin walled two dimensional torus of radius equal to length of pendulum. The ball can slide without friction in the inner surface of the torus, and the torus may be rotated with a circumferential speed (in the general case dependent from time). Basic equation of problem is nonlinear non homogeneous differential equation with variable coefficients that in the general case can not be integrated analytically exactly. There are more popular direct numerical methods of integration this type of equations or approximate asymptotic approaches. For the solution of nonlinear problem on the first step of hybrid asymptotic approximation the solution is presented with respect to perturbation method on parameter nonlinearity. Introducing it into initial equation and acquainting the coefficients at equal order of parameter nonlinearity, the system of singular linear equations with variable coefficients is obtained. On the second step the phase integral (or WKB) method is explored.

Finally an approximate analytical solution for the problem is formulated. Comparison of obtained analytical solution with direct numerical integration of basic equation for forced vibration pendulum with time dependent parameters and an approximate analytical solution for control of forced rotating pendulum with length and mass dependent from time are given.

Key words: mathematical pendulum, dependent from time length and mass, asymptotic solution, nonlinear problem.

ВСТУП

Проблема управління математичним маятником зі змінними за часом параметрами привертає останнім часом увагу дослідників у зв'язку з тим, що модель маятника може суттєво відображати основні динамічні ефекти в реальних системах. Актуальність проблеми простежується як з точки зору застосування сучасних математичних методів дослідження нелінійних задач динаміки систем зі змінними у часі параметрами, так і з точки зору безпосереднього прикладного значення цієї проблеми. У цьому сенсі особлива увага приділяється знаходженню законів заспокоєння коливань систем із заданими параметрами, залежними від часу. Необхідно зазначити, що існуючі розв'язки, зазвичай, зводяться до вирішення рівняння Мат'є за умови наявності кубічної складової нелінійного рівняння динаміки системи зі сталими параметрами. Що стосується огляду сучасного стану проблеми динаміки систем зі змінними за часом параметрами, посилаємось до публікацій [1, 2, 4-7]. На відміну від існуючих досліджень нелінійної динаміки математичного маятника зі змінними параметрами, у нашому дослідженні привертається увага до ефекту обертання маятника зі змінними за часом довжиною і масою як приклад біфуркації системи, яка призводить до спонтанного порушення симетрії діаграми біфуркації [3].

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ПРОБЛЕМИ

Як динамічна модель системи зі змінними в часі параметрами розглядається обертаючий математичний маятник, тобто система (яка складається з коливальної кулі, маса якої є функцією часу), «вкладена» у внутрішню поверхню твердого тонкостінного двомірного тору радіусу $L(t)$ [1]: куля може без тертя ковзати у внутрішній поверхні тору, а сам тор може обертатися, як показано на рис. 1, з кутовою швидкістю Ω , у загальному випадку залежною від часу. Якщо тороїдальна оболонка не обертається, система з маятником і з не залежними від часу маси і довжини має два стаціонарних стани [3]: один стійкий ($v=0$), другий не стійкий ($v=\pm\pi$). Суттєвим є з'ясування впливу характеру зміни параметрів маятника в часі та введення нового степеня свободи, а саме обертання тороїдальної оболонки із заданою швидкістю, на динамічну поведінку системи.

У неінерціальній системі координат на масу діють: тангенціальна складова ваги і тангенціальна складова центробіжної сили.

Запишемо рівняння маятника для кінцевих коливань від стану рівноваги, як це зображено на рисунку 1. Діюча сила – це проекція на дотичну ваги коливальної маси, дорівнює $m(t)g \sin \nu$

, частота коливань – $\omega = \frac{dv}{dt}$, $m(t) \frac{dv}{dt}$ – інерціальна складова,

$m(t) \frac{d[\omega L(t)]}{dt} = m(t) \left[L(t) \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{dL(t)}{dt} \right]$. Діючі сили дорівнюють проекції на дотичну ваги

коливальної маси – $m(t)g \sin \nu$ та від обертання $m(t)\Omega^2 L \sin \nu \cos \nu$.

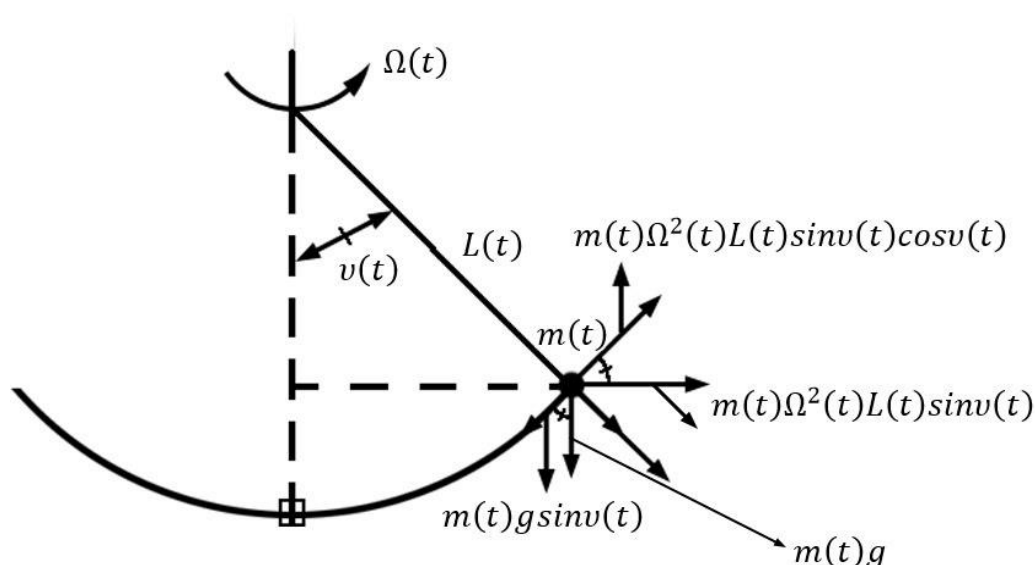


Рис. 1. Обертаючий нелінійний маятниковий осцилятор зі змінними за часом параметрами

Основне диференціальне рівняння вимушених коливань має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t)L(t) \frac{d\nu}{dt} \right] = -m(t)g \sin \nu + m(t)\Omega^2(t)L(t)\sin \nu \cos \nu + F(t). \quad (1)$$

Рівняння (1) після перетворень може бути представлено у вигляді:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + D'(t) \frac{d\nu}{dt} = \sin \nu \left[\Omega^2(t) \cos \nu - G(t) \right] + \tilde{F}(t), \quad (2)$$

де

$$D'(t) = \frac{m'(t)}{m(t)} + \frac{L'(t)}{L(t)}, \quad Q(t) = \Omega^2(t), \quad \tilde{F}(t) = \frac{F(t)}{m(t)L(t)},$$

$$G(t) = \frac{g}{L(t)} = \frac{g}{L_0 [1 + \psi(t)]} = \frac{\omega_0^2}{[1 + \psi(t)]}. \quad (3)$$

Задаючи параметри системи як функції від часу

$$m(t) = m_0 [1 + \phi(t)], \quad L(t) = L_0 [1 + \psi(t)], \quad \Omega(t) = \Omega_0 [1 + \eta(t)]. \quad (4)$$

Основне рівняння (2) представляється у формі:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + D'(t) \frac{d\nu}{dt} = \omega_0^2 \left\{ \frac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2} [1 + \eta(t)]^2 \sin 2\nu - \frac{\sin \nu}{[1 + \psi(t)]} \right\} + \tilde{F}(t). \quad (5)$$

У нових позначеннях рівняння (5) має вигляд:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + D'(t) \frac{d\nu}{dt} = \mu \left[\beta_0^2 \phi(t) \sin 2\nu - \frac{\sin \nu}{1 + \psi(t)} \right] + \tilde{F}(t), \quad (6)$$

де $\mu = \frac{g}{L_0} = \omega_0^2$ – параметр власної частоти коливань лінеаризованої системи, тобто частоти, з якою коливається лінійний гармонічний маятник при малих відхиленнях від рівноваги;

$\phi(t) = [1 + \eta(t)]^2$ – функція зміни швидкості обертання маятника від часу; $\beta_0^2 = \frac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2}$ – відносний параметр частот коливань,

$$D'(t) = \frac{\varphi'(t)}{[1 + \varphi(t)]} + \frac{\psi'(t)}{[1 + \psi(t)]} \quad (7)$$

– функція зміни маси та довжини маятника за часом.

Рівняння (6) є нелінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами, яке в загальному вигляді не допускає точного аналітичного розв'язку. У цих випадках застосовуються, зазвичай, прямі чисельні методи інтегрування, або наближені асимптотичні підходи.

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОСНОВНОГО РІВНЯННЯ

Відповідно до роботи [5], на першому етапі застосування гібридного асимптотичного методу розв'язок рівняння (6) подаємо у вигляді розкладу за методом збурення по параметру μ :

$$v(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \dots = \sum_{i=0}^N v_i(t) \mu^i. \quad (8)$$

Підставляючи (8) у рівняння (6) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметру μ , отримаємо зв'язану систему лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\mu^0: \frac{d^2 v_0}{dt^2} + D'(t) \frac{dv_0}{dt} = \tilde{F}(t), \quad (9)$$

$$\mu^1: \frac{d^2 v_1}{dt^2} + D'(t) \frac{dv_1}{dt} = \beta_0^2 \phi(t) \sin 2v_0 - \frac{\sin v_0}{1 + \psi(t)}. \quad (10)$$

На першому етапі дослідження основна увага зосереджується на аналізі вимушених коливань лінійної системи зі змінними за часом параметрами, тобто на аналізі рівняння (9).

Розв'язок рівняння (9) має вигляд:

$$v_0(t) = v_0^0(t) + v_0^p(t), \quad (11)$$

де

$$P(t) = D'(t), \quad (12)$$

$$v_0^0(t) = c_1 \int \left\{ \exp \left[\int -P(t) dt \right] \right\} dt + c_2, \quad (13)$$

$$v_0^p(t) = \bar{c}_1(t) \int \left\{ \exp \left[\int -P(t) dt \right] \right\} dt + \bar{c}_2(t) \quad (14)$$

і загальний розв'язок набуває форми

$$v_0(t) = \int \left\{ \exp \left[\int -P(t) dt \right] \right\} dt \left\{ c_1 + \int \frac{\tilde{F}(t)}{\exp \left[\int -P(t) dt \right]} dt \right\} + \left\{ c_2 - \int \frac{\tilde{F}(t) \int \left\{ \exp \left[\int -P(t) dt \right] \right\} dt}{\exp \left[\int -P(t) dt \right]} dt \right\}. \quad (15)$$

Довільні константи визначаються з початкових умов

$$\begin{aligned} v_0(0) &= 1, \\ v_0'(t) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

і мають форму для цих початкових умов:

$$\begin{aligned} c_1 &= \int \frac{\tilde{F}(t)}{\exp \left[\int -P(t) dt \right]} dt = \frac{1}{\omega_1}, \\ c_2 &= \int \frac{\tilde{F}(t) \int \left\{ \exp \left[\int -P(t) dt \right] \right\} dt}{\exp \left[\int -P(t) dt \right]} dt = 1 + \text{Sin}[\omega_1] \text{Cos}I[\omega_1] - \text{Cos}[\omega_1] \text{Sin}I[\omega_1], \end{aligned} \quad (17)$$

де $\text{Cos}I$, $\text{Sin}I$ – інтегральні Cos , Sin .

Чисельний аналіз вимушених коливань лінійної системи зі змінними в часі параметрами провадився за даними:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1.0m; \quad \eta(t) = \gamma t; \quad \psi(t) = \beta t; \quad \varphi(t) = \alpha t; \\ m_0 &= 1.0kg; \quad L(t) = L_0(1 + \beta t); \quad \Omega(t) = \Omega_0(1 + \gamma t); \\ m(t) &= m_0(1 + \alpha t); \quad \Omega_0 = 10m/sec; \quad P(t) = 2/(1+t); \\ F(t) &= F_0 \text{Sin} \omega_1 t; \quad \tilde{F}(t) = \text{Sin}[t]/(1+t)^2, \quad \alpha = \beta = 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язок неоднорідної лінійної задачі має вигляд

$$v_0(t) = \int \exp I_0(t) dt [c_1 + I_{01}^p(t)] + [c_2 + I_{02}^p], \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} I_0(t) &= \int -P(t) dt = -2 \text{Log}[1+t], \\ I_{01}^p(t) &= \int \text{Sin}[t]/\exp[I_0(t)] dt = -\text{Cos}[t], \\ I_{02}^p(t) &= \int \frac{\tilde{F}(t)}{E_0(t)} \exp[I_0(t)] dt = \int \frac{\text{Sin}[t]}{(1+t)} dt = -0.8415 \text{Cos}I[1+t] + 0.54 \text{Sin}I[1+t], \\ E_0(t) &= \exp I_0(t) = 1/[1+t]^2. \end{aligned} \quad (20)$$

З урахуванням початкових умов (16) розв'язок (19) для $\omega_1 = 1$ можна представити у формі:

$$v_0(t) = \left(-\frac{1}{1+t} \right) (1 - \text{Cos}[t]) + [0.7727 - 0.8415 \text{Cos}I(1+t) + 0.54 \text{Sin}I(1+t)]. \quad (21)$$

Основні залежності розв'язку (21) надані на рис. 2-7.

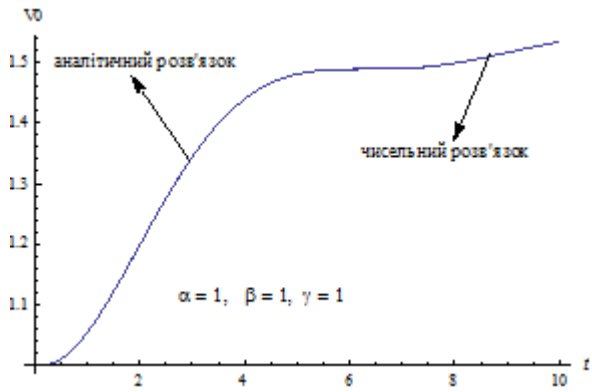


Рис. 2. Співставлення аналітичного (21) та чисельного розв'язків

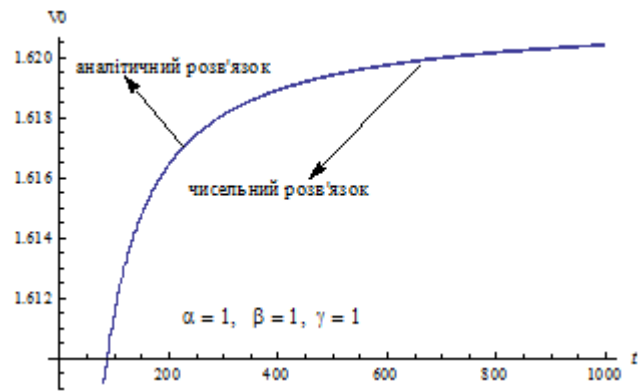


Рис. 3. Співставлення аналітичного (21) та чисельного розв'язків

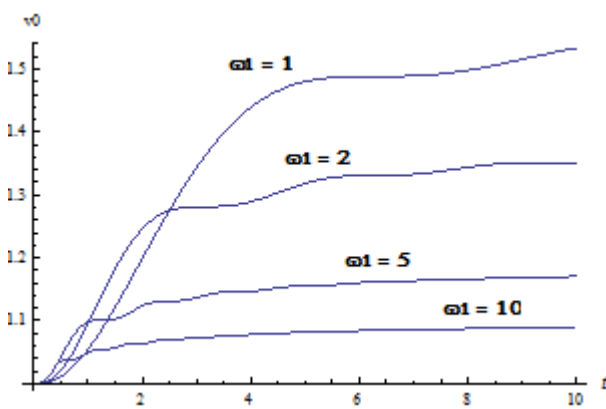


Рис. 4. Залежність розв'язку (21) від частоти зовнішнього навантаження і часу

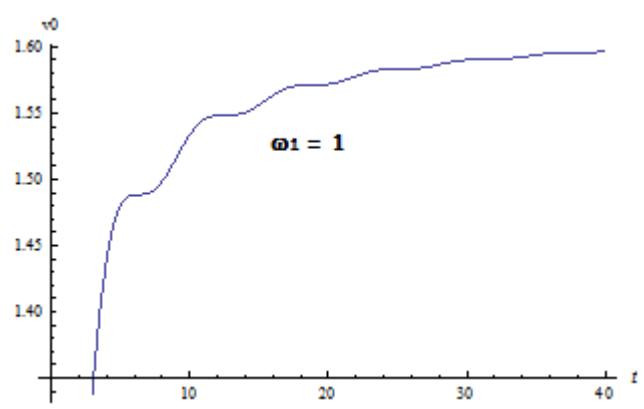


Рис. 5. Характер розв'язку (21) за значним діапазоном часу

Необхідно зазначити, що за певним часом характер розв'язку для різних частот вимушених коливань стабілізується.

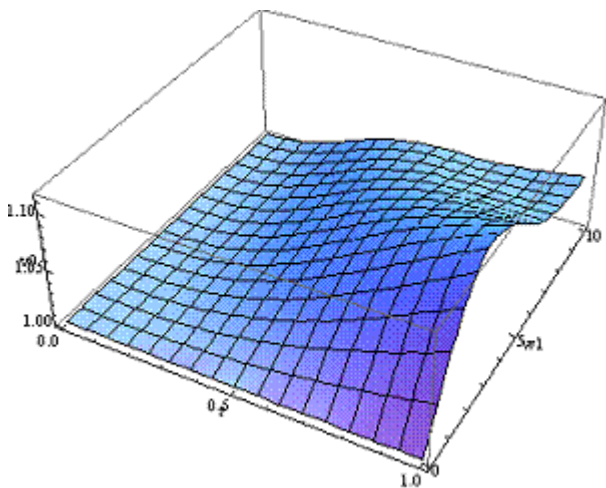


Рис. 6. Тривимірна залежність розв'язку (21) від частоти зовнішнього навантаження і часу

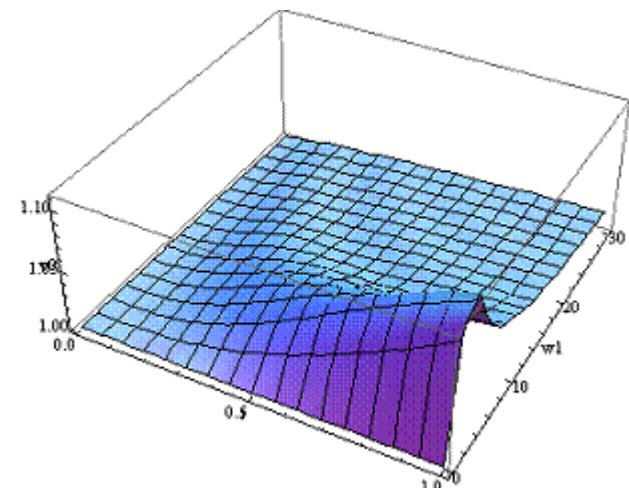


Рис. 7. Тривимірна залежність розв'язку (21) від частоти зовнішнього навантаження і розширеного діапазону часу

Необхідно зазначити, що для даного випадку характер розв'язку для різних частот вимушених коливань стабілізується за певним часом.

Якщо нелінійну складову у правій частині рівняння (6) не розкласти у ряд Маклорена, то загальний розв'язок нелінійної задачі можна представити у формі:

$$v(t) = \int \exp\left[\int -P(t) dt\right] dt \left\{ s_1 + \int \frac{\tilde{F}(t) dt}{\exp\left[\int -P(t) dt\right]} + \mu \int \frac{\beta_0^2 \phi(t) \sin[2v_0(t)] - \frac{\sin[v_0(t)]}{1+\psi(t)}}{\exp\left[\int -P(t) dt\right]} dt \right\} +$$

$$+ \left\{ s_2 + \int \frac{\tilde{F}(t) dt \exp\left[\int -P(t) dt\right]}{\exp\left[\int -P(t) dt\right]} - \mu \int \frac{\exp\left[\int -P(t) dt\right] \left[\beta_0^2 \phi(t) \sin[2v_0(t)] - \frac{\sin[v_0(t)]}{1+\psi(t)} \right]}{\exp\left[\int -P(t) dt\right]} dt \right\}. \quad (22)$$

Прийнявши параметри досліджуваної системи за значеннями:

$$\phi(t) = (1+t)^{-2}, \quad L(t) = (1+t)^2, \quad \exp\left[\int -P(t) dt\right] = 1/(1+t)^2, \quad (23)$$

розв'язок нелінійної задачі матиме вираз:

$$v(t, \omega_1, \beta_0^2) = \left(-\frac{1}{1+t} \right) \left\{ s_1 - \frac{\cos[\omega_1 t]}{\omega_1} + \mu \int \left[\beta_0^2 \phi(t) \sin[2v_0(t)] - \sin[v_0(t)] \right] dt \right\} +$$

$$+ \left\{ s_2 - \sin[\omega_1] \cos[\omega_1(1+t)] + \cos[\omega_1] \sin[\omega_1(1+t)] - \right. \quad (24)$$

$$\left. - \mu \int \left[\sin[v_0(t)] dt + \frac{\beta_0^2}{1+t} \sin[2v_0(t)] dt \right] \right\}.$$

Довільні сталі s_1 і s_2 обчислюються із початкових умов.

Необхідно зауважити, що аналітичний розв'язок нелінійної проблеми за співвідношенням (24) пов'язаний із необхідністю обчислювати інтеграл типу $\int \frac{\sin[2v_0(t)]}{1+t} dt$, що аналітично не завжди можливо. Тому необхідно його обчислювати наближено у заданому діапазоні зміни часу.

Однак, значною привабливістю розв'язку (24) є той факт, що на першому етапі дослідження при розв'язку неоднорідного рівняння отримується точний аналітичний розв'язок. Тому є можливість застосування цього алгоритму в подальших дослідженнях нелінійної проблеми.

УПРАВЛІННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА БЕЗ ОБЕРТАННЯ ІЗ ЗМІННИМИ ДОВЖИНОЮ І МАСОЮ НА БАЗІ ГІБРИДНОГО АСИМПТОТИЧНОГО ПІДХОДУ

Для розв'язку нелінійної задачі управління математичного маятника без обертання його рівняння для кінцевих коливань від стану рівноваги береться у формі:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2 \left(\frac{L'(t)}{L(t)} + \frac{m'(t)}{m(t)} \right) \frac{dV}{dt} + \frac{g}{L(t)} \sin V = 0. \quad (25)$$

Після заміни $\hat{\phi}(t) = 2 \left(\frac{L'(t)}{L(t)} + \frac{m'(t)}{m(t)} \right)$, $L(t) = L_0 \phi(t)$ маємо:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \hat{\phi}(t) \frac{dV}{dt} + \frac{g}{L_0} \frac{1}{\varphi(t)} \sin V = 0. \quad (26)$$

Позначивши $\omega_0^2 = \frac{g}{L_0}$ і, застосовуючи розвинення в ряд Тейлора нелінійної складової рівняння, отримаємо

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \hat{\phi}(t) \frac{dV}{dt} + \frac{\omega_0^2}{\varphi(t)} V - \frac{\omega_0^2}{6\varphi(t)} V^3 = 0. \quad (27)$$

Розділивши рівняння (27) на ω_0^2 і позначивши

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\omega_0^2}, \quad (28)$$

отримуємо рівняння (27) у вигляді:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2V}{dt^2} + \varepsilon^2 \hat{\phi}(t) \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\varphi(t)} - \frac{V^3}{6\varphi(t)} = 0. \quad (29)$$

Після позначення

$$\phi_0(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \quad (30)$$

рівняння (29) набуває вигляду

$$\varepsilon^2 \frac{d^2V}{dt^2} + \varepsilon^2 \hat{\phi}(t) \frac{dV}{dt} + \phi_0(t) V - \lambda \phi_0(t) V^3 = 0, \quad (31)$$

де

$$\lambda = \frac{1}{6}. \quad (32)$$

Розв'язок рівняння (31) шукається на першому етапі відповідно до [5] за методом збурення у вигляді розкладання функції $V(t)$ за малим параметром λ :

$$V(t) = V_0 + \lambda V_1. \quad (33)$$

Результуюче рівняння (31) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 [V_0'' + \lambda V_1''] + \varepsilon^2 \hat{\phi}(t) [V_0' + \lambda V_1'] + \phi_0(t) [V_0 + \lambda V_1] - \\ - \lambda \phi_0(t) [V_0^3 + 3\lambda V_0^2 V_1 + 3\lambda^2 V_0 V_1^2 + \lambda^3 V_1^3] = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях λ , отримуємо систему сингулярних лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами:

$$\lambda^0: \quad \varepsilon^2 V_0'' + \varepsilon^2 \hat{\phi}(t) V_0' + \phi_0(t) V_0 = 0, \quad (35)$$

$$\lambda^1: \quad \varepsilon^2 V_1'' + \varepsilon^2 \hat{\phi}(t) V_1' + \phi_0(t) V_1 = \phi_0(t) V_0^3. \quad (36)$$

З метою усунення першої похідної, розв'язок рівняння (35) знаходиться у вигляді:

$$V_0 = U_0 \exp \int \left(-\frac{\hat{\phi}(t)}{2} dt \right), \quad (37)$$

$$V_0' = \left(U_0' - \frac{\hat{\phi}(t)}{2} U_0 \right) \exp \int \left(-\frac{\hat{\phi}(t)}{2} dt \right), \quad (38)$$

$$V_0'' = \left(U_0'' - \frac{\hat{\phi}'(t)}{2} U_0 - \phi(t) U_0' - \frac{\hat{\phi}^2(t)}{4} U_0 \right) \exp \left(-\int \frac{\hat{\phi}(t)}{2} dt \right). \quad (39)$$

Підставимо (37)-(39) у рівняння (35)

$$\varepsilon^2 U_0''(t) + \left[\phi_0(t) - \varepsilon^2 \frac{\hat{\phi}'(t)}{2} - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \hat{\phi}^2 \right] U_0(t) = 0. \quad (40)$$

Розв'язком рівняння (40) у двох ВКБ-наближеннях за другим етапом гібридного асимптотичного підходу буде

$$U_0(t) = \frac{1}{Q(t)^{0.25}} [c_1 \sin K_0(t) + c_2 \cos K_0(t)], \quad (41)$$

де $K_0(t) = \int \varepsilon^{-1} Q(t)^{1/2} dt$, $Q(t) = \phi_0(t) - \varepsilon^2 \frac{\hat{\phi}'(t)}{2} - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \hat{\phi}^2$.

З урахуванням (41) розв'язок (37) має форму:

$$V_0(t) = \exp \int \left(-\frac{\hat{\phi}(t)}{2} \right) dt \left\{ \frac{1}{Q(t)^{0.25}} [c_1 \sin K_0(t) + c_2 \cos K_0(t)] \right\}. \quad (42)$$

Для отримання довільних сталих початкові умови задаються у вигляді:

$$V_0(0) = 1, \quad V_0'(0) = 0. \quad (43)$$

Як приклад розглядається випадок, коли параметри маятника мають вигляд:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1.0m; \quad \eta(t) = \gamma t; \quad \psi(t) = \beta t; \quad \varphi(t) = \alpha t; \\ m_0 &= 1.0kg; \quad L(t) = L_0 \exp[\beta t]; \quad \Omega(t) = \Omega_0 \exp[\gamma t]; \\ m(t) &= m_0 \exp[-\alpha t]; \quad \Omega_0 = 10m/sec; \quad P(t) = \beta - \alpha. \end{aligned} \quad (44)$$

Результати чисельного аналізу для вільних коливань маятника зі змінної за часом довжини надано на рис. 8.

Що стосується нелінійної задачі, то рівняння (36) розв'язується відповідно до замінін

$$a_1(t) = \varepsilon^2 \hat{\phi}(t), \quad a_2 = \frac{1}{\varphi(t)}, \quad f(t) = \frac{V_0^3}{\varphi(t)} \quad (45)$$

рівнянням

$$\varepsilon^2 V_1''(t) + a_1(t) V_1'(t) + a_2 V_1(t) = f(t). \quad (46)$$

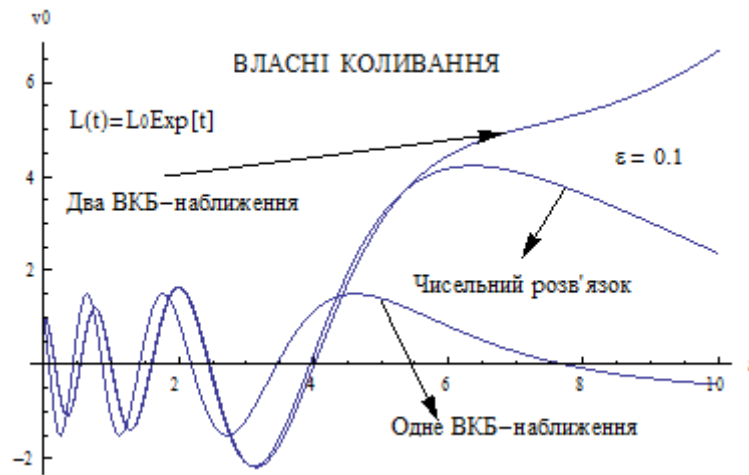


Рис. 8. Порівняння аналітичних та чисельного розв'язків для випадку власних коливань

Розв'яжемо спочатку однорідне рівняння

$$\varepsilon^2 V_1''(t) + a_1(t) V_1'(t) + a_2 V_1(t) = 0, \quad (47)$$

$$V_1''(t) + \bar{a}_1(t) V_1'(t) + \bar{a}_2(t) V_1(t) = 0, \quad (48)$$

$$V_1(t) = U_1(t) \exp\left(\int -\frac{\bar{a}_1(t)}{2} dt\right), \quad (49)$$

$$V_1'(t) = \left[U_1'(t) - U_1(t) \frac{\bar{a}_1(t)}{2} \right] \exp\left(\int -\frac{\bar{a}_1(t)}{2} dt\right), \quad (50)$$

$$V_1''(t) = \left[U_1''(t) - U_1'(t) \bar{a}_1(t) - U_1(t) \frac{\bar{a}_1'(t)}{2} + U_1(t) \frac{\bar{a}_1^2(t)}{4} \right] \exp\left(\int -\frac{\bar{a}_1(t)}{2} dt\right), \quad (51)$$

де $\bar{a}_i(t) = \frac{a_i(t)}{\varepsilon^2}$.

Підставляючи (49)-(51) в рівняння (47), отримаємо:

$$U_1''(t) + \left[\bar{a}_2(t) - \frac{\bar{a}_1(t)}{2} - \frac{3\bar{a}_1(t)}{4} \right] U_1(t) = 0. \quad (52)$$

Розв'язком рівняння (52) буде

$$U_1(t) = c_1(t) \sin K_1(t) + c_2(t) \cos K_1(t), \quad (53)$$

де

$$K_1(t) = \int \varepsilon^{-1} Q_1^{1/2}(t) dt, \quad Q_1(t) = \bar{a}_2(t) - \frac{\bar{a}_1(t)}{2} - \frac{3\bar{a}_1^2(t)}{4}, \quad (54)$$

$$c_1(t) = \int \frac{f(t) \cos K_1(t)}{K_1'(t)} dt + d_2, \quad (55)$$

$$c_2(t) = -\int \frac{f(t) \sin K_1(t)}{K_1'(t)} dt + d_2. \quad (56)$$

Отже, розв'язок $V(t)$ нелінійної задачі має вигляд (33).

$$V(t) = \left[\exp \int \left(-\frac{\hat{\phi}(t)}{2} dt \right) \right] \left\{ \frac{1}{Q(t)^{0.25}} \left[\text{Sin } K_1(t) \left(s_1 + \lambda \int \frac{f(t) \text{Cos } K_1(t)}{K'(t)} dt \right) + \text{Cos } K_1(t) \left(s_2 - \lambda \int \frac{f(t) \text{Sin } K_1(t)}{K'(t)} dt \right) \right] \right\}, \quad (57)$$

де

$$s_1 = c_1 + \lambda d_1, \quad s_2 = c_2 + \lambda d_2. \quad (58)$$

З урахуванням обертання маятника та наявності змушуючої зовнішньої сили розв'язок нелінійної задачі управління (6) математичного маятника змінної довжини і маси за часом матиме вигляд:

$$V(t) = \left[\exp \int \left(-\frac{\hat{\phi}(t)}{2} dt \right) \right] \left\{ \frac{1}{Q(t)^{0.25}} \left[\text{Sin } K_1(t) \left(s_1 + \int \frac{\tilde{F}(t) \text{Cos } K_1(t)}{K_1'(t)} dt + \lambda \int \frac{N(t) \text{Cos } K_1(t)}{K'(t)} dt \right) + \text{Cos } K_1(t) \left(s_2 - \lambda \int \frac{N(t) \text{Sin } K_1(t)}{K'(t)} dt \right) \right] \right\}, \quad (59)$$

де

$$a_2 = \mu \left[2\beta_0^2 \hat{\phi}(t) - \frac{1}{\psi(t)} \right], \quad N(t) = \mu \left[2\beta_0^2 \hat{\phi}(t) - \frac{1}{\psi(t)} \right] v_0^3(t). \quad (60)$$

Для випадку власних лінійних коливань обертового маятника зі сталою кутовою швидкістю розв'язок задачі у другому ВКБ-наближенні із заданими початковими умовами (43) має вигляд:

$$v_0(t) = (100/\exp[t] - 2)^{-0.25} [-0.081 \text{Sin } K_1(t) + 3.146 \text{Cos } K_1(t)], \quad (61)$$

де

$$K_1(t) = \int \varepsilon^{-1} Q_1^{1/2}(t) dt = \int 10(100/\exp[t] - 2)^{0.5} dt = 99t - 25.2t^2 + 4.12t^3 - 0.527t^4, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (62)$$

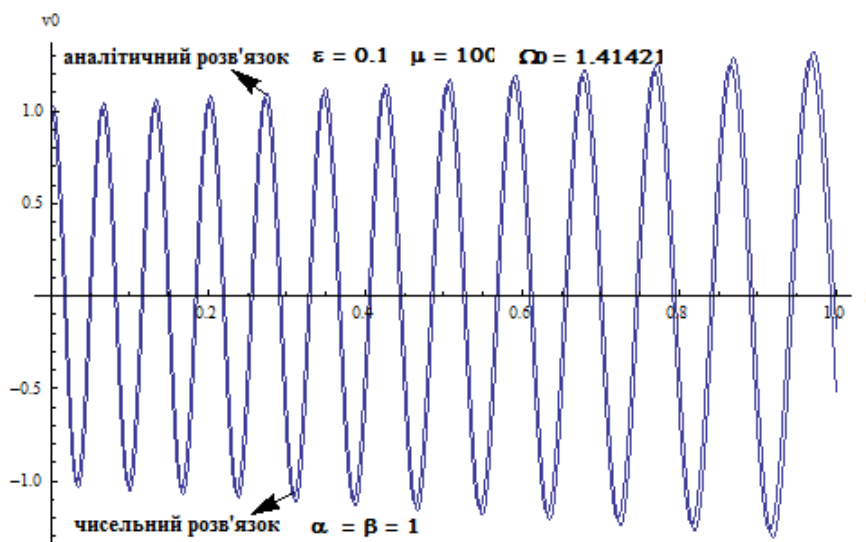


Рис. 9. Порівняння аналітичного (у двох ВКБ-наближеннях) та чисельного розв'язків для випадку власних коливань обертового маятника зі змінною довжиною і масою за експоненціальним законом ($m(t) = m_0 \text{Exp}[-\alpha t]$, $L(t) = L_0 \text{Exp}[\beta t]$)

Результати порівняння аналітичних і чисельних розв'язків задачі динаміки обертового маятника надано на рис. 10-14.

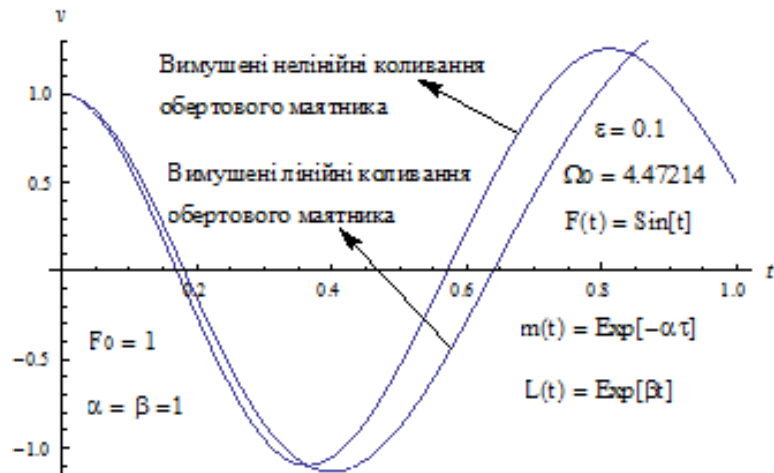


Рис. 10. Порівняння аналітичного та чисельного розв'язків для випадку вимушених коливань обертового маятника зі змінними довжиною і масою за експоненціальним законом

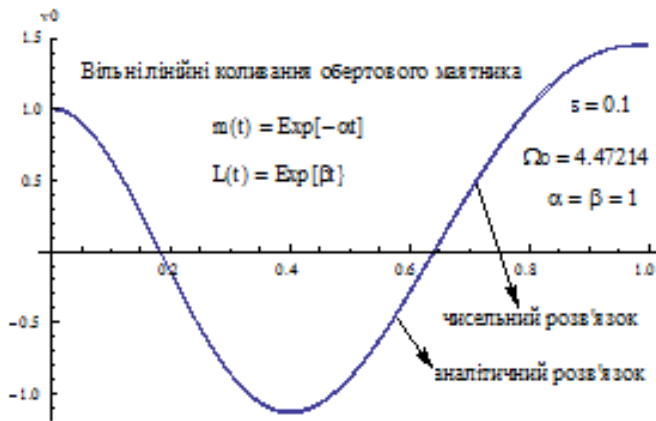


Рис. 11. Порівняння аналітичного і чисельного розв'язків лінійної задачі про вільні коливання обертового маятника

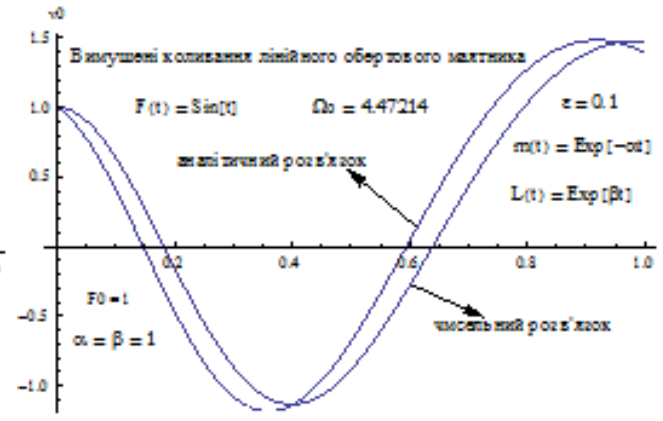


Рис. 12. Порівняння аналітичного і чисельного розв'язків лінійної задачі вимушених коливань обертового маятника

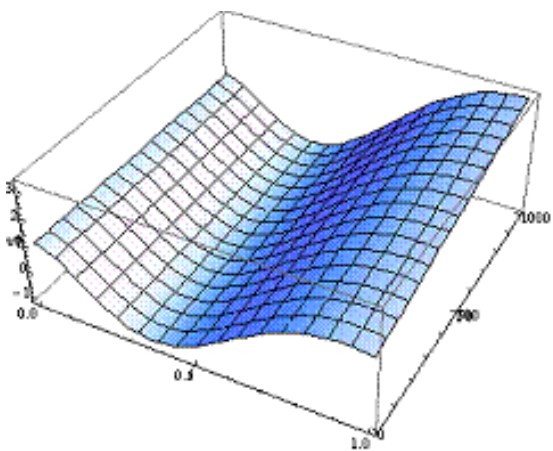


Рис. 13. Залежність вимушених лінійних коливань обертового маятника від амплітуди зовнішнього навантаження

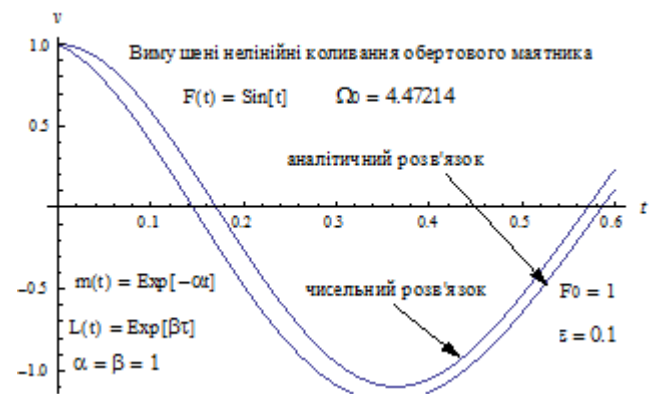


Рис. 14. Вплив нелінійної складової на динамічний процес обертового маятника

ВИСНОВКИ

У статті запропоновано розв'язок нелінійної задачі про вимушені коливання математичного маятника зі змінними за часом довжиною і масою, який обертається із заданою швидкістю. Гібридний асимптотичний підхід при заданих параметрах досліджуваної системи і характеру зовнішнього навантаження показав можливість його ефективного застосування. У часткових випадках дається порівняння здобутого аналітичного розв'язку з прямим чисельним інтегруванням основного рівняння задачі. Обговорено два підходи до розв'язку нелінійної проблеми динаміки систем зі змінними у часі параметрами. Результати аналізу можуть бути застосовані для подальшого дослідження ефекту спонтанного порушення діаграми біфуркації цієї нелінійної системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Красильников П. С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании / П. С. Красильников // ПММ. – 2012. – Т. 76, вып. 1. – С. 36-51.
2. Безгласный С. П. Управление колебаниями маятника переменной длины / С. П. Безгласный, Н. И. Кутырев // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2013. – Т. 15, №6(3). – С. 590-593.
3. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление / Дж. Николис. – М. : Мир, 1989. – 486 с.
4. Ольшанский В. П. Нестационарные колебания осциллятора переменной массы с учетом вязкого трения / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вібрації в техніці і технологіях. – 2014. – № 3(75). – С. 18-27.
5. Азарсков В. Н. Приближенное аналитическое решение задачи динамики математического маятника переменной массы и длины / В. Н. Азарсков, Д. Д. Грищак // Матеріали XI міжнар. наук.-техн. конф. «AVIA-2013», 21-23 травня 2013 р. – Т. 4. – К. : НАУ, 2013. – С. 22.1-22.4.
6. Azarskov V. N. Vibration damping for the problems of aircraft motion / V. N. Azarskov, D. D. Gristchak // Electronics and Control Systems. – 2014. – N 4(42). – P. 30-34.
7. Marco B. Quadrelli. Modeling and Simulation of Flight Dynamics of Variable Mass Systems / Marco B. Quadrelli, Jonathan Cameron, Bob Balarm, Mayank Baranwal, Alesandro Bruno //Space Conf. San-Diego, Ca, AIAA/AAS Aerodynamics Specialist Conference, 2014.

REFERENCES

1. Krasilnikov, P.S. (2012), "For nonlinear vibrations of pendulum on vibrating foundation", *PMM*, vol. 76, issue 1, pp. 36-51.
2. Bezglasnij, S.P. and Kutirjov, N.I. (2013), "Control vibrations for pendulum of variable length", *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk*, vol. 15, no. 6(3), pp. 590-593.
3. Nikolis, J.S. (1989), *Dinamika ierarkhicheskikh sistem. Evolyutsionnoe predstavlenie* [Dynamics of Hierarhial Systems. An Evolutionary Approach], Mir, Moskow.
4. Olshansky, V.P. and Olshansky, S.V. (2014), "Non stationary vibrations for variable mass pendulum with friction influence", *Vibratsiyi v tekhnitsi i tekhnolohiyakh*, no. 3(75), pp. 18-27.
5. Azarskov, V.N. and Gristchak, D.D. (2013), "An approximate analytical solution for dynamic problem of pendulum with variable mass and length", *Materialy XI mizhnar. nauk.-tekhn. konf. "AVIA-2013"* [Proc. XI Int. Sci.-Technical Conf. "AVIA-2013"], Kiev, NAU, May 21-23, 2013, vol. 4, pp. 22.1-22.4.
6. Azarskov, V.N. and Gristchak, D.D. (2014), "Vibration damping for the problems of aircraft motion", *Electronics and Control Systems*, no. 4(42), pp. 30-34.
7. Marco B. Quadrelli, Jonathan Cameron, Bob Balarm, Mayank Baranwal and Alesandro Bruno (2014), "Modeling and Simulation of Flight Dynamics of Variable Mass Systems", *Space Conf. San-Diego, Ca, AIAA/AAS Aerodynamics Specialist Conference*, 2014.

УДК 519.6, 539.3

СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА С НЕПОСТОЯННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Днепропетровский национальный университет имени Олеса Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49000, Украина*

stroller@rambler.ru

Рассматривается применение нелинейного обобщенного метода Канторовича к построению и анализу структуры решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана с непостоянной правой частью. Устанавливается связь указанной структуры с бифуркационной структурой для уравнений Кармана с постоянной правой частью.

Ключевые слова: уравнения Кармана, численные методы решения нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных, нелинейный обобщенный метод Канторовича, обобщенное решение, первичное и вторичное ветвление.

СТРУКТУРА РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ КАРМАНА З НЕПОСТІЙНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Дніпропетровський національний університет імені Олеса Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна*

stroller@rambler.ru

Розглядається застосування нелінійного узагальненого методу Канторовича до побудови та аналізу структури розв'язку нелінійної крайової задачі для рівнянь Кармана з непостійною правою частиною. Встановлюється зв'язок зазначеної бифуркаційної структури з бифуркаційною структурою для рівнянь Кармана з постійною правою частиною.

Ключові слова: рівняння Кармана, чисельні методи розв'язання рівнянь у частинних похідних, нелінійний узагальнений метод Канторовича, узагальнений розв'язок, первинне та вторинне галузження.

SOLUTION STRUCTURE OF NON-LINEAR BOUNDARY PROBLEM FOR VON KARMAN EQUATIONS WITH NON-CONSTANT RIGHT TERM

Vasilii A. Gromov

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina av., 72, Dnipro, 49000, Ukraine*

stroller@rambler.ru

Von Karman Equations depends upon parameters, which exact values are usually unknown in actual practice. If the equations are structurally unstable that is qualitative change of solution is possible due to minor change of parameters or right-hand terms, then it is useful to know beforehand possible bifurcations. Most studies of bifurcations for the equations under study deals with bifurcation paths associated with the first singular point, whereas detailed study of bifurcation all paths is of fundamental importance.

The non-linear generalized Kantorovich method is applied to non-linear boundary problem for von Karman equations with a non-constant right term in order to ascertain bifurcation structure. The structure is related to that for von Karman equations with a constant right term.

What follows is a sketch of the algorithm used to construct and analyze bifurcation structure of non-linear boundary problem:

1. Two-dimensional non-linear boundary problem in question is boiled down to a sequence of single-dimensional problems.
2. In order to solve a single-dimensional problem, it reduced to the equivalent Cauchy problem.
3. To trace equilibrium paths (and thereby guarantee good initial approximation for the non-linear Kantorovich method), conventional path-tracing technique is employed.

4. If a limit singular point is located, then continuation parameter is changed.
5. If a bifurcation singular point is located, then one reveals intersections of bifurcation paths branching from the bifurcation point in question with a sphere (with a small radius) centered in the point. The points of intersection belong to bifurcation paths branching from the singular point and can be used as start points for path-tracing technique to trace these branches.

The constant right part. The aforesaid algorithm, being applied to von Karman equations with constant right part, results in bifurcation structure with primary and secondary bifurcation paths. The former is associated with solutions with equidistant local minima and maxima (along direction x_2) and equal solution function values in these extrema (regular solutions), while the latter corresponds to the solution with non-equidistant local extrema and different solution function values (localized solutions).

The right-part term $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos x_2)^p$. In that case, a bifurcation structure immanent to von Karman equations with a constant right term is broken to bring solutions with a limit singular point corresponding to vanished bifurcation one and isolated solutions resulted from deformation of bifurcation path of localized solutions as well.

The right-part term $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos mx_2)$. Here, a deformation of bifurcation structure depends heavily on whether the number m is larger or lesser than the number of maxima of the solution corresponding to the first primary bifurcation paths m_{eigen} . Interestingly, for the former case, a limit curve is associated with the solution for which the number of maxima equals to m ; meanwhile the primary bifurcation path corresponding to the first bifurcation point becomes isolated, and its secondary bifurcation paths ‘unhooked’ from it and ‘hooked’ to the new limit curve.

Conclusions:

1. The non-linear generalized Kantorovich method along with conventional path-tracing technique and algorithm to construct equilibrium paths branching from a bifurcation point make it possible to analyze bifurcation structure of non-linear boundary problem for von Karman equations.
2. For various right-part term types, one can observe limit curves and isolated solution branches relative to primary and secondary bifurcation paths of constant case. Singular points features single degeneracy.
3. The structure considered appears to be deformed one corresponding to von Karman equations with constant right term.

Keywords: von Karman equations, numerical methods to solve PDEs, the non-linear generalized Kantorovich method, the generalized solution, primary and secondary bifurcation paths.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Кармана зависят от параметров, точные значения которых для реальных систем неизвестны. Если уравнения структурно неустойчивы, т.е. если возможно качественное изменение их решений вследствие малого изменения правой части или параметров задачи, то необходимо знать, какие бифуркации фазового портрета возможны. Существующие исследования для нелинейных краевых задач для уравнений Кармана, обычно, посвящены построению решений, исходящих из первой точки бифуркации, лежащей на ветви решения, исходящей из нуля.

Исследованию поведения решений уравнений Кармана в окрестности данной точки бифуркации при наличии возмущений конкретного вида посвящено огромное количество работ. Эти решения, связанные с рассмотрением конкретных возмущений, дают возможность оценить критические значения параметров системы при реализации указанных форм. Между тем, для оценки реального поведения системы при внешних возмущениях произвольного вида, необходимо исследовать нелинейные модели, описываемые решениями уравнениями Кармана, топологически далёкими от решений, связанных с указанной точкой бифуркации.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Значительное число различных возможных решений уравнений Кармана с непостоянной правой частью обуславливает интерес к их классификации и – что важно для приложений – определению границ областей существования различных типов решений, к анализу структуры решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана для случая постоянной правой части и разрушению указанной структуры при переходе к уравнениям с непостоянной правой частью.

В работах [1, 2] с использованием метода Релея-Ритца путём аппроксимации функций задачи отрезками ортогональных функциональных рядов (ряд Фурье в одном направлении и ряд, составленный из функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя, – в другом) была получена достаточно полная картина ветвления решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана с постоянной правой частью, описывающих поведение пологого сферического купола. При этом авторы опирались на разработанную ими модификацию метода продолжения по параметру. Было установлено, что наряду со значениями параметров задачи, для которых малые изменения приводят к малым изменениям характера решения («эволюционное» изменение), существуют значения параметров, при которых малые изменения приводят к резким качественным изменениям характера решения («скачкообразное» изменение). Последнее связано с присоединением к основной кривой ветвей решения, которые были изолированы при близких значениях параметров.

В работе [3] исследуется бифуркационная картина для уравнений Кармана, определённых на прямоугольной области при постоянной правой части; здесь наблюдается два типа решений, симметричных относительно одной из осей симметрии прямоугольника области определения; кососимметричные решения в работе не рассматриваются. В работе [4] также рассматривается структура решения уравнений Кармана, определённых на прямоугольной области, при этом функция нагрузки носит ярко выраженный локальный характер. В качестве инструмента исследования использовался метод конечных элементов в сочетании с методом продолжения по параметру с оптимальным выбором параметра продолжения (arclength method).

В работе [5] рассматривается нелинейная краевая задача для уравнений Кармана на цилиндрической области существенно большей в продольном направлении, чем в окружном. Здесь было осуществлено сведение нелинейной краевой задачи к конечномерной задаче фиксированной размерности путём введения предположения о бесконечной протяжённости области в одном из направлений и аппроксимации решения в другом отрезком тригонометрического ряда. В работе [6] представлена картина ветвления нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана с постоянной правой частью: картина включает в себя ветви первичного и вторичного ветвления.

В настоящем исследовании на основании нелинейного обобщённого метода Канторовича, применённого к решению уравнений Кармана с непостоянной правой частью, и методов исследования ветвления решений нелинейных краевых задач строятся численные нелинейные модели поведения указанных систем, исследуется характер разрушения бифуркационной структуры, полученной для случая уравнений с постоянной правой частью.

ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Задача формулируется на ограниченной области $\Omega \subset R^2$ с достаточно регулярной границей Γ ; при формулировке задачи в настоящей работе используются следующие обозначения:

$$\nabla_k^2 \alpha \equiv k_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + k_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2}; \quad (1)$$

$$L(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2};$$

$$K(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} - \mu \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \right] + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$Q_1(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_1},$$

$$Q_2(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2},$$

$W_2^{(2)}(\Omega)$ – пространство Соболева.

Уравнения формулируются (в ортогональной системе координат (x_1, x_2)) как система нелинейных уравнений в частных производных вида:

$$\begin{aligned} a_1 \nabla^4 u_1 + L(u_1, u_2) - \nabla_k^2 u_2 &= \lambda, \\ a_2 \nabla^4 u_2 - \frac{1}{2} L(u_1, u_1) - \nabla_k^2 u_1 &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\lambda = \lambda(x_1, x_2)$ – заданная (дифференцируемая) функция двух переменных; k_1, k_2, a_1, a_2 – положительные константы.

Обобщённое решение рассматриваемой нелинейной краевой задачи даётся парой функций $U = (u_1, u_2)$, $u_1 \in W_2^{(2)}(\Omega)$, $u_2 \in H_0(\Omega)$, удовлетворяющих интегральным тождествам:

$$a_1 \iint_{\Omega} K(u_1, v_1) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 u_2 v_1 - Q_1(u_1, u_2, v_1) - \lambda v_1] dx_1 dx_2, \tag{3}$$

$$a_2 \iint_{\Omega} K(u_2, v_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 v_2 u_1 - Q_2(u_1, v_2)] dx_1 dx_2 \tag{4}$$

для пары произвольных функций $v_1 \in W_2^{(2)}(\Omega)$, $v_2 \in H_0(\Omega)$, где $H_0(\Omega)$ – замыкание пространства функций $\left\{ \alpha \in W_2^{(2)}(\Omega), \alpha|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \alpha}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \right\}$ в норме $\iint_{\Omega} K(\alpha, \alpha) dx_1 dx_2$; $\frac{\partial \cdot}{\partial n}$ – производная по направлению, нормальному к контуру Γ ; μ – параметр задачи.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД КАНТОРОВИЧА

Для отыскания решения нелинейной краевой задачи (2) строится последовательность приближений к обобщённому решению (3), (4) с помощью представления вектора неизвестных функций задачи на итерациях алгоритма в виде:

$$U(x_1, x_2) = \{u_j(x_1, x_2)\} = \left\{ h_j^{(i-1)}(x_1) g_j^{(i)}(x_2) \right\} \Big|_{j=\overline{1,2}}, i \rightarrow \infty, \tag{5}$$

$$h_1^{(i-1)}(x_1) g_1^{(i)}(x_2) \in W_2^{(2)}(\Omega), \quad h_2^{(i-1)}(x_1) g_2^{(i)}(x_2) \in H_2(\Omega). \tag{6}$$

Соотношения (5), (6) позволяют представить разрешающие соотношения нелинейной краевой задачи (2) в виде последовательности дифференциальных уравнений вида (здесь и далее, для краткости, опущен верхний индекс, соответствующий номеру итерации):

$$\frac{dh_j}{dx_1} = f_j^{x_1}(h(x_1), a^{x_2}(x_1), \lambda), \quad j = \overline{1,8}, \tag{7}$$

$$\frac{dg_j}{dx_2} = f_j^{x_2}(g(x_2), a^{x_1}(x_2), \lambda), \quad j = \overline{1,8}. \tag{8}$$

Для отыскания решения указанных нелинейных одномерных краевых задач использовался метод сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши [6]; на итерациях метода вычисляются матрицы Фреше для систем (7) и (8). Обращение в ноль определителей указанных матриц ($\det J_{x_1}$ и $\det J_{x_2}$) указывает на особую точку решения [7]:

$$\det J_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Рассматриваемый алгоритм предполагает организацию итерационного процесса, в рамках которого подсистемы (7), (8) вычисляются отдельно, на последовательных итерациях, при этом в качестве подынтегральных функций выбираются приближения, полученные на предыдущей итерации. Тем самым решение двумерной нелинейной краевой задачи сводится к отысканию решений последовательности нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: так определённый итерационный процесс аналогичен обобщённому методу Канторовича [8].

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ БИФУРКАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ

Для определения типа особой точки, локализованной с помощью условия (9), рассматривается расширенная матрица Фреше, дополненная столбцом производных «точечных» граничных условий по параметру продолжения, J_λ и множество квадратных матриц J_k , полученных из J_λ путём удаления k -го столбца. Тогда, в точке бифуркации (в точке ответвления нового решения) выполняется условие $\text{rank} J = \text{rank} J_k < N, \forall k = \overline{1, N}$, в предельной точке – $\text{rank} J < N, \text{rank} J_k = N, \forall k = \overline{1, N}$.

Используемый алгоритм позволяет построить малые решения системы (решений, принадлежащих малой окрестности точки бифуркации), ответвляющиеся в рассматриваемой особой точке, и тем самым задать для каждой ветви решения, исходящей из соответствующей точки бифуркации решения нелинейной краевой задачи (8), (9), лежащую на ней точку. Здесь осуществляется численное построение уравнений разветвления [9] для одномерных нелинейных краевых задач, формируемых на последней итерации НОМК; при этом сомножитель, определяющий вид решения в одном направлении, остаётся неизменным – таким, каким он был получен на предпоследней итерации алгоритма.

Для обеспечения устойчивости вычислительного процесса предлагается немного отступить от точки бифуркации и искать решения на гиперсфере малого радиуса с центром в данной точке бифуркации (что служит своеобразным способом регуляризации вычислительного процесса), при этом параметр, служивший параметром продолжения при движении вдоль ветви, на которой была зафиксирована точка бифуркации, вводится в число переменных и определяется в рамках вычислительного процесса [10].

СТРУКТУРА ВЕТВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Рассмотренный алгоритм позволил установить бифуркационную картину для случая уравнений Кармана с постоянной правой частью – здесь установлено наличие ветвей первичного и вторичного ветвления, которые характеризуются решениями с одинаковыми значениями неизвестных функций задачи в локальных максимумах и минимумах и одинаковыми расстояниями между указанными максимумами в направлении x_2 (регулярные решения) и решениями с различными значениями неизвестных функций задачи в локальных максимумах и минимумах и различными расстояниями между максимумами (локализованные решения) [6].

Приведенные ниже структуры решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи соответствуют значениям параметров $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 2\pi\}$, $a_1 = 0.1$; $a_2 = -1$; $k_1 = 150$; $k_2 = 0$; $\mu = 0.3$.

Правая часть вида $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos x_2)^p$. При наличии правой части указанного вида происходит разрушение описанной выше бифуркационной картины. Здесь возникают

решения, характеризующиеся наличием предельной особой точки, возникшей на месте разрушения точки бифуркации, а также изолированные ветви решения, возникающие при разрушении ветвей локализованных решений; в некоторых случаях, при большей неравномерности внешнего давления, происходит полное исчезновение изолированных ветвей.

При этом предельные кривые, соответствующие уравнениям Кармана с непостоянной правой частью, как бы «притягиваются» к одной из ветвей решения для случая постоянной правой части. Указанное обстоятельство объясняет существенную немонотонность графиков зависимостей значений параметра, при котором фиксируется предельная особая точка, от различного рода параметров нагружения.

На рис. 1а и 1б представлено разрушение бифуркационной картины для уравнений Кармана при наличии правой части указанного вида. Представленные ветви – это результат разрушения ветви первичного ветвления, ответвляющейся в первой точке бифуркации, ветви первичного ветвления, ответвляющейся во второй точке бифуркации, и связанных с ними ветвей вторичного ветвления.

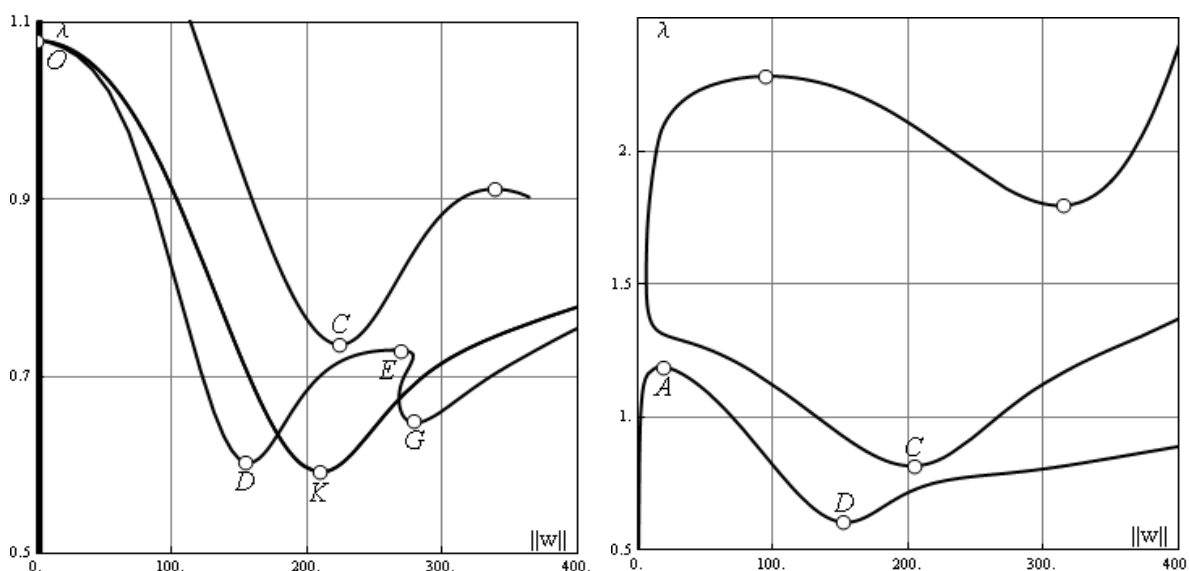


Рис. 1. Разрушение бифуркационной картины при правой части вида $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos x_2)^p$: (а) точки бифуркации сохраняются, ветви локализованных форм ответвляются от ствола $a = 0.9, b = 0.1, p = 3$; (б) образование предельных кривых и изолированных ветвей $a = 0.6, b = 0.4, p = 3$

Правая часть вида $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos mx_2)$. На рис. 2а и 2б представлено разрушение бифуркационной картины, отвечающее случаям, когда номер m , соответственно, больше и меньше числа максимумов функции решения, связанной с первой ветвью первичного ветвления m_{eigen} . Любопытно отметить, что во втором случае наблюдается регулярное решение, для которого число максимумов совпадает с величиной m функции правой части уравнения (исходящая из нуля предельная кривая), при этом ветвь первичного ветвления, связанная с первой точкой бифуркации, становится изолированной, а связанные с ней ветви вторичного ветвления «отцепляются» от неё и «прицепляются» к вновь возникшей предельной кривой.

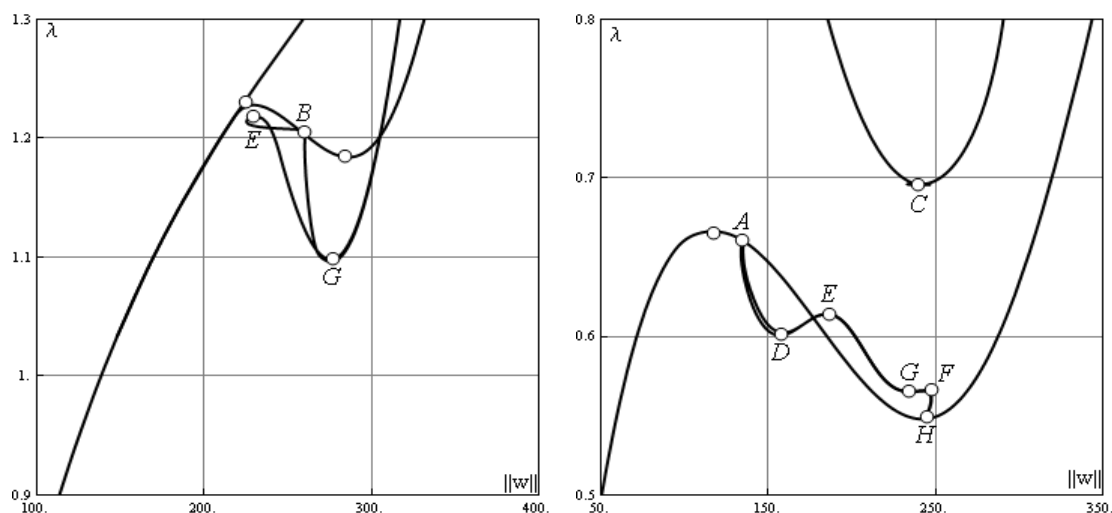


Рис. 2. Разрушение бифуркационной картины при правой части вида $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(a + b \cos mx_2)$: (а) структура ветвления деформируется, но в целом сохраняется $a = 0.5, b = 0.5, m = 6; m > m_{eigen}$; (б) предельные кривые и изолированные ветви $a = 0.5, b = 0.5, m = 4; m < m_{eigen}$

ВЫВОДЫ

1. Нелинейный обобщённый метод Канторовича в сочетании с методом продолжения по параметру и алгоритмом построения ветвей решения, исходящих из точки бифуркации, позволяет построить структуру решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана.
2. Здесь фиксируются (при различных видах правой части) предельные кривые, изолированные ветви решения и ветви первичного ветвления. Особые точки характеризуются однократным вырождением.
3. Указанная структура может быть рассмотрена как разрушение бифуркационной структуры для уравнений Кармана с постоянной правой частью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И. О методе непрерывного продолжения по параметру / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын // Докл. РАН. – 1994. – Т. 335, № 5. – С. 582–585.
2. Григолюк Э. И. Продолжения решения нелинейных уравнений в окрестности точек бифуркации / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1998. – Т. 41, № 1. – С. 35–46.
3. Pirrera A. On the thermally induced bistability of composite cylindrical shells for morphing structures / A. Pirrera, D. Avitabile, P. M. Weaver // Int. J. Solid. Struct. – 2012. – Vol. 49. – P. 685–700.
4. Zhou Y. Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels / Y. Zhou, I. Stanciulescu, T. Eason, M. Spottswood // Finite Elements in Analysis and Design. – 2015. – Vol. 96. – P. 41–50.
5. Lord G. J. Computation of homoclinic orbits in partial differential equations: An application to cylindrical shell buckling / G. J. Lord, A. R. Champneys, G. W. Hunt // SIAM J. Sci. Comp. – 1999. – Vol. 21, № 2. – P. 591–619.
6. Громов В. А. Численный метод построения нелинейных решений уравнений Кармана / В. А. Громов // Питання прикладної математики та математичного моделювання : Зб. наукових праць. – 2016. – Т. 5. – С. 5–19.
7. Keller J. B. Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems / J. B. Keller, S. Antman (Eds). – N.-Y. : Benjamin WA inc, 1969. – 250 p.
8. Kantorovich L. V. Approximate Methods of Higher Analysis / L. V. Kantorovich, V. I. Krylov. – N.-Y. : Interscience, 1958. – 682 p.

9. Вайнберг М. М. Теория ветвления нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
10. Пешков И. М. Ветвление решений математических моделей гипотетических генных сетей / И. М. Пешков // Вестник НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2007. – Т. 7, № 3. – С. 59–72.

REFERENCES

1. Grigoluyk, E.I. and Lopanitsyn, E.A. (1994), “On a path-tracing method”, *Doklady RAN*, vol. 335, no. 5, pp. 582-585.
2. Grigoluyk, E.I. and Lopanitsyn, E.A. (1998), “Path-tracing in the vicinity of bifurcation point”, *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*, vol. 41, no. 1, pp. 35-46.
3. Pirrera, A., Avitabile, D. and Weaver, P.M. (2012), “On the thermally induced bistability of composite cylindrical shells for morphing structures”, *Int. J. Solid. Struct.*, vol. 49, pp. 685-700.
4. Zhou, Y., Stanciulescu, I., Eason, T. and Spottswood, M. (2015), “Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels”, vol. 96, pp. 41-50.
5. Lord, G.J., Champneys, A.R. and Hunt, G.W. (1999), “Computation of homoclinic orbits in partial differential equations: An application to cylindrical shell buckling”, *SIAM J. Sci. Comp.*, vol. 21, no. 2, pp. 591-619.
6. Gromov, V.A. (2016), “Numerical methods to construct non-linear solutions for von Karman equations”, *Pytannya prykladnoyi matematyky ta matematychnoho modelyuvannya: Zbirnyk naukovykh prats*, vol. 5, pp. 5-19.
7. Keller, J.B., Antman, S. and Eds (1969), “Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems”, Benjamin WA inc, New York.
8. Kantorovich, L.V. and Krylov, V.I. (1958), “Approximate Methods of Higher Analysis”, Interscience, New York.
9. Vainberg, M.M. and Trenogin, V.A. (1969), *Teoriya vetvleniya nelineynykh uravneniy* [Branching theory for non-linear equations], Nauka, Moscow.
10. Peshkov, I.M. (2007), “Branching of mathematical models for possible genetic networks”, *Vestnik NGU, Seriya matematika, mekhanika, informatika*, vol. 7, no. 3, pp. 59-72.

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЖАТО-ИЗОГНУТОЙ ПЛАСТИНЫ С РАЗРЕЗОМ

Гук Н. А., д. ф.-м. н., профессор, Степанова Н. И., старший преподаватель

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
просп. Гагарина, 72, Днепр, Украина*

nist66@mail.ru

В работе предложен подход к моделированию разреза (трещины) в тонких пластинах, основанный на задании статических условий на линии, совпадающей с линией разреза. Для имитации выполнения статических условий на линии разреза использована вариационная постановка задачи деформирования пластины в сочетании с формулировкой ее как обратной задачи. Разработан алгоритм для определения значений скачков перемещений и углов поворота на линии разреза, обеспечивающих выполнение статических граничных условий.

Ключевые слова: тонкостенная система, разрез, скачки перемещений и углов поворота, обратная задача, функционал, метод Ньютона.

НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ СТИСНУТО-ЗІГНУТОЇ ПЛАСТИНИ З РОЗРІЗОМ

Гук Н. А., д. ф.-м. н., професор, Степанова Н. І., старший викладач
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна

nist66@mail.ru

У роботі запропоновано підхід до моделювання розрізу (тріщини) в тонких пластинах, який ґрунтується на формулюванні статичних умов на лінії, що збігається з лінією розрізу. Для імітації виконання статичних умов на лінії розрізу використано варіаційну постановку задачі деформування пластини в поєднанні з формулюванням її як оберненої задачі. Розроблено алгоритм для визначення стрибків переміщень і кутів повороту на лінії розрізу, що забезпечують виконання статичних граничних умов.

Ключові слова: тонкостінна система, розріз, стрибки переміщень і кутів повороту, обернена задача, функціонал, метод Ньютона.

NONLINEAR DEFORMATION OF COMPRESSED-BENT THE PLATE WITH A CUT

Guk N. A., DSc (Phys.-Math.), Stepanova N. I., senior lecturer

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university
Gagarina av., 72, Dnipro, Ukraine*

nist66@mail.ru

A multiple construction of calculation model is necessary when performing iterative calculations using the finite element method (FEM) for thin plates with a slit (crack). The paper presents an approach to modeling the slit in the plate by setting the static conditions on a line coincident with the edges of the slit.

The problem of determining the conditions on the slit line for continuous plate is formulated as an inverse problem. Leaps of generalized displacements on the section line are unknown functions of inverse problem.

On the region $\Omega = \{X = (x_1, x_2) | -a \leq x_1 \leq a, -b \leq x_2 \leq b\}$ with the border Γ a thin plate with a straight slit is considered. The boundaries of the slit are marked using Γ_p .

The variational formulation of the direct problem of deformation of the plate under the action of normal load q to the surface at a known location of the slit border Γ_p is as follows:

$$U = \arg \min U J(U), \quad U \in U^*, \quad (1)$$

where $U = \{u, v, w\}$ is vector-function displacement in directions x_1, x_2, z ; $J(U) = J_0 + \bar{J}$ is the functional of total energy of the system; J_0 is the energy of deformation of the plate; \bar{J} is the potential of external forces.

Dimensionless quantities are introduced during the formation components of the functional $J(U)$. The nonlinear equilibrium equations of the plate as functions of force and torque, conditions at the border Γ region Ω and on the banks of the slit and also geometric ratios follow from the stationarity conditions of the functional $J(U)$. Assessment of the continuity of functional was obtained for the study correctness of inverse problem solution.

To solve the problem in the variational formulation the transition to a discrete model of the plate using the FEM is carried out. The unknown functions direct and inverse problems are presented in a parametric form.

It is shown that the problem of deformation of the plate with a slit equivalent to that of a continuous deformation of the plate with the given irregular movements U_{Γ_p} on the slit line. To determine the leaps of displacements the problem is formulated as an inverse problem in the form:

$$\tilde{U}_{\Gamma_p} = \arg \min_{\tilde{U}_{\Gamma_p}} \Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) \Delta^T(\tilde{U}_{\Gamma_p}), \quad \tilde{U}_{\Gamma_p} \in Q, \quad (2)$$

where $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p})$ is a vector of discrepancy: for $\xi_1 = const$ a vector of discrepancy consists of components $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) = \{T_{22}, T_{12}, M_{22}, Q_{22}\}$; for $\xi_2 = const$ - $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) = \{T_{11}, T_{12}, M_{11}, Q_{11}\}$. The zero values of the components of the vector of discrepancy ensures that the static boundary conditions at the boundary slit Γ_p .

The implementation conditions (2) is carried out using the Newton method. The proposed approach to solving the problem is described iterative algorithm. Using the proposed approach a simulation of the slit in the continuous plate was done.

The proposed approach can be used to Refine the picture of the stress-strain state of a plate with a real slit, which is built using the finite element method.

Key words: thin-walled system, cut, jump displacement and rotation angles, inverse problem, functional, Newton's method.

ВВЕДЕНИЕ

Наличие концентраторов напряжений типа трещин существенно снижает живучесть элементов конструкций, выполненных в виде тонкостенных пластин, в условиях эксплуатации. Изучению напряженно-деформированного состояния таких систем в линейной постановке посвящена обширная литература [1-8]. Здесь можно отметить два направления исследований – приведение задачи к системам сингулярных интегральных уравнений [2-4] и использование численного подхода (метод конечных элементов) [5-8].

Использование указанных подходов достаточно эффективно при известном расположении разреза. В том случае, когда необходимо предварительно определить расположение разреза по информации о деформировании, а затем решать нелинейную задачу о концентрации напряжений, оба указанных подхода не дают желаемого результата. Метод конечных элементов (МКЭ) позволяет определить напряженно-деформированное состояние в зоне разреза с недостаточной для решения указанной обратной задачи точностью, поскольку дает усредненную картину напряженно-деформированного состояния (НДС), результаты расчета деформаций могут существенно отличаться от их действительных значений.

Эти различия, несущественные при оценке несущей способности (обычно интересуют максимальные напряжения), становятся определяющими при использовании результатов расчета в интерпретации результатов мониторинга конструкции, находящейся в условиях эксплуатации. Для этой цели необходимо уточнение расчетной картины НДС. Кроме того, при использовании МКЭ для решения обратных задач возникает необходимость построения расчетной модели заново при выполнении каждой итерации.

В работе [9] предложен подход, базирующийся на модели сплошной конструкции. При использовании этого подхода, в силу линейности НДС, аналитическое решение представляется в виде суммы двух состояний, определяемых отдельно – НДС сплошной тонкостенной конструкции и НДС, получаемое в результате в результате определения дополнительных деформаций, характеризующихся скачком перемещений, из условий на берегах разреза.

Такой подход может быть обобщен на случай нелинейного деформирования с использованием МКЭ для расчетной модели в виде сплошной конструкции.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При необходимости итеративных расчетов тонкостенных пластин с разрезом (трещиной) с помощью МКЭ возникает необходимость многократного построения расчетной модели. Альтернативой является создание метода решения, базирующегося на использовании однократно построенной модели сплошной конструкции. Такой подход, разработанный в [9], в настоящей работе обобщается для случая нелинейного деформирования и основывается на использовании вариационного подхода, когда условия на берегах разреза преобразуются в условия на линии, имитирующей разрез в сплошной тонкостенной конструкции, независимо от характера деформирования. При этом условия на линии разреза для сплошной пластины могут быть сформулированы как решение обратной задачи, неизвестными функциями которой являются скачки обобщенных перемещений на линии разреза, а в качестве минимизируемой функции выступает среднеквадратическое отклонение значений усилий и моментов на линии разреза от нулевых значений.

Ниже рассматривается тонкостенная прямоугольная пластина толщины h с разрезом (трещиной), находящаяся в условиях нагружения, близкого к номинальным значениям. Предполагается, что пластина деформируется нелинейно, т.е. характерное перемещение больше толщины пластины ($w > h$), при этом квадраты углов поворота сечений пластины при деформировании не превышают 1 ($\theta_i^2 < 1$). В этом случае деформирование пластины описывается нелинейными уравнениями, при этом задача решается в предположении единственности решения в рассматриваемой области изменения параметров.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

На области $\Omega = \{X = (x_1, x_2) \mid -a \leq x_1 \leq a, -b \leq x_2 \leq b\}$ с границей Γ рассматривается пластина толщины $h \ll a, b$ с прямолинейным разрезом, имеющим границы Γ_p .

Вариационная постановка прямой задачи деформирования пластины под действием нормальной к поверхности нагрузки q при известном местоположении границы разреза Γ_p имеет вид:

$$U = \arg \min_U J(U), \quad U \in U^*, \quad (1)$$

где $U = \{u, v, w\}$ – вектор-функция перемещений в направлениях x_1, x_2, z .

Функционал полной энергии системы «пластина – внешние силы» представляется в виде:

$$J(U) = J_0 + \bar{J} \quad (2)$$

при предварительном выполнении условий на опорных контурах Γ пластины:

$$\begin{aligned} w|_{\Gamma} = w^* \quad \text{или} \quad Q_{ii}|_{\Gamma} = Q_{ii}^*; \quad u|_{\Gamma} = u^* \quad \text{или} \quad T_{ij}|_{\Gamma} = T_{ij}^*; \\ w_{,x_i}|_{\Gamma} = w_{,x_i}^* \quad \text{или} \quad M_{ij}|_{\Gamma} = M_{ij}^*, \end{aligned} \quad (3)$$

и границах разреза Γ_p :

$$T_{ij}|_{\Gamma_p} = 0; \quad M_{ij}|_{\Gamma_p} = 0; \quad Q_{ij}|_{\Gamma_p} = 0, \quad (4)$$

где T_{ij}, M_{ij}, Q_{ij} – функции усилий, моментов и перерезывающих сил на соответствующих контурах; $u^*, v^*, w^*, T_{ij}^*, Q_{ij}^*, M_{ij}^*$ – заданные значения соответствующих функций на внешнем контуре пластины Γ и границах разреза Γ_p ; $i, j = 1, 2$.

Потенциальная энергия деформации пластины имеет вид:

$$\begin{aligned} J_0 = \frac{1}{2(1-\mu^2)} \times \\ \times \int_{\Omega} \int \left[\varepsilon_{11}^2 + 2\mu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{12}^2 \right] + \varepsilon^2 \left[\chi_{11}^2 + 2\mu\chi_{11}\chi_{22} + \chi_{22}^2 + 2(1-\mu)\chi_{12}^2 \right] dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

потенциал внешних сил записывается следующим образом:

$$\bar{J} = \int_{\Omega} q w dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(M_{11}^*(w_{,x_1})_{,x_1} + Q_{11}^* w + T_{11}^* u + T_{12}^* v \right) d\Gamma,$$

где ε_{ij} – деформации срединной поверхности; χ_{ij} – составляющие изгибной деформации и кручения; q – нагрузка.

При формировании функционалов в (2) введена система безразмерных величин:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{a}; \quad \xi_2 = \frac{x_2}{b}; \quad (u, v, w) = a^{-1}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}); \quad \varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}; \quad \chi_{ij} = a\bar{\chi}_{ij};$$

$$(T_{ij}, Q_{ij}) = \frac{(\bar{T}_{ij}, \bar{Q}_{ij})a^2}{Eh(1-\mu^2)\varepsilon^2}; \quad M_{ij} = \frac{\bar{M}_{ij}a}{Eh(1-\mu^2)\varepsilon^2}; \quad q = \frac{\bar{q}a}{Eh\varepsilon^2}(1-\mu^2); \quad \alpha = \frac{h^2}{\sqrt{12}a^2},$$

где $(\bar{\cdot})$ – размерные функции; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; α – параметр.

Предполагается предварительное выполнение условий совместности деформаций:

$$\varepsilon_{11} = u_{,\xi_1} + \frac{1}{2}(w_{,\xi_1})^2; \quad \varepsilon_{22} = v_{,\xi_2} + \frac{1}{2}(w_{,\xi_2})^2; \quad \varepsilon_{12} = u_{,\xi_1} + v_{,\xi_2} + w_{,\xi_1} w_{,\xi_2};$$

$$\chi_{11} = (w_{,\xi_1})_{,\xi_1}; \quad \chi_{22} = (w_{,\xi_2})_{,\xi_2}; \quad \chi_{12} = 2(w_{,\xi_1})_{,\xi_2} \quad (5)$$

и физических соотношений:

$$T_{11} = [\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}]; \quad T_{22} = [\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}]; \quad T_{12} = \frac{(1-\mu)}{2}\varepsilon_{12};$$

$$M_{11} = [\chi_{11} + \mu\chi_{22}]; \quad M_{22} = [\chi_{22} + \mu\chi_{11}]; \quad M_{12} = (1-\mu)\chi_{12}. \quad (6)$$

С учетом введенных соотношений (6) потенциальная энергия деформации может быть представлена в виде:

$$J_0 = \frac{1}{2(1-\mu^2)} \int_{\Omega} \int [T_{11}^2 - 2\mu T_{11}T_{22} + T_{22}^2 + 2(1+\mu)T_{12}^2] +$$

$$+ \alpha^2 [M_{11}^2 - 2\mu M_{11}M_{22} + M_{22}^2 + 2(1+\mu)M_{12}^2] d\xi_1 d\xi_2. \quad (7)$$

Для того, чтобы сформулировать вариационную задачу, эквивалентную (7), из которой следуют уравнения равновесия и соотношения (5), а также граничные условия нелинейной краевой задачи, присоединим соотношения (3)-(6) к функционалу (7) с помощью множителей Лагранжа. Записывая условия стационарности такого функционала и определяя неизвестные множители Лагранжа, получим:

$$J(U, T, M, Q) = J + J_{\Gamma} + J_{\Gamma_p} = \int_{\Omega} \int -\frac{1}{2(1-\mu^2)} [T_{11}^2 - 2\mu T_{11}T_{22} + T_{22}^2 - 2(1+\mu)T_{12}^2] +$$

$$+ \alpha^2 [M_{11}^2 - \mu M_{11}M_{22} + M_{22}^2 - (1+\mu)M_{12}^2] +$$

$$+ T_{11} \left(u_{,\xi_1} + \frac{1}{2}(w_{,\xi_1})^2 \right) + T_{22} \left(v_{,\xi_2} + \frac{1}{2}(w_{,\xi_2})^2 \right) - T_{12} \left(u_{,\xi_1} + v_{,\xi_2} + \frac{1}{2}(w_{,\xi_1})_{,\xi_2} \right) -$$

$$- \varepsilon^2 \left(M_{11}(w_{,\xi_1})_{,\xi_1} + M_{22}(w_{,\xi_2})_{,\xi_2} + 2M_{12}(w_{,\xi_1})_{,\xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\Omega} q w d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ \int_{\Gamma_b} [T_{11}^* u + T_{12}^* v + \bar{Q}_{11}^* w + M_{11}^* w_{,\xi_1}] d\xi_2 + \int_{\Gamma_b} [(w^* - w)\bar{Q}_{11} + (u^* - u)T_{11} -$$

$$\begin{aligned}
& -\left(v^* - v\right)T_{12} + \left(w^*,_{\xi_1} - w_{, \xi_1}\right)M_{11} \Big] d\xi_2 + \int_{\substack{\Gamma_a \\ \xi_2=const}} \left[T_{12}^*u + T_{22}^*v + \bar{Q}_{22}^*w + M_{22}^*(w,_{\xi_2})\right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{\Gamma_a \\ \xi_2=const}} \left[T_{12}(u^* - u) + T_{22}(v^* - v) + \bar{Q}_{22}(w^* - w) + M_{22}(w^*,_{\xi_2} - w_{, \xi_2})\right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{\Gamma_2^+ \\ \xi_1=const}} \left[T_{11}^*u + T_{12}^*v + \bar{Q}_{11}^*w + M_{11}^*w_{, \xi_1}\right] d\xi_2 + \int_{\substack{\Gamma_2^+ \\ \xi_1=const}} \left[(w^+ - w)\bar{Q}_{11} + (u^+ - u)T_{11} - \right. \\
& \left. - (v^+ - v)T_{12} + (w^+,_{\xi_1} - w_{, \xi_1})M_{11}\right] d\xi_2 + \int_{\substack{\Gamma_1^+ \\ \xi_2=const}} \left[T_{12}^*u + T_{22}^*v + \bar{Q}_{22}^*w + M_{22}^*(w,_{\xi_2})\right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{\Gamma_1^+ \\ \xi_2=const}} \left[T_{12}(u^+ - u) + T_{22}(v^+ - v) + \bar{Q}_{22}(w^+ - w) + M_{22}(w^+,_{\xi_2} - w_{, \xi_2})\right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{\Gamma_2^- \\ \xi_1=const}} \left[T_{11}^*u + T_{12}^*v + \bar{Q}_{11}^*w + M_{11}^*w_{, \xi_1}\right] d\xi_2 + \int_{\substack{\Gamma_2^- \\ \xi_1=const}} \left[(w^- - w)\bar{Q}_{11} + (u^- - u)T_{11} - \right. \\
& \left. - (v^- - v)T_{12} + (w^-,_{\xi_1} - w_{, \xi_1})M_{11}\right] d\xi_2 + \int_{\substack{\Gamma_1^- \\ \xi_2=const}} \left[T_{12}^*u + T_{22}^*v + \bar{Q}_{22}^*w + M_{22}^*(w,_{\xi_2})\right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{\Gamma_1^- \\ \xi_2=const}} \left[T_{12}(u^- - u) + T_{22}(v^- - v) + \bar{Q}_{22}(w^- - w) + M_{22}(w^-,_{\xi_2} - w_{, \xi_2})\right] d\xi_1,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\bar{Q}_{ii} = M_{ii}$ $\bar{Q}_{ij} = M_{ii, \xi_j} + M_{ij, \xi_j} + (T_{ii}w_{, \xi_i})_{, \xi_i} + (T_{ij}w_{, \xi_j})_{, \xi_i}$; $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$; Γ_a, Γ_b – участки внешнего контура пластины при $\xi_2 = const$, $\xi_1 = const$ соответственно; Γ_1^+, Γ_1^- – границы поперечного разреза при $\xi_2 = const$, $a_1 \leq \xi_1 \leq a_2$; Γ_2^+, Γ_2^- – границы продольного разреза при $\xi_1 = const$, $b_1 \leq \xi_2 \leq b_2$; $u^+, v^+, w^+, u^-, v^-, w^-$ – значения перемещений на берегах разреза Γ_p^+, Γ_p^- соответственно, $p = 1, 2$.

Из условия $\delta J = 0$ следуют нелинейные уравнения равновесия пластины в функциях усилий и моментов, условия на границе Γ области Ω и на берегах разреза (3), (4), а также геометрические соотношения в виде:

$$\begin{aligned}
T_{11} - \mu T_{22} &= \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2; & M_{11} - \mu M_{22} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2}; \\
T_{22} - \mu T_{11} &= \frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2; & M_{22} - \mu M_{11} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2}; \\
T_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right); & M_{12} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Если учесть непрерывность функций усилий, моментов и перерезывающих сил внутри области Ω и на границах Γ_p , $p = 1, 2$, то функционал J_{Γ_p} имеет вид:

$$J_{\Gamma_p} = \int_{\substack{b_1 \\ (\xi_1=const)}}^{b_2} \left(T_{22}(v^- - v^+) + T_{12}(u^- - u^+) + M_{22}(w^-,_{\xi_2} - w^+,_{\xi_2}) + Q_{22}(w^- - w^+) \right) d\xi_2 + \\ + \int_{\substack{a_1 \\ (\xi_2=const)}}^{a_2} \left(T_{11}(u^- - u^+) + T_{12}(v^- - v^+) + M_{11}(w^-,_{\xi_1} - w^+,_{\xi_1}) + Q_{11}(w^- - w^+) \right) d\xi_1. \quad (10)$$

Здесь неизвестные функции U , $U_{\Gamma_p}^{(k)}$, T_{ij} , M_{ij} , Q_{ij} варьируются независимо внутри области Ω и на границах Γ , Γ_p^+ , Γ_p^- при $U_{\Gamma_p}^{(1)} = [u^- - u^+]$; $U_{\Gamma_p}^{(2)} = [v^- - v^+]$; $U_{\Gamma_p}^{(3)} = [w^- - w^+]$; $U_{\Gamma_p}^{(4)} = [\theta_i^- - \theta_i^+]$, где $U_{\Gamma_p}^k$ – скачки перемещений U и углов поворота $\theta_i = w_{, \xi_i}$; $i, j = 1, 2$; $p = 1, 2$; $k = \overline{1, 4}$.

Тогда, в силу независимости вектор-функции U_{Γ_p} условие $\delta J = 0$ может быть реализовано как

$$\delta_p J = 0 \quad \text{при условии} \quad \delta_{U_{\Gamma_p}} J_{\Gamma_p} = 0,$$

где $P = \{U, M_{ij}, T_{ij}, Q_{ij}\}$, или

$$\delta_{U_{\Gamma_p}} J_{\Gamma_p} = 0 \quad \text{при условии} \quad \delta_p J = 0.$$

Таким образом, задача о деформировании пластины с разрезом эквивалентна задаче о деформировании сплошной пластины со скачками перемещений U_{Γ_p} при условии:

$$\delta_{U_{\Gamma_p}} J_{\Gamma_p} = 0. \quad (11)$$

Из сформулированного условия (11) следуют равенства (4) на границе разреза Γ_p .

ОБОСНОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ

Исследование корректности решения обратной задачи связано с оценкой непрерывности функционала J_{Γ_p} задачи (11).

Введем множество

$$\Theta = \left\{ \tilde{U}_{\Gamma_p}(\xi) \in C^1_{\Gamma}; \xi \in \Gamma_p; \tilde{U}_{\Gamma_p} \in W_{\Gamma_p}^{(3/2)}; \frac{\partial \tilde{U}_{\Gamma_p}}{\partial z} \in W_{\Gamma_p}^{(1/2)}; \underline{U} \leq \tilde{U}_{\Gamma_p} \leq \bar{U} \right\}, \quad p = 1, 2, \quad (12)$$

где $[\underline{U}, \bar{U}]$ – интервал изменения \tilde{U}_{Γ_p} ; $W_{\Gamma_p}^{1/2}$, $W_{\Gamma_p}^{3/2}$ – специальные функциональные пространства.

Множество, определяемое соотношением (12), является компактом в пространстве $W_{\Gamma}^{3/2}$, т.е. из любой последовательности $\{\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)}\} \subset \Theta$ можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность $\{\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n_m)}\} \subset \{\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)}\}$, которая сходится в норме пространства $W_{\Gamma}^{(3/2)}$ к некоторому элементу $\tilde{U}_{\Gamma_p}^0 \in \Theta$.

Для доказательства непрерывности функционала J_{Γ_p} необходимо сформулировать условия, при которых функция \tilde{U}_{Γ_p} , заданная на границе Γ_p , может быть продолжена внутрь области Ω как функция пространства $W_{2\Omega}^2$. Для формулировки условий введем пространство $W_{2\Gamma}^{(3/2)}$, определяемое как замыкание множества $U \in C_{\Gamma}^2$ в норме

$$\|U\|_{2\Gamma}^{(3/2)} = \|U\|_{L_{2\Gamma}} + \sum_{i=1}^2 \|U_{,\xi_i}\|_{L_{2\Gamma}} + \sum_{i=1}^2 \left(\iint_{\Gamma} \frac{|U_{,\xi_i}(N_1) - U_{,\xi_i}(N_2)|^2}{\rho^2(N_1, N_2)} dx_1 dx_2 \right).$$

Справедлива следующая теорема [10]:

Пусть $\Gamma \in C_{\Gamma}^2$. В этом случае, для того, чтобы $U \in W_{2\Omega}^{(2)}$ необходимо и достаточно, чтобы $U \in W_{2\Gamma}^{(3/2)}$. При этом имеют место неравенства

$$m \|U\|_{W_{2\Gamma}^{(3/2)}} \leq \|U\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} \leq M \|U\|_{W_{2\Gamma}^{(3/2)}}.$$

Кроме того, имеют место соотношения:

из сходимости $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)} \rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_p}^0$ в $W_{2\Gamma}^{(1/2)}$ следует $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)} \Rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_p}^0$ в любом пространстве $L_{q\Gamma}$, $q \geq 1$;

из сходимости $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)} \rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_p}^0$ в $W_{2\Gamma}^{(3/2)}$ следует $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)} \Rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_p}^0$ в любом пространстве $L_{q\Gamma}$, $q \geq 1$

и справедливо $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(n)} \Rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_p}^0$ в пространстве $H_{\Gamma}^{0,\lambda}$.

Таким образом, если $U \in W_{2\Gamma}^{(1/2)}$, $U \in W_{2\Gamma}^{(3/2)}$, то существует ее продолжение внутрь области Ω , такое, что $U \in W_{2\Omega}^{(2)}$.

Следовательно, существует последовательность решений $\tilde{U}(x, U_{\Gamma_p}^{(n_m)}) \rightarrow \tilde{U}(x, U_{\Gamma_p}^0)$ в $W_{2\Omega}^2$, а также $\tilde{M}_{ij}(x, U_{\Gamma_p}^{(n_m)}) \rightarrow \tilde{M}_{ij}(x, U_{\Gamma_p}^0)$, $\tilde{Q}_{ij}(x, U_{\Gamma_p}^{(n_m)}) \rightarrow \tilde{Q}_{ij}(x, U_{\Gamma_p}^0)$.

Очевидно, что функционал J_{Γ_p} является конечным.

Учитывая, что множество Θ является компактом в пространстве $W_{\Gamma_p}^{(3/2)}$, из теоремы Вейерштрасса следует, что для функционала $J(\tilde{U}_{\Gamma_p})$ на множестве Θ задача минимизации имеет, по крайней мере, одно решение, и любая минимизирующая последовательность сходится к множеству $\Theta_* = \left\{ \tilde{U}_{\Gamma_p} \in \Theta, J(\tilde{U}_{\Gamma_p}) = J_*, J_* = \min J(\tilde{U}_{\Gamma_p}), U_{\Gamma_p} \in \Theta_* \right\}$ в норме пространства W_{Γ_p} .

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Сформулируем условие (11) как обратную задачу в виде:

$$U_{\Gamma_p} = \arg \min_{U_{\Gamma_p}} P_{\Gamma_p}^T P_{\Gamma_p}, \quad U \in U^* \quad (13)$$

при предварительном выполнении условия

$$\delta_p J = 0,$$

где $P_{\Gamma_p} = \{M_{ij}, T_{ij}, Q_{ij}\}$.

Для решения задачи (13) на решениях, удовлетворяющих условию $\delta_p J = 0$, осуществляется переход к дискретной модели пластины с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Использование МКЭ для определения напряженно-деформированного состояния конструкции требует представления неизвестных функций прямой и обратной задачи в параметрическом виде.

Для этого на области Ω вводится сетка с узлами ξ_n , где $\xi = \{\xi_n\}$, $\xi_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n})$, $n = \overline{1, N}$, тогда функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, представляются в виде векторов, компонентами которых являются узловые значения функций $U = \{u_n, v_n, w_n, \theta_{in}\}$; $T = \{T_{ijn}\}$; $Q = \{Q_{ijn}\}$; $M = \{M_{ijn}\}$, $n = \overline{1, N}$.

Для описания границы разреза Γ_p вводится сетка ξ_k , где $\xi = \{\xi_k\}$, $\xi_k = (\xi_{1k}, \xi_{2k})$, $k = \overline{1, K}$ (все узлы ξ_k выбираются из числа ξ_n и находятся внутри области Ω), тогда функция $\tilde{U}(\xi)$, компонентами которой являются скачки перемещений и углов поворотов на линии разреза, представляется в виде вектора $\tilde{U}_{\Gamma_p} = \{\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \bar{\theta}_{ik}\}$.

С использованием введенной дискретизации неизвестные функции задачи на элементе задаются для локальной системы координат при помощи аппроксимаций через узловые значения. После выполнения соответствующей процедуры интегрирования при заданной аппроксимации неизвестных функций, и процедуры суммирования матриц элементов, получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых перемещений с учетом граничных условий:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ U_{\Gamma_p} \end{bmatrix} = [R],$$

где $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$ – матрица жесткости системы; U – вектор неизвестных узловых перемещений внутри области Ω и на границе Γ ; U_{Γ_p} – неизвестные скачки перемещений, определяемые из решения задачи (13); R – вектор узловых значений правых частей.

Условие (13) в дискретной форме можно сформулировать следующим образом

$$\tilde{U}_{\Gamma_p} = \arg \min_{\tilde{U}_{\Gamma_p}} \Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) \Delta^T(\tilde{U}_{\Gamma_p}), \tilde{U}_{\Gamma_p} \in Q, \tag{14}$$

где $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p})$ – вектор невязки; при $\xi_1 = const$ вектор невязки составлен из компонент $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) = \{T_{22}, T_{12}, M_{22}, Q_{22}\}$; при $\xi_2 = const$ – $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}) = \{T_{11}, T_{12}, M_{11}, Q_{11}\}$. Равенство нулю компонент вектора-невязки обеспечивает выполнение статических граничных условий на границе разреза Γ_p .

Реализация условия (14) осуществляется с использованием метода Ньютона

$$\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m)} = \tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m-1)} - \left[W(\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m-1)}) \right]^{-1} \cdot G(\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m-1)}), \tag{15}$$

где $[W(\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m-1)})] = [A][A^T]$; $G = [A]\Delta^{(m-1)}$; $A = \left\{ \frac{\partial \Delta_i}{\partial \tilde{U}_{\mathbb{K}_p}} \right\}_{\tilde{U}_{\Gamma_p} = \tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m-1)}}$, $i, k = \overline{1, K}$ – матрица производных

невязки $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p})$ по компонентам вектора неизвестных обратной задачи; m – шаг итерационного процесса.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Описанный подход к решению обратной задачи может быть реализован следующим алгоритмом:

1. Инициализировать переменные: m – номер шага итерационного процесса; $\tilde{U}_{\Gamma_p} = \{\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \bar{\theta}_{ik}\}$ – вектор решения обратной задачи, составленный из значений скачков перемещений и углов поворота, $i = 1, 2$; $k = \overline{1, K}$.
2. Задать начальные значения: $m = 0$; $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(0)}$.
3. Решить прямую задачу деформирования пластины с граничными условиями при известном векторе $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m)}$, получить векторы $T^{(m)} = \{T_{ijn}\}$; $Q^{(m)} = \{Q_{ijn}\}$; $M^{(m)} = \{M_{ijn}\}$, $n = \overline{1, N}$.
4. Сформировать вектор невязок $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m)})$, проверить выполнение условия $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m)}) > \varepsilon$, если условие выполняется, то перейти к шагу 5, иначе перейти к шагу 8.
5. Сформировать функционал (14), построить матрицу A .
6. $m = m + 1$.
7. Определить вектор $\tilde{U}_{\Gamma_p}^{(m)}$ из итерационной формулы (15), перейти к шагу 3.
8. Конец.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Предложенный подход был применен к решению задач о деформировании тонкой стальной пластины с прямолинейным продольным разрезом ($a/b = 1$, $a/h = 100$, $E_{\text{пласт}} = 2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, $\mu = 0.3$; a, b, h – длина, ширина, толщина пластины). Разрез длины $\ell = 0.2a$ расположен в центре пластины при значении $\xi_2 = 0.5b$. Пластина находилась под действием нормальной распределенной нагрузки q и продольной нагрузки N , по контуру пластины реализованы условия жесткого защемления.

Решение краевой задачи для сплошной пластины и пластины с действительным разрезом выполнялось в пакете прикладных программ, реализующих метод конечных элементов. Для построения конечно-элементной модели пластины по существующей геометрической модели пластины с действительным разрезом использовалась упорядоченная сетка из четырехугольных элементов, создаваемая модулями пакета прикладных программ.

Конечно-элементная сетка строилась регулярной, размер конечного элемента определялся наперед заданной точностью решения задачи. Процесс выбора размера конечного элемента проходил путем процедуры последовательного сгущения сетки с целью получения стабильных результатов по основным показателям напряженно-деформированного состояния (НДС). В качестве критерия стабильности разница в значениях характеристик, при которой размер сетки считался достаточным, не превышала 2-3%. Для уточнения

характеристик НДС также осуществлялось сгущение сетки в областях, прилегающих к вершинам разреза.

На рис. 1 приведено распределение напряжений σ_{22} в сечении пластины, совпадающем с линией разреза (сплошная кривая соответствует сетке со сгущением в вершинах разреза, пунктирная кривая – регулярной сетке). Можно отметить, что, несмотря на комплекс мер, направленных на уточнение расчетной модели пластины с действительным разрезом, значения напряжений σ_{22} на берегах разреза, полученные в результате конечно-элементного расчета, отличны от нуля независимо от типа используемой сетки.

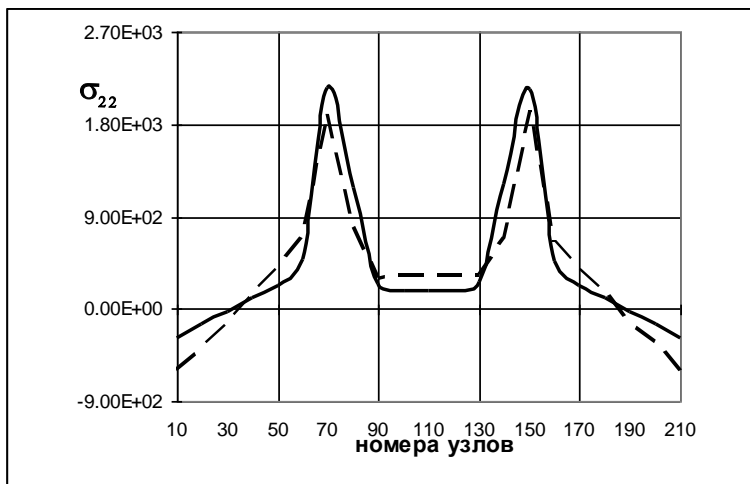


Рис. 1

Для устранения выявленного несоответствия картины НДС, полученной с использованием МКЭ, реальному поведению пластины с разрезом было проведено дополнительное уточнение параметров НДС, с использованием алгоритма (15). Для этого на берегах действительного разреза в узлах конечно-элементной сетки прикладывались значения скачков перемещений и углов поворота $\tilde{U}_{\Gamma_p} = \{\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \bar{\theta}_{ik}\}$, далее эти значения уточнялись в итерационной процедуре метода Ньютона (15), критерием окончания итерационного процесса являлось выполнение статических граничных условий на берегах разреза. На рис. 2 приведено распределение напряжений σ_{22} в сечении пластины, совпадающем с линией разреза, полученное в результате выполнения итерационной процедуры (обозначено сплошной жирной линией), здесь же тонкой сплошной и пунктирной линиями приведены результаты, полученные на итерациях метода Ньютона. Можно отметить, что в результате выполнения итерационного процесса статические условия на берегах разреза выполняются.

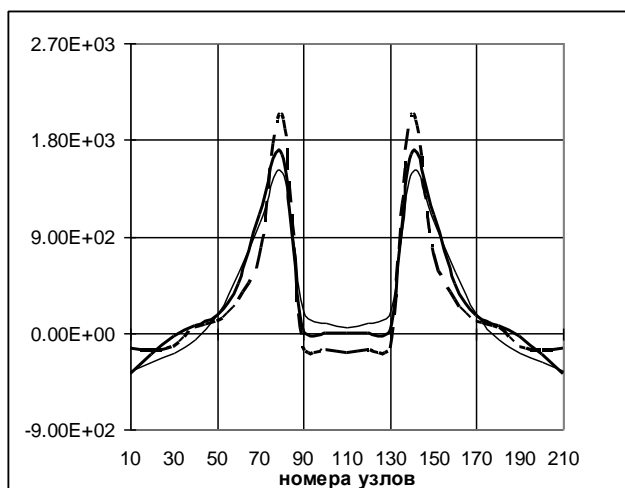


Рис. 2

Далее с использованием предложенного подхода выполнялось моделирование разреза в сплошной пластине путем определения значений компонент вектора U_{Γ_p} на линии разреза Γ_p . Для моделирования разреза на линии, имитирующей местоположение действительного разреза, прикладывались значения скачков перемещений и углов поворота $\tilde{U}_{\Gamma_p} = \{\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \bar{\theta}_{ik}\}$. Эти значения образуют вектор неизвестных обратной задачи и уточняются в итерационном процессе (15). При выполнении итерационной процедуры контролировалось выполнение статических условий на берегах разреза.

На рис. 3а и 3б представлены результаты моделирования разреза в пластине с помощью изложенного алгоритма на основе модели сплошной пластины при разных уровнях действующей нагрузки. Рис. 3а соответствует случаю линейного деформирования пластины, рис. 3б – случаю нелинейного деформирования. В качестве характеристики НДС приведено распределение напряжений σ_{22} в сечении пластины, совпадающем с линией разреза. Итерациям метода Ньютона соответствуют тонкие сплошные линии, сплошной жирной линией показаны напряжения, которые соответствуют критерию окончания итерационного процесса.

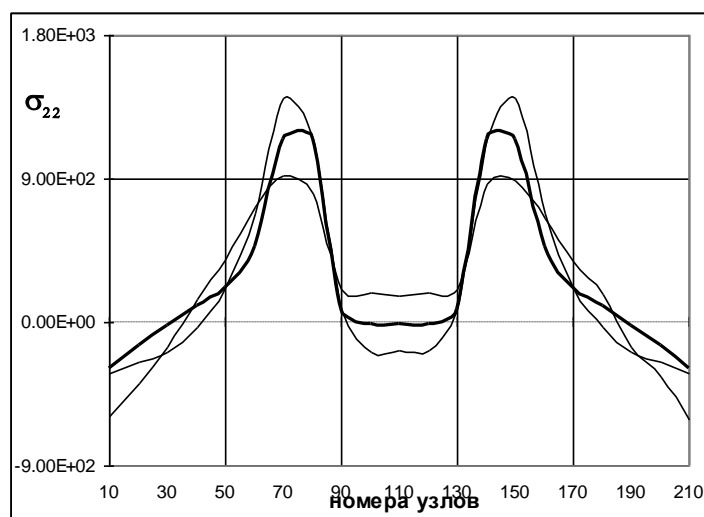


Рис. 3а

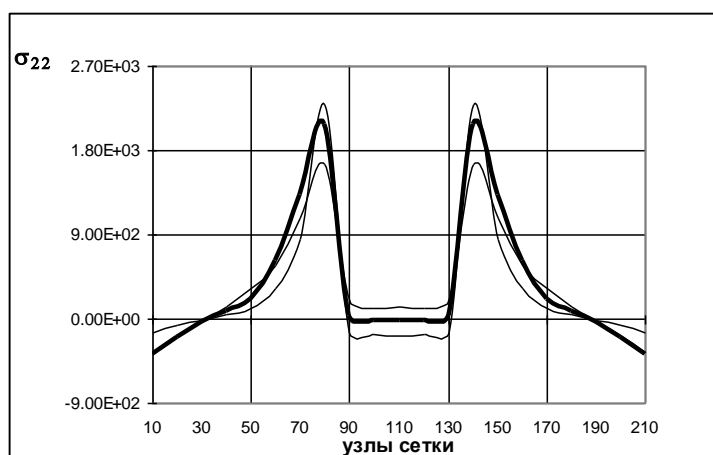


Рис. 3б

Подход, предложенный для моделирования поведения пластины с разрезом на основе модели сплошной пластины, обеспечивает выполнение статических условий на линии разреза независимо от характера деформирования.

ВЫВОДЫ

В работе предложен подход к моделированию разрезом (трещин) в тонких пластинах, основанный на задании статических условий на линии, совпадающей с берегом разреза; для имитации выполнения статических условий на линии разреза использована вариационная постановка задачи деформирования пластины в сочетании с формулировкой ее как обратной задачи; в качестве вектора неизвестных обратной задачи выбраны значения скачков перемещений и углов поворота на линии разреза; разработан алгоритм решения, позволяющий в итерационном процессе определять вектор скачков перемещений и углов поворота, обеспечивающий выполнение статических граничных условий; с использованием предложенного подхода возможно как имитировать разрез в сплошной пластине, так и уточнить картину напряженно-деформированного состояния пластины с действительным разрезом, полученную с использованием метода конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Dovbnya K. M. Studies on the Stress State of an Orthotropic Shell of Arbitrary Curvature with the Through Crack Under Bending Loading / K. M. Dovbnya, N. A. Shevtsova // *Strength of Materials*. – 2014. – Vol.46, iss. 3. – P. 345-349.
3. Пастернак Я. М. Розв'язування методами інтегральних рівнянь задач антиплоского деформування тіл із тонкими стрічковими включеннями. II. Аналіз концентрації та інтенсивності напружень / Я. М. Пастернак, Г. Т. Сулим // *Фіз.-хім. мех. матеріалів*. – 2012. – 48, № 6. – С. 86-91.
4. Wen P. H. A variational approach for evaluation of stress intensity factors using the element free Galerkin method / P. H. Wen, M. H. Aliabadi // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – Vol. 48, iss. 7-8. – P. 1171-1179.
5. Alwar R. S. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis / R. S. Alwar, K. N. Ramachandran Nambissan // *Eng. Fracture Mech.* – 1983. – Vol. 17, iss. 4. – P. 323-333.
6. Зайцев Б. Ф. Методика моделирования трещин с контактирующими берегами на основе метода конечных элементов / Б. Ф. Зайцев, Н. Г. Шульженко, А. В. Асаенко // *Вісник НТУ «ХП»*: Серія «Динаміка та міцність машин». – 2007. – № 22. – С. 48-61.
7. Song J. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture / J. Song, H. Wang, T. Belytschko // *Comput. Mech.* – 2008. – Vol. 42. – С. 239-250.
8. Dolbow J. An efficient finite element method for embedded interface problems / J. Dolbow, I. Harari // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2009. – Vol. 78, iss. 2. – P. 229-252.
9. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. – К. : Наукова думка, 1985. – 221 с.
10. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И. И. Ворович. – М. : Наука, 1989. – 373 с.

REFERENCES

1. Savruk, M.P. (1981), *Dvumernye zadachi uprugosti dlia tel s treshchinami* [Two-dimensional elasticity problem for bodies with cracks], Nauk. dumka, Kiev.
2. Dovbnya, K.M. and Shevtsova, N.A. (2014), “Studies on the Stress State of an Orthotropic Shell of Arbitrary Curvature with the Through Crack Under Bending Loading”, *Strength of Materials*, vol. 46, iss. 3, pp. 345-349.

3. Pasternak, Ya.M. and Sulim, G.T. (2012), "Solving problems means non-plate integral equations of deformation of thin belt body inclusions. II. Analysis of concentration and intensity", *Fiz.-khim. mekh. materialiv*, 48, no. 6, pp. 86-91.
4. Wen, P.H. and Aliabadi, M.H. (2011), "A variational approach for evaluation of stress intensity factors using the element free Galerkin method", *Int. J. Solids Struct.*, vol. 48, iss. 7-8, pp. 1171-1179.
5. Alwar, R.S. and Ramachandran Nambissan, K.N. (1983), "Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis", *Eng. Fracture Mech.*, vol. 17, iss. 4, pp. 323-333.
6. Zaytsev, B.F., Shulzhenko, N.G. and Asaenok, A.V. (2007), "Methods of modeling of cracks in contact with the banks on the basis of the finite element method", *Visnik NTU "HPI": Seriya "Dinamika ta mitsnist mashin"*, no. 22, pp. 48-61.
7. Song, J., Wang, H. and Belytschko, T. (2008), "A comparative study on finite element methods for dynamic fracture", *Comput. Mech.*, vol. 42, pp. 239-250.
8. Dolbow, J. and Harari, I. (2009), "An efficient finite element method for embedded interface problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78, iss. 2, pp. 229-252.
9. Osadchuk, V.A. (1985), *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie i predelnoe ravnovesie obolochek s razrezami* [Stress-strain state and limit equilibrium of shells with cuts], Naukova dumka, Kiev.
10. Vorovich, I.I. (1989), *Matematicheskie problemy nelineinoi teorii pologikh obolochek* [Mathematical problems of the nonlinear theory of shallow shells], Nauka, Moscow.

УДК 519.8

О ГРАНЯХ ОБЩЕГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА

Емец О. А., д. ф.-м. н., профессор, Емец А. О., к. ф.-м. н., доцент, Поляков И. М.

*Полтавский университет экономики и торговли,
ул. Коваля, 3, Полтава, Украина*

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

В статье рассматриваются новые свойства для граней общего перестановочного многогранника. На основе критерия m -грани общего перестановочного многогранника в прямой форме получен новый критерий m -грани общего перестановочного многогранника в симметричной форме.

Ключевые слова: перестановочный многогранник, грани многогранника, выпуклая оболочка, перестановки.

ПРО ГРАЊІ ЗАГАЛЬНОГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА

Ємець О. О., д. ф.-м. н., професор, Ємець Ол-ра О., к. ф.-м. н., доцент, Поляков І. М.

*Полтавський університет економіки і торгівлі,
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна*

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

У статті розглядаються нові властивості для граней загального перестановочного многогранника. На основі критерію m -грані загального перестановочного многогранника у прямій формі одержано новий критерій m -грані загального перестановочного многогранника в симетричній формі.

Ключеві слова: перестановочний многогранник, грані многогранника, випукла оболонка, перестановки.

ABOUT FACES OF THE GENERAL PERMUTABLE POLYHEDRON

Iemets O. O., D. Sc. in Physics and Maths, Professor, Yemets` O. O., Ph. D., Polyakov I. M.

Poltava University of Economics and Trade, Poltava, Ukraine

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

New facts for the faces of arbitrary dimension of general permutation polyhedron are considered in the article.

Herewith the general permutation polyhedron is set as the convex hull of the multiset of elements, each of which has its own multiplicity.

Two forms of general permutation polyhedron are considered: the so-called direct form, in which the elements of the multiset are numbered (are ordered) by not ascending order and the symmetrical to it form with the opposite numbered elements.

The system of required sets of indices and their characteristics are built on the basis of the m -faces criterion of general permutation polyhedron in the direct form. They allow getting a new criterion of m -faces of general permutation polyhedron in a symmetrical form.

Two equivalent forms for the symmetrical form are offered. They are suitable for the use in different cases.

Key words: a permutable polyhedron, faces of a polyhedron, convex hull, permutations.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование полиэдральной структуры выпуклых оболочек комбинаторных множеств является актуальным направлением исследований в комбинаторной оптимизации (см., например, [1-16]).

Изучение граневой структуры перестановочных многогранников для разных множеств и мультимножеств, элементы которых переставлялись, рассматривалось в [2-6, 17-22]. При этом в [2, 17] и в [18] рассматривались только множества, причем в [18] – множество натуральных чисел.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Пусть задано мультимножество $G = \{g_1, \dots, g_k\}$, с основой $S(G) = (e_1, \dots, e_n)$, первичной спецификацией $[G] = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, считаем, что $e_1 > \dots > e_n$, $g_1 \geq \dots \geq g_k$.

Введем такие необходимые далее параметры:

$$k_0 = 0, k_1 = \eta_1, \dots, k_i = \eta_1 + \dots + \eta_i, \dots, k_n = \eta_1 + \dots + \eta_n = k.$$

Обозначим $J_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

Известна теорема (теорема 2.5 [4]), описывающая m -грани выпуклой оболочки всех перестановок элементов G – общего перестановочного многогранника $\Pi_{kn}(G)$ – в форме (назовем ее прямой):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in \omega} x_i \leq \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall \omega \subset J_k, |\omega| < k, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k g_i. \end{array} \right. \quad (2)$$

В этой теореме (пункт б), в частности, утверждается следующее. Если для подмножеств $\omega_1 \subset \dots \subset \omega_\lambda = J_k$ неравенства в системе (1), (2) заменить равенствами, то множество F решений полученной системы является m -гранью общего перестановочного многогранника $\Pi_{kn}(G)$, а

$$m = \dim F = k - \left\{ \lambda + \sum (|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1) \right\}, \quad (3)$$

где суммирование в (3) происходит по всем $\sigma \in J_\lambda$, для каждого из которых найдется такое $j \in J_n$, что

$$k_{j-1} \leq |\omega_{\sigma-1}|, \quad |\omega_\sigma| \leq k_j,$$

при этом считаем, что $|\omega_0| = 0$.

В формулах (1)-(3) и далее $|A|$ обозначает количество элементов в множестве (мультимножестве) A .

Часто используется другая форма общего перестановочного многогранника (ОПМ), которую приведем далее. Цель статьи – изложение результатов получения критерия m -границ для этой формы ОПМ.

Рассмотрим вместе с G равное ему переупорядоченное мультимножество $Q = G = \{q_1, \dots, q_k\}$, где $q_1 = g_k, q_2 = g_{k-1}, \dots, q_i = g_{k-i+1}, \dots, q_{k-1} = g_2, q_k = g_1$, обозначим основу $S(Q) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_1 = e_n, \varepsilon_2 = e_{n-1}, \dots, \varepsilon_i = e_{n-i+1}, \dots, \varepsilon_n = e_1$, таким образом $q_1 \leq \dots \leq q_k, \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_n$. Первичная спецификация мультимножества Q – кортеж в соответствии с порядком основы $S(Q)$ – вектор $[Q] = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$, состоящий из кратностей элементов ε_i основы:

$$v_i = k_Q(\varepsilon_i) = \eta_{n-i+1} \quad \forall i \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (4)$$

где $k_Q(\varepsilon_i)$ означает кратность элемента основы ε_i в мультимножестве Q .

Как известно [3, 4, 19], многогранник перестановок $\Pi_{kn}(G)$ может быть описан так:

$$\begin{cases} \sum_{i \in \Omega} x_i \geq \sum_{i=1}^{|\Omega|} q_i & \forall \Omega \subset J_k, |\Omega| < k, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k q_i. \end{cases} \quad (6)$$

Эту форму ОПМ назовем симметричной для формы (1), (2).

Рассмотрим вместе с системой (5) следующие неравенства:

$$\sum_{i \in W} x_i \geq \sum_{i=1}^{|W|} g_{k-i+1}, \quad \forall W \subset J_k, |W| < k. \quad (7)$$

Понятно, что при $\Omega = W$ каждое неравенство в (5) с учетом (6) одинаково с соответствующим неравенством в (7).

Заметим, что множество

$$\begin{cases} \sum_{i \in \omega} x_i \leq \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i, \\ \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k g_i, \end{cases} \quad (8)$$

при фиксированном ω и $\Omega = J_k \setminus \omega$ совпадает с множеством

$$\begin{cases} \sum_{i \in \Omega} x_i \geq \sum_{i=1}^{|\Omega|} q_i, \\ \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k q_i. \end{cases} \quad (9)$$

Рассмотрим множества $\omega_1 \subset \dots \subset \omega_\lambda = J_k$ из приведенного выше пункта «б» теоремы 2.5 из [4]. Им соответствуют множества Ω_i со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \Omega_i &= J_k \setminus \omega_i, \quad \forall i \in J_\lambda^0 = \{0, 1, 2, \dots, \lambda - 1, \lambda\}, \\ J_k &= \Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots \supset \Omega_{\lambda-1} \supset \Omega_\lambda = \emptyset, \\ \omega_0 &= \emptyset. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно,

$$|\Omega_i| = k - |\omega_i| \quad \forall i \in J_\lambda^0. \quad (11)$$

Итак, система (1), (2) эквивалентна системе (5), (6), а множество F , задаваемое подмножеством $\omega_1 \subset \dots \subset \omega_\lambda = J_k$ из (1) равно, согласно (8) и (9), множеству, которое из (5) задается подмножествами Ω_i вида (10).

Рассмотрим формулу (3) определения размерности m -границ F , используя связь (4) между v_i и η_i .

Имеем,

$$\begin{aligned} m = \dim F &= k - \left\{ \lambda + \sum (k - |\Omega_\sigma| - (k - |\Omega_{\sigma-1}|) - 1) \right\} = \\ &= k - \left\{ \lambda + \sum (|\Omega_{\sigma-1}| - |\Omega_\sigma| - 1) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Суммирование в (12) производят по всем $\sigma \in J_\lambda$, для каждого из которых найдется такое $j \in J_n$, что

$$k_{j-1} \leq |\omega_{\sigma-1}|; \quad |\omega_\sigma| \leq k_j \quad (13)$$

с учетом $|\omega_0| = 0$.

Введем в рассмотрение параметры

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= 0; \quad \kappa_1 = v_1 = \eta_n; \quad \kappa_2 = v_1 + v_2 = \eta_n + \eta_{n-1}, \dots, \quad \kappa_i = v_1 + \dots + v_i = \eta_n + \dots + \eta_{n-i+1}, \\ \dots, \quad \kappa_n &= v_1 + \dots + v_n = \eta_n + \dots + \eta_1 = k. \end{aligned} \quad (14)$$

Условия (13) с учетом (11) и (14), если учесть, что

$$k_i = \eta_1 + \dots + \eta_i = k - \kappa_{n-i} \quad \forall i \in J_n^0, \quad (15)$$

записываются так:

$$k - \kappa_{n-j+1} \leq k - |\Omega_{\sigma-1}|; \quad k - |\Omega_\sigma| \leq k - \kappa_{n-j},$$

или после упрощения

$$\kappa_{n-j} \leq |\Omega_\sigma|, \quad |\Omega_{\sigma-1}| \leq \kappa_{n-j+1},$$

где $|\Omega_\lambda| = 0$, $\sigma \in J_\lambda = \{1, 2, \dots, \lambda-1, \lambda\}$; $j \in J_n$. Заметим, что, если $j \in J_n$, то при этом то же можно сказать и про параметр $t = n - j + 1$, т.е. $t \in J_n$.

Отметим, что в силу равенства множеств (8) и (9) получаем из части «а» теоремы 2.5 [4] такое: для m -грани F перестановочного многогранника $\Pi_{kn}(Q)$ существуют такие подмножества $J_k = \Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \dots \supset \Omega_{k-m-1}$, для которых неравенства в (5) обращаются в равенства при любом $x \in F$, где F – множество решений системы, которая получается из (5), (6) заменой неравенств на равенства для $\Omega = \Omega_\sigma$, $\forall \sigma \in J_{k-m-1}$. Заметим, что для ω_{k-m} из «а» в 2.5 [4] соответствующее множество есть пустым, т.е. $\Omega_{k-m} = \emptyset$ в силу (10).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть мультимножество $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ имеет основу $S(Q) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, первичную спецификацию $[Q] = (v_1, \dots, v_n)$. Элементы Q и $S(Q)$ пронумерованы так, что

$$q_1 \leq \dots \leq q_k; \quad \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_n.$$

а) Пусть F – m -грань многогранника $\Pi_{kn}(Q)$, который определяется системой (5), (6). Тогда существуют такие подмножества $\Omega_{k-m-1} \subset \Omega_{k-m-2} \subset \dots \subset \Omega_1 \subset \Omega_0 = J_k$, для которых неравенства в (5) обращаются в равенства $\forall x \in F$, где F – множество решений системы, полученной из (5), (6) заменой в (5) знака неравенства на знак равенства $\forall \Omega = \Omega_\sigma$, $\sigma \in J_{k-m-1}$.

б) Если для подмножеств $\Omega \in \{\Omega_1, \dots, \Omega_{\lambda-1}\}$, где $\emptyset = \Omega_\lambda \subset \Omega_{\lambda-1} \subset \dots \subset \Omega_2 \subset \Omega_1 \subset \Omega_0 = J_k$, неравенства в (5), (6) заменить равенствами, то множество F решений полученной системы является m -гранью многогранника $\Pi_{kn}(Q)$, где

$$m = \dim F = k - \left\{ \lambda + \sum (|\Omega_{\sigma-1}| - |\Omega_\sigma| - 1) \right\}, \quad (16)$$

и нахождение суммы в формуле (16) проводится $\forall \sigma \in J_\lambda^0$, для каждого из которых найдется такое $t \in J_n$, что

$$\kappa_{t-1} \leq |\Omega_\sigma|, \quad |\Omega_{\sigma-1}| \leq \kappa_t,$$

при этом считаем, что $|\Omega_\lambda| = 0$, а параметры $\kappa_t \forall t \in J_n^0$ заданы соотношениями (14).

Замечание 1. Иногда условия (10), (11), (16) удобно записывать так:

условие (10) в виде:

$$W_{\lambda-\sigma} = \Omega_\sigma = J_k \setminus \omega_\sigma, \quad \forall \sigma \in J_\lambda^0; \quad (17)$$

формулу (11) – таким образом:

$$|W_{\lambda-\sigma}| = k - |\omega_\sigma|, \quad \forall \sigma \in J_\lambda^0, \quad (18)$$

а формула размерности m из (16) трансформируется следующим образом:

$$m = k - \left\{ \lambda + \sum (|W_{\lambda-\sigma+1}| - |W_{\lambda-\sigma}| - 1) \right\}, \quad (19)$$

где сумма определяется $\forall \sigma \in J_\lambda^0$, для которых $\exists t \in J_n$, что

$$\kappa_{t-1} \leq |W_{\lambda-\sigma}|, \quad |W_{\lambda-\sigma+1}| \leq \kappa_t; \quad (20)$$

при этом $|W_0| = 0$.

Заметим, что поскольку $\sigma \in J_\lambda^0$, то $l = \lambda - \sigma \in J_\lambda^0$. Поэтому формулы (17)-(20) можно переписать, учитывая, что выполняется условие

$$l + \sigma = \lambda. \quad (21)$$

Формула (17) принимает вид:

$$W_l = \Omega_\delta = J_k \setminus \omega_\sigma \quad \forall \sigma \in J_\lambda^0 \quad (\forall l \in J_\lambda^0), \quad \emptyset = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{\lambda-1} \subset W_\lambda = J_k; \quad (22)$$

формула (18):

$$|W_l| = k - |\omega_\sigma| \quad \forall \sigma \in J_\lambda^0 \quad (\forall l \in J_\lambda^0); \quad (23)$$

формула (19):

$$m = k - \left\{ \lambda + \sum (|\omega_{l+1}| - |\omega_l| - 1) \right\}, \quad (24)$$

где суммирование ведется $\forall l \in J_\lambda^0$, для которых $\exists t \in J_n$, что

$$\kappa_{t-1} \leq |\omega_l|; \quad |\omega_{l+1}| \leq \kappa_t, \quad (25)$$

где (25) – трансформация формулы (20) при условии (21).

Замечание 2. Не нужно путать W_l из замечания 1 и множество W в формуле (7).

ВЫВОДЫ

В работе получен новый критерий m -границ для ОПМ в симметричной форме по критерию m -границ для прямой формы ОПМ.

Как направление дальнейших исследований представляется возможным обобщить изложенные результаты на множество k -размещений, используя обе формы теоремы (для прямой формы ОПМ в виде системы (1)-(2) и для симметричной формы ОПМ в виде системы (5), (6)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – К. : Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. Емеличев В. А. Многогранники, графы, оптимизация / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М. : Наука, 1981. – 344 с.
3. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : учеб. пособие [Электронный ресурс] / О. А. Емец. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с. – Режим доступа : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489>.
4. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступа : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487>.
5. Ємець О. О. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Л. М. Колечкіна, С. І. Недобачій. – Полтава : Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. – 64 с. – Ч.1. – Режим доступа : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488>.
6. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с. – Режим доступа : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376>.

7. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними функціями [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Л. М. Колечкіна. – К. : Наук. думка, 2005. – 117 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474>.
8. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування : Монографія [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/377>.
9. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях [Електронний ресурс] / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 159 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473>.
10. Емец О. А. Оптимизация на полиперестановках [Електронний ресурс] / О. А. Емец, Н. Г. Романова. – К. : Наук. думка, 2010. – 105 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474>.
11. Ємець О. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення : монографія [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 174 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353>.
12. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах : монографія [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352>.
13. Емец О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях : монография [Електронний ресурс] / О. А. Емец, О. А. Черненко. – К. : Наук. думка, 2011. – 154 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467>.
14. Ємець О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації : монографія [Електронний ресурс] / О. О.Ємець, О. О. Черненко. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 204 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354>.
15. Гуляницький Л. Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук : спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / Л. Ф. Гуляницький. – К., 2005. – 32 с.
16. Донець Г. П. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях : монографія / Г. П. Донець, Л. М. Колечкіна. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – 309 с.
17. Ковалев М. М. Линеаризация комбинаторных задач оптимизации / М. М. Ковалев, А. Н. Исаченко, Нгуен Нгиа // Докл. АН БССР. – 1978. – Т. 22, №10. – С. 869-872.
18. Gaiha P. Adjacent vertices on a permutohedron / P. Gaiha, S. Gupta // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – V. 32. N 2. – P. 323-327.
19. Емец О. А. Общий перестановочный многогранник и некоторые его свойства / О. А. Емец. – Полтава, 1983. – 20 с. – Деп. В УкрНИИИТИ 28.06.83, № 616-УкД83.
20. Емец О. А. Об общем полиперестановочном многограннике и некоторых его свойствах / О. А. Емец // Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1989.– 11 с. – Деп. В УкрНИИИТИ 31.10.89, № 2362-Ук-89.
21. Емец О. А. О геометрических свойствах множества перестановок / О. А. Емец // Тезисы докл. 42 научн. конф. проф., препод., науч. работн., аспирант. и студент. ин-та / Минвуз УССР. Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1990. – С. 215.
22. Бондаренко В. А. Обобщенные перестановочные многогранники и свойства алгоритмов сортировки / А. В. Бондаренко, Е. В. Шуникова // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – М., 1985. – 13 с. Деп. В ВИНИГИ № 7454-В85.

REFERENCES

1. Sergienko, I.V. and Kaspshitskaya, M.F. (1981), *Modeli i metody resheniia na EVM kombinatornykh zadach optimizatsii* [Models for Computer Solution of Combinatorial Optimization], Naukova Dumka, Kyiv.

2. Emelichev, V.A., Kovalev, M.M. and Kravtsov, M.M. (1981), *Mnogogranniki, grafy, optimizatsiia* [Polyhedra, Graphs, Optimization], Gl. Red. Fiz.-Mat. Lit., Moscow.
3. Iemets, O.A. (1992), *Evklidovy kombinatornye mnozhestva i optimizatsiia na nikh. Novoe v matematicheskoy programirovani: ucheb. posobie* [Euclidian Combinatorial Sets and Optimization on Them. New in Mathematical Programming (An Educational Book)], UMK VO, Kiev, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489>.
4. Stoyan, Y.G. and Iemets, O.O. (1993), *Teoriya i metody evklidovoyi kombinatornoj optymizatsiyi* [Theory and Methods of Euclidian Combinatorial Optimization], Inst. Syst. Doslidzh. Osvity, Kyiv, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487>.
5. Iemets, O.O., Kolechkina, L.M. and Nedobachii, S.I. (1999), *Doslidzhennya oblastey vyznachennya zadach evklidovoyi kombinatornoj optymizatsiyi na perestavnykh mnozhynakh* [Investigation of Domains of Euclidean Combinatorial Optimization Problems on Permutable Sets], Yu. Kondratyuk Techn. Univ., ChPKP Legat, Poltava, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488>.
6. Stoyan, Yu.G., Iemets, O.O. and Yemets, E.M. (2005), *Optymizatsiya na polirozmishchennyakh: teoriya ta metody* [Optimization on Polypermutations: Theory and Methods], RVTs PUSKU, Poltava, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376>.
7. Iemets, O.O. and Kolechkina, L.M. (2005), *Zadachi kombinatornoj optymizatsiyi z drobovo-liniynymi funktsiyamy* [Combinatorial Optimization with Linear Fractional Functions], Naukova Dumka, Kyiv, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474>.
8. Iemets, O.O. and Roskladka, O.V. (2005), *Zadachi optymizatsiyi na polikombinatornykh mnozhynakh: vlastyosti ta rozv'yazuvannya* [Optimization Problems on Polyarrangements: Properties and Solution], RVTs PUSKU, Poltava, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/377>.
9. Yemets, O.A. and Barnolina, T.N. (2008), *Kombinatornaia optimizatsiia na razmeshcheniyakh* [Combinatorial Optimization on Arrangements], Naukova Dumka, Kyiv, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473>.
10. Iemets, O.A. and Romanova, N.G. (2010), *Optimizatsiya na poliperestankakh* [Optimization on Polypermutations], Naukova Dumka, Kyiv, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474>.
11. O. O. Iemets and T. O. Parfyonova, (2011), *Transportni zadachi kombinatornoho typu: vlastyosti, rozv'yazuvannya, uzahal'nennya* [Combinatorial Transportation Problems: Properties, Solutions, Generalizations], RVV PUET, Poltava, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353>.
12. Iemets, O.O. and Yemets', O.I. (2011), *Rozv'yazuvannya zadach kombinatornoj optymizatsiyi na nechitkykh mnozhynakh* [Solving Combinatorial Optimization Problems on Fuzzy Sets], PUET, Poltava, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352>.
13. Yemets, O.A. and Chernenko, O.A. (2011), *Optimizatsiya drobno-lineynykh funktsiy na razmeshcheniyakh* [Optimization of Linear Fractional Functions on Arrangements], Naukova Dumka, Kyiv, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467>.
14. Iemets, O.O. and Chernenko, O.O. (2011), *Modeli evklidovoyi kombinatornoj optymizatsiyi* [Models of Euclidean Combinatorial Optimization], RVV PUET, Poltava, available at: <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354>.
15. Hulyanytskyi, L.F. (2005), "Development of models and approximate combinatorial optimization methods and their application in information technologies", Thesis abstract for Ph.D., 01.05.02, V.M. Glushkov Inst. Of Cybernetis, NAS of Ukraine.
16. Donets, G.P. and Kolechkiva, L.M. (2011), *Ekstremal'ni zadachi na kombinatornykh konfiguracyakh* [Extremum Problems on Combinatorial Configurations], RVV PUET, Poltava.
17. Kovaliov, M.M., Isachenko, A.N. and Ngia, Nguen (1978), "Linearization of Combinatorial Optimization Problems", *Dokl. AN BSSR*, vol. 22, no. 10, pp. 869-872.
18. Gaiha, P. and Gupta, S. (1977), "Adjacent Vertices on a Permutohedron", *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 32, no. 2, pp. 323-327.

19. Yemets, O.A. (1983), "General Polyhedron of Permutations and Some of Its Properties", Dep. in UkrNIINTI 28.06.83, № 616-UkD 83, Poltava.
20. Yemets, O.A. (1989), "About General Polyhedron of Permutations and Some of Its Properties, Poltava civil engineering institute", Dep. in UkrNIINTI 31.10.89, № 2362-Uk-89, Polt. inzh.-stroit. in-t., Poltava.
21. Yemets, O.A. (1990), "About Geometrical Properties of the Set of Permutations", *Tezisy dokl. 42 nauchn. konf. prof., prepod., nauch. rabotn., aspir. i student. in-ta* [Proc. 42th Sci. Conf. of Professors, Teachers, Scientists, Post graduate Students and Students of the Institute], Minvuz USSR, Polt. inzh.-stroit. in-t., Poltava, 1990, p. 215.
22. Bondarenko, V.A. and Shunikova, E.V. (1985), "Generalized Polyhedrons of Permutation and Properties of Sort Algorithms", *Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiziki*, Moscow, Dep. in VINIGI № 7454-V85.

УДК 531:383-62:50

ПРО АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА ТА РІККАТІ ДЛЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

¹Зінчук М. О., к. т. н., ²Святовець І. Ф., ³Тетерятник О. В.

^{1,3}*Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, Київ-4, 301601, Україна*

²*Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69006, Україна*

sv.irina0702@gmail.com, E.Teteryatnik@gmail.com

Розглянуто неперервні та дискретні майже консервативні автономні та керовані системи, які за допомогою деякого ортогонального перетворення зводяться до канонічних форм. Для перетворених систем побудовані рівняння Ляпунова та Ріккати і показано, при яких значеннях параметра ε їх асимптотичні розв'язки коректні, тобто відповідні ряди збіжні. За допомогою зворотного перетворення отримана збіжність аналогічних рядів для початкових систем.

Ключові слова: майже консервативна система, рівняння Ляпунова і Ріккати, асимптотичні рішення, збіжність рядів.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА И РИККАТИ ДЛЯ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

¹Зінчук Н. А., к. т. н., ²Святовец И. Ф., ³Тетерятник Е. В.

^{1,3}*Інститут математики НАН України,
ул. Терещенковская, 3, Киев-4, 301601, Украина*

²*Запорожская государственная инженерная академия,
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69006, Украина*

sv.irina0702@gmail.com, E.Teteryatnik@gmail.com

Рассмотрены непрерывные и дискретные почти консервативные автономные и управляемые системы, которые с помощью некоторого ортогонального преобразования сводятся к каноническим формам. Для преобразованных систем построены уравнения Ляпунова и Риккати и показано, при каких значениях параметра ε их асимптотические решения корректны, то есть соответствующие ряды сходящиеся. С помощью обратного преобразования получена сходимость аналогичных рядов для начальных систем.

Ключевые слова: почти консервативная система, уравнения Ляпунова и Риккати, асимптотические решения, сходимость рядов.

ON ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF MATRIX EQUATIONS LYAPUNOV AND RICCATI FOR ALMOST CONSERVATIVE SYSTEMS

¹Zinchuk, M. O., Ph.D. in Engineering, ²Svyatovets I. F., ³Teteryatnik O. V.

^{1,3}*In-t of Mathematics of NAS of Ukraine,
3, Tereschenkivska str., Kiev-4, 301601, Ukraine*

²*Zaporizhzhya State Engineering Academy,
Sobornyi Ave., 226, Zaporizhzhya, 69006, Ukraine*

sv.irina0702@gmail.com, E.Teteryatnik@gmail.com

In the article are considered the continuous and discrete almost conservative autonomous and controlled systems that are reduced to the canonical form using some orthogonal transformation. For transformed systems, Lyapunov and Riccati equations are constructed and is shown in which parameter ε values asymptotic solutions are correct, i.e. corresponding series are convergent. Using the reverse transformation the convergence of similar series for initial systems is obtained.

Key words: almost conservative system, Lyapunov and Riccati equations, asymptotic solutions, convergence of the series.

ВСТУП

У працях [1-3] розглянуто дослідження матричного рівняння Ляпунова для майже консервативних систем, а публікації [4-6] присвячені оптимальному керуванню такими системами та дослідженню відповідного рівняння Ріккати. Для пошуку розв'язків матричних рівнянь Ляпунова і Ріккати останні розкладаються в нескінченні системи матричних рівнянь, а відповідні розв'язки в нескінченні ряди. Тому, природньо, постає задача про збіжність цих рядів. У названих працях це питання висвітлено не достатньо широко і строго.

Запропоноване дослідження має заповнити цю прогалину. Нижче розглянуто неперервні та дискретні майже консервативні автономні і керовані системи, які за допомогою деякого ортогонального перетворення зводяться до канонічних форм. Потім для перетворених систем побудовано рівняння Ляпунова та Ріккати і показано, при яких значеннях параметра ε їх асимптотичні розв'язки коректні, тобто відповідні ряди збіжні. За допомогою зворотного перетворення легко отримати збіжність аналогічних рядів для початкових систем.

1. АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА ТА РІККАТІ ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

1. Розглянемо лінійну стаціонарну неперервну асимптотично стійку майже консервативну систему

$$\dot{y} = (\tilde{A}_0 + \varepsilon \tilde{A}_1) y, \quad y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

де $y \in \mathfrak{R}_{2n}$ – вектор стану, $\tilde{A}_0 = -\tilde{A}_0^T \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$ – кососиметрична невивроджена матриця загального вигляду, $\tilde{A}_1 \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$ – стала матриця збурення, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

За допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$ від системи (1) перейдемо до [2]:

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1) x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

де $x_0 = Ty_0$, $A_1 = T\tilde{A}_1T^T$, а матриця \tilde{A}_0 зведена до блочно-діагональної форми [8]

$$A_0 = T\tilde{A}_0T^T = \text{diag}\{G_1, G_2, \dots, G_r\}, \quad (3)$$

де $G_i = \text{diag}\{S_i, \dots, S_i\}$, $G_i \in \mathfrak{R}_{2n_i \times 2n_i}$, $S_i = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_i \\ -\varphi_i & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}_{2 \times 2}$, $\varphi_i \neq \varphi_j$, для $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, r$),

$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

Оскільки система (1) асимптотично стійка, то виконується нерівність $\text{Re}(A_0 + \varepsilon A_1) < 0$ та існує додатно означена симетрична матриця – розв’язок $P \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$ матричного рівняння Ляпунова [7]

$$P(A_0 + \varepsilon A_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)^T P = -2Q, \tag{4}$$

де $Q \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$ – деяка невід’ємно означена матриця.

У [1] показано, що матриці P і Q можна вибрати у вигляді степеневих рядів за малим параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots, \quad Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots \tag{5}$$

Матричне рівняння (4) еквівалентне нескінченній системі матричних алгебраїчних рівнянь [1]:

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \tag{6}$$

$$A_0 P_1 - P_1 A_0 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1, \tag{7}$$

.....

$$A_0 P_i - P_i A_0 = P_{i-1} A_1 + A_1^T P_{i-1} + 2Q_i, \tag{7}$$

.....

Позначимо [2]

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}^T & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}_k, \quad D_k = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}^T & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}_k = P_{k-1} A_1 + A_1^T P_{k-1} + 2Q_k, \tag{8}$$

$D_{ij}, P_{ij} \in \mathfrak{R}_{2 \times 2}, i, j = 1, \dots, n, k = 1, 2, \dots$. Матриця нульового наближення має такий вигляд

$$P_0 = \text{diag} \{W_1, \dots, W_r\}, \tag{9}$$

де блоки $W_l, l = 1, \dots, r$ спеціальної структури. Тоді блоки $P_{ij} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ можна визначити за однією з трьох формул

$$c_1 = \frac{\varphi_j d_2 - \varphi_i d_3}{\varphi_i^2 - \varphi_j^2}, \quad c_2 = \frac{-\varphi_j d_1 - \varphi_i d_4}{\varphi_i^2 - \varphi_j^2}, \tag{10}$$

$$c_3 = \frac{\varphi_j d_1 + \varphi_i d_4}{\varphi_i^2 - \varphi_j^2}, \quad c_4 = \frac{\varphi_j d_2 - \varphi_i d_3}{\varphi_i^2 - \varphi_j^2};$$

$$c_4 - c_1 = \frac{d_2}{\varphi_i}, \quad c_3 = c_2 = \frac{d_1}{2\varphi_i}; \tag{11}$$

$$c_4 - c_1 = \frac{d_2}{\varphi_i}, \quad c_2 + c_3 = \frac{d_1}{\varphi_i}, \tag{12}$$

де $D_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}_{ij}$. Тут блоки P_{ij}, D_{ij} для кожного k свої.

З формул (10)-(12) випливає, що при нерівностях $\varphi_i \neq \varphi_j, \varphi_i \neq 0$, які виконуються за умовою, значення відношення максимального по модулю з обчислених параметрів $c_i, i = 1, \dots, 4$ до ненульового мінімального по модулю з параметрів, обчислених на попередньому кроці (від них залежать значення $d_i, i = 1, \dots, 4$), будуть обмеженими.

Параметри c_i , які не набули значень за формулами (11), (12), обчислюються з наступної системи рівнянь, що формуються з елементів матриці D_k за необхідними та достатніми умовами розв'язності k -го рівняння [2]

$$\begin{aligned} d_1^{lj} + d_4^{lj} &= 0, \quad j \geq l = 1, \dots, n_i, \\ d_2^{lj} - d_3^{lj} &= 0, \quad j > l = 1, \dots, n_i - 1, \end{aligned} \tag{13}$$

де $\begin{bmatrix} d_1^{lj} & d_2^{lj} \\ d_3^{lj} & d_4^{lj} \end{bmatrix} = d_{lj}, d_2^{ll} = d_3^{ll}$. Матриці Q_k задаються конкретні числові, якщо розв'язність цієї системи не залежить від них, або структурно (наприклад, діагональні) з вільними параметрами, яким надаються конкретні значення, виходячи з умов її розв'язності. Відношення максимального по модулю зі значень розв'язку системи (13) до ненульового мінімального по модулю із коефіцієнтів (вони залежать від розв'язку на попередньому кроці) будуть обмеженими. Умова обмеженості виконується, враховуючи зауваження щодо $c_i, i = 1, \dots, 4$, послідовно для $k = 1, 2, \dots$. Параметри, що залишаються вільними, вважаємо обмеженими.

Отже, з наведених вище міркувань випливає обмеженість відношень матричних норм $\frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_i\|} \leq \delta < \infty, i = 0, 1, \dots$, де δ - деяке додатне число. Тоді при $\varepsilon \delta < 1$ ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \|P_i\|$ збігається.

Дійсно, із послідовності нерівностей

$$\frac{\|P_1\|}{\|P_0\|} \leq \delta, \frac{\|P_2\|}{\|P_1\|} \leq \delta, \dots, \frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_i\|} \leq \delta, \dots, \tag{14}$$

помноживши ліві та праві частини, отримуємо

$$\|P_i\| \leq \delta^i \|P_0\|, \quad i = 1, 2, \dots \tag{15}$$

або

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \|P_i\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \delta^i \|P_0\| = \frac{1}{1 - \varepsilon \delta} \|P_0\|. \tag{16}$$

З (16) та [9, с.141] випливає збіжність ряду $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i$. Для деякого l виконується $P_l = 0$, тоді в

ряду (14) замість відношень $\frac{\|P_i\|}{\|P_{i-1}\|} \leq \delta, \frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_i\|} \leq \delta$ буде стояти $\frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_{i-1}\|} \leq \delta^2$. Водночас, нерівності

(15) виконуються всі.

Оскільки матриці $Q_i, i = 1, 2, \dots$ вибираємо, то для них виконуються нерівності

$\frac{\|Q_{i+1}\|}{\|Q_i\|} \leq \theta < \infty, i = 1, 2, \dots$, де θ - деяке додатне число. Тоді ряди $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \|Q_i\|$ та $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i$ при $\varepsilon \theta < 1$

збігаються. Отже, при виборі $\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta} \right\}$ збігаються.

Покажемо, що розв'язки \tilde{P} , \tilde{Q} відповідного матричного рівняння Ляпунова для початкової системи (1), записані у вигляді подібному до (5), збігаються при деяких значеннях параметра ε . Помножимо (4) зліва на матрицю T , а справа на T^T отримаємо

$$\tilde{P}(\tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1) + (\tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1)^T \tilde{P} = -2\tilde{Q}, \quad (17)$$

де $\tilde{P} = TPT^T$, $\tilde{Q} = TQT^T$. Тоді із $\|T\| < \infty$, $\|T^T\| < \infty$ і (16) при $\varepsilon\theta < 1$ маємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \|\tilde{P}_i\| = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \|TP_iT^T\| \leq \omega \|P_0\| \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \delta^i = \frac{\omega}{1 - \varepsilon\delta} \|P_0\|, \quad (18)$$

де $\omega = \|T\| \|T^T\| < \infty$. Співвідношення (18) показує збіжність ряду $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{P}_i$. Коректність асимптотичного розкладу для матриці \tilde{Q} показується подібним чином.

2. Розглянемо лінійну стаціонарну неперервну керовану майже консервативну систему

$$\dot{y} = (\tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1)y + \varepsilon\tilde{B}u, \quad y(t_0) = y_0, \quad (19)$$

де $y \in \mathfrak{R}_{2n}$ – вектор стану, $\tilde{A}_0 = -\tilde{A}_0^T \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$ – кососиметрична невиврождена матриця, $\tilde{A}_1 \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$ – стала матриця збурення, $u \in \mathfrak{R}_m$ – вектор керування, $\tilde{B} \in \mathfrak{R}_{2n \times m}$ – матриця при керуванні, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Аналогічно до попереднього за допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$ від системи (19) перейдемо до [5]:

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (20)$$

де $x_0 = Ty_0$, $A_1 = T\tilde{A}_1T^T$, $B = T\tilde{B}$, а матриця \tilde{A}_0 зведена до блочно-діагональної форми A_0 (3).

Будемо шукати оптимальний регулятор для (19) у вигляді зворотного зв'язку за станом

$$u = -Kx \quad (21)$$

з квадратичним критерієм якості

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt, \quad (22)$$

де $K \in \mathfrak{R}_{m \times 2n}$ – деяка стала матриця, $R \in \mathfrak{R}_{m \times m}$ – додатно означена матриця, а $Q \in \mathfrak{R}_{n \times n}$ – невід'ємно означена матриця.

Регулятор (21) буде оптимальним [7], якщо

$$K = \varepsilon R^{-1} B^T S, \quad (23)$$

де $S \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$ – симетрична додатно означена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккати

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T S + S(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon^2 S B R^{-1} B^T S + Q = 0.$$

Тут Q та R – матриці з (22).

Введемо заміну [10] $P = \varepsilon S$, тоді прийдемо до наступного еквівалентного матричного рівняння Ріккати:

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T P + P(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon PBR^{-1}B^T P + \varepsilon Q = 0. \tag{24}$$

Виходячи з (24), матрицю - розв'язок P будемо шукати у вигляді розкладу за параметром ε (5). Матрицю Q зобразимо у вигляді подібного розкладу.

Від параметричного матричного рівняння Ріккати, підставляючи (5) в (24) і порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , доходимо до нескінченної системи матричних рівнянь типу Ріккати

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \tag{25}$$

$$A_0 P_1 - P_1 A_0 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 - P_0 B R^{-1} B^T P_0 + Q_0,$$

$$A_0 P_2 - P_2 A_0 = P_1 A_1 + A_1^T P_1 - P_1 B R^{-1} B^T P_0 - P_0 B R^{-1} B^T P_1 + Q_1,$$

$$\dots \tag{26}$$

$$A_0 P_k - P_k A_0 = P_{k-1} A_1 + A_1^T P_{k-1} - \sum_{i=1}^k P_{i-1} B R^{-1} B^T P_{k-i} + Q_{k-1},$$

$$\dots$$

Позначимо [5]

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}^T & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}_k, \tag{27}$$

$$D_k = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}^T & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}_k = P_{k-1} A_1 + A_1^T P_{k-1} - \sum_{i=1}^k P_{i-1} B R^{-1} B^T P_{k-i} + Q_{k-1},$$

$D_{ij}, P_{ij} \in \mathfrak{R}_{2 \times 2}$, $i, j = 1, \dots, n, k = 1, 2, \dots$. Матриця P_0 має структуру (9).

Оскільки ліві частини рівнянь системи (26) збігаються з лівими частинами відповідних рівнянь системи (7), то блоки P_{ij} обчислюються за формулами (10)-(12), а вільні параметри з системи (13). При $k = 1$ система (13) складається з нелінійних рівнянь, для якої відношення максимального по модулю зі значень розв'язків до ненульового мінімального по модулю із коефіцієнтів, як і для лінійних рівнянь, будуть обмеженими. Тоді, виходячи з міркувань, наведених у попередньому пункті, матимемо збіжність рядів (5) для $\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta} \right\}$.

Аналогічно до попереднього (співвідношення (18)) можна показати, що розв'язки \tilde{P} , \tilde{Q} відповідного матричного рівняння Ріккати для початкової системи (19), записані у вигляді, подібному до (5), збігаються при деяких значеннях параметра ε . Для цього необхідно помножити (24) зліва на матрицю T^T , а справа на T і розглянути матриці $\tilde{P} = T^T P T$, $\tilde{Q} = T^T Q T$, як це було показано вище.

2. АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА ТА РІККАТІ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

1. Розглянемо дискретну лінійну стаціонарну асимптотично стійку майже консервативну систему

$$y(k+1) = (\tilde{F}_0 + \varepsilon \tilde{F}_1) y(k), \quad y(0) = y_0, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{28}$$

де $y \in \mathfrak{R}_n$ – вектор стану, \tilde{F}_0 – ортогональна матриця ($\tilde{F}_0^T \tilde{F}_0 = \tilde{F}_0 \tilde{F}_0^T = I$), $\tilde{F}_1 \in \mathfrak{R}_{n \times n}$ – довільна стала матриця, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

За допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$ від системи (28) перейдемо до [3]:

$$x(k+1) = (F_0 + \varepsilon F_1)x(k), \quad x(0) = x_0, \tag{29}$$

де $x_0 = Ty_0$, $F_1 = T\tilde{F}_1T^T$, а матриця \tilde{F}_0 зведена до блочно-діагональної форми [8]

$$F_0 = T\tilde{F}_0T^T = \text{diag}\{G_1, G_2, \dots, G_r\}, \tag{30}$$

де $G_1 = I \in \mathfrak{R}_{2n_1 \times 2n_1}$, $G_2 = -I \in \mathfrak{R}_{2n_2 \times 2n_2}$, $G_i = \text{diag}\{S_i, \dots, S_i\}$, $G_i \in \mathfrak{R}_{2n_i \times 2n_i}$, $S_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}_{2 \times 2}$,

$$a_i^2 + b_i^2 = 1, \quad b_i \neq b_j, \quad \text{для } i \neq j \quad (i, j = 1, \dots, r), \quad n_1 + n_2 + \dots + n_r = n.$$

Перетворена система (29) також асимптотично стійка, тому власні значення матриці коефіцієнтів $F_0 + \varepsilon F_1$ лежать в одиничному крузі та існує додатно визначена матриця $P \in \mathfrak{R}_{n \times n}$, яка задовольняє матричне рівняння Ляпунова [7]

$$[F_0 + \varepsilon F_1]^T P [F_0 + \varepsilon F_1] - P = -Q, \tag{31}$$

де $Q \in \mathfrak{R}_{n \times n}$ – деяка невід’ємно визначена матриця.

Виходячи з вигляду рівняння (31), будемо шукати матриці-розв’язки P і Q у вигляді степеневих рядів за малим параметром ε (5). Від рівняння (31) перейдемо до нескінченної системи матричних рівнянь

$$\begin{aligned} P_0 - F_0^T P_0 F_0 &= 0, \\ P_1 - F_0^T P_1 F_0 &= F_0^T P_0 F_1 + F_1^T P_0 F_0 + Q_1, \\ P_2 - F_0^T P_2 F_0 &= F_0^T P_1 F_1 + F_1^T P_1 F_0 + F_1^T P_0 F_1 + Q_2, \\ &\dots \\ P_k - F_0^T P_k F_0 &= F_0^T P_{k-1} F_1 + F_1^T P_{k-1} F_0 + F_1^T P_{k-2} F_1 + Q_k, \\ &\dots \end{aligned} \tag{32}$$

Позначимо [3]

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}^T & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}_k, \tag{34}$$

$$D_k = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}^T & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}_k = F_0^T P_{k-1} F_1 + F_1^T P_{k-1} F_0 + F_1^T P_{k-2} F_1 + Q_k, \quad P_{-1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де $D_{ij}, P_{ij} \in \mathfrak{R}_{2 \times 2}$, $j \geq i = 3, \dots, m$, $D_{11}, D_{12}, D_{22} \in \mathfrak{R}$, $D_{ij} \in \mathfrak{R}_{1 \times 2}$ $i = 1, 2, j = 3, \dots, m$. Матриця P_0 має структуру (9). Тоді блоки P_{ij} можна визначити за однією з формул:

$$c_1 = \frac{d_1}{2} + \frac{b_i d_3 - b_j d_2}{2(a_i - a_j)}, \quad c_2 = \frac{d_2}{2} + \frac{b_i d_4 + b_j d_1}{2(a_i - a_j)},$$

$$c_3 = \frac{d_3}{2} - \frac{b_i d_1 + b_j d_4}{2(a_i - a_j)}, \quad c_4 = \frac{d_4}{2} - \frac{b_i d_2 - b_j d_3}{2(a_i - a_j)};$$
(35)

$$c_1 - c_4 = d_1 - \frac{a_i}{b_i} d_2, \quad c_3 = c_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a_i}{b_i} d_1 + d_2 \right);$$
(36)

$$c_1 - c_4 = d_1 - \frac{a_i}{b_i} d_2, \quad c_2 + c_3 = \frac{a_i}{b_i} d_1 + d_2,$$
(37)

де $P_{ij} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}_{ij}$, $D_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}_{ij}$;

$$P_{12} = \frac{1}{2} D_{12};$$
(38)

$$c_1 = \frac{(1-a_j)d_1 - b_j d_2}{2(1-a_j)}, \quad c_2 = \frac{(1-a_j)d_2 + b_j d_1}{2(1-a_j)};$$
(39)

$$c_1 = \frac{(1+a_j)d_1 + b_j d_2}{2(1+a_j)}, \quad c_2 = \frac{(1+a_j)d_2 - b_j d_1}{2(1+a_j)};$$
(40)

де $P_{ij} = [c_1 \ c_2]_{2j}$, $D_{ij} = [d_1 \ d_2]_{2j}$, $i=1,2$;

$$0 \equiv P_{ii} - P_{ii} = -D_{ii}, \quad i=1,2.$$
(41)

Відзначимо, що блоки P_{ij} , D_{ij} для кожного k свої.

З формул (35)-(41) випливає, що при нерівностях $a_i \neq a_j$, $a_i \neq \pm 1$, $b_i \neq 0$, які виконуються за умовою, значення відношення максимального по модулю з обчислених параметрів c_i , $i=1, \dots, 4$ до ненульового мінімального по модулю з параметрів, обчислених на попередньому кроці (від них залежать значення d_i , $i=1, \dots, 4$), будуть обмеженими.

Параметри c_i , які не набули значень за формулами (36), (37), обчислюються з наступної системи рівнянь, що формуються з елементів матриці D_k за необхідними та достатніми умовами розв'язності k -го рівняння [3]

$$d_{ij} = 0, \quad j \geq l = 1, \dots, n_i, \quad d_{ij} \in \mathfrak{R}_{1 \times 1}, \quad i=1,2;$$

$$d_2^{lj} - d_3^{lj} = 0, \quad j > l = 1, \dots, n_i - 1,$$
(42)

$$d_1^{lj} + d_4^{lj} = 0, \quad j \geq l = 1, \dots, n_i, \quad i=3, \dots, r,$$

де $d_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}_{ij} \in \mathfrak{R}_{2 \times 2}$, $d_{ii} = d_{ii}^T$. Матриці Q_k задаються конкретні числові, якщо

розв'язність цієї системи не залежить від них, або структурно (наприклад, діагональні) з вільними параметрами, яким надаються конкретні значення, виходячи з умов її розв'язності. Відношення максимального по модулю зі значень розв'язку системи (42) до ненульового мінімального по модулю із коефіцієнтів (вони залежать від розв'язку на попередньому

кроці) будуть обмеженими, що виконується, враховуючи зауваження щодо c_i , $i = 1, \dots, 4$, послідовно для $k = 1, 2, \dots$. Параметри, що залишаються вільними, вважаємо обмеженими.

Звідси впливає обмеженість відношень матричних норм $\frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_i\|} \leq \delta < \infty$, $i = 0, 1, \dots$, де δ – деяке додатне число, а отже, збіжність ряду $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i$ при $\varepsilon \delta < 1$. Оскільки матриці Q_i , $i = 1, 2, \dots$ вибираються (для них виконується $\frac{\|Q_{i+1}\|}{\|Q_i\|} \leq \theta$, $i = 1, 2, \dots$), то аналогічно до неперервного випадку обидва ряди (5) будуть збігатися при $\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta}\right\}$. Тут θ – деяке додатне число.

Можна показати (співвідношення (18)), що розв'язки \tilde{P} , \tilde{Q} відповідного матричного рівняння Ляпунова для початкової системи (28), записані у вигляді подібному до (5), збігаються при деяких значеннях параметра ε . Для цього необхідно помножити (31) зліва на матрицю T^T , а справа на T і розглянути матриці $\tilde{P} = T^T P T$, $\tilde{Q} = T^T Q T$.

2. Розглянемо дискретну лінійну стаціонарну керовану майже консервативну систему [11]

$$y(k+1) = (\tilde{F}_0 + \varepsilon \tilde{F}_1) y(k) + \varepsilon \tilde{G} u(k), \quad y(0) = y_0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (43)$$

де $y \in \mathfrak{R}_n$ – вектор стану, \tilde{F}_0 – ортогональна матриця ($\tilde{F}_0^T \tilde{F}_0 = \tilde{F}_0 \tilde{F}_0^T = I$), $\tilde{F}_1 \in \mathfrak{R}_{n \times n}$ – довільна стала матриця, $u(k) \in \mathfrak{R}_m$ – вектор керування, $\tilde{G} \in \mathfrak{R}_{n \times m}$ – матриця при керуванні, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

За допомогою деякого ортогонального перетворення $x = T y$ від системи (43) перейдемо до наступної [6]:

$$x(k+1) = (F_0 + \varepsilon F_1) x(k) + \varepsilon G u(k), \quad x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (44)$$

де $x_0 = T y_0$, $F_1 = T \tilde{F}_1 T^T$, $G = T \tilde{G}$, а матриця \tilde{F}_0 зведена до блочно-діагональної форми F_0 (30).

Побудуємо оптимальний регулятор у вигляді зворотного зв'язку за станом

$$u(k) = -H x(k) \quad (45)$$

з квадратичним критерієм якості

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)], \quad (46)$$

де $H \in \mathfrak{R}_{m \times n}$ – деяка стала матриця, $R \in \mathfrak{R}_{m \times m}$ – додатно означена матриця, а $Q \in \mathfrak{R}_{n \times n}$ – невід'ємно означена матриця.

Регулятор (45) буде оптимальним [7], якщо

$$H = \varepsilon (\varepsilon^2 G^T S G + R)^{-1} G^T S F, \quad (47)$$

де $F = F_0 + \varepsilon F_1$, а $S \in \mathfrak{R}_{n \times n}$ – симетрична додатно означена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккати

$$S = F^T SF - \varepsilon^2 F^T SG (\varepsilon^2 G^T SG + R)^{-1} G^T SF + Q. \tag{48}$$

Тут Q та R – матриці із (46).

Для спрощення розв’язання рівняння (48), введемо заміну [10] $P = \varepsilon S$, тоді прийдемо до наступного еквівалентного матричного рівняння Ріккати:

$$P = F^T PF - \varepsilon F^T PG (\varepsilon G^T PG + R)^{-1} G^T PF + \varepsilon Q. \tag{49}$$

Будемо шукати матрицю-розв’язок P у вигляді розкладу за малим параметром і нехай матриця Q представлена подібним чином (ряди (5)).

Для спрощення рівняння (49), застосуємо відомий спосіб обчислення оберненої матриці $(\varepsilon G^T PG + R)^{-1} = M$ шляхом розкладу її у збіжний ряд за малим параметром [12, 6].

$$M = M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 + \dots, \tag{50}$$

де M_0, M_1, M_2, \dots – деякі симетричні матриці. Із властивості оберненої матриці випливає рівність

$$[\varepsilon G^T (P_0 + \varepsilon P_1 + \dots) G + R] (M_0 + \varepsilon M_1 + \dots) = I. \tag{51}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях малого параметра, приходимо до системи рівнянь

$$RM_0 = I, RM_1 + G^T P_0 G M_0 = 0, RM_i + \sum_{k=1}^i G^T P_k G M_{i-k} = 0, \dots$$

Звідки знаходимо невідомі матриці M_i

$$M_0 = R^{-1}, M_i = -R^{-1} \sum_{k=1}^i G^T P_{k-1} G M_{i-k}, i = 1, 2, \dots \tag{52}$$

Підставимо вирази для матриць F, P, Q, M в (49), отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} (P_0 + \varepsilon P_1 + \dots) &= (F_0 + \varepsilon F_1)^T (P_0 + \varepsilon P_1 + \dots) (F_0 + \varepsilon F_1) - \\ &- \varepsilon (F_0 + \varepsilon F_1)^T (P_0 + \varepsilon P_1 + \dots) G (M_0 + \varepsilon M_1 + \dots) G^T \times \\ &\times (P_0 + \varepsilon P_1 + \dots) (F_0 + \varepsilon F_1) + \varepsilon (Q_0 + \varepsilon Q_1 + \dots). \end{aligned} \tag{53}$$

Зрівняємо коефіцієнти в (53) при однакових степенях ε , прийдемо до нескінченної системи матричних рівнянь типу Ріккати

$$P_0 - F_0^T P_0 F_0 = 0, \tag{54}$$

$$\begin{aligned} P_1 - F_0^T P_1 F_0 &= F_1^T P_0 F_0 + F_0^T P_0 F_1 - F_0^T P_0 G M_0 G^T P_0 F_0 + Q_0, \\ &\dots \end{aligned} \tag{55}$$

$$P_k - F_0^T P_k F_0 = F_1^T P_{k-1} F_0 + F_0^T P_{k-1} F_1 - \sum_{(i,j,q,l,t) \in J(k)} F_i^T P_j G M_q G^T P_l F_t + Q_{k-1},$$

Тут $J(k) = \{(i, j, q, l, t) \mid i + j + q + l + t = k - 1; i, t \in \{0, 1\}; j, q, l \in \overline{0, k-1}\}$ – множини індексів, $k = 1, 2, \dots$

Аналогічно до попереднього пункту позначимо [6]

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}^T & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}_k,$$

$$D_k = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}^T & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}_k = F_0^T P_{k-1} F_1 + F_1^T P_{k-1} F_0 - \sum_{(i,j,q,l,t) \in J(k)} F_i^T P_j G M_q G^T P_l F_t + Q_{k-1}, \quad (56)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Матриця P_0 має структуру (9). Оскільки ліві частини відповідних рівнянь систем (55) і (33) однакові, то блоки P_{ij} обчислюються за формулами (35)-(41), а вільні параметри знаходяться із системи (42). При $k=1$ система (42) складається з нелінійних рівнянь, для якої відношення максимального по модулю зі значень розв'язків до ненульового мінімального по модулю із коефіцієнтів, як і для лінійних рівнянь, будуть обмеженими. Тоді, виходячи з міркувань, наведених вище, будемо мати збіжність рядів (5) для $\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta}\right\}$.

Аналогічно до попереднього (співвідношення (18)) можна показати, що розв'язки \tilde{P} , \tilde{Q} відповідного матричного рівняння Ріккати для початкової системи (43), записані у вигляді, подібному до (5), збігаються при деяких значеннях параметра ε . Для цього необхідно помножити (49) зліва на матрицю T^T , а справа на T і розглянути матриці $\tilde{P} = T^T P T$, $\tilde{Q} = T^T Q T$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Новицький В. В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем / В. В. Новицький // Препринт. – К. : Ін-т математики НАН України, 2004. – 34с.
2. Зінчук М. О. Дослідження рівняння Ляпунова для неперервних майже консервативних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький, Т. Г. Положий // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – 2, № 1. – С. 84-96.
3. Зінчук М. О. Дослідження рівняння Ляпунова для дискретних майже консервативних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Аналітичні дослідження моделей механічних систем. Препринт. – К. : Ін-т математики НАН України, 2005. – С. 1-26.
4. Новицький В. В. Оптимальное управление почти консервативными системами / В. В. Новицкий, Хуан Чень // Сучасні проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – 1, №2. – С. 152-157.
5. Зінчук М. О. Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – 3, № 1. – С. 75-89.
6. Зінчук М. О. Оптимальне керування дискретними майже консервативними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Аналітична механіка та її застосування : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – 5, № 2. – С. 124-140.
7. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition / S. Barnett, R. G. Cameron. – Oxford : Clarendon press, 1985. – 404 p.
8. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 656 с.
9. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем / К. А. Абгарян. – М. : Наука, 1973. – 432 с.
10. Ларин В. Б. О слабом управлении слабодемпфированными системами / В. Б. Ларин // Прикладная математика и механика. – 1978. – 42, вып. 6. – С. 1000-1006.
11. Ларин В. Б. Слабое дискретное управление слабодемпфированными системами / В. Б. Ларин, К. И. Науменко // В кн. : Навигация и управление движением механических систем. – Киев, 1980. – С. 90-100.
12. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М. : Наука, 1978. – 280 с.

REFERENCES

1. Novitskiy, V.V. (2004), "Lyapunov equation for almost conservative systems", *Preprint, In-t matematyky NAN Ukrainy*, 34 p., Kiev, Ukraine.
2. Zinchuk, M.O., Novitskiy, V.V. and Polozhyy, T.G. (2005), "Research Lyapunov equations for continuous almost conservative systems", *Problemy dynamiky ta stiykosti bagatovymirnykh system: Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 2, no.1, pp. 84-96.
3. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2005), "Research Lyapunov equations for discrete almost conservative systems", *Analitychni doslidzhennya modeley mekhanichnykh system, Preprint, In-t matematyky NAN Ukrainy*, pp. 1-26, Kiev, Ukraine.
4. Novitskiy, V.V. and Khuan Chen (2004), "Optimal control almost conservative systems", *Suchasni problemy analitychnoyi mekhaniky: Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 1, no. 2, pp. 152-157.
5. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2006), "Optimal control of continuous almost conservative systems", *Problemy analitychnoyi mekhaniky: Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 3, no. 1, pp. 75-89.
6. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2008), "Optimal control of discrete almost conservative systems", *Analitychna mekhanika ta yiyi zastosuvannia: Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 5, no. 2, pp. 124-140.
7. Barnett, S. and Cameron, R.G. (1985), "Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition", Clarendon press, Oxford.
8. Khorn, R. and Dzhonson, Ch. (1989), *Matrichnyy analiz [Matrix Analysis]*, Mir, Moskow, Russia.
9. Abgaryan, K.A. (1973), *Matrichnye i asimptoticheskie metody v teorii lineynykh system [The matrix and asymptotic methods in the theory of linear systems]*, Nauka, Moskow, Russia.
10. Larin V.B. (1978), "O slabom upravlenii slabodempfirovannymi sistemami", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 42, no. 6, pp. 1000-1006.
11. Larin, V.B. and Naumenko, K.I. (1980), "Weak weakly damped discrete control systems", *Navigatsiya i upravlenie dvizheniem mekhanicheskikh system*, pp. 90-100.
12. Lankaster, P. (1978), *Teoriya matrits [Matrix theory]*, Nauka, Moskow, Russia.

УДК: 546.815.23

ВПЛИВ ІНТЕРКАЛЯЦІЇ ВОДНЕМ НА ЕЛЕКТРОХІМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МОНОСЕЛЕНІДУ ІНДІЮ

Квашнівська Н. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, Україна

Natalka522@gmail.com

Експериментально встановлено, що легування воднем шаруватого кристалу InSe покращує анодні і катодні реакції в кислих (H_2SeO_3 , H_2SO_4) і нейтральному (вода) середовищах. Середовище розчину H_2SeO_3 дозволяє отримати менш від'ємні значення електродного потенціалу для чистого кристалу при освітлені і в темноті у середовищі дистильованої води. У нормальному розчині H_2SO_4 відбуваються інтенсивні процеси поляризації навіть без впливу сонячного випромінювання, і це спостерігається як у наводненому, так і в чистому кристалі. Беручи до уваги результати, отримані в кислому (сірчаної кислоти) та в нейтральному середовищах, встановлено, що анодні і катодні реакції мають більш повільний характер при негативних значеннях потенціалу порівняно з середовищем селенистої кислоти.

Ключові слова: моноселенід індію, електрохімічні властивості, потенціал поляризації.

ВЛИЯНИЕ ИНТЕРКАЛЯЦИИ ВОДОРОДА НА ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОНОСЕЛЕНИДА ИНДИЯ

Квашневська Н. Н.

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, Украина*

Natalka522@gmail.com

Экспериментально установлено, что легирование водородом слоистого кристалла InSe улучшает анодные и катодные реакции в кислых (H_2SeO_3 , H_2SO_4) и нейтральной (вода) средах. Среда раствора H_2SeO_3 позволяет получить менее отрицательные значения электродного потенциала для чистого кристалла при освещении и в темноте в среде дистиллированной воды. В нормальном растворе H_2SO_4 происходят интенсивные процессы поляризации даже без воздействия солнечного излучения, и это наблюдается как в наводненном, так и в чистом кристалле. Принимая во внимание результаты, полученные в кислой (серной кислоты) и в нейтральной средах, установлено, что анодные и катодные реакции имеют более медленный характер при отрицательных значениях потенциала по сравнению со средой селенистой кислоты.

Ключевые слова: моноселенид индия, электрохимические свойства, потенциал поляризации.

INFLUENCE HYDROGEN INTERCALATION ON THE ELECTROCHEMICAL PROPERTIES InSe

Kvashnivska N. M.

*Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine*

Natalka522@gmail.com

The study of layered crystals associated with the possibility of implementation in these compounds physical phenomena at nanoscale level, and their practical use. The investigation of physical and electrochemical laws of the quantum formation of structures of a laminates caused by the lack of data about the peculiarities of the nucleation of nanoclusters by forming the respective their modynamic conditions or by cooperation with an external factors and on the cleavage surface and in arrays of the bulk solid materials. Specifically the introduction of the hydrogen changes layered crystal properties that are sensitive to the intercalants. Some scientific interest has a comparison of the electrochemical properties of pure crystal InSe and InSe that intercalated by hydrogen.

Experimentally that hydrogen doping to the lamellar crystal InSe improves the anodic and cathodic reactions in acid (H_2SeO_3 , H_2SO_4) and neutral (water) mediums. The H_2SeO_3 medium solution give us the less negative quantity of the electrode potential for the pure crystal in illumination and in the dark among the medium of the distilled water. There are intensive processes of polarization in the normal H_2SO_4 even without the solar radiation and we can observe it in hydrogenated and in pure crystal as well. Taking into consideration the results that we get in acid (sulfuric acid) and in the neutral mediums we establish that anodic and cathodic reactions are slower in the negative potential values compared to the medium of selenic acid.

Anodic and cathode processes in the dark (without sunlight) are at a lower rate than under sunlight. This is caused by strengthening of anodic and cathode reactions, and the anode reaction proceeds intensively. Intercalation shifts the equilibrium electrode potential towards to the guest element potential and dark photoanodic potential shifts to the cathode side depending on the degree of intercalation, but sensitivity of photoanode at the same time becomes worse.

The lighting amplify the loss of an electron from an electrode as well as selective dissolution of the semiconductor elements, promoting them to transition to the ionic condition. The environments in the form of crust and drops that are formed on the surface affected on the surface characteristics of the studied semiconductor.

Key words: InSe, electrochemical qualities, polarization potential.

ВСТУП

Шаруваті кристали InSe, завдяки своїй специфічній кристалічній структурі, привернули до себе увагу як експериментаторів, так і теоретиків. Вивчення шаруватих кристалів пов'язане з можливістю реалізації в цих сполуках фізичних явищ на нанорозмірному рівні, а тож їх практичного використання [1-5, 10, 12]. Певний науковий інтерес представляє порівняння електрохімічних властивостей чистого кристалу InSe та InSe, інтеркальованого воднем.

Введення водню змінює властивості шаруватого кристалу, які чутливі до інтеркалянтів. Це має і практичне значення: встановлена можливість використовувати сполуки групи A^3B^6 як акумулятори водню з належною сорбційною ємністю. Дослідження фізичних та електрохімічних закономірностей формування квантоворозмірних структур шаруватих матеріалів зумовлено відсутністю даних про особливості зародження нанокластерів шляхом створення відповідних термодинамічних умов або взаємодією із зовнішніми чинниками і на поверхнях сколів, і в масивах об'ємних твердотільних матеріалів. Шаруваті кристали можуть використовуватись як твердотільні електроди, детектори випромінювання, фотоперетворювачі сонячної енергії та інші прилади електроніки [6-7].

В останні роки активно впроваджуються методи сонячно-водневої енергетики, що заснована на перетворенні енергії в хімічну в результаті розпаду води та поєднує в собі використання водню як палива та сонячної енергії первинного джерела [8-9, 11]. Крім того, порівняно з прямим перетворенням сонячної енергії напівпровідниковими батареями, проміжне акумулювання сонячної енергії у формі накопиченого водню вирішує проблему добової та сезонної залежності потоку сонячного проміння, а використання електролізу для утворення контакту з напівпровідником дозволяє отримати більш надійний запірний контакт.

В основі дії фотоелектрохімічних батарей лежать процеси, що відбуваються з нерівноважними носіями струму (електронами та дірками) в освітленому напівпровіднику: генерація, розподіл зарядів та їх перехід з напівпровідника через міжфазні границі (з одного боку з електролітом, а з іншого – з металом омічного контакту).

Враховуючи різні моделі опису електрохімічних реакцій, можна зробити висновок, що напівпровідниковий електрод знаходиться одночасно при двох різних потенціалах, один з яких управляє реакцією, що протікає через зону провідності, а другий – реакцією, що протікає через зону валентності. Ця унікальна властивість не має аналогів в електрохімії металів.

МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Мета роботи полягає в дослідженні електрохімічних характеристик селеніду індію в початковому і гідрованому стані, залежно від типу електроліту і присутності сонячного випромінювання.

Об'єктом дослідження є монокристали селеніду індію при електрохімічній поляризації в розчинах з різним показником рН. Дослідження потенціостатичних і потенціодинамічних характеристик проведені за допомогою скануючого потенціостата. Для складання поляризаційних діаграм застосували досліджуваній електрод («робочий»), електрод порівняння, додатковий (платиновий) електрод. Поляризаційні дослідження виконані в середовищах дистильованої води та розчинах кислот H_2SeO_3 , H_2SO_4 під впливом сонячного випромінювання (у видимому діапазоні) і в темряві. Були отримані поляризаційні криві для селеніду індію, насиченого воднем і в початковому стані.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Під час проходження струму виникає поляризація електрода – зсув потенціалу від рівноважного його значення. На зміну потенціалу електричного поля, що виникає між електродами електрохімічної комірки, впливають різні фактори, такі, як середовище перебування кристалу, сонячне випромінювання видимого діапазону, а також його відсутність і звичайно вид напівпровідникового матеріалу, що досліджується. Цей вплив явно продемонстровано на отриманих поляризаційних кривих, з яких можна отримати інформацію про характер електродного процесу. Отже, можна проаналізувати залежність сили струму, що протікає через розчин, від потенціалу, прикладеного до робочого електрода, експериментально визначити, за яких значень потенціалу починається реакція відновлення (розрядів іонів) досліджуваного напівпровідникового електрода. З циклічної вольт-амперограми катодно анодної реакції можна отримати інформацію про інтенсивність цих

реакцій, щоб отримати дані про початкове значення зміни поляризації, для побудови поляризаційних кривих використовувалися значення густин струмів по модулю.

Введення водню в міжшаровий простір кристалу сповільнює процеси поляризації для InSe у середовищі дистильованої води при освітленні (рис. 1), але в темноті спостерігається протилежне явище (рис. 2) – введення водню прискорює процес поляризації. Введення водню в міжшаровий простір посилює віддачу електронів при освітленні. У «чистому» кристалі зміни не суттєві як при освітленні, так і в темноті.

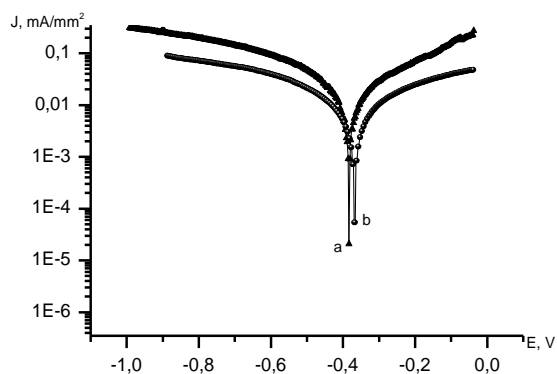


Рис. 1. Поляризаційні криві: а – наводнений InSe, б – не наводнений InSe у середовищі дистильованої води на світлі

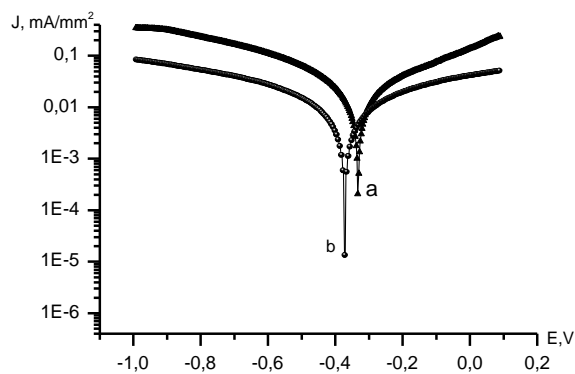


Рис. 2. Поляризаційні криві: а – наводнений InSe, б – не наводнений InSe у середовищі дистильованої води в темноті

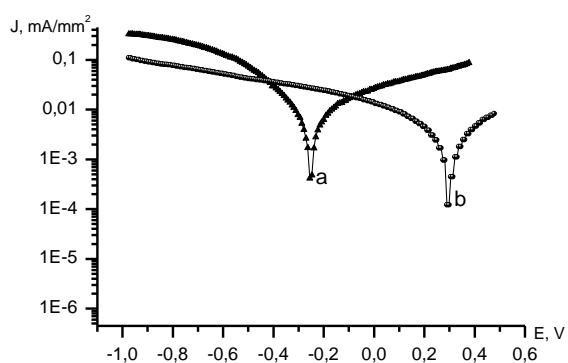


Рис. 3. Поляризаційні криві: а – наводнений InSe, б – не наводнений InSe у середовищі H_2SeO_3 на світлі

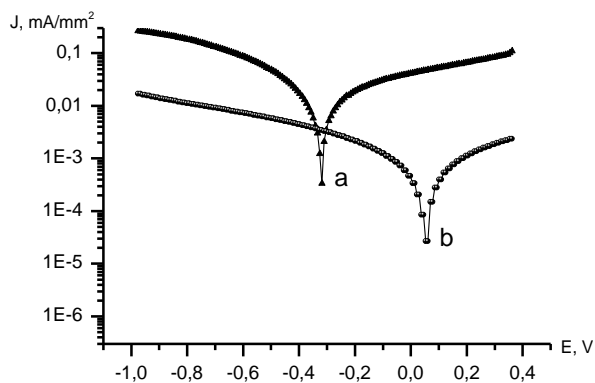


Рис. 4. Поляризаційні криві: а – наводнений InSe, б – не наводнений InSe у середовищі H_2SeO_3 в темноті

У середовищі селенистої кислоти спостерігається вплив наводнення на пасивацію процесів поляризації, сонячне випромінювання сповільнює віддачу електронів від електроду в порівнянні з «чистим» кристалом, але за значеннями досягнення потенціалу відкритого кола як у дистильованій воді, так і в розчині селенистої кислоти в темноті та при освітленні він досягається практично при рівних значеннях. Середовище розчину H_2SeO_3 дозволяє отримати менш від'ємні значення для «чистого» кристалу при освітленні і в темноті, чого не спостерігали в середовищі дистильованої води.

На рис. 5 і рис. 6 зображенні зміни потенціалу поляризації в середовищі H_2SO_4 . Вони відображають інтенсивні процеси поляризації без впливу сонячного випромінювання, і це спостерігається як у наводненому, так і в чистому кристалі. Уведення водню в міжшаровий простір не змінює інтенсивності, процес поляризації відбувається з однаковою швидкістю. Найповільніше цей процес відбувається в «чистому» кристалі без доступу сонячного випромінювання. Саме в цьому середовищі спостерігається відмінність у досягненні потенціалу поляризації за значеннями густини струму, чого не спостерігалось у розчині селенистої кислоти і в дистильованій воді.

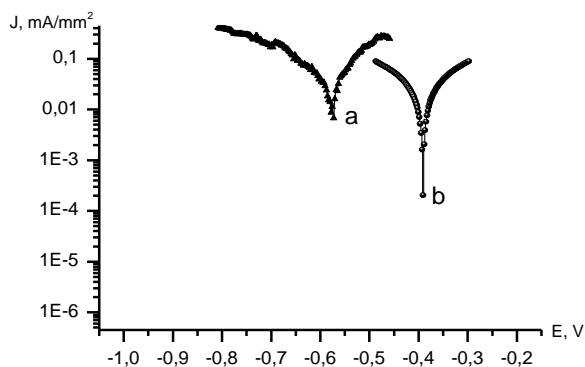


Рис. 5. Поляризаційні криві: а – наводнений InSe, б – не наводнений InSe у середовищі H_2SO_4 на світлі

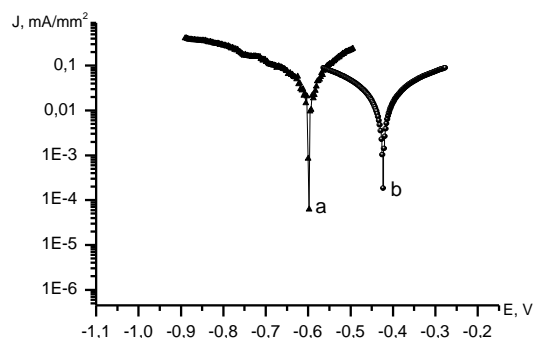


Рис. 6. Поляризаційні криві: а – наводнений InSe, б – не наводнений InSe у середовищі H_2SO_4 в темноті

Сонячне опромінення призводить до збільшення передачі електронів від електрода, а також стимулює їх перехід до іонного стану і найкраще це демонструє наводнений селенід індію в нейтральному середовищі. Водночас у легovanому воднем кристалі при сонячному світлі в кислотних середовищах пасивуються процеси поляризації. Плівки або краплі, які утворюються на поверхні цих електродів, впливають на поверхневі характеристики дослідженого напівпровідника і відбуваються зміни електрохімічних властивостей.

ВИСНОВКИ

Анодні і катодні процеси в темноті (без доступу сонячних променів) проходять з нижчою швидкістю, ніж під дією сонячного світла. Це викликано підсиленням анодної і катодної реакцій, при цьому анодна реакція протікає інтенсивніше. Інтеркаляція зсуває рівноважний потенціал електрода в бік потенціалу гостьового елементу, і темновий потенціал фотоаноду зсувається в катодний бік залежно від ступеня інтеркаляції, але чутливість фотоаноду при цьому погіршується.

Освітлення посилює віддачу електронів від електрода, а також селективне розчинення елементів напівпровідника, стимулюючи їх перехід в іонний стан. Середовища у вигляді плівок, крапель, які формуються на поверхні, впливають на поверхневі характеристики дослідженого напівпровідника.

ЛІТЕРАТУРА

1. Боледзюк В. Б. Вплив відпалу на оптичні властивості шаруватих кристалів GaSe та InSe / В. Б. Боледзюк, А. В. Заслонкін, З. Д. Ковалюк, М. М. Пирля, С. П. Юрценюк // Фізика і Хімія твердого тіла. – 2008. – Т. 9, № 2. – С. 338-347.
2. Ковалюк З. Д. Електричні властивості моно селеніду індію, легovanого селенідом ванадію / З. Д. Ковалюк, В. Б. Боледзюк, В. В. Шевчик, О. М. Дубик, В. М. Камінський // ФП. – 2012. – Т. 10, № 4. – С. 448-452.
3. Ковалюк З. Д. Дослідження електричних властивостей InSe інтеркальованого кобальтом / З. Д. Ковалюк, В. В. Шевчик, В. Б. Боледзюк, В. В. Нетяга // Журнал нано- та електронної фізики. – 2014. – Т. 6, № 4. – С. 04038-1-04038-5.
4. Боледзюк В. Б. Вплив інтеркалювання нікелем на властивості шаруватих кристалів InSe / В. Б. Боледзюк, З. Д. Ковалюк, З. Р. Кудринський, Б. В. Кушнір, О. С. Литвин, А. Д. Шевченко // ФП. – 2014. – Т. 12, № 2. – С. 184-189.
5. Стахира Й. М. Структура и магнитные свойства монокристалов InSe, інтеркальованих нікелем / Й. М. Стахира, Н. К. Товсюк, В. Л. Фоменко, В. М. Цмоць, А. Н. Щупляк // Фізика и техника полупроводников. – 2011. – Т. 45, вып.10. – С. 44-47.

6. Balitskii O. Electrochemical Investigation of Hydrogen Influence of Crystals of Gallium Nitride [Електронний ресурс] / O. Balitskii, S. Porowski, Jacek Eliaz, S. Gryshchenko, N. Kvashnivska, N. Polishchuk // Режим доступу : <http://myprogram14.ise-online.org/symp/S06.html>.
7. Balitskii O. Hydrogen Influence on Electrochemical Properties of Gallium Monoselenide / O. Balitskii, Jacek Eliaz, S. Gryshchenko, N. Kvashnivska, N. Polishchuk // *Solid State Phenomena*. – 2015. – Vol. 225. – P. 53-58.
8. Квашнівська Н. М. Електрохімічні властивості моноселеніду індію для сонячних елементів / Н. М. Квашнівська // Нетрадиційні і поновлювальні джерела енергії як альтернативні первинним джерелам енергії в регіоні. – 2015. – С. 164-168.
9. Балицький О. О. Виростання шаруватих кристалів у водневій енергетиці / О. О. Балицький, Яцек Еліаш, С. Грищенко, Н. Квашнівська, Н. Поліщук // Нетрадиційні і поновлювальні джерела енергії як альтернативні первинним джерелам енергії в регіоні. – 2015. – С. 152-154.
10. Боледзюк В. Б. Структура и магнитные свойства слоистых кристаллов InSe, интеркалированных кобальтом / В. Б. Боледзюк, З. Д. Ковалюк, З. Р. Кудринський, О. С. Литвин, А. Д. Шевченко // *Журнал технической физики*. – 2014. – Т. 84, вып. 10. – С. 44-47.
11. Еліаш Яцек. Тверді шаруваті інтеркальовані воднем мастила на основі селенідів голію та індію, проблеми хімотології / Яцек Еліаш, Н. М. Квашнівська, О. О. Балицький, С. А. Грищенко, Н. М. Поліщук // Теорія та практика раціонального використання традиційних і альтернативних паливно-мастильних матеріалів. – 2014. – С. 226-229.
12. Ковалюк З. Д. Барична та тензочутливість шаруватих напівпровідників InSe та GaSe / З. Д. Ковалюк, М. М. Пирля, В. Б. Боледзюк, В. В. Шевчик // *Укр. фіз. журн.* – 2011. – Т. 56, № 4. – С. 368-372.

REFERENCE

1. Boledzyuk, V.B., Zasloukin, A.V., Kovalyuk, Z.D., Pyryla, N.M. and Yurtsenyuk, S.P. (2008), "Influence of annealing on the optical properties of layered crystals GaSe and InSe", *Fizyka i Khimiya tverdoho tila*, vol. 9, no. 2, pp. 338-347.
2. Kovalyuk, Z.D., Boledzyuk, V.B., Szewczyk, V.V., Dubyk, A. and Kaminsky, V.M. (2012), "The electric properties of indium selenide mono doped selenide vanadiu", *FIP*, vol.10, no. 4, pp. 448-452.
3. Kovalyuk, Z.D., Szewczyk, V.V., Boledzyuk, V.B. and Netyaga, V.V. (2014), "Research electrical properties of InSe intercalated cobalt", *Zhurnal nano- ta elektronnoyi fizyky*, vol. 6, no. 4, pp. 04038-1-04038-5.
4. Boledzyuk, V.B., Kovalyuk, Z., Kudrynsky, S.G., Kushnir, B., Lytvyn, Oh. S. and Shevchenko, A.D. (2014), "Nickel intercalation Influence on properties to properties of layered crystals of InSe", *FIP*, vol. 12, no. 2, pp. 184-189.
5. Stahyra, J.M., Tovsyuk, N.K., Fomenko, V.L., Tsmots, V.N. and Schuplyak, A.N. (2011), "Structure and properties of monocrystals InSe mahnytnye, ynterkalyrovannih Nickel", *Fizyka i tekhnika poluprovodnikov*, vol. 45, issue 10, pp. 44-47.
6. Balitskii, O., Porowski, S., Eliaz, Jacek, Gryshchenko, S., Kvashnivska, N. and Polishchuk, N. "Electrochemical Investigation of Hydrogen Influence of Crystals of Gallium Nitride", available at: <http://myprogram14.ise-online.org/symp/S06.html>.
7. Balitskii, O., Eliaz, Jacek, Gryshchenko, S., Kvashnivska, N., and Polishchuk, N. (2015), "Hydrogen Influence on Electrochemical Properties of Gallium Monoselenide", *Solid State Phenomena*, vol. 225, pp. 53-58.
8. Kvashnivska, N.M. (2015), "Indium monoselenidu Elektrohimični properties for solar cells", *Netradytsiyni i ponovlyuvalni energy sources as alternatyvni primary sources of energy in the region*, pp. 164-168.

9. Balitskii, O.O., Eliash, Jacek, Grishchenko, S., Kvashnivska, N. and Polischuk, N. (2015), "Layered crystals of growth in vodnevii enerhetytsi", *Netradytsiyni I ponovlyuvalni energy sources as alternatyvni primary sources of energy in the region*, pp. 152-154.
10. Boledzyuk, V.B., Kovalyuk, Z.D, Kudrynskyi, Z.R., Lytvyn, A.S. and Shevchenko, A.D. (2014), "Structure and properties mahnytnye sloystykh krystallov InSe, ynterkalyrovannykh cobalt", *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, vol. 84, issue 10, pp. 44-47.
11. Eliash, Jacek, Kvashnivska, N.M., Balitskii, O.O., Gryshchenko, S.A. and Polischuk, N.M. (2014), "Tverdi layered interkalovani hydrogen oil on the basis selenidiv holiyu and indium problems himmotolohiyi", *Teoriia ta praktyka ratsionalnoho vykorystannia tradytsiinykh i alternatyvnykh palyvno-mastylnykh materialiv*, pp. 226-229.
12. Kovalyuk, Z.D., Pyrlya, N.M., Boledzyuk, V.B. and Szewczyk, V.V. (2011), "The pressure and tenzochutlyvist layered semiconductor InSe and GaSe", *Ukr. fiz. zhurn.*, vol. 56, no. 4, pp. 368-372.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ ЗСУВУ ОДНОСПРЯМОВАНОГО КОМПОЗИТУ ПРИ НОРМАЛЬНОМУ РОЗПОДІЛІ РАДІУСА ВОЛОКНА

Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. М., к. т. н., доцент,
Смолянкова Т. М., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

tanya-smolyankova@yandex.ru

У роботі пропонується методика визначення ефективного модуля зсуву для односпрямованого композиційного матеріалу. Композит, що складається з трансверсально-ізотропної матриці та трансверсально-ізотропного волокна, моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом. При цьому волокно розглядається як циліндр, радіус якого є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Запропоновано методику для визначення математичного сподівання модуля зсуву.

Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, ефективний модуль зсуву, нормальний закон розподілу, умови узгодженості.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ СДВИГА ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТА ПРИ НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАДИУСА ВОЛОКНА

Клименко М. И., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. Н., к. т. н., доцент,
Смолянкова Т. Н., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

tanya-smolyankova@yandex.ru

В работе предлагается методика определения эффективного модуля сдвига для однонаправленного композиционного материала. Композит, состоящий из трансверсально-изотропной матрицы и трансверсально-изотропного волокна, моделируется сплошным однородным трансверсально-изотропным материалом. При этом волокно рассматривается как цилиндр, радиус которого является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Приведена методика для определения математического ожидания модуля сдвига.

Ключевые слова: композиционный материал, матрица, волокно, эффективный модуль сдвига, нормальный закон распределения, условия согласованности.

DETERMINATION OF EFFECTIVE SHEAR MODULUS OF UNIDIRECTIONAL COMPOSITE UNDER THE NORMAL DISTRIBUTION OF FIBER RADIUS

Klymenko M. I., Hrebeniuk S. M., Smolyankova T. N.

*Zaporizhzhya National University,
Zhykovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

tanya-smolyankova@yandex.ru

This paper proposes a method of determining the effective longitudinal shear modulus for the composite material in the problem of longitudinal tensile composite. Object of study is unidirectional composite material with a hexagonal arrangement of fibers. The composite's fiber is represented as a solid cylinder, and the matrix corresponds a hollow cylinder. In the composite matrix and fiber are assumed to be transversely isotropic. The radius of the fiber is considered as a continuous random quantity, normally distributed, respectively, the volume content of the fiber in the composite is also a random quantity. Its mathematical expectation is expressed through the mathematical expectation and variance of the fiber radius.

To determine the effective shear modulus of the composite is supposed to use the kinematic matching conditions. First, to solve the boundary value problem for joint deformation of an transversely isotropic matrix and transversely isotropic fiber. For this, previously founding a general solution of the problem on axisymmetric deformation of isotropic cylinder under longitudinal tension, herewith uses the basic equations of elasticity theory in a cylindrical coordinate system. The obtained solution is used for determining the constituent elements of the tension and deformation of the fiber and the matrix. It is assumed, that at the contact surface of the matrix and the fiber is the normal displacement and tension of the fiber and the matrix are the same, axial movement of the fiber and the matrix are also equal for all values of the axial coordinate. The normal tension on the outer surface of the cylinder modeling the matrix are equal to zero. Found using these conditions, axial and radial displacements and tensions are functions of the fiber volume content in the cell matrix, as well as technical elastic constants of the matrix and the fiber.

Next, obtained a solution corresponding to the boundary value problem for the composite. Here is a model of composite solid homogeneous transversely isotropic cylinder. This solution depends on the effective elastic constants of transversely isotropic material. For both tasks, axial tension is assumed to be constant. The ratio between the axial tension of the matrix and the fiber, and the axial tension in the transversely isotropic material model of the composite is determined by the equilibrium conditions. As the matching conditions for considering the problem of longitudinal tensile homogeneous transversely isotropic composite and joint longitudinal tensile of transversely isotropic matrix and transversely isotropic fiber are selected conditions of the axial displacement at arbitrary axial coordinate and equality of radial displacements on an outer surface of the cylinder, modeling composite. The use of such matching conditions allowed to determine the effective longitudinal shear modulus as a function of the determined values – the elastic constants of the matrix and the fiber, as well as random argument – the volumetric fiber content in the composite cell. Found mathematical expectation of this indicator. Methodology proposed in the paper also allows to determine the effective elastic constants for composites, having random characteristics with different distribution laws.

Keywords: composite material, matrix, fiber, effective shear modulus, normal distribution, matching conditions.

ВСТУП

Одним з найбільш поширених методів моделювання в механіці композиційних матеріалів є побудова моделі композита у вигляді суцільного однорідного середовища з ефективними сталими, які найточніше відображають найбільш суттєві механічні властивості матеріалу. Ці сталі визначаються як коефіцієнти, що пов'язують усереднені за об'ємом значення компонентів тензорів напружень та деформацій за певних крайових умов. Знаходженню ефективних характеристик для композиційних матеріалів з трансстропними властивостями присвячена значна кількість наукових досліджень. Зокрема, у роботі [1] розглянуто розв'язання цієї задачі для випадку трансверсально-ізотропних властивостей волокна, у [2] отримані ефективні пружні сталі для композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропним волокном та ізотропною матрицею. У дослідженнях [3, 4] визначені ефективні пружні сталі для трансверсально-ізотропних матриці та волокна, при цьому за умову узгодження було прийнято рівність відповідних компонент вектора переміщень. У монографії [5] висвітлюються основи теорії деформування та ефективних властивостей композиційних

матеріалів стохастичної структури, зокрема, розглянуто ряд задач, пов'язаних з визначенням ефективних характеристик композитів різних типів зі стохастичними параметрами. Задачі визначення ефективних пружних сталих для односпрямованих композитів зі стохастичними геометричними характеристиками розглянуто в [6, 7].

Дослідження сучасних технологій виробництва композиційних матеріалів свідчить про актуальність математичного моделювання їх властивостей з урахуванням стохастичності деяких характеристик композитів. Метою даної роботи є знаходження залежності ефективного модуля зсуву композиту від об'ємного вмісту волокон з радіусом, розподіленим за нормальним законом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЗАГАЛЬНА СХЕМА ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Об'єктом дослідження є односпрямований композитний матеріал з гексагональним розташуванням волокон. Розглядається випадок, коли трансверсально-ізотропні властивості проявляють матеріали матриці і волокна. Радіус волокна розглядається як випадкова величина, розподілена за нормальним законом. Задача полягає у визначенні ефективного модуля зсуву композита при його представленні у вигляді однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу.

Представимо елемент волокнистого композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними властивостями у вигляді комбінації двох нескінченних циліндрів – трансверсально-ізотропного порожнистого, який моделює матрицю і трансверсально-ізотропного суцільного, що відповідає волокну (рис. 1).

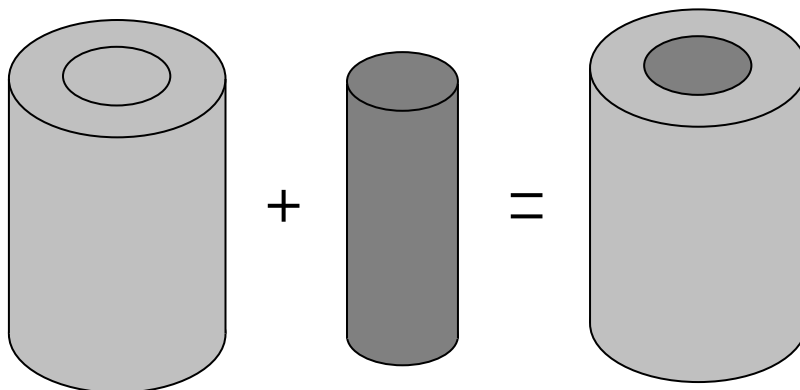


Рис. 1. Елемент волокнистого композита

Для цього об'єм гексагональної комірки апроксимується об'ємом циліндра так, щоб співвідношення об'єму волокон у гексагональній комірці і об'єму волокон у циліндричній комірці були рівними. Волокно розглядається як суцільний циліндр з радіусом a , елементарну гексагональну комірку матриці апроксимує порожнистий циліндр, радіус якого дорівнює b (рис.2).

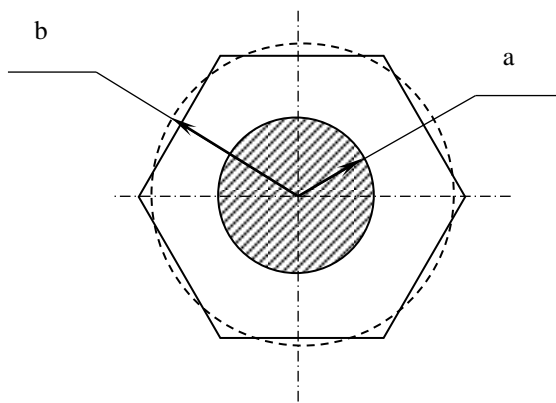


Рис. 2. Гексагональна комірка

Якщо об'ємний вміст волокон у композиті дорівнює f , то враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку займає волокно в елементарній комірці, мають однакову висоту, маємо співвідношення:

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \quad (1)$$

Технології виробництва композитних матеріалів переважно зумовлюють випадковий характер їх параметрів. Зокрема, за відсутності системних відхилень, ці параметри можна розглядати як нормально розподілені випадкові величини. Нехай радіус a волокна є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з відомими параметрами розподілу: математичним сподіванням a_0 та середнім квадратичним відхиленням s , які можуть бути визначені зі статистичних даних контролю якості виробництва композитних матеріалів. Тоді об'ємний вміст f волокна в комірці теж є випадковою величиною, математичне сподівання f_0 якої дорівнює:

$$f_0 = m(f) = \frac{m(a^2)}{b^2} = \frac{a_0^2 + s^2}{b^2}. \quad (2)$$

Пружні характеристики знаходяться із розв'язання двох крайових задач. Спочатку розв'яжемо крайову задачу сумісного деформування трансверсально-ізотропних матриці та волокна, звідки знайдемо компоненти напружено-деформованого стану композиту як функції пружних сталей їх матеріалів та об'ємної частки волокна в композиті. Потім знайдемо розв'язок аналогічної крайової задачі для композиту, представленого у вигляді однорідного трансверсально-пружного матеріалу з поки що невідомими пружними константами. При цьому отримаємо компоненти напружено-деформованого стану у вигляді функцій ефективних пружних сталей матеріалу, що моделює композит. З умов узгодженості, зокрема, умови рівності компонент вектора переміщень для вказаних першої та другої крайових задач, визначаються невідомі величини [2].

ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ ЗСУВУ КОМПОЗИТУ

Знайдемо загальний розв'язок задачі про вісесиметричне деформування нескінченного циліндра. Для цього наведемо основні співвідношення, що характеризують чистий поздовжній зсув в циліндричній області (рис. 3).

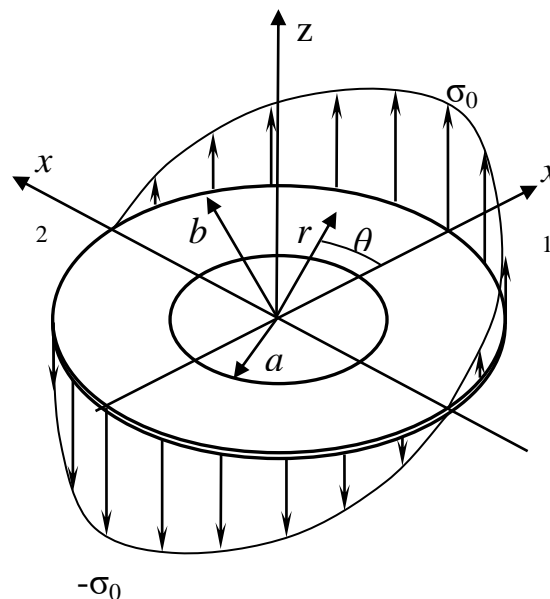


Рис. 3. Крайові умови (для напружень $\sigma_x(b, \theta)$) при поздовжньому зсуві в кільці

Напружено-деформований стан визначається такими характеристиками: $\sigma_{zz} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{zr} = \sigma_{zr}(r, \theta)$, $\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}(r, \theta)$; $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \gamma_{r\theta} = 0$, $\gamma_{zr} = \gamma_{zr}(r, \theta)$, $\gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}(r, \theta)$.

Для моделювання напружено-деформованого стану чистого поздовжнього зсуву в циліндричній області, необхідно, щоб виконувалася крайова умова:

$$\sigma_{zr}(b, \theta) = \sigma_0 \cos \theta. \tag{3}$$

При цьому виконуються співвідношення:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0.$$

У цьому випадку рівняння рівноваги матимуть вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0,$$

або в переміщеннях

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є функція:

$$u_z(r, \theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \theta, \tag{4}$$

тоді, зважаючи на формули

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z},$$

можна отримати співвідношення для деформацій:

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = - \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta; \tag{5}$$

$$\gamma_{zr}(r, \theta) = \frac{\partial u_z}{\partial r} = \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta. \tag{6}$$

Враховуючи формули

$$\sigma_{zr} = G_{12} \gamma_{zr}, \quad \sigma_{z\theta} = G_{12} \gamma_{z\theta},$$

знаходимо співвідношення для напружень у наступному вигляді:

$$\sigma_{zr}(r, \theta) = G_{12} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta; \tag{7}$$

$$\sigma_{z\theta}(r, \theta) = -G_{12} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta. \tag{8}$$

Розглянемо задачу про сумісний поздовжній зсув суцільного циліндра ($0 \leq r \leq a$), який моделює волокно, і порожнистого циліндра ($a \leq r \leq b$), який моделює матрицю.

У подальших позначеннях будемо використовувати символ $^\circ$ для позначення величин, які характеризують волокно, символ * – величин, які відносяться до матриці.

Основні співвідношення для матриці матимуть вигляд (перепозначимо C_1 на A , а C_2 на B):

$$u_z^*(r, \theta) = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \cos \theta, \quad (9)$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r, \theta) = - \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin \theta, \quad (10)$$

$$\gamma_{zr}^*(r, \theta) = \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (11)$$

$$\sigma_{zr}^*(r, \theta) = G_{12}^* \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (12)$$

$$\sigma_{z\theta}^*(r, \theta) = -G_{12}^* \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (13)$$

Основні співвідношення для волокна з урахуванням скінченності переміщень при $r=0$ набудуть вигляду (перепозначимо C_1 на C):

$$u_z^\circ(r, \theta) = Cr \cos \theta, \quad (14)$$

$$\gamma_{\theta z}^\circ(\theta) = -C \sin \theta, \quad (15)$$

$$\gamma_{zr}^\circ(\theta) = C \cos \theta, \quad (16)$$

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = G_{12}^\circ C \cos \theta, \quad (17)$$

$$\sigma_{z\theta}^\circ(\theta) = -G_{12}^\circ C \sin \theta. \quad (18)$$

Щоб знайти невідомі сталі у вказаних вище співвідношеннях (9)-(18) для задачі про сумісний поперечний зсув матриці і волокна, скористаємося крайовими умовами (3) і умовами неперервності напружень та переміщень на межі розподілу матеріалів:

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = \sigma_{zr}^*(a, \theta), \quad (19)$$

$$u_z^\circ(a, \theta) = u_z^*(a, \theta). \quad (20)$$

Із (3) одержимо:

$$\sigma_0 = G_{12}^* \left(A - \frac{B}{b^2} \right),$$

або

$$A = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*} + \frac{B}{b^2}. \quad (21)$$

Отже, із (20) знаходимо

$$C = A + \frac{B}{a^2},$$

з урахуванням (21)

$$C = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*} + B \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \right). \quad (22)$$

Насамкінець, із (19) отримаємо

$$G_{12}^* \left(A - \frac{B}{a^2} \right) = G_{12}^\circ C,$$

або, зважаючи на (21), (22), матимемо

$$B = \frac{\sigma_0 a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))}. \quad (23)$$

Тоді

$$C = \frac{-2\sigma_0}{(G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))}, \quad (24)$$

$$A = \frac{-\sigma_0 (G_{12}^* + G_{12}^\circ)}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))}. \quad (25)$$

Враховуючи (24), (25) остаточно запишемо співвідношення для напружено-деформованого стану матриці при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))} \left(-(G_{12}^* + G_{12}^\circ) r + \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r} \right) \cos \theta, \quad (26)$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta, \quad (27)$$

$$\gamma_{zr}^*(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (28)$$

$$\sigma_{zr}^*(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (29)$$

$$\sigma_{z\theta}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)} \left(G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2 (G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (30)$$

Враховуючи (24), остаточно можна отримати основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан волокна при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^\circ(r, \theta) = \frac{-2\sigma_0 r \cos \theta}{G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)}, \quad (31)$$

$$\gamma_{\theta z}^\circ(\theta) = \frac{2\sigma_0 \sin \theta}{G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)}, \quad (32)$$

$$\gamma_{zr}^\circ(\theta) = \frac{-2\sigma_0 \cos \theta}{G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)}, \quad (33)$$

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = \frac{-2\sigma_0 G_{12}^\circ \cos \theta}{G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1)}, \quad (34)$$

$$\sigma_{z\theta}^{\circ}(\theta) = \frac{2\sigma_0 G_{12}^{\circ} \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)}. \quad (35)$$

Аналогічно можна отримати розв'язок задачі для композиту, який моделюється трансропним однорідним матеріалом. У цій задачі композит матиме вигляд суцільного нескінченного циліндра радіусу b . Крайові умови задані співвідношенням (3). Напружено-деформований стан буде описуватись співвідношеннями, аналогічними до співвідношень для волокна. Компоненти переміщень, деформацій і напружень в однорідному трансропному матеріалі знаходимо за формулами:

$$u_z(r, \theta) = \tilde{A}r \cos \theta,$$

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = -\tilde{A} \sin \theta,$$

$$\gamma_{rz}(r, \theta) = \tilde{A} \cos \theta,$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta) = \tilde{A} G_{12} \cos \theta,$$

$$\sigma_{z\theta}(r, \theta) = -\tilde{A} G_{12} \sin \theta.$$

З крайової умови (3) знайдемо сталу \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \frac{\sigma_0}{G_{12}}.$$

Остаточно отримаємо:

$$u_z(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos \theta, \quad (36)$$

$$\gamma_{\theta z}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin \theta, \quad (37)$$

$$\gamma_{rz}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos \theta, \quad (38)$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \cos \theta, \quad (39)$$

$$\sigma_{z\theta}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \sin \theta. \quad (40)$$

Отже, отримано розв'язок задачі на чистий поздовжній зсув для спільного деформування нескінченного порожнистого і суцільного циліндрів, що моделюють матрицю і волокно відповідно. Також було отримано розв'язок для нескінченного суцільного циліндра, що моделює композиційний матеріал. Як умови узгодження можна використати, наприклад, рівність осьових переміщень на зовнішній межі:

$$u_z(b, \theta) = u_z^*(b, \theta). \quad (41)$$

Використовуючи отриману рівність (41), матимемо:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^*(G_{12}^*(1-f) + G_{12}^{\circ}(f+1))}{G_{12}^{\circ}(1-f) + G_{12}^*(f+1)}. \quad (42)$$

Оскільки радіус волокна a є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з математичним сподіванням a_0 та середнім квадратичним відхиленням s , то об'ємний вміст

$f = \frac{a^2}{b^2}$ волокна у комірці теж є випадковою величиною, щільність розподілу $\varphi(f)$ якої

визначається з урахуванням того, що функція $f(a)$ не є монотонною:

$$\varphi(f) = \frac{b}{2s\sqrt{2\pi f}} \left(e^{-\frac{(b\sqrt{f}+a_0)^2}{2s^2}} + e^{-\frac{(b\sqrt{f}-a_0)^2}{2s^2}} \right)$$

при $f > 0$.

Тоді математичне сподівання випадкової величини G_{12} визначатиметься збіжним невласним інтегралом:

$$M(G_{12}) = \int_0^{+\infty} G_{12}(f) \cdot \varphi(f) df, \quad (43)$$

де функція випадкового аргументу $G_{12}(f)$ визначається рівністю (42).

Таким чином, визначено математичне сподівання ефективного модуля зсуву композиційного матеріалу, що дає змогу використовувати цей показник при дослідженні механічних властивостей композитів з трансверсально-ізотропними матрицею та волокном.

ВИСНОВКИ

У роботі запропонований спосіб визначення ефективного модуля зсуву для композиційного матеріалу, який складається з трансверсально-ізотропних матриці та волокна. Радіус волокна розглядається як неперервна випадкова величина з нормальним законом розподілу, тому об'ємний вміст волокна в композиті також є випадковою величиною. Для розв'язання цієї задачі спочатку знайдено розв'язок крайової задачі для сумісного деформування трансверсально-ізотропних матриці та волокна. Компоненти напруження та деформації виражені у вигляді функцій їх механічних характеристик. Надалі одержано розв'язок аналогічної крайової задачі для однорідного трансверсально-ізотропного циліндру, що є моделлю композиту. Використання умов узгодження переміщень дозволило визначити математичне сподівання ефективного модуля зсуву композиту як функцію від пружних сталей матриці і волокна. Насамкінець, наведено умову для визначення математичного сподівання модуля зсуву.

Вказані методи можуть бути застосовані при визначенні ефективних пружних сталей для композитів з характеристиками, що виступають випадковими величинами з різноманітними розподілами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Растеряев Ю. К. Составные резинокордные материалы и механика их деформирования / Ю. К. Растеряев, Г. Н. Агальцов // Геотехнічна механіка. – 2005. – Вип. 60. – С. 200-248.
2. Класторны М. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов / М. Класторны, П. Кондерла, Р. Пиекарский // Механика композитных материалов. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 109-144.
3. Гребенюк С. Н. Упругие характеристики композиционного материала с транстропной матрицей и волокном / С. Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2011. – Вип. 12. – С. 62-68.
4. Гребенюк С. Н. Определение модуля сдвига композиционного материала с транстропными матрицей и волокном / С. Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2012. – Вип. 13. – С. 92-98.

5. Хорошун Л. П. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов, Е. Н. Шикун, Л. В. Назаренко // Механика композитов : В 12 томах, Т. 3. – К. : Наукова думка, 1993. – 388 с.
6. Гребенюк С. М. Визначення ефективного модуля пружності композиту при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці / С. М. Гребенюк, М. І. Клименко // Вестник Херсонского национального университета. – 2014. – № 3(50). – С. 254-258.
7. Hrebenuk S. Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiber / S. Hrebenuk, M. Klymenko, K. Omelchenko // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2014. – № 1. – С. 14-23.

REFERENCES

1. Rasteryaev, J.U.K. and Agal'cov, G.N. (2005), "Rubber-cord Composite materials and their mechanical deformation", *Geotekhnichna mehanika*, issue 60, pp. 200-248.
2. Klastorny, M., Konderla, P. and Piekarskiy, R. (2009), "Exact theory stiffness of unidirectional fiber-reinforced composites", *Mehanika kompozitnyh materialov*, vol. 45, no. 1, pp. 109-144.
3. Grebenjuk, S.N. (2011), "Elastic characteristics of the composite material with the matrix and fiber transtropic", *Metody rozv'yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdoho tila*, issue 12, pp. 62-68.
4. Grebenjuk, S.N. (2012), "Definition of the shear modulus of the composite material with the matrix and fiber transtropic", *Metody rozv'yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdoho tila*, issue 13, pp. 92-98.
5. Horoshun, L.P., Maslov, B.P., SHikula, E.N. and Nazarenko, L.V. (1993), *Statisticheskaya mekhanika i effektivnye svoystva materialov* [Statistical mechanics and the effective properties of materials], Naukova dumka, Kiev.
6. Grebenjuk, S.M. and Klimenko, M.I. (2014), "Determination of the effective modulus composite normal distribution elastic modulus fibers and the matrix", *Vestnik Hersonskogo nacional'nogo universiteta*, no. 3(50), pp. 254-258.
7. Hrebenuk, S., Klymenko, M. and Omelchenko, K. (2014), "Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiber", *Visnik Zaporizkogo natsionalnogo universitetu, Fyzyko-matematychni nauky*, no. 1, pp. 14-23.

УДК 519.8

ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Козин И. В., д. ф.-м. н., профессор, Батовский С. Е., аспирант, Сардак В. И., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

ainc00@gmail.com, user.sergey.b@gmail.com

Исследуется проблема генерации графов для создания баз данных тестовых задач. Рассматриваются алгоритмы генерации случайных графов с различными свойствами. Для различных видов графов приводятся алгоритмы генерации (граф-генераторы). Предложены граф-генераторы для деревьев произвольного вида, для деревьев с ограничениями на степени вершин, для графов произвольного вида, для связанных графов, для графов с ограничениями на степени вершин, для регулярных графов, для графов с заданным числом ребер.

Ключевые слова: случайные графы, алгоритмы генерации графов, модель Эрдеша-Реньи, связный граф, регулярный граф.

ГЕНЕРАЦІЯ ВИПАДКОВИХ ГРАФІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Козін І. В., к. ф.-м. н., професор, Батовський С. Є., аспірант, Сардак В. І., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

ainc00@gmail.com, user.sergey.b@gmail.com

Досліджується проблема генерації графів для створення бази даних тестових задач. Розглядаються алгоритми генерації випадкових графів з різними властивостями. Для різних видів графів наводяться алгоритми генерації – (граф-генератори). Запропоновано граф-генератори для довільних дерев, для дерев з обмеженням на степені вершин, для довільних графів, для зв'язних графів, для графів з обмеженням на степені вершин, для регулярних графів, для графів із заданим числом ребер.

Ключові слова: випадкові графи, алгоритми генерації графів, алгоритм Ердеша-Реньї, зв'язний граф, регулярний граф.

GENERATION OF RANDOM GRAPHS WITH DESIRED PROPERTIES

Kozin I. V., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Batovskyi S. Ye., postgraduate, Sardak V. I., postgraduate

*Zaporizhzhya State University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

ainc00@gmail.com, user.sergey.b@gmail.com

The article considers generalizations of Erdos-Renyi model for the generation of random graphs with certain properties. In particular, it provides a method for generating trees, connected graphs, graphs with restrictions on the degree of vertices, regular graphs, graphs with a given number of edges.

These methods are used in the programs, also known as graph-generators, that simulate the known NP-complete problems on graphs. Examples of such problems may be: traveling salesman problem, the problem of the maximum clique, problem of covering a graph by stars, etc. That is why every algorithm in the article is accompanied by an example of its implementation by pseudocode.

Each random graphs generation algorithm, which described in this article, can be easily modified for generation weighted line graphs with random weights of the specified range. Also, the authors recommend the use these algorithms for creating a large database of test problems, which can be used in further for the comparative statistical analysis of various algorithms of exact or approximate optimization on graphs and networks. Because the such analysis is practically the only way to check the quality of different types of metaheuristics.

Keywords: random graphs, algorithms of graph generating, Erdos-Renyi algorithm, connected graph, regular graph.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Большое количество прикладных оптимизационных задач на сегодняшний день не могут быть точно решены, поскольку их вычислительная сложность относится к классу NP-трудных [1]. Однако потребность в решении таких задач возрастает и, соответственно, увеличивается поток работ, посвященных поискам приближенных решений трудных задач. Во многих случаях для поиска приближенных решений используются метаэвристики различных типов. Однако при использовании метаэвристик открытым остается вопрос о качестве предлагаемого метода. Поскольку эвристические алгоритмы не имеют априорных оценок сходимости, то неизвестно насколько точно полученное приближенное решение соответствует оптимальному. Как следствие, очень трудно оценить целесообразность применения алгоритма в различных оптимизационных задачах.

Одним из возможных решений данной проблемы может служить проверка метаэвристических алгоритмов на примерах из известных тестовых библиотек с известными рекордами, и попытка улучшить эти рекорды. Одной из таких библиотек является библиотека ORLIB [2].

Другим подходом к решению проблемы оценки качества алгоритмов является сравнение «нового» алгоритма с другими алгоритмами, работа которых уже детально изучена. Такое

сравнение должно проходить на большой базе тестовых задач со случайным набором начальных данных. Это позволит вычислить «средние» характеристики эффективности тестируемого алгоритма.

Многие интересные труднорешаемые задачи могут быть сведены к известным задачам на графах, к таким, как задача коммивояжера, задача о максимальной клике, задача о покрытии графа звёздами и т.д. В каждой такой задаче условием является некоторый граф (возможно взвешенный). Разумно проводить сравнение алгоритмов на классах графов с заданными свойствами. Таким образом, для создания набора тестовых задач возникает необходимость разработки специальных алгоритмов генерации случайных графов с заданными свойствами и создания соответствующих компьютерных программ – граф-генераторов.

ОБЗОР ИМЕЮЩИХСЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Случайные графы являются объектом пристального внимания исследователей с 70-х годов прошлого века [3-6]. В настоящее время в связи с широким применением теории графов при описании и моделировании объектов различного типа, сетевых структур актуальным является вопрос о создании имитационных моделей на основе генерации графов с заданными свойствами. Кроме того, генераторы случайных графов необходимы при проверке статистических свойств эвристических алгоритмов на графах. Наиболее известной моделью генератора случайных графов является модель Эрдёша-Реньи [7], в которой каждое ребро графа генерируется с одинаковой заданной вероятностью. Более поздние исследования в области генерации графов связаны с моделированием сетевых структур с заданными свойствами, в частности, с моделированием www-сетей. К таким моделям относятся модель Барабаши-Альберта [8], модель Боллобаша-Риордана [9], а также ряд других [10].

ФОРМУЛИРОВКА ЦЕЛЕЙ

Целью настоящей работы является исследование генераторов случайных графов с заданными топологическими свойствами (связность, степени вершин, наличие цикла и т.д.) на основе обобщения классической модели Эрдёша-Реньи и описание соответствующих алгоритмов.

ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Рассмотрим задачу генерации случайного дерева с заданным числом вершин. Напомним, что деревом называется связный граф без циклов. Таким образом, в n -вершинном дереве имеется ровно $n-1$ ребер. Граф будем описывать матрицей смежности $C = (c_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$, в которой

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ соединены ребром,} \\ 0, & \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ не соединены ребром.} \end{cases}$$

Вершины графа последовательно индексируются числами от 1 до n . Все полученные индексы разделяются на два множества I_1 и I_2 так, что на начальном этапе $I_1 = \{ \}$, $I_2 = \{1, 2, \dots, n\}$. На первом шаге выбирается случайная пара индексов и переносятся из множества I_2 в I_1 . Это соответствует выбору первого ребра дерева. На очередном шаге процесса из каждого множества случайно выбирается по одному индексу: $i_1 \in I_1$ и $i_2 \in I_2$. В граф добавляется ребро, которое соединяет вершины с выбранными индексами. После чего индекс i_2 удаляется из множества I_2 и заносится в множество I_1 . Процесс продолжается пока множество I_2 не окажется пустым. Простейшая реализация алгоритма представлена на рис. 1.

```

var I1[n] = { };
var I2[n] = {1, 2, 3, ..., n };

// случайно выбирается ребро
var i1 = I2[random(1, I2.Length)];
I2.Remove(i1);
var i2 = I2[random(1, I2.Length)];
I1.Add(i1);
I1.Add(i2);
c[i1, i2] = 1;
do
{
    var i1 = I1[random(1, I1.Length)];
    var i2 = I2[random(1, I2.Length)];

    // ребро добавляется в граф
    c[i1, i2] = 1;

    I2.Remove(i2);
    I1.Add(i2);
}
while (I2.Length != 0);

```

Рис. 1. Алгоритм генерации случайного дерева

Результатом работы алгоритма является матрица смежности, соответствующая случайному n -вершинному дереву.

МОДЕЛЬ ЭРДЕША-РЕНЬИ

Одним из простейших алгоритмов для генерации случайных графов является алгоритм на основе модели Эрдёша-Реньи [10]. Алгоритм очень прост в использовании, поскольку имеет всего лишь один параметр $\alpha \in (0,1)$, который задаёт вероятность появления произвольного ребра в графе. Применяя данный алгоритм, вероятность получить граф $G = (V, E)$ одинакова для всех графов с заранее заданным числом вершин n и числом ребер m :

$$P(G) = \alpha^m (1 - \alpha)^{\frac{n(n-1)}{2} - m}.$$

Алгоритм Эрдёша-Реньи формирует граф, заполняя его матрицу смежности $C = (c_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$. Ниже приведён вариант реализации данного алгоритма (рис. 2).

```

for (var i = 1; i <= n; i++)
{
    for (var j = i + 1; j <= n; j++)
    {
        // random(x, y) возвращает случайное число на отрезке [x, y]
        if (random(0, 1) <= alpha)
        {
            c[i, j] = 1;
        }
        else
        {
            c[i, j] = 0;
        }
    }
}

```

Рис. 2. Алгоритм Эрдёша-Реньи

Случайный граф, сгенерированный на основе модели Эрдёша-Реньи, не обязательно является связным. Одним из способов генерации, гарантирующих связность результата генерации, может быть следующий: сначала генерируется остовное дерево с заданным числом вершин, а

затем к этому дереву по алгоритму Эрдёша-Реньи добавляются ребра, не принадлежащие дереву. То есть каждое новое ребро добавляется с одной и той же вероятностью α .

Рассмотрим теперь задачу генерации случайного графа, содержащего гамильтонов цикл. Гамильтонов цикл однозначно определяется некоторой перестановкой вершин графа. Для генерации случайной перестановки можно воспользоваться тасованием Фишера-Йетса [11]. Одна из возможных реализаций данного алгоритма приведена ниже (рис. 3).

```

var a[n] = {1, 2, ..., n};
for (var i = 1; i <= n; i++)
{
  // round(x) округляет число x до ближайшего целого
  var j = 1 + round(random(0, 1) * (n - 1));

  // swap(x, y) обменивает значениями переменные x и y
  swap(a[i], a[j]);
}

```

Рис. 3. Тасование Фишера-Йетса

На основе полученной случайной перестановки выполняется генерация гамильтонова цикла в графе путём заполнения его матрицы смежности $C = (c_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ (рис. 4).

```

c[a[n], a[1]] = 1;
for (var i = 1; i <= n - 1; i++)
{
  c[a[i], a[i + 1]] = 1;
}

```

Рис. 4. Процесс заполнения матрицы смежности для построения гамильтонова цикла

Затем, чтобы построить случайный граф, необходимо добавить по алгоритму Эрдёша-Реньи ребра, не принадлежащие циклу.

ГРАФЫ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА СТЕПЕНИ ВЕРШИН

Рассмотрим теперь задачу генерации случайных графов, у которых степень каждой вершины не превосходит заданного целого числа $d \leq n-1$. Такой граф может быть построен с помощью модифицированного алгоритма Эрдёша-Реньи (рис. 5), который использует дополнительный массив D степеней вершин.

```

// вначале все элементы массива степеней вершин равны нулю
var D[n] = {0, 0, ..., 0};
for (var i = 1; i <= n; i++)
{
  for (var j = i + 1; j <= n; j++)
  {
    if ((D[i] <= d) and (D[j] <= d))
    {
      if (random(0, 1) <= alpha)
      {
        c[i, j] = 1;
        D[i]++;
        D[j]++;
      }
      else
      {
        c[i, j] = 0;
      }
    }
  }
}

```

Рис. 5. Алгоритм Эрдёша-Реньи, учитывающий ограничение на степень вершин сверху

При необходимости генерации связного графа, также, модифицируется и процесс построения случайного остовного дерева (рис. 6).

```

...
I2.Remove(i2);
I1.Add(i2);

if (D[i1] == d) // добавлена проверка для D[i1]
{
    I1.Remove(i1);
}

if (D[i2] == d) // добавлена проверка для D[i2]
{
    I1.Remove(i2);
}
...

```

Рис. 6. Изменённая часть алгоритма генерации случайного остовного дерева, учитывающая ограничение на степень вершин сверху

Вершины графа, степени которых уже достигли установленного максимума, вовсе не участвуют в процессе. Также, на каждом шаге алгоритма после добавления нового ребра (i_1, i_2) значения $D[i_1]$ и $D[i_2]$ увеличиваются на единицу, причём, если $D[i_k]$, $k \in \{1, 2\}$ достигает значения d , то соответствующий индекс i_k удаляется из своего множества.

Генерация произвольного случайного графа с ограничением на степень вершин снизу некоторым положительным числом $d \leq n-1$ может быть выполнена приведённым выше усовершенствованным алгоритмом Эрдёша-Реньи (рис. 5). В этом случае, вначале строится случайный граф с ограничением на степень вершин сверху числом $n-1-d$. После чего берётся его дополнение до полного n -вершинного графа.

Алгоритм несколько усложняется при построении связного графа. Весь процесс генерации происходит в три этапа. Вначале строится случайное остовное дерево с матрицей смежности $C = (c_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ и массивом степеней вершин D_1 . Затем происходит формирование дополнения случайного графа с матрицей смежности $C_{dop} = (c_{ij}^{dop})_{i,j=1,2,\dots,n}$ по следующему изменённому алгоритму Эрдёша-Реньи (рис. 7).

```

var D[n] = {0, 0, ..., 0};
for (var i = 1; i <= n; i++)
{
    for (var j = i + 1; j <= n; j++)
    {
        if ((D[i] <= (n - 1 - d + D1[i])) and (D[j] <= (n - 1 - d + D1[j])))
        {
            if (random(0, 1) <= alpha)
            {
                cdop[i, j] = 1;
                D[i]++;
                D[j]++;
            }
            else
            {
                cdop[i, j] = 0;
            }
        }
    }
}
}

```

Рис. 7. Специализированный алгоритм Эрдёша-Реньи

После этого формируется матрица смежности искомого случайного графа (рис. 8).

```

for (var i = 1; i <= n; i++)
{
  for (var j = i + 1; j <= n; j++)
  {
    // min(x, y) - возвращает меньшее из двух чисел x и y
    c[i, j] = min(1, 1 - cdop[i, j] + t[i, j]);
  }
}

```

Рис. 8. Процесс формирования матрицы смежности графа, с ограничением на степень вершин снизу

В результате будет получен случайный связный граф, степень каждой вершины которого будет не менее заданного числа d .

Рассмотрим теперь задачу генерации регулярного графа. Пусть степень каждой вершины графа равна d (в этом случае произведение nd обязательно является четным). Пусть также вероятность появления недостающего ребра $\alpha = 1$. Тогда в результате работы алгоритма, листинг которого представлен на рис. 5, всегда будет получаться случайный регулярный граф, степени вершин которого равны d .

СЛУЧАЙНЫЕ ГРАФЫ С ЗАДАНЫМ ЧИСЛОМ РЕБЕР

В заключение рассмотрим задачу генерации случайного графа с заданным числом вершин n и заданным числом ребер m . Каждому возможному ребру $(i, j)_{i=2, \dots, n-1; j < i}$ сопоставим индекс $k = n * (i - 1) + j$ этого ребра, однозначно соответствующий ребру. Из массива индексов случайным образом выберем m различных индексов и соответствующие им пары чисел (i, j) будем рассматривать как ребра случайного графа. Алгоритм легко модифицируется для генерации связного графа с заданным количеством вершин и ребер.

ВЫВОДЫ

В данной статье были рассмотрены обобщения модели Эрдеша-Реньи для генерации случайных графов с определенными свойствами. В частности, были приведены методы для генерации деревьев, связных графов, графов с ограничениями на степени вершин, регулярных графов, графов с заданным числом ребер.

Любой из описанных в статье алгоритмов генерации случайных графов может быть легко модифицирован для генерации реберно-взвешенных графов со случайными весами ребер из заданного диапазона весов. Алгоритмы генерации графов позволяют создавать большие базы тестовых задач, которые можно использовать для сравнительного статистического анализа различных точных и приближенных алгоритмов оптимизации на графах и сетях. Такой анализ является практически единственным методом проверки качества метаэвристик различных типов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон ; пер. А. Фридман. – М. : Мир, 1982. – 416 с.
2. Beasley J. E. OR-Library: distributing test problems by electronic mail / J. E. Beasley // Journal of the Operational Research Society. – 1990. – № 41. – P. 1069-1072.
3. Erdos P. Probabilistic methods in combinatorics / P. Erdos, J. Spencer. – New York : Academic Press, 1974. – P. 1375-1383.

4. Степанов В. Е. Комбинаторная алгебра и случайные графы / В. Е. Степанов // Теория вероятностей и ее применение. – 1969. – № 14:3. – С. 393-420.
5. Коваленко И. Н. К теории случайных графов / И. Н. Коваленко // Кибернетика. – 1971. – № 4. – С. 1-4.
6. Колчин В. Ф. Случайные графы / В. Ф. Колчин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 2-е изд. – 256 с.
7. Erdős P. On the evolution of random graphs / P. Erdős, A. Rényi // Publ. Math. Debrecen. – 1959. – Vol. 6. – P. 290-297.
8. Barabási L.-A. Emergence of scaling in random networks / L.-A. Barabási, R. Albert // Science. – 1999. – № 286. – P. 509-512.
9. Райгородский А. М. Модели случайных графов и их применения / А. М. Райгородский // Труды МФТИ. – 2010. – Т. 2, № 4. – С. 130-140.
10. Берновский М. М. Случайные графы, модели и генераторы безмасштабных графов / М. М. Берновский, Н. Н. Кузюрин // Труды Института системного программирования РАН. – 2012. – Т. 22. – С. 419-432.
11. Кнут Д. Искусство программирования. Т. 2. Получисленные методы / Д. Кнут. – М. : «Вильямс», 2007. – 3-е изд. – 832 с.

REFERENCES

1. Gerry, M. and Jhonson, D. (1982), *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi* [Computing machines and hard solvable problems], Translated by Fridman, A., Mir, Moscow, Russia.
2. Beasley, J.E. (1990), "OR-Library: distributing test problems by electronic mail", *Journal of the Operational Research Society*, no. 41, pp. 1069-1072.
3. Erdos, P. and Spencer, J. (1974), "Probabilistic methods in combinatorics", Academic Press, New York.
4. Stepanov, V.Ye. (1969), "Combinatorial algebra and random graphs", *Teoria veroyatnostey i yeyo primeneniye*, no. 14:3, pp. 393-420.
5. Kovalenko, I.N. (1971), "To theory of random graphs", *Kibernetika*, no. 4, pp. 1-4.
6. Kolchin, V.F. (2004), *Sluchaynye grafy* [Random graphs], FIZMATLIT, Moscow, Russia.
7. Erdős, P. and Rényi, A. (1959). "On the evolution of random graphs", *Publ. Math. Debrecen*, vol. 6, pp. 290-297.
8. Barabási, L.-A. and Albert, R. (1999), "Emergence of scaling in random networks", *Science*, no. 286, pp. 509-512.
9. Raigorodskiy, A.M. (2010), "Models of random graphs and they usage", *Trudy MFTI*, vol. 2, no. 4, pp. 130-140.
10. Bernovskiy, M.M. and Kuzyurin, N.N. (2012), "Random graphs, models and generators of scale-free graphs", *Trudy instituta sistemnogo programmirovaniya RAN*, vol. 2, pp. 419-432.
11. Knuth, D. (2007), *Iskusstvo programmirovaniya. T. 2. Poluchislennyye metody* [The Art of Computer Programming. Vol. 2. Seminumerical algorithms], Vil'yams, Moscow, Russia.

УДК 534

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ, АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Абасов М. М., докторант

*Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

В настоящей работе представлены результаты вычисления частот свободных колебаний цилиндрической анизотропной оболочки из полимерных материалов, в частности стеклопластиков, при граничных условиях Навье.

Постоянные упругости оболочки зависят от угла намотки стекловолокна. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построено уравнение для определения собственной частоты свободных колебаний продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений уравнения движения жидкости. Используя асимптотические формулы логарифмической производной функции Бесселя, получены приближенные формулы для нахождения собственных частот колебаний исследуемой конструкции.

Ключевые слова: колебания, оболочка, идеальная жидкость, напряжение, подкрепление, принцип вариации.

АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПОЗДОВЖНЬО ПІДКРІПЛЕНОЇ, АНІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З РІДИНОЮ ПРИ ОСЬОВОМУ СТИСКАННІ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Абасов М. М., докторант

*Азербайджанський архітектурно-будівельний університет,
вул. А. Султанова, 5, м. Баку, Аз.1073/1*

flatifov@mail.ru

У дослідженні подано результати обчислення частот вільних коливань циліндричної анизотропної оболонки з полімерних матеріалів, зокрема склопластиків, при граничних умовах Нав'є. Постійні пружності оболонки залежать від кута намотування скловолокна. На основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона, побудовано рівняння для визначення власної частоти вільних коливань поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки, що контактує з рідиною. Діючі поверхневі навантаження з боку рідини на поздовжньо підкріплену циліндричну оболонку визначаються з розв'язання рівняння руху рідини. Використовуючи асимптотичні формули логарифмічної похідної функції Бесселя, отримані набліжені формули для знаходження власних частот коливань досліджуваної конструкції.

Ключові слова: коливання, оболонка, ідеальна рідина, напруга, підкріплення, принцип варіації.

ANALYSIS OF FREE OSCILLATIONS OF THE LONGITUDINAL REINFORCEMENT, ANIZOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH LIQUID UNDER AXIAL COMPRESSION

Latifov F. S., Head: Prof., Professor, Abbasov M., doctoral

*Azerbaijan Architecture and Construction University,
5, A.Sultanova str., Baku, Az.1073/1*

flatifov@mail.ru

This paper presents the results of calculating the frequency of free oscillations of anisotropic cylindrical shell made of polymeric materials, such as fiberglass, with Navier boundary conditions.

Constant envelope elasticity depend on the angle of winding fiberglass. On the basis of the variational principle Ostrogradskii-Hamilton, constructed an equation to determine the natural frequency of the free oscillations of the longitudinal stiffened orthotropic cylindrical shell in contact with the liquid. Existing surface load by the fluid on the longitudinal stiffened cylindrical shell is determined by solving the equations of motion of the liquid. Using the asymptotic formula of the logarithmic derivative of the Bessel function, approximate formulas for finding the natural vibration frequencies studied design.

Key words: vibrations, shell, ideal fluid, stress, reinforcement, the principle of variation.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач на стадии проектирования тонкостенных оболочечных конструкций, широко применяемых в различных отраслях машиностроения, авиастроения, судостроения и различных областях промышленности, является динамический расчет. Необходимым элементом исследования динамики оболочек является определение собственных частот и форм малых колебаний, причем наибольший интерес для приложений представляют частоты из нижнего спектра. Использование в инженерной практике полимерных материалов делает обязательным учет анизотропии упругих свойств при исследовании низкочастотных колебаний оболочек.

Для более полного описания несущей способности конструкции целесообразно учитывать силы внешнего воздействия со стороны среды. Одним из таких воздействий является контакт ее с жидкостью. Силы внешнего воздействия со стороны жидкости, по сути, являются поверхностными силами и обусловлены контактом между оболочкой и жидкостью.

Отметим, что в литературе описание решения относится преимущественно к подкрепленной изотропной цилиндрической оболочке без среды [1]. Результаты нахождения собственных частот свободных колебаний для ортотропных оболочек представлены в работах [2-4]. Колебания и устойчивость изотропных цилиндрических оболочек со средой достаточно полностью исследованы в работах [5, 6]. Поведение деформируемых гладких оболочек с протекающей жидкостью рассмотрены в монографии [7]. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек с протекающей идеальной жидкостью в среде исследовано в работе [8]. Собственные колебания в бесконечной упругой среде, усиленной перекрестной системой ребер, изотропной цилиндрической оболочки с протекающей идеальной жидкостью, рассмотрена в работе [9].

В работе [10] исследуются свободные колебания ребристых изотропных цилиндрических оболочек, заполненных идеальной жидкостью, при осевом сжатии. Устойчивость цилиндрических изотропных оболочек, усиленных продольными или кольцевыми ребрами, заполненных средой, при продольном осевом сжатии и с учетом дискретных размещений ребер рассмотрена в работах [11, 12].

Как следует из приведенного обзора, практически отсутствуют работы, посвященные колебаниям анизотропных ребристых оболочек с жидкостью при осевом сжатии. Поэтому исследование колебаний ребристых анизотропных цилиндрических оболочек с жидкостью имеет большое практическое значение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной анизотропной оболочки и жестко с ней соединенных по линиям контакта продольных ребер. Принимается, что напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной поверхности u , ϑ и w . При этом углы поворота нормальных элементов φ_1 , φ_2 относительно координатных линий y и x выражаются через w и ϑ с

помощью зависимостей $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{R}\right)$, где R – радиус срединной поверхности

оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_i , \mathcal{G}_i , w_i i -го продольного стержня), необходимо определить также угол закручивания φ_{kpi} .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); & \mathcal{G}_j(x) &= \mathcal{G}(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); & \varphi_j &= \varphi_2(x_j, y); & \varphi_{kpi}(x) &= \varphi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $h_i = 0,5h + H_i^1$, h – толщина оболочки, H_i^1 – расстояния от осей i -го продольного стержня до поверхности оболочки, x_i и y_i – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой, φ_i , φ_{kpi} – углы поворота и закручивания поперечных сечений соответственно продольных и поперечных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны жидкости могут быть сведены к нормальным составляющим q_z , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с жидкостью при осевом сжатии получим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Потенциальная энергия упругой деформации ортотропной цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{hR}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ B_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2(B_{11} + B_{12}) \frac{w}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w^2}{R^2} (B_{11} + 2B_{12} + B_{22}) + B_{22} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)^2 - \right. \\ &\left. - 2(B_{12} + B_{22}) \frac{w}{R} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + 2B_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + b_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + B_{66} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)^2 + 2B_{66} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Постоянные упругости зависят от угла φ намотки стекловолокна и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{11} &= b_{11} \cos^4 \varphi + b_{22} \sin^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\ B_{22} &= b_{11} \sin^4 \varphi + b_{22} \cos^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\ B_{12} &= (b_{11} + b_{22} - 4b_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi); \\ B_{66} &= -(b_{11} + b_{22} - 2b_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{66} \cos^2 2\varphi; \\ B_{26} &= 1/2 (b_{22} \cos^2 \varphi - b_{11} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - 1/4 (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi; \\ B_{16} &= 1/2 (b_{22} \sin^2 \varphi - b_{11} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi - 1/4 (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$, $b_{66} = G_{12} = G$, R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, u , \mathcal{G} , w – составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки, E_1 , E_2 – модули упругости материала оболочки в координатных направлениях, G – модуль упругости оболочки при сдвиге.

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации i -го продольного ребра таковы [1]:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\tilde{E}_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (4)$$

Здесь F_i , J_{zi} , J_{yi} , J_{kpi} – площадь и моменты инерции поперечного сечения i -го продольного стержня соответственно относительно оси Oz и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; \tilde{E}_i , \tilde{G}_i – модули упругости и сдвига материала i -го продольного стержня.

Потенциальная энергия внешних поверхностных нагрузок, действующих со стороны жидкости, приложенных к оболочке, определится как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} q_z w dx dy. \quad (5)$$

Потенциальная энергия от сжимающего напряжения σ_x имеет вид:

$$\Pi_\sigma = - \frac{\sigma_x h}{2} \int_0^{x_1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx d\theta - \frac{\sigma_x F_c}{2R} \sum_{i=1}^{k_1} \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{\theta=\theta_i}. \quad (6)$$

Полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий упругих деформаций оболочки и продольных ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок, действующих со стороны жидкости и потенциальная энергия от сжимающего напряжения:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{k_1} \Pi_i + A_0 + \Pi_\sigma. \quad (7)$$

Кинетические энергии оболочки и продольных ребер записываются в виде [1]:

$$K_0 = \rho h \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy, \quad (8)$$

$$K_i = \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx.$$

Здесь t – временная координата, ρ , ρ_i – соответственно плотность материалов, из которых изготовлена оболочка, i -ей продольный стержень.

Кинетическая энергия продольно подкрепленной оболочки

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{k_1} K_i. \quad (9)$$

Уравнения движения ребристой оболочки получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\delta W = 0, \quad (10)$$

где $W = \int_{t'}^{t''} \tilde{L} dt$ – действие по Гамильтону, $\tilde{L} = K - \Pi$ – функция Лагранжа, t' и t'' – заданные произвольные моменты времени.

В предположении, что оболочка усилена бесконечно большим числом ребер, предельным переходом $k_1 \rightarrow \infty$ и с учетом (1) и, что операции варьирования и дифференцирования перестановочны, уравнение (10) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} & \left[(B_{11} + \gamma_c^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] + u (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi \partial \theta} - \left[(B_{11} + B_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] w - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{R^2 q_x}{2h}, \\ & (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (G_{12} + B_{22}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \mathcal{G} - (B_{12} + B_{22}) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \rho_1 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t_1^2} = \frac{R^2 q_y}{2h}, \\ & - \left[(B_{11} + B_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] u - (B_{12} + B_{22}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} + \\ & + \left\{ B_{11} + 2B_{12} + B_{22} + a^2 \left[(B_{11} + \eta_c^{(1)}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(B_{11} + B_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + B_{12} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \right\} w + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} q_z. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $a^2 = \frac{h^2}{12R^2}$, $\bar{\rho}_c = \frac{\rho_i}{\rho}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $L_1 = x_2 = x_1$, $\xi = \frac{x}{R}$, $\gamma_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i}{G} (1 - \nu_{12}^2) \bar{\gamma}_c^{(1)}$,
 $\eta_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i (J_{y_i} + h^2 F_i)}{2\pi R^3 h G} (1 - \nu_{12}^2)$, $\rho_1 = 1 + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c^{(1)}$, $\bar{\gamma}_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i}{2\pi R h}$, $\delta_c^{(1)} = \frac{h_i}{R} \bar{\gamma}_c^{(1)}$, $\theta = \frac{y}{R}$, $t_1 = \omega_0 t$,
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{G_{12}}{(1 - \nu^2) \rho R^2}}$, $\omega_1 = \omega / \omega_0$.

Поверхностная нагрузка q_z , действующая со стороны жидкости на продольно подкрепленную оболочку, определяется из решений уравнения движения идеальной жидкости:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (12)$$

где φ – потенциала возмущенных скоростей, a_0 – скорость распространения возмущений в жидкости.

На контактной поверхности оболочка-жидкость соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки оболочки имеет вид:

$$\mathcal{G}_r \Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1}. \quad (13)$$

Равенство радиальных давлений со стороны жидкости на оболочку

$$q_z = -p|_{r=R}; \quad q_x = q_y = 0. \quad (14)$$

С помощью (12)-(14) давление со стороны жидкости на оболочку p можно представить в виде

$$p = \omega_0^2 \Phi_{an} \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2}. \tag{15}$$

Здесь

$$\Phi_{an} = \begin{cases} I_n(\beta r) / I_n'(\beta r), & M_1 < 1; \\ J_n(\beta_1 r) / J_n'(\beta_1 r), & M_1 > 1; \\ \frac{R^n}{nr^{n-1}}, & M_1 = 1. \end{cases} \tag{16}$$

В (16) $M_1 = \frac{\omega / m}{a_0}$, $\beta^2 = R^{-2}(1 - M_1^2)\chi^2$, $\beta_1^2 = R^{-2}(M_1^2 - 1)\chi^2$, $t_1 = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{b_{11}}{\rho_0 R^2}}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{\rho_0 R^2 \omega^2}{b_{11}}} = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\xi = x / L$, I_n – модифицированная функция Бесселя n -го порядка первого рода, J_n – функции Бесселя n -го порядка первого рода.

В случае $M_1 < 1$, т.е. когда скорость распространения волн в оболочке меньше скорости звука в жидкости, применяя асимптотику логарифмической производной функции Бесселя

$$\frac{I_n'(\beta R)}{I_n(\beta R)} \approx \frac{n}{\beta R} + \frac{\beta R}{2n} \quad (n \ll \beta R)$$

можно написать:

$$\Phi_{an}|_{r=R} \approx \psi_1 + \psi_2 \lambda. \tag{17}$$

Здесь

$$\psi_1 = \frac{R^2 B_{11} \rho_m \omega_0^2}{2h} \left(\frac{1}{n} - \frac{m^2 R^2}{2n^3} \right); \quad \psi_2 = \frac{R^4 B_{11} \rho_m \omega_0^4}{4hn^3 a^2}$$

В случае $M_1 > 1$, т.е., когда скорость распространения волн в оболочке больше скорости звука в жидкости, применяя асимптотику логарифмической производной функции Бесселя

$$\frac{J_n'(\beta_1 R)}{J_n(\beta_1 R)} \approx -\frac{n}{\beta_1 R} - \frac{\beta_1 R}{2n}, \quad (\beta_1 R \ll n)$$

можно написать:

$$\Phi_{an}|_{r=R} \approx \frac{m^2}{n} - \frac{\omega_1^2 \omega_0^2}{a^2 n}. \tag{18}$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Далее рассматриваются шарнирно опертые оболочки, т.е. при $\xi = 0$ и $\xi = \xi_1$ ($\xi_1 = L / R$) выполняются следующие граничные условия:

$$\mathcal{G} = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0.$$

Компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки ищем в виде

$$u = u_0 \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1; \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \sin n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1; \quad (19)$$

$$w = w_0 \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1,$$

где u_0, \mathcal{G}_0, w_0 – неизвестные постоянные.

Дополняя контактными условиями (13), (14) систем уравнений движения оболочки (11), жидкости (12) приходим к контактной задаче о колебаниях ортотропной оболочки, подкрепленной продольными ребрами и заполненной жидкостью. Другими словами, задача о колебаниях подкрепленной продольными ребрами ортотропной оболочки с жидкостью сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек, жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Используя (11)-(15) и (19), задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка

$$a_{i1}u_0 + a_{i2}\mathcal{G}_0 + a_{i3}w_0 = 0 \quad (i=1,2,3). \quad (20)$$

Элементы a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} ($i=1,2,3$) имеют вид:

$$a_{11} = -(B_{11} + \gamma_c^{(1)})m^2R^2 - B_{66}n^2 + \omega_1^2B_{11}(1 + \rho_1); \quad a_{12} = (B_{12} + B_{66})nmR;$$

$$a_{13} = -[(B_{11} + B_{12})mR + \delta_c^{(1)}m^3R^3];$$

$$a_{21} = (B_{12} + B_{66})nmR; \quad a_{22} = -B_{66}m^2R^2 + (G_{12} + B_{22})n^2 + \omega_1^2B_{11}; \quad a_{23} = n(B_{12} + B_{22});$$

$$a_{31} = -[(B_{11} + B_{12})mR + \delta_c^{(1)}m^3R^3]; \quad a_{32} = -(B_{12} + B_{22})n; \quad a_{33} = B_{11} + 2B_{12} + B_{22} - \sigma_x hm^2R^2 +$$

$$-(1 + \rho_1)B_{11}\omega_1^2 + \frac{R^2}{2h}\Phi_{\alpha n}B_{11}\rho_m\omega_1^2\omega_0^2 + a^2[(B_{11} + \eta_c^{(1)})m^4R^4 + 2(B_{11} + B_{12})n^2m^2R^2 + B_{12}n^4].$$

Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (20) третьего порядка возможно лишь в случае, когда главный определитель системы равен нулю. В результате получим:

$$\det \|a_{ij}\| = 0. \quad (21)$$

Уравнение (20) является трансцендентным, так как искомая частота свободных колебаний рассмотренной системы входит в аргумент функции Бесселя. Используя (17) и (18), уравнение (21) можно привести к алгебраическому уравнению. В случае (17) уравнение (21) сводится к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно λ ($\lambda = \omega_1^2$)

$$\begin{aligned} & \psi_2(1 + \rho_1)B_{11}^2\lambda^4 + [(1 + \rho_1)B_{11}^2(\psi_1 - (1 + \rho_1)B_{11}) + \\ & + \psi_2(\tilde{a}_{11}B_{11} + \tilde{a}_{22}(1 + \rho_1)B_{11})]\lambda^3 + [(\tilde{a}_{11}B_{11} + \tilde{a}_{22}z(1 + \rho_1)B_{11}) \times \\ & \times (\psi_1 - (1 + \rho_1)B_{11}) + (1 + \rho_1)B_{11}^2(\tilde{a}_{33} - \sigma_x hm^2R^2) + (\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - a_{12}a_{21})\psi_2]\lambda^2 + \\ & + [(\tilde{a}_{11}B_{11} + \tilde{a}_{22}(1 + \rho_1)B_{11})(\tilde{a}_{33} - \sigma_x hm^2R^2) + (\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - a_{12}a_{21})(\psi_1 - (1 + \rho_1)B_{11})]\lambda + \\ & + (\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - a_{12}a_{21})(\tilde{a}_{33} - \sigma_x hm^2R^2) + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}\tilde{a}_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}\tilde{a}_{11} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\tilde{a}_{11} = -(B_{11} + \gamma_c^{(1)})m^2R^2 - B_{66}n^2; \quad \tilde{a}_{22} = -B_{66}m^2R^2 + (G_{12} + B_{22})n^2;$$

$$\tilde{a}_{33} = B_{11} + 2B_{12} + B_{22} - \sigma_x h m^2 R^2 + a^2 \left[(B_{11} + \eta_c^{(1)} m^4 R^4 + 2(B_{11} + B_{12}) n^2 m^2 R^2 + B_{12} n^4) \right].$$

Решая уравнение (22) методом Феррари получим для его корней

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{A}{2} + \eta_1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2} + \eta_1\right)^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} + \eta_2\right)} \right], \tag{23}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{A}{2} - \eta_1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2} - \eta_1\right)^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} - \eta_2\right)} \right],$$

$$\eta_1^2 = \frac{A^2}{4} - B + y_0; \quad \eta_2^2 = \frac{y_0^2}{4} - D,$$

где

$$A = \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 \psi_2 \right]^{-1} \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 (\psi_1 - (1 + \rho_1) B_{11}) + \psi_2 (\tilde{a}_{11} B_{11} + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) \right],$$

$$B = \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 \psi_2 \right]^{-1} \left[(\tilde{a}_{11} B_{11} + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) \times \right.$$

$$\left. \times (\psi_1 - (1 + \rho_1) B_{11}) + (1 + \rho_1) B_{11}^2 (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + (\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) \psi_2 \right],$$

$$C = \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 \psi_2 \right]^{-1} \left[(\tilde{a}_{11} B_{11} + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + (\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\psi_1 - (1 + \rho_1) B_{11}) \right],$$

$$D = \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 \psi_2 \right]^{-1} \left[(\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} \tilde{a}_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} \tilde{a}_{11} \right].$$

y_0 является каким-нибудь решением уравнения

$$y^3 - B y^2 + (AC - 4D) y - A^2 D + 4BD - C^2 = 0.$$

В случае (18) уравнение (21) тоже сводится к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно λ

$$\begin{aligned} & \frac{-\tilde{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} (1 + \rho_1) B_{11}^2 \lambda^4 + \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 (\tilde{\psi}_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) - \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} (\tilde{a}_{11} B_{11}) + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11} \right] \lambda^3 + \left[(\tilde{a}_{11} B_{11} + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) \times \right. \\ & \left. \times (\tilde{\psi}_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) + (1 + \rho_1) B_{11}^2 (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) - (\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) \frac{\tilde{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right] \lambda^2 + \\ & + \left[(\tilde{a}_{11} B_{11} + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + (\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\tilde{\psi}_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) \right] \lambda + \\ & + (\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} \tilde{a}_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} \tilde{a}_{11} = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\tilde{\Psi}_1 = \frac{R^3}{2hn} B_{11} \rho_m \omega_0^2$. Аналогично, решая методом Феррари для корней уравнение (24), получим:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{\tilde{A}}{2} + \tilde{\eta}_1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{A}}{2} + \tilde{\eta}_1\right)^2 - 4\left(\frac{\tilde{y}_0}{2} + \tilde{\eta}_2\right)} \right], \tag{25}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{\check{A}}{2} - \check{\eta}_1 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\check{A}}{2} - \check{\eta}_1 \right)^2 - 4 \left(\frac{\check{y}_0}{2} - \check{\eta}_2 \right)} \right],$$

$$\check{\eta}_1^2 = \frac{\check{A}^2}{4} - \check{B} + \check{y}_0; \quad \check{\eta}_2^2 = \frac{\check{y}_0^2}{4} - \check{D};$$

$$\check{A} = \left[\frac{-\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right]^{-1} \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 (\psi_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) - \frac{\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} (\check{a}_{11} B_{11} + \check{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) \right],$$

$$\check{B} = \left[\frac{-\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right]^{-1} \left[(\check{a}_{11} B_{11} + \check{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) \times \right.$$

$$\left. \times (\check{\psi}_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) + (1 + \rho_1) B_{11}^2 (\check{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) - (\check{a}_{11} \check{a}_{22} - a_{12} a_{21}) \frac{\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right],$$

$$\check{C} = \left[\frac{-\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right]^{-1} \left[(\check{a}_{11} B_{11} + \check{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) (\check{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + (\check{a}_{11} \check{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\check{\psi}_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) \right],$$

$$\check{D} = \left[\frac{-\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right]^{-1} \left[(\check{a}_{11} \check{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\check{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} \check{a}_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} \check{a}_{11} \right],$$

где y_0 является каким-нибудь решением уравнения

$$y^3 - \check{B}y^2 + (\check{A}\check{C} - 4\check{D})y - \check{A}^2\check{D} + 4\check{B}\check{D} - \check{C}^2 = 0.$$

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

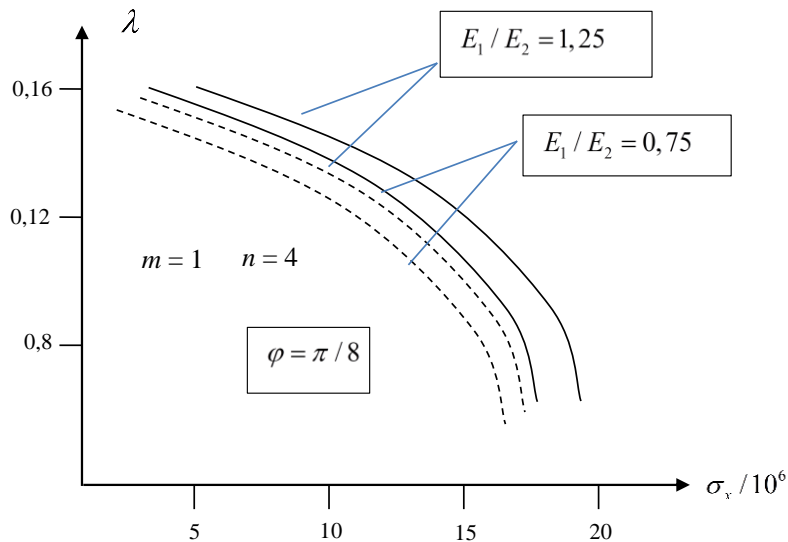
Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенных выше зависимостей с помощью ЭВМ. Для геометрических и физических параметров, характеризующих материалы оболочки, жидкости и продольных стержней, были приняты:

$$E_i = 6,67 \cdot 10^9 \text{ H/м}^2, \quad \rho = \rho_i = 7800 \text{ кг/м}^3, \quad F_i = 3,4 \text{ мм}^2, \quad J_{yi} = 5,1 \text{ мм}^4. \quad \rho_0/\rho = 0,105,$$

$$\frac{J_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{J_{zi}}{2\pi R^3 h} = 0,13 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{J_{kpi}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}, \quad R = 0,16 \text{ м}, \quad h = 0,00045 \text{ м},$$

$$\nu_2 = 0,19, \quad \nu_1 = 0,11, \quad L = 0,8 \text{ м}, \quad h_i = 1,39 \text{ мм}, \quad a_0 = 1350 \text{ м/с}.$$

На рис. 1 представлены зависимости параметра частоты колебаний λ_{\min} , вычисленной по формулам (25), продольно подкрепленной, нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной цилиндрической оболочки, с жидкостью от сжимающего напряжения. Видно, что с увеличением сжимающего напряжения параметр частоты колебаний исследуемой системы сначала плавно, а затем сильно уменьшается. На рисунке пунктирные кривые соответствуют учету влияния жидкости, а сплошные кривые – отсутствию жидкости. Из рисунка видно, что учет влияния жидкости приводит к снижению значения параметра частоты колебаний системы по сравнению с частотой колебаний системы, когда жидкость отсутствует. Кроме того, усиление свойства ортотропии материала оболочки приводит к повышению значения параметра частоты колебаний системы.

Рис. 1. Зависимость параметра частоты λ от сжимающего напряжения

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И. Я. Методы расчета оболочек. Том 2. Теория ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – К. : Наукова думка, 1980. – 368 с.
2. Бажанов В. Л. Сопротивление стеклопластиков / В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, В. А. Копнов. – М. : Машиностроение, 1968. – 303 с.
3. Lee Y. S. Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners / Y. S. Lee, Y. W. Kim // Advances in Engineering Software. – 1999. – Vol. 30. – P. 649-655.
4. Zh. Xu. Elasticity / Zhilun Xu. – Beijing : Higher Education Press, 2006. – Vol. II. – 287 p.
5. Ильгамов М. А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем / М. А. Ильгамов, В. А. Иванов, Б. А. Гулин. – М. : Наука, 1977. – 331 с.
6. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой / Ф. С. Латифов. – Баку : Элм, 1999. – 164 с.
7. Вольмир А. С. Оболочки в протоколе жидкости и газа. Задачи гидроупругости / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
8. Латифов Ф. С. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в среде / Ф. С. Латифов, Р. А. Искендеров, С. Б. Микаилов // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. – 2013. – Вып. 21. – С. 132-139.
9. Алиев Ф. Ф. Собственные колебания в бесконечной упругой среде усиленные перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью / Ф. Ф. Алиев // Механика и машиностроение (Мин. обр. Азербайдж.). – 2007. – № 2. – С. 10-12.
10. Латифов Ф. С. Свободные колебания ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии / Ф. С. Латифов, А. А. Алиев // Механика Машин, Механизмов и Материалов. – 2009. – № 2. – С. 61-62.
11. Босняков С. М. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье / С. М. Босняков, В. Чживэй // Механика Машин, Механизмов и Материалов. – 2011. – № 3(10). – С. 24-27.

12. Исаев З. Ф. Устойчивость цилиндрических оболочек, усиленных продольными ребрами и заполненных средой при осевом сжатии / З. Ф. Исаев // Вестник Бакинского государственного университета, серия физ.-мат. наук. – 2006. – № 2. – С. 21-23.
13. Исаев З. Ф. Устойчивость цилиндрических оболочек, усиленных кольцевыми ребрами и заполненных средой при продольном осевом сжатии с учетом дискретных размещений ребер / З. Ф. Исаев // Вестник Бакинского государственного университета, серия физ.-мат. наук. – 2007. – № 1. – С.54-60.

REFERENCES

1. Amiro, I.Ya. and Zarutskiy, V.A. (1980), *Metody rascheta obolochek. Tom 2. Teoriya rebristykh obolochek* [Shells calculation methods. Volume 2. The theory of ribbed shells], Naukova dumka, Kiev.
2. Bazhanov, V.L., Gol'denblat, I.I. and Kopnov, V.A. (1968), *Soprotivlenie stekloplastikov* [The resistance of GRP], Mashinostroenie, Moscow.
3. Lee, Y.S. and Kim, Y.W. (1999), “Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners”, *Advances in Engineering Software*, vol. 30, pp. 649-655.
4. Xu, Zhilun (2006), “Elasticity”, vol. II, Higher Education Press, Beijing.
5. Il'gamov, M.A., Ivanov, V.A. and Gulin, B.A. (1977), *Prochnost', ustoychivost' i dinamika obolochek s uprugim zapolnitelem* [The strength, stability and dynamics of shells with elastic filler], Nauka, Moscow.
6. Latifov, F.S. (1999), *Kolebaniya obolochek s uprugoy i zhidkoy sredoy* [Fluctuations shells with elastic and liquid media], Elm, Baku.
7. Vol'mir, A.S. (1979), *Obolochki v protokole zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Skins in the minutes of the liquid and gas. Tasks hydroelasticity], Nauka, Moscow.
8. Latifov, F.S., Iskenderov, R.A. and Mikailov, S.B. (2013), “Wobble transversely reinforced orthotropic cylindrical shells with a flowing liquid in a medium”, *Problemy vychislitel'noy mekhaniki i prochnosti konstruktsiy*, issue 21, pp. 132-139.
9. Aliev, F.F. (2007), “Natural oscillations in an infinite elastic medium reinforced cross-system edges of a cylindrical shell with a flowing liquid”, *Mekhanika i mashinostroenie (Min. obr. Azerbaydzh.)*, no. 2, pp. 10-12.
10. Latifov, F.S. and Aliev, A. A. (2009), “Free oscillations of ribbed cylindrical shells filled with fluid under axial compression”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 2, pp. 61-62.
11. Bosyakov, S.M. and Chzhivey, V. (2011), “Analysis of free vibrations of a cylindrical shell made of fiberglass with Navier boundary conditions”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 3(10), pp. 24-27.
12. Isaev, Z.F. (2006), “Stability of cylindrical shells reinforced with longitudinal ribs and filled with medium under axial compression”, *Vestnik Bakinskogo gosudarstvennogo universiteta, seriya fiz.-mat. Nauk*, no. 2, pp. 21-23.
13. Isaev, Z.F. (2007), “Stability of cylindrical shells reinforced with circular ribs and filled with fluid at the longitudinal axial compression based on discrete placements ribs”, *Vestnik Bakinskogo gosudarstvennogo universiteta, seriya fiz.-mat. Nauk*, no. 1, pp. 54-60.

УДК 534

КОЛЕБАНИЕ РЕБРИСТЫХ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ, ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

¹Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, ²Агаларова И. У., докторант

¹*Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1, Азербайджан*

²*Бакинский государственный университет,
ул. З. Халилова, 23, г. Баку, Аз. 1073/1, Азербайджан*

flatifov@mail.ru

Данная статья посвящена исследованию свободных колебаний конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек со сплошным наполнителем, усиленными перекрестными системами ребер при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочек и наполнителя. Движение наполнителя описывается системами уравнений теории упругости в перемещениях. С помощью контактных условий для нахождения частот свободных колебаний конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек с наполнителем, усиленными перекрестными системами ребер при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и наполнителя построено частотное уравнение и реализовано численно. Влияние инерционных свойств наполнителя на процесс колебания системы исследовано в двух случаях: а) влияниями инерционных свойств на процесс колебания системы можно пренебречь; б) влияние инерционных свойств на процесс колебания системы существенно.

Ключевые слова: анизотропная оболочка, стержень, частота колебаний, инерция, окружающая среда, сжимающие силы.

КОЛИВАННЯ РЕБРИСТИХ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ІЗ ЗАПОВНЮВАЧЕМ, ПРИ ОСЬОВОМУ СТИСКАННІ І З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ

¹Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, ²Агаларова І. У., докторант

¹*Азербайджанський архітектурно-будівельний університет,
вул. А. Султанова, 5, м. Баку, Аз. 1073/1, Азербайджан*

²*Бакинський державний університет,
вул. З. Халілова, 23, м. Баку, Аз. 1073/1, Азербайджан*

flatifov@mail.ru

Стаття присвячена дослідженню вільних коливань конструктивно-ортотропних циліндричних оболонок із суцільним заповнювачем, підсиленими перехресними системами ребер при осьовому стисканні і з урахуванням тертя між контактними поверхнями оболонки і заповнювача. Рух заповнювача описується системами рівнянь теорії пружності в переміщеннях. За допомогою контактних умов для знаходження частот вільних коливань конструктивно-ортотропних циліндричних оболонок з заповнювачем, підсиленими перехресними системами ребер при осьовому стисканні і з урахуванням тертя між контактними поверхнями оболонки і заповнювача побудоване частотне рівняння і реалізоване чисельно. Вплив інерційних властивостей заповнювача на процес коливання системи досліджено у двох випадках: а) впливами інерційних властивостей на процес коливання системи можна знехтувати; б) вплив інерційних властивостей на процес коливання системи істотний.

Ключові слова: анизотропна оболонка, стрижень, частота коливань, інерція, навколишнє середовище, стискаючі сили.

**WOBBLE RIBBED DESIGN-ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS WITH FILLER,
UNDER AXIAL COMPRESSION AND GIVEN FRICTION**¹Latifov F. S., Professor, ²Agalarova I. U., doctoral¹*Azerbaijan Architecture and Construction University,
Str. A. Sultanova, 5, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*²*Bakinsky State University,
Str. Z. Khalilov, 23, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*

flatifov@mail.ru

This article is devoted to the study of free oscillations of structurally-orthotropic cylindrical shells with a solid filler, ysilennymi cross ribs under axial compression systems and taking into account the friction between the contact surfaces of the shell and the core. aggregate movement described by systems of equations of the theory of elasticity in displacements. With the help of the contact conditions for finding the frequency of free oscillations of structurally-orthotropic cylindrical shells with filler, ysilennymi cross ribs under axial compression systems and taking into account the friction between the contact surfaces of the shell and filler frequency equation is built and implemented numerically. Influence of the inertial properties of the filler in the process of system oscillations investigated in two cases: a) the effects of the inertial properties of the process of system oscillations can be neglected; b) the effect of the inertial properties of the system to process fluctuations significantly.

Keywords: anisotropic shell rod oscillation frequency, momentum, environment, squeezing force.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы внимание исследователей все больше привлекают вопросы, касающиеся исследования напряженно-деформированного состояния ребристых анизотропных оболочек, контактирующих со средой. Исследованиям свободных колебаний продольно подкрепленной и подкрепленной перекрестными системами ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами изотропных цилиндрических оболочек, заполненной твердой средой, посвящена работа [1]. С применением вариационного принципа построено частотное уравнение колебаний подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки, контактирующей со средой, и реализовано численно. Свободные колебания ребристых изотропных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии, рассмотрены в работе [2]. Причем, подкрепление оболочек проводилось продольно, поперечно и перекрестной системой ребер. В [3] исследована задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами изотропной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Колебание поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в грунте рассмотрено в работе [4]. С применением вариационного принципа и модели Пастернака, параметрических колебаний нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой неподкрепленной цилиндрической оболочки с заполнителем исследованы в работе [5]. Вариационно-параметрические исследования моделирования цилиндрических оболочек ступенчато-переменной толщины при динамическом нагружении приведены в [6]. Отметим, что описанное в литературе решение относится преимущественно к подкрепленной изотропной цилиндрической оболочке без среды [7]. Колебания гладких цилиндрических оболочек с заполнителем и с жидкостью достаточно полностью исследованы в работах [8, 9]. Колебания продольно подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки с заполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и заполнителя, рассмотрены в работах [10, 11]. Анализ приведенных работ показывает, что поведение тонкостенных конструкций из ортотропного материала, имеющих дискретное расположение ребер, с учетом влияния внешней среды, исследованы недостаточно. Поэтому разработка математических моделей поведения подкрепленных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и колебаний, а также выбора рациональных параметров

конструкции, контактирующей со средой с учетом трения в контакте, являются актуальными задачами.

В данной статье с помощью вариационного принципа исследуется свободное колебание тонкой подкрепленной перекрестными системами ребер конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с заполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения в контакте. Построены зависимости частот собственных колебаний от сжимающей силы для различных отношений модулей упругости материала анизотропной оболочки с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной оболочки, продольных и поперечных ребер. Принимается, что оболочка и ребра жестко с ней соединены по линиям контакта. Напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применяется теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной с поверхностью u , ϑ и w . При этом углы поворота нормальных элементов φ_1 , φ_2 относительно координатных линий y и x выражаются через w и ϑ с

помощью зависимостей $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{R}\right)$, где R – радиус срединной поверхности оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_i , ϑ_i , w_i соответственно для i -го продольного стержня, u_j , ϑ_j , w_j j -го поперечного стержня), необходимо определить также углы закручивания φ_j и φ_{kpi} , φ_i , φ_{kpi} .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); & \vartheta_j(x) &= \vartheta(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); & \varphi_j &= \varphi_2(x_j, y); & \varphi_{kpi}(x) &= \varphi_1(x_j, y); \\ u_i(x) &= u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i); & \vartheta_i(x) &= \vartheta(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \\ w_i(x) &= w(x, y_i); & \varphi_i &= \varphi_1(x, y_i); & \varphi_{kpi}(x) &= \varphi_2(x, y_i). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $h_i = 0,5h + H_i^1$, $h_j = 0,5h + H_j^1$, h – толщина оболочки, H_i^1 и H_j^1 – расстояния от осей i -го продольного и j -го поперечного стержней до поверхности оболочки, x_i и y_i – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой, φ_j , φ_{kpi} – углы поворота и закручивания поперечных сечений поперечного стержня.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны сплошного заполнителя могут быть сведены к составляющим q_x , q_y и q_z , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Частотное уравнение свободного колебания, подкрепленное перекрестными системами ребер ортотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и заполнителя, построим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем полную энергию системы. Полная энергия упругой деформации, подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной цилиндрической оболочки со сплошным заполнителем, с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем имеет вид [4, 9]:

$$\begin{aligned}
 J &= J_0 + J_i + J_j + A + A_0; \tag{2} \\
 J_0 &= \frac{1}{2} R^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \{N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} - M_{11} \chi_{11} - M_{22} \chi_{22} - M_{12} \chi_{12}\} dx d\theta + \\
 &\quad + \rho_0 h \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx d\theta, \\
 J_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1} \int_0^L \left[\tilde{E}_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{y_i} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{z_i} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{\kappa p i} \left(\frac{\partial \varphi_{\kappa p i}}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{k_1} \tilde{\rho}_i F_i \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{\kappa p i}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{\kappa p i}}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \\
 J_j &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \int_0^{2\pi} \left[\hat{E}_j F_j \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \hat{E}_j J_{x j} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \hat{E}_j J_{z j} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{\kappa p j}}{R} \right)^2 + \hat{G}_j J_{\kappa p j} \left(\frac{\partial \varphi_{\kappa p j}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] d\theta + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{k_2} \hat{\rho}_j F_j \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{\kappa p j}}{F_j} \left(\frac{\partial \varphi_{\kappa p j}}{\partial t} \right)^2 \right] d\theta, \\
 A &= -\frac{\sigma_x h}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx d\theta. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Влияние заполнителя на оболочку определяется как внешняя поверхностная нагрузка, приложенная к оболочке, и вычисляется как работа, совершенная этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = -\int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} ((q_x - f_1 q_r) u + (q_\theta - f_2 q_r) \vartheta + q_r w) d\xi d\theta, \tag{4}$$

где f_1, f_2 – коэффициенты трения, q_x, q_θ, q_r – давления со стороны заполнителя на оболочку определяются решением уравнения движения заполнителя.

Выражения для внутренних сил и моментов представим следующим образом:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz; \quad M_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) z dz; \tag{5}$$

$$w_{11} = B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} + B_{16}\chi_{12}; \quad w_{22} = B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} + B_{26}\chi_{12};$$

$$w_{21} = w_{12} = B_{16}\chi_{11} + b_{22}\chi_{22} + B_{66}\chi_{12}.$$

Напряжение σ_{ij} и деформация ε_{ij} в срединной поверхности в соотношениях (5) определяются следующим образом [9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22} + B_{16}\varepsilon_{12}; & \sigma_{22} &= B_{12}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} + B_{26}\varepsilon_{12}; \\ \sigma_{12} &= B_{16}\varepsilon_{11} + B_{26}\varepsilon_{22} + B_{66}\varepsilon_{12}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

Постоянные упругости зависят от угла φ , образуемого направлением оси анизотропии с окружным направлением, и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{11} &= b_{11} \cos^4 \varphi + b_{22} \sin^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\ B_{22} &= b_{11} \sin^4 \varphi + b_{22} \cos^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\ B_{12} &= (b_{11} + b_{22} - 4b_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi); \\ B_{66} &= -(b_{11} + b_{22} - 2b_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{66} \cos^2 2\varphi; \\ B_{26} &= \frac{1}{2} (b_{22} \cos^2 \varphi - b_{11} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{6} (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi; \\ B_{16} &= \frac{1}{2} (b_{22} \sin^2 \varphi - b_{11} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{6} (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

где b_{11} , b_{22} , b_{12} , и b_{66} – основные модули упругости ортотропного материала, которые выражаются через модули упругости E_1 , E_2 в координатных направлениях, модуль упругости при сдвиге G и коэффициенты Пуассона ν_1 , ν_2 по формулам:

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{66} = G_{12} = G.$$

φ – угол, образуемый направлением оси анизотропии с окружным направлением, R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, u , v , w – составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки, F_i , J_{zi} , J_{yi} , J_{kpi} , F_j , J_{zj} , J_{yj} , J_{kpj} – площадь и моменты инерции поперечного сечения i -го продольного и j -го поперечного стержня относительно оси Oz , и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении, соответственно; \tilde{E}_i , \tilde{G}_i , \hat{E}_j , \hat{G}_j – модули упругости и сдвига материала i -го продольного и j -го поперечного стержня соответственно, t – временная координата, ρ_0 , $\check{\rho}_i$, $\hat{\rho}_j$ – плотности материалов, из которых изготовлены оболочка, i -ый продольный стержень и j -ый поперечный стержень, соответственно, σ_x – сжимающее напряжение.

Уравнения движения конструктивно-ортотропной оболочки будут получены из (2) предельным переходом $k_1 \rightarrow \infty$, $k_2 \rightarrow \infty$. Пренебрегая влиянием жесткостей ребер при изгибе в плоскости, касательной к обшивке, и при кручении, соответствующих сил инерции, а также эксцентриситета ребер на силы инерции, находим:

$$\begin{aligned}
& \left[(B_{11} + \gamma_c^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi \partial \theta} - \left[(B_{11} + B_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] w - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} (q_x - f_1 q_r), \\
& (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (G_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \mathcal{G} - (B_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial w}{\partial \theta} = \rho_1 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t_1^2} + \frac{R^2}{2h} (q_\theta - f_2 q_r), \\
& - \left[(B_{11} + B_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] u - (B_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} + \\
& + \left\{ B_{11} + 2B_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)} + (\delta_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sigma_x h \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\
& \left. + a^2 \left[(B_{11} + \eta_c^{(1)}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(B_{11} + B_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + (B_{12} + \eta_{s1}^{(2)} + \eta_{s2}^{(2)}) \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \right\} w + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} q_r.
\end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение движения заполнителя в векторной форме имеет вид [4, 5]:

$$a_e^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} - a_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{s} + \omega^2 \vec{s} = 0. \tag{10}$$

Здесь $a_t = \sqrt{\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho}}$, $a_e = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho}}$ – скорости распространения продольных и поперечных волн в среде соответственно; $\vec{s}(s_x, s_\theta, s_r)$ – вектор перемещения, λ , μ – коэффициенты Ламе.

К системам уравнений движения заполнителя (8) прибавляются контактные условия. Предполагается, что контакт между оболочкой и средой жесткий, т.е. при $r = R$

$$u = s_x; \quad \mathcal{G} = s_\theta; \quad w = s_r; \tag{11}$$

$$q_x - f_1 q_r = -\sigma_{rx}, \quad q_\theta - f_2 q_r = -\sigma_{r\theta}, \quad q_r = -\sigma_{rr}. \tag{12}$$

Компоненты σ_{rx} , $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} тензора напряжений определяются следующим образом [4, 5]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rx} &= \mu_s \left(\frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right); \quad \sigma_{r\theta} = \mu_s \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} \right], \\
\sigma_{rr} &= \lambda_s \left(\frac{\partial s_r}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rs_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu_s \frac{\partial s_r}{r}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь λ_s , μ_s – коэффициенты Ламе для среды.

Дополняя контактными условиями (11) и (12) уравнение движения подкрепленной перекрестными системами ребер анизотропной цилиндрической оболочки (9), нагруженных осевыми сжимающими силами, уравнением движения заполнителя (10). В результате приходим к контактной задаче о колебаниях анизотропной цилиндрической оболочки, подкрепленной перекрестной системой ребер, нагруженных осевыми сжимающими силами, со сплошным заполнителем с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем. Другими словами, задача о колебаниях подкрепленными перекрестными системами ребер, нагруженные осевыми сжимающими силами, анизотропной цилиндрической оболочки со сплошным заполнителем с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем сводится к совместному интегрированию системы уравнения движения заполнителя и оболочки при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Перемещение оболочки, удовлетворяющее условиям шарнирного опирания со свободным смещением в продольном направлении и при отсутствии смещения в дуговом (эти граничные условия в литературе называются условиями Навье [9]), т.е. при $x=0$ и $x=L$ $\mathcal{G}=0$, $w=0$, $M_x=0$, $N_x=0$ будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= A \cos kx \cos n\theta \sin \omega_1 t_1, \\ \mathcal{G} &= B \sin kx \sin n\theta \sin \omega_1 t_1, \\ w &= C \sin kx \cos n\theta \sin \omega_1 t_1, \end{aligned} \tag{14}$$

где A , B , C – неизвестные постоянные; $k = \frac{m\pi}{L}$ ($m=1,2,\dots$), m , n – волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно, L – длина оболочки, $\omega_1 = \frac{\omega}{\omega_0}$,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_0 R^2 \omega^2}{E_1}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E_1}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}, \quad t_1 = \omega_0 t.$$

Решения системы (10) имеет вид [3]:

а) при малых инерционных действиях со стороны заполнителя на процесс колебания системы:

$$\begin{aligned} s_x &= \left[\left(-kr \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} - 4(1-\nu_s) k I_n(kr) \right) A_s + k I_n(kr) B_s \right] \cos n\theta \cos kx \sin \omega_1 t_1, \\ s_\theta &= \left[-\frac{n}{r} I_n(kr) B_s - \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} C_s \right] \sin n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1; \end{aligned} \tag{15}$$

б) инерционные действия заполнителя на процесс колебания системы существенно:

$$\begin{aligned} s_x &= \left[A_s k I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s \gamma_i^2}{\mu_i} I_n(\gamma_i r) \right] \cos n\theta \cos kx \sin \omega_1 t_1, \\ s_\theta &= \left[-\frac{A_s n}{r} I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s n k}{r \mu_i} I_n(\gamma_i r) - \frac{B_s}{n} \frac{\partial I_n(\gamma_i r)}{\partial r} \right] \sin n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1, \\ s_r &= \left[A_s \frac{\partial I_n(\gamma_e r)}{\partial r} - \frac{C_s k}{\mu_i} \frac{\partial I_n(\gamma_i r)}{\partial r} + \frac{B_s n}{r} I_n(\gamma_i r) \right] \cos n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь I_n – модифицированная функция Бесселя n -го порядка первого рода, A_s , B_s , C_s постоянные, $\gamma_e^2 = k^2 - \mu_e^2$, $\gamma_i^2 = k^2 - \mu_i^2$.

Рассмотрим случай а). Используя контактные условия (11) и (12) перемещений оболочек (14), решения уравнения движения среды (15), постоянные A_s , B_s , C_s выразим через A , B ,

C . В результате для q_x , q_θ , q_r находим $\left(k = \frac{m\pi}{L} \right)$:

$$\begin{aligned} q_x &= (\tilde{C}_{x1} A + \tilde{C}_{x2} B + \tilde{C}_{x3} C) \cos n\theta \cos kx \sin \omega_1 t_1, \\ q_\theta &= (\tilde{C}_{\theta1} A + \tilde{C}_{\theta2} B + \tilde{C}_{\theta3} C) \sin n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1, \\ q_r &= (\tilde{C}_{r1} A + \tilde{C}_{r2} B + \tilde{C}_{r3} C) \cos n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя (17) и (14) в систему (9), получим однородные системы линейных алгебраических уравнений третьего порядка относительно независимых постоянных A , B , C :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[-\left(B_{11} + \gamma_c^{(1)}\right)m^2R^2 - B_{66}n^2 - \frac{\pi\xi_1}{2}\left(\tilde{C}_{x1} - f_1\tilde{C}_{r1}\right) + \omega_1^2B_{11}(1 + \rho_1) \right]A + \left(B_{12} + S_2\tilde{C}_{x2} + S_1\tilde{C}_{\theta1} + B_{66}\right)nmRB - \\ & \quad - \left[\left(B_{11} + B_{12}\right) + \delta_c^{(1)}m^3R^3S_2 + \tilde{C}_{x3} + S_1\tilde{C}_{r1}\right]mRC = 0, \\ & \left(B_{12} + B_{66} + S_2\tilde{C}_{x2} + S_1\tilde{C}_{\theta1}\right)nmRA + \left\{ -B_{66}m^2R^2 + \left(G_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)}\right)n^2 - \frac{\pi\xi_1}{2}\left(\tilde{C}_{\theta2} - f_2\tilde{C}_{r2}\right) + \omega_1^2B \right\}B + \\ & \quad + n\left(B_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)} + \tilde{C}_{\theta3} + \tilde{C}_{r2}\right)C = 0, \\ & -\left[\left(B_{11} + B_{12}\right)mR + \delta_c^{(1)}m^3R^3 + S_2\tilde{C}_{x3} + S_1\tilde{C}_{r1}\right]mRA + \left(B_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)} + \tilde{C}_{\theta3} + \tilde{C}_{r2}\right)nB + \\ & \quad \left\{ B_{11} + 2B_{12} + B_{22} - \sigma_x hm^2R^2 - (1 + \rho_1)B_{11}\omega_1^2 - S_1\tilde{C}_{r3} + I_1\sigma_x + \right. \\ & \quad \left. + a^2\left[\left(B_{11} + \eta_c^{(1)}\right)m^4R^4 + 2\left(B_{11} + B_{12}\right)n^2m^2R^2 + \left(B_{12} + \eta_{s1}^{(2)} + \eta_{s2}^{(2)}\right)n^4\right] \right\}C = 0. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (18) третьего порядка возможно лишь в случае, когда ω_1 – корень ее определителя. Определение параметра частоты колебания исследуемой конструкции ω_1 сводится к алгебраическому уравнению шестого порядка относительно ω_1 или кубическому уравнению относительно $\lambda = \omega_1^2$. Его корни определяются формулами Кордано.

В случае б) полученное частотное уравнение для нахождения параметра частоты колебания исследуемой конструкции формально совпадает с уравнением, полученным в случае а), и является трансцендентным относительно ω_1 , так как искомый параметр частоты колебания системы входит в аргумент функции Бесселя.

Приведем результаты исследования влияния жесткости материала оболочки, коэффициенты трения и осевой сжимающей силы на параметр частоты колебаний исследуемой конструкции. Вычисления выполнены для оболочки, среды и ребер с такими параметрами:

$$h^* = \frac{h}{R} = 0,25 \cdot 10^{-2}; \quad \nu = 0,3; \quad \tilde{E}_j = \tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad L = 0,8 \text{ м}; \quad a_e = 2,25a_i; \quad a_i = 308 \text{ м/сек};$$

$$\rho_0 = \tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_j = 0,26 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^2; \quad F_j = 5,75 \text{ мм}^2; \quad J_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4; \quad \frac{J_{xj}}{2\pi R^3 h} = 0,23 \cdot 10^{-6};$$

$$J_{kp,j} = 0,48 \text{ мм}^4; \quad h_j = 1,39 \text{ мм}; \quad \frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1}; \quad \nu = 0,3; \quad \frac{I_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6};$$

$$\rho_i = 0,26 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^2; \quad \frac{I_{zi}}{2\pi R^3 h} = 0,1326 \cdot 10^{-6}; \quad \frac{I_{kpi}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; \quad h_i = 0,01375R;$$

$$\nu_1 = 0,11; \quad \nu_2 = 0,19.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты счета представлены на рис. 1 и рис. 2, причем, рис. 1 соответствует случаю а), а рис. 2 случаю б). Кроме того, на рис. 1 пунктирные кривые соответствуют $f_1 = 0$, а сплошные кривые $f_1 = 0,3$, а на рис. 2 пунктирные кривые соответствуют случаю а), сплошные кривые случаю б). Здесь приведена зависимость ω_1 от сжимающей силы. Из рис. 1 и рис. 2 видно, что с увеличением сжимающей силы частота системы падает. Кроме того,

учет трения и инерционные свойства среды приводят к снижению значения собственной частоты исследуемой конструкции.

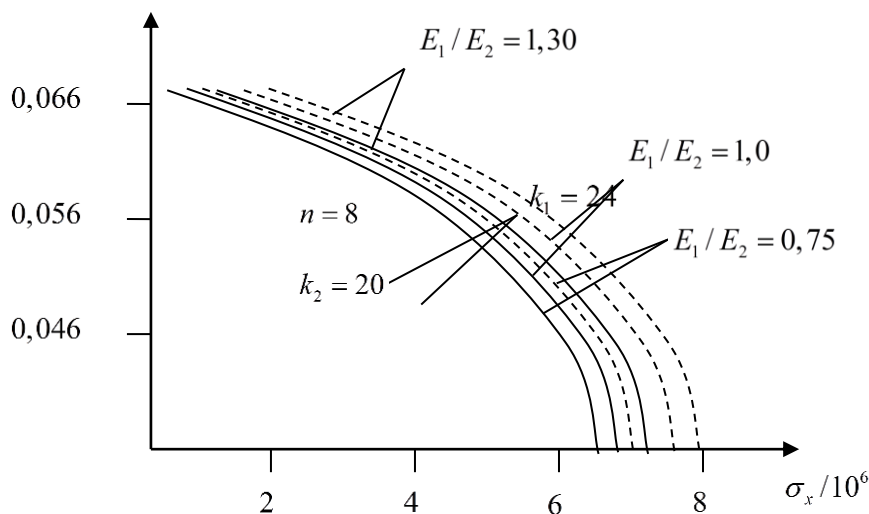


Рис. 1. Зависимость параметра частоты от сжимающей силы (случай а))

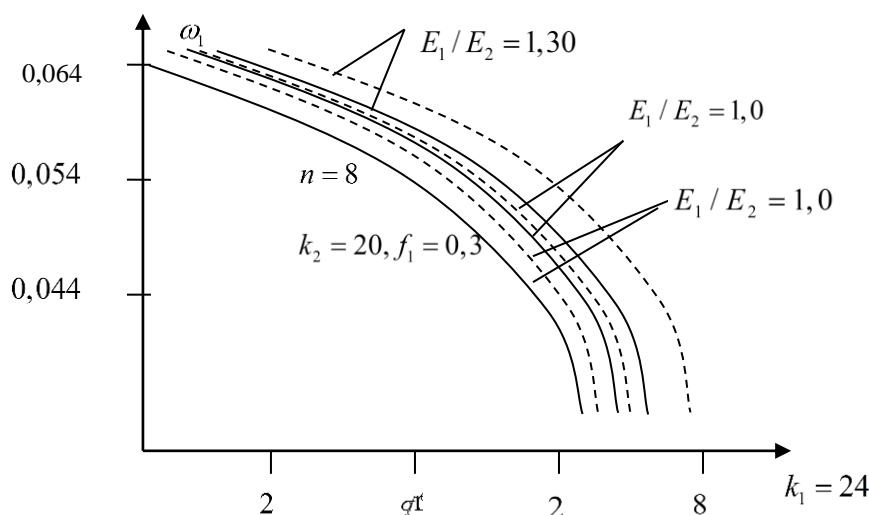


Рис. 2. Зависимость параметра частоты от сжимающей силы (случай б))

ЛИТЕРАТУРА

1. Латифов Ф. С. Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой / Ф. С. Латифов, С. Г. Сулейманова // *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. – 2009. – № 1. – С. 59-62.
2. Латифов Ф. С. Свободные колебания ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии / Ф. С. Латифов, А. А. Алиев // *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. – 2009. – № 2. – С. 61-63.
3. Латифов Ф. С. Задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью / Ф. С. Латифов, О. Ш. Салманов // *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. – 2008. – № 4(5). – С. 45-48.
4. Латифов Ф. С. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в среде / Ф. С. Латифов, Р. А. Искендеров, С. Б. Микаилов // *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. – 2013. – Вып. 21. – С. 132-139.
5. Пирмамедов И. Т. Параметрические колебания вязкоупругой оболочки, с учетом повреждаемости, заключенной в вязкоупругую матрицу / И. Т. Пирмамедов // *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. – 2009. – № 1(6). – С. 52-55.

6. Босяков С. М. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье / С. М. Босяков, В. Чживэй // Механика машин, Механизмов и Материалов. – 2011. – № 3(10). – С. 24-27.
7. Амиро И. Я. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – К. : Наукова думка, 1980. – 367 с.
8. Ильгамов М. А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем / М. А. Ильгамов, В. А. Иванов, Б. А. Гулин. – М. : Наука, 1977. – 331 с.
9. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой / Ф. С. Латифов. – Баку : Элм, 1999. – 164 с.
10. Латифов Ф. С. Свободные колебания подкрепленных перекрестной системой ребер цилиндрических оболочек с наполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения / Ф. С. Латифов, И. М. Джафарова // Естественные науки и техника. – 2009. – № 5(43). – С. 38-44.
11. Джафарова И. М. Задача о свободных осесимметричных колебаниях нагруженной осевыми сжимающими силами ребристых цилиндрических оболочек, заполненных средой и с учетом трения / И. М. Джафарова // Известия Бакинского Государственного Университета. Физико-математическая серия. – 2011. – № 3. – С. 86-93.

REFERENCES

1. Latifov, F.S. and Suleimanova, S.G. (2009), “Problem of the free oscillations of a strengthened system of cross-edges and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with a medium”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 1, pp. 59-62.
2. Latifov, F.S. and Aliev, A.A. (2009), “Free oscillations of ribbed cylindrical shells filled with fluid under axial compression”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 2, pp. 61-63.
3. Latifov, F.S. and Calmanov, O.Sh. (2008), “The problem of forced axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of the cylindrical shell filled with liquid”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 4(5), pp. 45-48.
4. Latifov, F.S., Iskenderov, R.A. and Mikailov, S.B. (2013), “Wobble transversely reinforced orthotropic cylindrical shells with a flowing liquid in a medium”, *Problemy vychislitel'noy mekhaniki i prochnosti konstruktsiy*, issue 21, pp. 132-139.
5. Pirmamedov, I.T. (2009), “Parametric oscillations of viscoelastic shell, taking into account of damage, enclosed in a viscoelastic matrix”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 1(6), pp. 52-55.
6. Bosyakov, S.M. and Chzhivey, V. (2011), “Analysis of free vibrations of a cylindrical shell made of fiberglass with Navier boundary conditions”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 3(10), pp. 24-27.
7. Amiro, I.Ya. and Zarutskiy, V.A. (1980), *Metody rascheta obolochek. Tom 2. Teoriya rebristykh obolochek* [Shells calculation methods. Volume 2. The theory of ribbed shells], Naukova dumka, Kiev.
8. Il'gamov, M.A., Ivanov, V.A. and Gulin, B.A. (1977), *Prochnost', ustoychivost' i dinamika obolochek s uprugim zapolnitelem* [The strength, stability and dynamics of shells with elastic filler], Nauka, Moscow.
9. Latifov, F.S. (1999), *Kolebaniya obolochek s uprugoy i zhidkoy sredoy* [Fluctuations shells with elastic and liquid media], Elm, Baku.
10. Latifov, F.S. and Dzhafarova, I.M. (2009), “Free oscillations of cylindrical shells reinforced ribs cross-c filler system, under axial compression and taking into account the friction”, *Estestvennye nauki i tekhnika*, no. 5(43), pp. 38-44.
11. Dzhafarova, I.M. (2011), “Problem of the free axisymmetric vibrations of a loaded axial compressive forces ribbed cylindrical shells filled environment and taking into account the friction”, *Izvestiia Bakinskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Fiziko-matematicheskaya seriia*, no. 3, pp. 86-93.

УДК 519.6

ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНОГО ПОЛІНОМА 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ

Литвин О. М., Коваленко Г. В.

Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, 61000, Україна

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

У статті запропоновано метод побудови інтерполяційно-апроксимаційного полінома 5-го степеня для функції двох змінних на трикутнику. Цей поліном задається лінійною комбінацією базисних поліномів 5-го степеня, які виражаються через відомі базисні поліноми Зламала-Женішека. Невідомі коефіцієнти при відповідних базисних функціях знайдено методом найменших квадратів при мінімізації певного функціоналу. Для конкретного прикладу отримано формулу залежності похибки наближення функції інтерполяційно-апроксимаційним поліномом від лінійних розмірів трикутника. Запропоновано формули для наближеного обчислення похідних (до другого порядку включно) функції двох змінних у вершинах «одичного» трикутника.

Ключові слова: базисні поліноми Зламала-Женішека, інтерполяційно-апроксимаційний поліном 5-го степеня, довільний трикутник, «одичний» трикутник, метод найменших квадратів.

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-АПРОКСИМАЦИОННОГО ПОЛИНОМА 5-ОЙ СТЕПЕНИ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Литвин О. Н., Коваленко А. В.

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, г. Харьков, 61000, Украина

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

В статье предложен метод построения интерполяционно-аппроксимационного полинома 5-ой степени для функции двух переменных на треугольнике. Этот полином задается линейной комбинацией базисных полиномов 5-ой степени, которые выражаются через известные базисные полиномы Зламала-Женишека. Неизвестные коэффициенты при соответствующих базисных функциях найдены методом наименьших квадратов при минимизации определенного функционала. Для конкретного примера получена формула зависимости погрешности приближения функции интерполяционно-аппроксимационным полиномом от линейных размеров треугольника. Предложены формулы для приближенного вычисления производных (до второго порядка включительно) функции двух переменных в вершинах «единичного» треугольника.

Ключевые слова: базисные полиномы Зламала-Женишека, интерполяционно-аппроксимационный полином 5-ой степени, произвольный треугольник, «единичный» треугольник, метод наименьших квадратов.

CONSTRUCTION OF INTERPOLATING-APPROXIMATING POLYNOMIAL OF THE 5TH DEGREE ON ARBITRARY TRIANGLE

Litvin O. M., Kovalenko G. V.

Ukrainian Engineer-pedagogical academy,
Universitetskaya str., 16, Kharkov, 61000, Ukraine

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

In this article we propose a method for constructing interpolating-approximating polynomial 5th degree for the function $f(x, y)$ that defined on the triangle $\triangle A_1 A_2 A_3$. In solving this problem we have used basis polynomials of the 5th degree $v_{kpq}(x, y)$, $k = \overline{1, 3}$, $p, q \in \{0, 1, 2\}$, $0 \leq p + q \leq 2$, $V_{ij}(x, y)$, $(i, j) \in Q = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$, which are expressed through the known Zlamal-Zhenishek basis polynomials $h_{kpq}(x, y)$, $H_{ij}(x, y)$. Then the interpolating polynomial $S_5(x, y)$ of the function $f(x, y)$ on the triangle $\triangle A_1 A_2 A_3$ can be represented as a linear combination of functions $v_{kpq}(x, y)$, $V_{ij}(x, y)$,

where the coefficients of the $v_{kpq}(x, y)$ are equal derivatives $\left. \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} f(x, y) \right|_{A_k}$, and the coefficients of

the $V_{ij}(x, y)$ are equal derivatives $\left. \frac{\partial}{\partial v_{ij}} f(x, y) \right|_{M_{ij}}$ (v_{ij} is a unit inward normal vector to the side $A_i A_j$

of the triangle, M_{ij} is the midpoint of the side $A_i A_j$). In this case the values of a polynomial $S_5(x, y)$ and its partial derivatives (to the second order inclusive) at the vertices of a triangle and directional derivatives in the direction of the inward normal to sides of the triangle coincide with the corresponding derivatives of function $f(x, y)$. In practice very often we only know values of function $f(x, y)$ on a set of points, and values of derivatives are unknown. So we solve the problem of constructing interpolating-approximating polynomial $O(x, y, f)$. In determining this polynomial we think that we know only values $f_i = f(A_i)$, $i = \overline{1, 3}$. We find unknown coefficients of the corresponding basis functions using the least-squares method while minimizing certain functional.

We got formulas for finding polynomials $\lambda_i(x, y)$, $i = \overline{1, 3}$, such that $O(x, y, f) = f_1 \lambda_1(x, y) + f_2 \lambda_2(x, y) + f_3 \lambda_3(x, y)$. In the case of the "unit" triangle ($A_1(0, 0)$, $A_2(1, 0)$, $A_3(0, 1)$) explicit expressions of polynomials $\lambda_i(x, y)$, $i = \overline{1, 3}$ are given.

We obtained the formula of dependence of approximation error of function by interpolating-approximating polynomial from linear dimensions of the triangle on the example of the concrete function.

We proposed formulas for approximate calculation of derivatives (to the second order inclusive) function $f(x, y)$ in the vertices of the "unit" triangle.

Key words: basis polynomials of Zlamal-Zenisek, interpolating-approximating polynomial 5th degree, arbitrary triangle, "unit" triangle, least-squares method.

ВСТУП

У праці [5] запропоновано метод побудови інтерполяційного полінома 5-го степеня на довільному трикутнику з використанням базисних поліномів, існування яких було доведено чеськими математиками М. Зламалом та А. Женішеком. При цьому параметрами інтерполяції виступають значення наближуваної функції та її частинних похідних (до 2-го порядку включно) у вершинах трикутника і значення похідних у напрямку внутрішньої нормалі до сторін трикутника, які обчислені в серединах сторін. Проте на практиці доволі часто про наближувану функцію відомо лише її значення на деякій сітці вузлів, а значення похідних цієї функції є невідомими. Тому актуальною є проблема побудови інтерполяційно-апроксимаційних поліномів 5-го степеня на довільному трикутнику, в яких невідомі значення похідних функції визначаються методом найменших квадратів при мінімізації певного функціоналу.

ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНОГО ПОЛІНОМА 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЯВНИХ ФОРМУЛ ДЛЯ БАЗИСНИХ ПОЛІНОМІВ ЗЛАМАЛА-ЖЕНІШЕКА

У [5] наведено метод побудови явних формул для базисних поліномів Зламала-Женішека 5-го степеня на довільному трикутнику $\triangle A_1 A_2 A_3$: $h_{kpq}(x, y)$, $H_{ij}(x, y)$, $k = \overline{1, 3}$, $p, q \in \{0, 1, 2\}$, $0 \leq p + q \leq 2$, $(i, j) \in Q = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Ці поліноми мають властивості:

$$1) D^{\beta_1, \beta_2} h_{kpq}(x, y) \Big|_{A_j} = \delta_{k,j} \delta_{(\beta_1, \beta_2), (p, q)};$$

$$2) D^{\gamma_1, \gamma_2} H_{ij}(x, y) \Big|_{A_i} = 0, \quad \forall l = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2, \quad \frac{\partial H_{ij}}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{ij}} = 1, \quad \frac{\partial H_{ij}}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{mn}} = 0, \quad (m, n) \neq (i, j), \quad (M_{ij} -$$

середина сторони $A_i A_j$).

Це дозволяє побудувати інтерполяційний поліном $S_5(x, y)$ для заданої функції $f(x, y)$ у вигляді:

$$S_5(x, y) = w(x, y) + \sum_{(i,j) \in Q} \left[\frac{\partial f}{\partial v_{ij}} - \frac{\partial w}{\partial v_{ij}} \right]_{M_{ij}} H_{ij}(x, y), \quad w(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 2} D^{\beta_1, \beta_2} f(A_i) h_{i\beta_1\beta_2}(x, y),$$

або

$$S_5(x, y) = \sum_{k=1}^3 \sum_{0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 2} D^{\beta_1, \beta_2} f(A_k) v_{k\beta_1\beta_2} + \sum_{(i,j) \in Q} \frac{\partial f}{\partial v_{ij}}(M_{ij}) V_{ij}(x, y), \quad (1)$$

де $v_{k\beta_1\beta_2}(x, y) = h_{k\beta_1\beta_2}(x, y) - \sum_{(i,j) \in Q} \frac{\partial h_{k\beta_1\beta_2}}{\partial v_{ij}}(M_{ij}) H_{ij}(x, y)$, $V_{ij}(x, y) = H_{ij}(x, y)$.

Очевидно, що цей поліном має властивості:

1) $D^{\beta_1, \beta_2} f(x, y)|_{A_l} = D^{\beta_1, \beta_2} S_5(x, y)|_{A_l}$, $\forall l = \overline{1, 3}$, $\beta_1, \beta_2 \in \{0, 1, 2\}$, $0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 2$;

2) $\frac{\partial S_5(x, y)}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{ij}} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{ij}}$, $(i, j) \in Q = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$, де v_{ij} – одиничний вектор

внутрішньої нормалі до сторони $A_i A_j$ трикутника; M_{ij} – середина сторони $A_i A_j$.

Оскільки

$$D^{\gamma_1, \gamma_2} H_{ij}(x, y)|_{A_l} = 0, \quad \forall l = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2,$$

то

$$D^{\gamma_1, \gamma_2} v_{kpq}(x, y)|_{A_j} = D^{\gamma_1, \gamma_2} h_{kpq}(x, y)|_{A_j}.$$

Тобто функції $v_{kpq}(x, y)$ мають такі самі інтерполяційні властивості, як і функції $h_{kpq}(x, y)$.

Отже, враховуючи рівність (1), функції $v_{kpq}(x, y)$ та $V_{ij}(x, y)$ утворюють альтернативну систему базисних поліномів на трикутнику. Далі ми будемо використовувати саме ці базисні поліноми.

У роботі ми розв'язуємо наступну задачу: задано значення функції $f(x, y)$ у вершинах трикутника $\triangle A_1 A_2 A_3$: $f_1 = f(A_1)$, $f_2 = f(A_2)$, $f_3 = f(A_3)$. Вважаючи похідні функції у формулі (1) невідомими параметрами, ми знаходимо їх методом найменших квадратів при мінімізації функціоналу

$$J(C) = \iint_{\triangle A_1 A_2 A_3} O^2(x, y, f, C) dx dy,$$

де $O(x, y, f, C) = \sum_{k=1}^3 f_k \psi_k(x, y) + \sum_{m=1}^{18} C_m \varphi_m(x, y)$, $\psi_1(x, y) = v_{100}(x, y)$, $\psi_2(x, y) = v_{200}(x, y)$,

$\psi_3(x, y) = v_{300}(x, y)$; $\varphi_{5j-4}(x, y) = v_{j10}(x, y)$, $\varphi_{5j-3}(x, y) = v_{j01}(x, y)$, $\varphi_{5j-2}(x, y) = v_{j20}(x, y)$,

$\varphi_{5j-1}(x, y) = v_{j11}(x, y)$, $\varphi_{5j}(x, y) = v_{j02}(x, y)$, $j = \overline{1, 3}$; $\varphi_{16} = V_{12}(x, y)$, $\varphi_{17} = V_{23}(x, y)$,

$\varphi_{18} = V_{31}(x, y)$.

Очевидно, що при будь-яких дійсних C_i , $i = \overline{1,18}$ оператор $O(x, y, f, C)$ має властивості: $O(x_k, y_k, f, C) = f_k$, $k = \overline{1,3}$, тобто є оператором інтерполяції.

Визначимо тепер параметри C_i , $i = \overline{1,18}$ з умови $J(C) \rightarrow \min_C$.

Нехай C^* – матриця-стовпець, на якій досягається мінімум функціоналу $J(C)$. Запишемо оператор $O(x, y, f, C^*)$ у матричній формі

$$O(x, y, f, C^*) = F^T \cdot \Psi(x, y) + C^{*T} \cdot \Phi(x, y), \quad (2)$$

$$\text{де } F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y) \\ \psi_2(x, y) \\ \psi_3(x, y) \end{pmatrix}, C^* = \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \dots \\ C_{18}^* \end{pmatrix}, \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \\ \dots \\ \varphi_{18}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Матриця-стовпець C^* обчислюється за формулою

$$C^* = -A^{-1} \cdot B \cdot F, \quad (3)$$

$$\text{де } A_{ij} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy, B_{ik} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \psi_k(x, y) dx dy, i, j = \overline{1,18}, k = \overline{1,3}.$$

Доведення. Знаходячи похідні функціоналу $J(C)$ за параметрами C_i , $i = \overline{1,18}$ та прирівнюючи їх до нуля, отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} J(C) = 2 \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \left(\sum_{j=1}^{18} C_j \varphi_j(x, y) + \sum_{k=1}^3 f_k \psi_k(x, y) \right) \varphi_i(x, y) dx dy = 0, \quad i = \overline{1,18}.$$

Після перетворень цю систему рівнянь можна записати у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{18} \left(\iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy \right) C_j = - \sum_{k=1}^3 \left(\iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \psi_k(x, y) dx dy \right) f_k, \quad i = \overline{1,18}. \quad (4)$$

Якщо ввести позначення $A_{ij} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy$, $B_{ik} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \psi_k(x, y) dx dy$, $i, j = \overline{1,18}$, $k = \overline{1,3}$, то систему (4) можна записати у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{18} A_{ij} C_j = - \sum_{k=1}^3 B_{ik} f_k, \quad i = \overline{1,18}. \quad (5)$$

Перепишемо (5) у матричному вигляді:

$$AC = -BF.$$

Безпосереднім обчисленням можна переконатись, що $\det(A) \neq 0$, тобто існує обернена матриця A^{-1} . Тоді для розв'язку C^* останнього матричного рівняння маємо рівність:

$$C^* = -A^{-1}BF.$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Оператор інтерполяції $O(x, y, f) \equiv O(x, y, f, C^*)$ можна записати у матричній формі:

$$O(x, y, f) = F^T (\Psi(x, y) - B^T A^{-1} \Phi(x, y)).$$

Доведення. Скористаємось представленням оператора інтерполяції $O(x, y, f)$ у матричній формі (2). Враховуючи рівність (3) та властивості операції транспонування матриць, маємо:

$$C^{*T} = (-A^{-1}BF)^T = -F^T B^T (A^{-1})^T.$$

Матриця A^{-1} є симетричною (як обернена до симетричної матриці), тому $(A^{-1})^T = A^{-1}$.

Отже, $C^{*T} = -F^T B^T A^{-1}$.

Підставляючи одержаний вираз для C^{*T} в (2), отримаємо:

$$O(x, y, f) = F^T \cdot \Psi(x, y) - F^T B^T A^{-1} \cdot \Phi(x, y) = F^T (\Psi(x, y) - B^T A^{-1} \Phi(x, y)).$$

Теорему 2 доведено.

Позначимо $\Lambda(x, y) = \Psi(x, y) - M\Phi(x, y)$, де $M = B^T A^{-1}$. Тоді для елементів $\lambda_i(x, y)$, $i = \overline{1, 3}$ матриці стовпця $\Lambda(x, y)$ маємо рівності:

$$\lambda_i(x, y) = \psi_i(x, y) - \sum_{k=1}^{18} M_{ik} \varphi_k(x, y), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

де M_{ik} – елемент (i, k) матриці M .

Отже, оператор $O(x, y, f)$ можна записати у вигляді:

$$O(x, y, f) = \sum_{i=1}^3 f_i \lambda_i(x, y) = \sum_{i=1}^3 f_i \left(\psi_i(x, y) - \sum_{k=1}^{18} M_{ik} \varphi_k(x, y) \right).$$

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНІ ПОЛІНОМИ 5-ГО СТЕПЕНЯ НА «ОДИНИЧНОМУ» ТРИКУТНИКУ

Нехай $\Delta A_1 A_2 A_3$ – «одичний» трикутник, тобто трикутник з вершинами $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(0,1)$. Використовуючи результати [5], можна виписати явні вирази для всіх базисних поліномів $v_{k\beta}(x, y)$ та $V_{ij}(x, y)$ для «одичного» трикутника:

$$v_{100}(x, y) = 30xy^2(x+y-1)^2 - (x+y-1)^3(6x^2+12xy+3x+6y^2+3y+1) + 30x^2y(x+y-1)^2,$$

$$v_{110}(x, y) = 12x^2y(x+y-1)^2 - 5xy^2(x+y-1)^2 - x(3x+3y+1)(x+y-1)^3,$$

$$v_{101}(x, y) = 12xy^2(x+y-1)^2 - 5x^2y(x+y-1)^2 - y(3x+3y+1)(x+y-1)^3,$$

$$v_{120}(x, y) = \frac{3}{2}x^2y(x+y-1)^2 - \frac{1}{2}x^2(x+y-1)^3,$$

$$v_{111}(x, y) = -xy^2(x+y-1)^2 - x^2y(x+y-1)^2 - xy(x+y-1)^3,$$

$$v_{102}(x, y) = \frac{3}{2}xy^2(x+y-1)^2 - \frac{1}{2}y^2(x+y-1)^3,$$

$$v_{200}(x, y) = x^3(6(x-1)^2 - 3x + 4) - 15x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{210}(x, y) = \frac{7}{2}x^2y^2(x+y-1) - x^3(x-1)(3x-4),$$

$$v_{201}(x, y) = -5x^2y(x+y-1)^2 - \frac{17}{2}x^2y^2(x+y-1) - x^3y(3x-4),$$

$$v_{220}(x, y) = \frac{1}{2}x^3(x-1)^2 - \frac{1}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{211}(x, y) = x^2y(x+y-1)^2 + \frac{3}{2}x^2y^2(x+y-1) + x^3y(x-1),$$

$$v_{202}(x, y) = \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{5}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{300}(x, y) = y^3(6(y-1)^2 - 3y + 4) - 15x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{310}(x, y) = -5xy^2(x+y-1)^2 - \frac{17}{2}x^2y^2(x+y-1) - xy^3(3y-4),$$

$$v_{301}(x, y) = \frac{7}{2}x^2y^2(x+y-1) - y^3(y-1)(3y-4),$$

$$v_{320}(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{5}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{311}(x, y) = xy^2(x+y-1)^2 + \frac{3}{2}x^2y^2(x+y-1) + xy^3(y-1),$$

$$v_{302}(x, y) = \frac{1}{2}y^3(y-1)^2 - \frac{1}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$V_{12}(x, y) = 16x^2y(x+y-1)^2, \quad V_{23}(x, y) = -8\sqrt{2}x^2y^2(x+y-1), \quad V_{31}(x, y) = 16xy^2(x+y-1)^2.$$

Після введення лінійної нумерації для базисних поліномів, як у попередньому пункті, та здійснення всіх необхідних обчислень за формулою (6), отримаємо для «одичного» трикутника такі вирази функцій $\lambda_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x, y) = & -36x^5 - 36y^5 - \frac{3600x^4y}{19} - \frac{7200x^3y^2}{19} - \frac{7200x^2y^3}{19} - \frac{3600xy^4}{19} + \frac{2025x^4}{19} + \\ & + \frac{8400x^3y}{19} + \frac{12600x^2y^2}{19} + \frac{8400xy^3}{19} + \frac{2025y^4}{19} - \frac{24600x^3}{209} - \frac{75600x^2y}{209} - \frac{75600xy^2}{209} - \\ & - \frac{24600y^3}{209} + \frac{12420x^2}{209} + \frac{25200xy}{209} + \frac{12420y^2}{209} - \frac{2780x}{209} - \frac{2780y}{209} + 1; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(x, y) = & 36x^5 - \frac{180x^4y}{19} + \frac{360x^3y^2}{19} - \frac{360x^2y^3}{19} - \frac{180xy^4}{19} - \frac{1395x^4}{19} + \frac{420x^3y}{19} + \\ & + \frac{630x^2y^2}{19} + \frac{420xy^3}{19} + \frac{30y^4}{19} + \frac{10740x^3}{209} - \frac{3780x^2y}{209} - \frac{3780xy^2}{209} - \frac{60y^3}{19} - \frac{270x^2}{19} + \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1260xy}{209} + \frac{450y^2}{209} + \frac{260x}{209} - \frac{120y}{209}; \\
 \lambda_3(x, y) = & 36y^5 - \frac{180x^4y}{19} - \frac{360x^3y^2}{19} - \frac{360x^2y^3}{19} - \frac{180xy^4}{19} + \frac{30x^4}{19} + \frac{420x^3y}{19} + \\
 & + \frac{630x^2y^2}{19} + \frac{420xy^3}{19} - \frac{1395y^4}{19} - \frac{60x^3}{19} - \frac{3780x^2y}{209} - \frac{3780xy^2}{209} + \frac{10740y^3}{209} + \frac{450x^2}{209} + \\
 & + \frac{1260xy}{209} - \frac{270y^2}{19} - \frac{120x}{209} + \frac{260y}{209}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Отже, інтерполяційно-апроксимаційний поліном на «одичному» трикутнику задається так:

$$O(x, y, f) = f_1\lambda_1(x, y) + f_2\lambda_2(x, y) + f_3\lambda_3(x, y), \tag{10}$$

де $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$, $\lambda_3(x, y)$ виражаються за формулами (7)-(9), $f_1 = f(A_1)$, $f_2 = f(A_2)$, $f_3 = f(A_3)$.

Приклад 1. Нехай $f(x, y) = \frac{x^6}{6!} + \frac{y^6}{6!}$. У цьому випадку $f_1 = 0$, $f_2 = f_3 = \frac{1}{720}$. Підставляючи ці значення в (10), отримаємо вираз для інтерполяційно-апроксимаційного полінома для заданої функції:

$$\begin{aligned}
 O(x, y, f) = & \frac{x^5}{20} + \frac{y^5}{20} - \frac{x^4y}{38} - \frac{x^3y^2}{19} - \frac{x^2y^3}{19} - \frac{xy^4}{38} - \frac{91x^4}{912} + \frac{7x^3y}{114} + \frac{7x^2y^2}{76} + \frac{7xy^3}{114} - \frac{91y^4}{912} + \frac{14x^3}{209} - \\
 & - \frac{21x^2y}{418} - \frac{21xy^2}{418} + \frac{14y^3}{209} - \frac{7x^2}{418} + \frac{7xy}{418} - \frac{7y^2}{418} + \frac{7x}{7524} + \frac{7y}{7524}.
 \end{aligned}$$

Наприклад, у точці $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ абсолютна похибка наближення значення функції поліномом

$$O(x, y, f) \text{ дорівнює } \Delta = \left| f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - O\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right| \approx 5,254 \cdot 10^{-5}.$$

Для величини відхилення полінома $O(x, y, f)$ від функції $f(x, y)$ у середньо-квадратичній метриці маємо:

$$\left(\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (f(x, y) - O(x, y, f))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1,29 \cdot 10^{-4}.$$

ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОХИБКИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНИМ ПОЛІНОМОМ ВІД ЛІНІЙНИХ РОЗМІРІВ ТРИКУТНИКА

Відхилення інтерполяційно-апроксимаційного полінома від наближуваної функції будемо обчислювати в рівномірній метриці:

$$\rho(f, g) = \sup_{(x,y) \in S} |f(x, y) - g(x, y)|,$$

де $f(x, y)$, $g(x, y)$ – обмежені дійсні функції, визначені на множині S .

Нехай Δ_h – рівнобедрений прямокутний трикутник з вершинами в точках $(0,0)$, $(h,0)$, $(0,h)$. Позначимо через $O(x, y, h)$ – інтерполяційно-апроксимаційний поліном для функції

$$f(x, y) = \frac{x^6}{6!} + \frac{x^5 y}{5! \cdot 1!} + \frac{x^4 y^2}{4! \cdot 2!} + \frac{x^3 y^3}{3! \cdot 3!} + \frac{x^2 y^4}{2! \cdot 4!} + \frac{xy^5}{1! \cdot 5!} + \frac{y^6}{6!}$$

на трикутнику Δ_h .

Відхилення інтерполяційно-апроксимаційного полінома $O(x, y, h)$ від функції $f(x, y)$ на трикутнику Δ_h є функцією аргументу h . Позначимо цю функцію $\varepsilon(h)$, тобто

$$\varepsilon(h) \equiv \sup_{(x, y) \in \Delta_h} |f(x, y) - O(x, y, h)|.$$

Для функції $f(x, y) = \frac{x^6}{6!} + \frac{x^5 y}{5! \cdot 1!} + \frac{x^4 y^2}{4! \cdot 2!} + \frac{x^3 y^3}{3! \cdot 3!} + \frac{x^2 y^4}{2! \cdot 4!} + \frac{xy^5}{1! \cdot 5!} + \frac{y^6}{6!}$ нами було проведено чисельний експеримент засобами системи комп'ютерної математики Mathcad, у якому ми обчислювали значення функції $\varepsilon^*(h) \equiv \varepsilon(h\sqrt{2})$ при $h \in \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1\}$. Результати експерименту наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення функції $\varepsilon^*(h)$ при $h \in \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1\}$

i	1	2	3	4	5	6
h_i	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\varepsilon^*(h_i)$	$2,379 \cdot 10^{-5}$	$7,101 \cdot 10^{-5}$	$1,791 \cdot 10^{-4}$	$3,991 \cdot 10^{-4}$	$8,089 \cdot 10^{-4}$	$1,522 \cdot 10^{-3}$

У роботі [6] показано, що похибка наближення функції інтерполяційним поліномом має вигляд степеневі функції від довжини найбільшої сторони трикутника.

Припускаючи степеневу залежність $\varepsilon^*(h)$, будемо шукати вираз $\varepsilon^*(h)$ у вигляді:

$$\varepsilon^*(h) = A_0 \cdot h^4. \quad (11)$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 3. Якщо довжини катетів трикутників Δ_h змінюються за законом $h_i = 0,1 \cdot i + 0,4$, $i = \overline{1, 6}$, то похибку наближення функції $f(x, y)$ інтерполяційно-апроксимаційним поліномом $O(x, y, h)$ можна представити у вигляді

$$\varepsilon(h) = 0,238 \cdot 10^{-4} \cdot h^6.$$

Доведення. Логарифмуючи рівність (11), отримаємо

$$\ln \varepsilon^*(h) = \ln A_0 + A_1 \ln h.$$

Введемо заміну: $y = \ln \varepsilon^*(h)$, $x = \ln h$, $a = A_1$, $b = \ln A_0$. Тоді $y = ax + b$.

Знайдемо коефіцієнти a та b методом найменших квадратів, мінімізуючи функцію $F(a, b) = \sum_{i=1}^6 (y_i - ax_i - b)^2$, де $y_i = \ln \varepsilon^*(h_i)$, $x_i = \ln h_i$, $i = \overline{1, 6}$.

Маємо:

$$F'_a = 2 \sum_{i=1}^6 (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0, \quad F'_b = 2 \sum_{i=1}^6 (y_i - ax_i - b)(-1) = 0.$$

Отримуємо систему:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^6 x_i^2 + b \sum_{i=1}^6 x_i = \sum_{i=1}^6 x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^6 x_i + 6b = \sum_{i=1}^6 y_i. \end{cases}$$

Звідси

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^6 x_i y_i & \sum_{i=1}^6 x_i \\ \sum_{i=1}^6 y_i & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^6 x_i^2 & \sum_{i=1}^6 x_i \\ \sum_{i=1}^6 x_i & 6 \end{vmatrix}} = 6, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^6 x_i^2 & \sum_{i=1}^6 x_i y_i \\ \sum_{i=1}^6 x_i & \sum_{i=1}^6 y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^6 x_i^2 & \sum_{i=1}^6 x_i \\ \sum_{i=1}^6 x_i & 6 \end{vmatrix}} \approx -8,567.$$

Отже, $A_1 = a = 6$, $A_0 = e^b \approx 1,903 \cdot 10^{-4}$.

Таким чином, $\varepsilon^*(h) = 1,903 \cdot 10^{-4} \cdot h^6$. Звідси маємо

$$\varepsilon(h) = \varepsilon^* \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right) = 0,238 \cdot 10^{-4} \cdot h^6.$$

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНИХ ПОЛІНОМІВ ДО НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

Теорема 4. Якщо у вершинах “одиничного” трикутника $\triangle A_1 A_2 A_3$ відомі лише значення функції $f(x, y)$: $f_1 = f(A_1)$, $f_2 = f(A_2)$, $f_3 = f(A_3)$, то невідомі значення її похідних можуть бути наближено обчислені за формулами:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_1} \approx C_1^* = \frac{260}{209} f_2 - \frac{2780}{209} f_1 - \frac{120}{209} f_3, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{A_1} \approx C_2^* = \frac{260}{209} f_3 - \frac{120}{209} f_2 - \frac{2780}{209} f_1,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{A_1} \approx C_3^* = \frac{24840}{209} f_1 - \frac{540}{19} f_2 + \frac{900}{209} f_3, \quad \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{A_1} \approx C_4^* = \frac{25200}{209} f_1 + \frac{1260}{209} f_2 + \frac{1260}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{A_1} \approx C_5^* = \frac{24840}{209} f_1 + \frac{900}{209} f_2 - \frac{540}{19} f_3, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_2} \approx C_6^* = \frac{2780}{209} f_2 - \frac{260}{209} f_1 + \frac{120}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{A_2} \approx C_7^* = \frac{20}{11} f_3 - \frac{20}{11} f_1, \quad \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{A_2} \approx C_8^* = \frac{24840}{209} f_2 - \frac{540}{19} f_1 + \frac{900}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{A_2} \approx C_9^* = -\frac{7200}{209} f_1 - \frac{360}{209} f_2 - \frac{360}{209} f_3, \quad \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{A_2} \approx C_{10}^* = -\frac{7560}{209} f_1 - \frac{720}{209} f_2 - \frac{7560}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_3} \approx C_{11}^* = \frac{20}{11} f_2 - \frac{20}{11} f_1, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{A_3} \approx C_{12}^* = \frac{120}{209} f_2 - \frac{260}{209} f_1 + \frac{2780}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{A_3} \approx C_{13}^* = -\frac{7560}{209} f_1 - \frac{7560}{209} f_2 - \frac{720}{209} f_3, \quad \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{A_3} \approx C_{14}^* = -\frac{7200}{209} f_1 - \frac{360}{209} f_2 - \frac{360}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{A_3} \approx C_{15}^* = \frac{900}{209} f_2 - \frac{540}{19} f_1 + \frac{24840}{209} f_3, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{M_{12}} \approx C_{16}^* = \frac{75}{836} f_2 - \frac{5}{209} f_1 + \frac{145}{76} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{M_{23}} \approx C_{17}^* = \frac{145\sqrt{2}}{76} f_1 + \frac{5\sqrt{2}}{152} f_2 + \frac{5\sqrt{2}}{152} f_3, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{M_{31}} \approx C_{18}^* = \frac{145}{76} f_2 - \frac{5}{209} f_1 + \frac{75}{836} f_3.$$

Доведення. Обчислюючи елементи матриці-стовпця C^* за формулою (3), отримаємо, наприклад, що $C_1^* = \frac{260}{209} f_2 - \frac{2780}{209} f_1 - \frac{120}{209} f_3$, причому цей коефіцієнт у виразі для $O(x, y, f)$ стоїть при базисному поліномі $\varphi_1(x, y) \equiv v_{110}(x, y)$, який, відповідно, в представленні

інтерполяційного полінома (1) стоїть з множником $D^{1,0} f(x, y)|_{A_1} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_1}$. Тому можна

вважати C_1^* наближеним значенням похідної $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_1}$. Тобто

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_1} \approx C_1^* = \frac{260}{209} f_2 - \frac{2780}{209} f_1 - \frac{120}{209} f_3. \text{ Аналогічно одержуємо інші наближені рівності.}$$

ВИСНОВКИ

Запропонований нами метод побудови інтерполяційно-апроксимаційних поліномів 5-го степеня на трикутнику дозволяє будувати інтерполяційно-апроксимаційні сплайни 5-го степеня на триангульованій сітці вузлів. Планується використання цих сплайнів до математичного моделювання розподілу корисних копалин.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zenisek A. Interpolation polynomials on the triangle / A. Zenisek // Numer. Math. – 1970. – Vol. 15. – P. 283-296.
2. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type / A. Zenisek // Math. Comp. – 1995. – Vol. 64, N 211. – P. 929-941.
3. Bramble J. H. Triangular elements in the finite element method / J. H. Bramble, M. Zlamal // Math. Comp. – 1970. – Vol. 24. – P. 809-820.
4. Литвин О. О. Одна теорема про інтерполяційно-апроксимаційні оператори в інтегральній формі методу найменших квадратів / О. О. Литвин // Бионика интеллекта. – 2012. – № 2(79). – С. 19-22.
5. Сергиенко И. В. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике / И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин, О. И. Денисова // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Т. 50, N 5. – С. 25-33.
6. Субботин Ю. Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника / Ю. Н. Субботин // Труды института математики и механики. – УрО РАН, 1992. – Т. 2. – С. 110-119.

REFERENCES

1. Zenisek, A. (1970), "Interpolation polynomials on the triangle", *Numer. Math.*, vol. 15, pp. 283-296.
2. Zenisek, A. (1995), "Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type", *Math. Comp.*, vol. 64, no. 211, pp. 929-941.
3. Bramble, J.H. and Zlamal, M. (1970), "Triangular elements in the finite element method", *Math. Comp.*, vol. 24, pp. 809-820.
4. Litvin, O.O. (2012), "A theorem on interpolating-approximating operators in the integral form of the least-squares method", *Bionika intellekta*, vol. 79, no. 2, pp. 19-22.
5. Sergienko, I.V., Litvin, O.N., Litvin, O.O. and Denisova, O.I. (2014), "Explicit formulas for interpolation splines 5th degree on a triangle", *Kibernetika i sistemnyi analiz*, vol. 50, no. 5, pp. 25-33.
6. Subbotin, Yu.N. (1992), "Dependence of the estimates of approximation by interpolation polynomials of the fifth degree of the geometrical characteristics of the triangle", *Trudy instituta matematiki i mekhaniki*, vol. 2, pp. 110-119.

УДК 519.6

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЇХ СЛІДІВ НА СИСТЕМІ ПЕРЕТИННИХ СМУГ, РОЗТАШОВАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ

Литвин О. М., Славик О. В.

*Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, Україна*

academ_mail@ukr.net, aleksey.slavik@yandex.ru

У статті здійснено огляд існуючих методів відновлення пошкоджених цифрових зображень. Наведено стандартний метод інтерстріпації функції двох змінних. Запропоновано новий модифікований метод інтерстріпації для відновлення зображення поверхні за неповною інформацією про неї у випадку, якщо границі пошкоджених (невідомих) ділянок зображення є смугами, розташованими під довільним кутом.

Ключові слова: зображення, відновлення зображень, інтерстріпація, інтерлінація.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ИХ СЛЕДОВ НА СИСТЕМЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПОЛОС, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ

Литвин О. Н., Славик А. В.

*Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, г. Харьков, Украина*

academ_mail@ukr.net, aleksey.slavik@yandex.ru

В статье проведен обзор существующих методов восстановления поврежденных цифровых изображений. Приведен стандартный метод интерстрипации функции двух переменных. Предложен новый модифицированный метод интерстрипации для восстановления изображения поверхности при неполной информации о ней в случае, если границы поврежденных (неизвестных) участков изображения являются полосами, расположенными под произвольным углом.

Ключевые слова: изображение, восстановление изображений, интерстрипация, интерлинеция.

APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES WITH THE HELP OF THEIR TRACES ON THE SYSTEM OF INTERSECT STRIPS WHICH LOCATED AT AN ARBITRARY ANGLE

Lytvyn O. M., Slavik O. V.

Ukrainian engineering-pedagogics academy, Kharkiv, Ukraine

academ_mail@ukr.net, aleksey.slavik@yandex.ru

The task of restoring the image in the areas of absence of information about pixels is extremely important. Such problems arise in engineering, seismography, processing of remote sensing data, in tasks of processing of archive documents as images, which have a variety of distortion (scratches, stains, dust, unnecessary inscriptions, fold lines) etc. Currently in the world to solve such problems, there are a number of inpainting techniques available whose importance depends on the applications where it is used. Inpainting algorithms are broadly classified to different categories like texture based inpainting, exemplar based inpainting, PDE based inpainting, hybrid inpainting and fast semi-automatic inpainting. Also in this paper provides a method interstripation of functions of two variables, suggested in works of Lytvyn O. M. and Matveeva and S. Y. This method allows restoring corrupted image, if the damaged area is represented by a set of disjoint strips that are parallel to the coordinate axes. The standard method of interstripation was taken as the basis for a new modified method interstripation of function of two variables using their traces on the system of strips which located at an arbitrary angle. Computational experiment was carried out for the cases, when the image is known only on the system of strips which located at an arbitrary angle. All this methods can be used to restore the affected areas of damaged images. Analysis and development of methods for image restoration is an actual task for various application areas of science and requires further research.

Key words: image, image inpainting, interstripation, interlination.

ВСТУП

Інколи у файлах, які містять графічну інформацію, виявляються дефекти. Оцінка значень втрачених пікселів, у яких відсутня інформація про зображення, необхідна в більшості задач цифрової обробки зображень або, наприклад, у задачах обробки архівних документів у вигляді зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину тощо).

У [1] було запропоновано метод інтерстріпації для відновлення функції двох змінних у точках між смугами за допомогою інформації про цю функцію, яка відома лише в точках заданої системи смуг. Цей метод базувався на припущенні, що зображення відсутнє між смугами паралельними або взаємоперпендикулярними осям координат.

Метою дослідження є розробка модифікованого методу інтерстріпації, за допомогою якого можна відновлювати зображення у вигляді смуг, розташованих під довільним кутом, який би дозволив отримати такий самий результат, як і в [1] у випадку, коли смуги обмежені прямими паралельними осям координат.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

Розглянемо задачу відновлення пошкоджених областей зображення, використовуючи інформацію на відомих ділянках зображення.

Позначимо множину пікселів у невідомій області через \bar{D} , а множину коректних пікселів через D .

Більшість методів відновлення зображень можна умовно поділити на такі групи [2]: текстурні, шаблонні, базовані на рівняннях у частинних похідних, гібридні та швидкі напівавтоматичні. Наведемо коротку характеристику цих методів.

Текстурні методи відновлення зображень для заповнення невідомої області \bar{D} використовують пікселі безпосередньо з відомої області зображення D . Головна відмінність між цими методами полягає в забезпеченні неперервності на границі області D [2]. Методи текстурного відновлення зображення відрізняються способом відновлення різних кольорів, інтенсивності, градієнта та навіть статистичних характеристик.

Основна ідея роботи шаблонних методів відновлення зображень полягає у припущенні про наявність повторюваних фрагментів даних на зображенні, які зазвичай називаються шаблонами. Відновлення області \bar{D} здійснюється частинами шляхом копіювання значень яскравості з найбільш схожого шаблону [2]. Особливо виділяється робота [3], де для заповнення пошкодженої області використовується база даних зображень, яка містить мільйони зображень-шаблонів для відновлення.

Згідно з методами відновлення зображень, базованими на рівняннях з частинними похідними, відновлення даних області \bar{D} проводиться за допомогою даних, що є природним продовженням інформації, яка міститься в D [4].

Гібридні методи відновлення зображень – це поєднання двох класів методів. А саме текстурних методів та методів, базованих на використанні диференціальних рівнянь з частинними похідними. Основна ідея алгоритму полягає в тому, що перш за все виділяють текстурну та структурну складову зображення, які потім заповнюються відповідними алгоритмами [2].

Недоліком більшості представлених вище методів є їх висока обчислювальна складність, тому в деяких працях застосовують швидкі напівавтоматичні методи відновлення зображення для прискорення обчислень. До таких методів відносять метод відновлення зображення за допомогою виділеної структури [5] та метод відновлення зображення з використанням ітеративної згортки зображення з дифузним ядром [6].

Інтерстріпацією (від англ. inter – між, від англ. stripe – смуга) функції двох змінних називається відновлення цієї функції між системою смуг, якщо інформація про цю функцію відома лише в точках вказаних смуг.

Вважається, що зображення поверхні Σ відоме лише на системі m ($m \geq 2$) вертикальних смуг вигляду:

$$D_{1,k} = \{ \alpha_k \leq x \leq \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}] \}, \quad k = \overline{1, m},$$

та на системі n ($n \geq 2$) горизонтальних смуг вигляду:

$$D_{2,l} = \{ \gamma_l \leq y \leq \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{m+1}] \}, \quad l = \overline{1, n}.$$

Введемо позначення $\bar{D}_{1,k} = R^2 \setminus D_{1,k}$, $k = \overline{1, m}$, $\bar{D}_{2,l} = R^2 \setminus D_{2,l}$, $l = \overline{1, n}$.

Тоді об'єднання множин $D_{1,k}$, $k = \overline{1, m}$ та $D_{2,l}$, $l = \overline{1, n}$ дає область \bar{D} незаповнених ділянок зображення. У точках зображення D , які не потрапили до \bar{D} , зберігається вся наявна інформація про зображення.

Поверхня $\Sigma: z = f(x, y)$, $f(x, y) = C^{N,N}(R^2)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$\begin{aligned} f(x, y) \Big|_{\alpha_k \leq x \leq \beta_k} &= f_{1,k}(x, y), \quad \alpha_k \leq x \leq \beta_k, \quad \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1}, \\ f(x, y) \Big|_{\gamma_l \leq y \leq \delta_l} &= f_{2,l}(x, y), \quad \gamma_l \leq y \leq \delta_l, \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}. \end{aligned}$$

$C^{N,N}(R^2)$ – клас функцій, які мають неперервні похідні $f^{(p,q)}(x, y)$ для $0 < p, q \leq N$.

Введемо до розгляду такі оператори [1]:

$$\begin{aligned} L_1 f(x, y) &= \begin{cases} f_{1,k}(x, y) & \alpha_k \leq x \leq \beta_k, \quad \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1}; \\ E_{1,k,k+1} f(x, y) & \beta_k \leq x \leq \alpha_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq m-1; \end{cases} \\ L_2 f(x, y) &= \begin{cases} f_{2,l}(x, y) & \gamma_l \leq y \leq \delta_l, \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}; \\ E_{2,l,l+1} f(x, y) & \delta_l \leq y \leq \gamma_{l+1}, \quad 1 \leq l \leq n-1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$L_{1,2}f(x, y) = \begin{cases} f_{1,k}(x, y) & (x, y) \in D_{1,k}, \quad k = \overline{1, m}; \\ f_{2,l}(x, y) & (x, y) \in D_{2,l}, \quad l = \overline{1, n}; \\ E_{1,2,k,l}f(x, y) & (x, y) \in \overline{D}, \end{cases}$$

де

$$E_{1,2,k,l}f(x, y) = [E_{1,k,k+1} + E_{2,l,l+1} - E_{1,k,k+1}E_{2,l,l+1}]f(x, y).$$

Тут $E_{1,k,k+1}f(x, y)$, $E_{2,l,l+1}f(x, y)$ та $E_{1,2,k,l}f(x, y)$ – оператори двовимірної ермітової інтерполяції.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Необхідно відновити пошкоджене зображення деякої поверхні Σ . Вважаємо, що зображення поверхні Σ відоме лише на системі m ($m \geq 2$) смуг, розташованих під довільним кутом вигляду:

$$D_k^* = \{(x, y) : \omega_{1,k}(x, y) \leq x, y \leq \omega_{2,k}(x, y)\}, \quad k = \overline{1, m},$$

де $\omega_{1,k}(x, y) = \alpha_{1,k}x + \beta_{1,k}y - \gamma_{1,k}$ та $\omega_{2,k}(x, y) = \alpha_{2,k}x + \beta_{2,k}y - \gamma_{2,k}$ – деякі прямі, якими обмежена смуга. Причому $\alpha_{1,k}^2 + \beta_{1,k}^2 = \alpha_{2,k}^2 + \beta_{2,k}^2 = 1$, $k = \overline{1, m}$.

Поверхня $\Sigma : z = f(x, y)$, $f(x, y) \in C^{N,N}(R^2)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$f(x, y)|_{D_k^*} = f_k(x, y), \quad (x, y) \in D_k^*, \quad k = \overline{1, m}.$$

ІНТЕРСТРІПАЦІЯ НА СИСТЕМІ ДВОХ СМУГ, РОЗТАШОВАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ

Введемо до розгляду оператор:

$$\Theta_{1,2}f(x, y) = \begin{cases} f_k(x, y) & (x, y) \in D_k^*, \quad k = \overline{1, 2}; \\ \Lambda_{1,2}^*f(x, y) & (x, y) \notin D_k^*, \quad k = \overline{1, 2}, \end{cases}$$

де

$$\Lambda_{1,2}^*f(x, y) = \frac{\rho_2(x, y)}{P(x, y)} f(x_1^*(x, y), y_1^*(x, y)) + \frac{\rho_1(x, y)}{P(x, y)} f(x_2^*(x, y), y_2^*(x, y));$$

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^m \rho_k(x, y); \quad \rho_k(x, y) = \sqrt{(x_k^*(x, y) - x)^2 + (y_k^*(x, y) - y)^2};$$

$$x_k^*(x, y) = \left| \begin{array}{cc} \gamma_k & \beta_k \\ \alpha_k y - \beta_k x & \alpha_k \end{array} \right| / \Delta_k; \quad y_k^*(x, y) = \left| \begin{array}{cc} \alpha_k & \gamma_k \\ -\beta_k & \alpha_k y - \beta_k x \end{array} \right| / \Delta_k; \quad \Delta_k = \left| \begin{array}{cc} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{array} \right|.$$

Фактично, $x_k^*(x, y)$ та $y_k^*(x, y)$ – це координати точки на k -тій смугі, яка знаходиться на найменшій відстані від точки (x, y) з невідомої області, $\rho_k(x, y)$ – відстань від точки (x, y) до k -тої прямої, $P(x, y)$ – сума відстаней до кожної зі смуг.

Поверхня $z = \Theta_{1,2}f(x, y)$ є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні Σ , яка на кожній зі смуг D_k^* , $k = \overline{1, 2}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $\Lambda_{1,2}^*f(x, y)$, при цьому функція $\Theta_{1,2}f(x, y) \in C^{N,N}(R^2)$.

ІНТЕРСТРІПАЦІЯ НА СИСТЕМІ М (М>2) СМУГ, РОЗТАШОВАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ

Нехай $A_{k,l}, (k,l) \in \mathfrak{R} = \{(k,l) : \Gamma_k \cap \Gamma_l = A_{k,l}; k \neq l; k,l = \overline{1,m}\}$ – точки перетину прямих Γ_k та Γ_l , які є границями k -тої та l -тої смуг відповідно.

Введемо до розгляду оператор:

$$\Theta_m f(x, y) = \begin{cases} f_k(x, y) & (x, y) \in D_k^*, k = \overline{1,m}; \\ \Lambda_m^* f(x, y) & (x, y) \notin D_k^*, k = \overline{1,m}, \end{cases}$$

де

$$\Lambda_m^* f(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l}}^m \frac{\omega_i(x, y)}{\omega_i(A_{k,l})} \Lambda_{k,l}^* f(x, y).$$

$\Lambda_{k,l}^* f(x, y)$ – оператор інтерстріпації між k -ю та l -ю смугами, наведений у попередньому пункті:

$$\Lambda_{k,l}^* f(x, y) = \frac{\rho_l(x, y)}{P(x, y)} f(x_k^*(x, y), y_l^*(x, y)) + \frac{\rho_k(x, y)}{P(x, y)} f(x_l^*(x, y), y_k^*(x, y)).$$

Поверхня $z = \Theta_m f(x, y)$ є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні Σ , яка на кожній зі смуг $D_k^*, k = \overline{1,m}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $\Lambda_m^* f(x, y)$, при цьому функція $\Theta_m f(x, y) \in C^{N,N}(R^2)$.

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Для проведення обчислювальних експериментів було взяте тестове зображення, з якого для кожного експерименту штучно були видалені смуги для їх подальшого відновлення викладеним вище модифікованими методом інтерстріпації.

Для першого експерименту були взяті смуги, наведені на рис. 1.

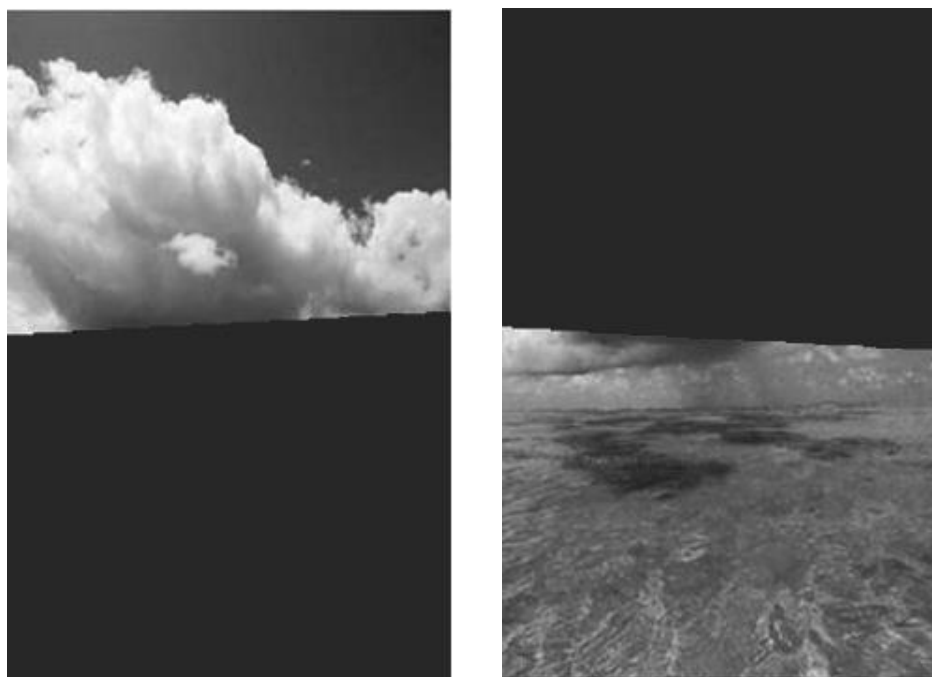


Рис. 1. Графічне зображення поверхні, заданої двома смугами

Зображення поверхні на двох заданих смугах одночасно наведено на рис. 2. Також на рис. 2 наведено відновлене зображення викладеним вище методом інтерстріпації на системі смуг, розташованих під довільним кутом.



Рис. 2. Графічне зображення пошкодженої та відновленої поверхні методом інтерстріпації між двома смугами, розташованими під довільним кутом

Для другого експерименту були взяті три смуги, наведені на рис. 3.



Рис. 3. Графічне зображення поверхні, заданої трьома смугами

Зображення поверхні на трьох заданих смугах одночасно наведено на рис. 4. Також на рис. 4 наведено відновлене зображення викладеним вище методом інтерстріпації на системі смуг, розташованих під довільним кутом.

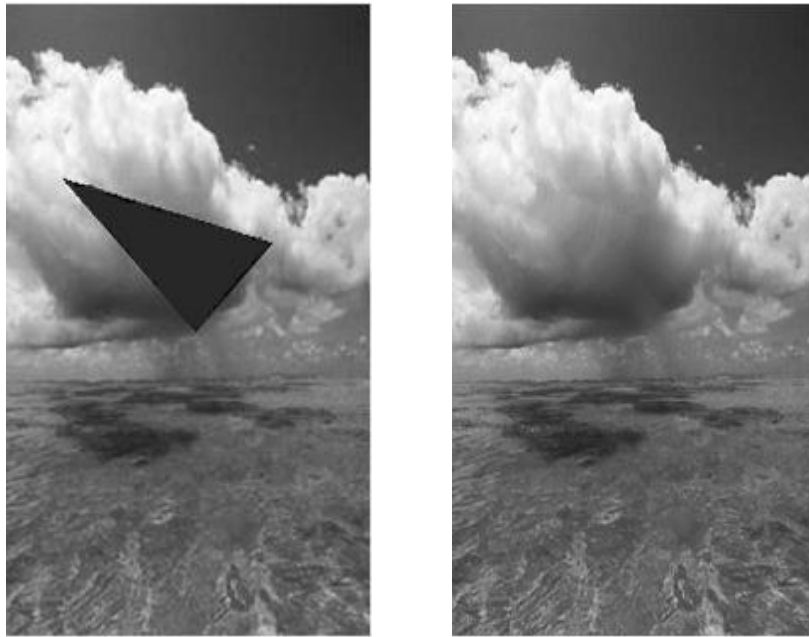


Рис. 4. Графічне зображення пошкодженої та відновленої поверхні методом інтерстріпації між трьома смугами, розташованими під довільним кутом

ВИСНОВКИ

В статті наведені та проаналізовані такі класи алгоритмів: текстурні, шаблонні, базовані на рівняннях з частинними похідними, гібридні та швидкі напівавтоматичні. Окремо було розглянуто метод інтерстріпації функції двох змінних. На основі методу інтерстріпації було запропоновано новий модифікований метод інтерстріпації для відновлення зображення поверхні за неповною інформацією про неї у випадку смуг, розташованих під довільним кутом. Було здійснено обчислювальний експеримент для випадків, коли зображення відоме лише на системі двох та трьох смуг, розташованих під довільним кутом.

Розглянуті методи можуть бути застосовані для відновлення уражених ділянок пошкоджених зображень. Аналіз і розробка методів відновлення зображень є актуальним завданням для різноманітних прикладних галузей науки та потребує подальших досліджень. У майбутньому автори планують при відновленні поверхні враховувати також додаткову інформацію про структуру поверхні між смугами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвин О. М. Метод відновлення поверхні між смугами за допомогою інформації про поверхню на взаємно перпендикулярних смугах / О. М. Литвин, С. Ю. Матвєєва // Управляющие системы и машины : междунар. научн. журн. – 2011. – № 1. – С. 33-41.
2. Joshua J. Digital inpainting techniques – a survey / J. Joshua, G. Darsan // Intern. J. of Latest Research in Engineering and Techn. – 2016. – Vol. 2. – P. 34-36.
3. Hays J. Scene completion using millions of Graphics / J. Hays, A. Efros // Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH). – 2007. – Vol. 26. – P. 87-94.
4. Bertalmio M. Image inpainting / M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, C. Ballester // Proc. of the 27th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques. – 2000. – P. 417-424.
5. Sun J. Image completion with structure propagation / J. Sun, L. Yuan, J. Jian, H.-Y. Shum // Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics. – 2005. – P. 861-868.
6. Oliviera M. Fast digital image inpainting / M. Oliviera, B. Bowen, R. McKenna, Y.-S. Chang // In Proc. of Intl. Conf. on Visualization, Imaging and Image Processing. – 2001. – P. 261-266.
7. Литвин О. М. Інтерлінація функцій / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 1992. – 234 с.
8. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.

REFERENCES

1. Lytvyn, O.M. and Matveeva, S.Y. (2011), "Method of surface recovery between strips with help information about surface on the perpendicular strips", *Control Systems and Computers*, vol. 1, pp. 33-41.
2. Joshua, J. and Darsan, G. (2016), "Digital inpainting techniques – a survey", *Intern. J. of Latest Research in Engineering and Techn.*, vol. 2, pp. 34-36.
3. Hays, J. and Efros, A. (2007), "Scene completion using millions of Graphics", *Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH)*, vol. 26, pp. 87-94.
4. Bertalmio, M., Sapiro, G., Caselles, V. and Ballester, C. (2000), "Image inpainting", *Proc. of the 27th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 417-424.
5. Sun, J., Yuan, L., Jian, J. and Shum, H.-Y. (2005), "Image completion with structure propagation", *Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics*, vol. 24, pp. 861-868.
6. Oliviera, M., Bowen, B., McKenna, R. and Chang, Y.-S. (2001), "Fast digital image inpainting", *Proc. of Intl. Conf. on Visualization, Imaging and Image Processing*, pp. 261-266.
7. Lytvyn, O.M. (1992), *Interlinacija funkcij* [Interlination of functions], Osnova, Kharkiv.
8. Lytvyn, O.M. (2002), *Interlinacija funkcij ta dejaki jiji zastosuvannja* [Interlination of functions and some its applications], Osnova, Kharkiv.

УДК 539.3

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛОЯ С ОСНОВАНИЕМ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Ободан Н. И., Гук Н. А., Козакова Н. Л.

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина*

kkt_fpm@ukr.net

Данная работа посвящена изучению нелинейного поведения слоя, лежащего на упругом основании, при действии комбинированной нагрузки – нормальной и тангенциальной. Задача формулируется в вариационной постановке. Произведен численный анализ напряженно-деформированного состояния слоя в зависимости от коэффициента трения и относительной жесткости слоя и основания.

Ключевые слова: плоская контактная задача, упругое полупространство, покрытие, напряжение, перемещение, трение, удельный вес.

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ШАРУ З ОСНОВОЮ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Ободан Н. И., Гук Н. А., Козакова Н. Л.

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010, Україна*

kkt_fpm@ukr.net

Робота присвячена дослідженню нелінійної поведінки шару, що лежить на пружній основі, при дії комбінованого навантаження – нормального та тангенціального. Задача формулюється у варіаційній постановці. Здійснений числовий аналіз напружено-деформованого стану шару залежно від коефіцієнта тертя і відносної жорсткості шару та основи.

Ключові слова: плоска контактна задача, пружний напівпростір, покриття, напруження, переміщення, тертя, питома вага.

CONTACT INTERACTION THE LAYER WITH THE BASE UNDER THE COMBINED LOADING

Obodan N. I., Guk N. A., Kozakova N. L.

*Oles Honchar Dnipropetrovsk National University,
Gagarin av., 72, Dnepropetrovsk, 49005, Ukraine*

kkt_fpm@ukr.net

The problem of the layer's behavior, which lies on an elastic base, under the action of the combined load – normal and tangential, is considered. This system is modeled the surface of the road. The urgency of the problem is determined by the need to ensure reliability in the construction of various road constructions.

Contact area the layer with the base is unknown beforehand; the contact area in the process of loading is varied. Unilateral contact model is used for this process in the existing studies. It is assumed that the communication, which act between the contacting surfaces, work in the same direction. Using this method of simulation the conditions of contact are formulated in the form of inequalities.

Changes in the properties of the system when changing the status of the contact in the process of loading are provided the non-linearity of such systems. The most significant type of the nonlinearity is associated with the determination of the existence of the contact failure and the separation of its borders. To implement it in the design scheme contact elements are introduced formally and are simulated the all options of the contact opposite surfaces. When the contact is existed, elements falling within the separation zone are assigned zero stiffness. Slippage in separate zones is assigned the tangent stiffness of zero values. Various analytical and numerical methods to solve this problem are used; the finite element method is the most common. At the same time, the classical formulation of the problem of elasticity theory for a discrete body connection is used, the state of communications specified by various iterative methods. Such a statement violates the continuity of the process solution and does not always ensure its convergence.

At the same time, the classical formulation of the problem of elasticity theory for the solid with discrete connections is used; the state of connections is specified by various iterative methods. Such a formulation of the problem violates the continuity of the process solution and does not always ensure its convergence. At the same time, the classical formulation of the problem of elasticity theory for a discrete body connection is used, the state of communications specified by various iterative methods. Such the formulation violates the continuity of the process solution and does not always ensure its convergence. Variation formulation of the problem is used to eliminate this disadvantage, inequality constraints are attached to the functional, the contact areas and sliding are simulated using special functions. Using the finite element method for unconstrained optimization problem is formulated as a finite problem.

A new approach that is proposed in the paper is simulated clutch slippage and stripping special characteristic functions. This makes it possible to formulate the problem in the variation formulation without running preconditions. Using the finite element method the problem is reduced to identify the displacement values on the contact line and the unknown characteristic functions.

Analysis of stress-strain state of the layer depending on the friction coefficient and the relative stiffness of the base layer is held. Using the proposed model allows to establish a possible separation layer and its sliding. Variation formulation of the problem used to eliminate this disadvantage, inequality constraints are attached to the core functionality, and the contact area and sliding simulated special functions. Using the finite element method for unconstrained optimization problem is formulated as a finite task.

A new approach that is proposed in the work simulates clutch slippage and stripping special characteristic functions. This makes it possible to formulate the problem in the variation formulation without running preconditions. Using the finite element method reduces the problem to identify the problem, the displacement values on the contact line and unknown characteristic functions.

Analysis of stress-strain state of the layer depending on the friction coefficient and the relative stiffness of the base layer and held. Using the proposed model allows to establish a possible separation layer and its sliding.

Key words: flat contact problem, an elastic semispace, surface, stress, movement, friction, specific gravity.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованиям контактных задач для слоя, лежащего на упругом основании, посвящены многочисленные публикации, использующие различные модели поведения рассматриваемой системы [1-10]. Особое место занимают постановки задач, учитывающие такую конструктивную нелинейность, как наличие односторонних связей.

При контактном взаимодействии слоя с основанием зона контакта заранее неизвестна, причем она изменяется в процессе нагружения. В существующих исследованиях при моделировании такого процесса используется модель одностороннего контакта, когда связи, действующие между контактирующими поверхностями, работают в одну сторону. Моделирование таких связей условия контакта формулируются в виде неравенств. При этом нелинейность этих систем обусловлена изменениями в свойствах системы при изменении состояния контакта в процессе нагружения. Наиболее существенный тип нелинейности, связанный с определением существования площадки отрыва и ее границ, реализуется за счет формального введения в расчетную схему контактных элементов, моделирующих все варианты контактирования противоположащих поверхностей. При этом контактными элементами, попадающим в зону отрыва, назначают нулевую жесткость. Аналогично назначением нулевых значений касательной жесткости моделируется проскальзывание в отдельных зонах [1, 2].

Для решения указанных задач применяются различные аналитические и численные методы, наиболее распространенным является метод конечных элементов. При этом, как правило, используется классическая постановка задачи теории упругости для тела с дискретными связями, состояние связей уточняется различными итерационными методами, основанными на переключениях состояний [3-6].

Такая постановка нарушает непрерывность процесса решения и не всегда обеспечивает его сходимости. Для устранения этого недостатка наиболее перспективной является вариационная постановка задачи, в которой ограничения в виде неравенств присоединяются к основному функционалу, а зоны контакта и проскальзывания моделируются специальными функциями, что, при использовании метода конечных элементов, приводит к конечномерной задаче безусловной оптимизации.

В настоящей работе такой подход используется для решения задачи о контакте слоя и основания при комбинированном нагружении.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругий слой толщиной H , лежащий на упругом основании и нагруженный распределенной поверхностной нормальной $q(x_1)$ и тангенциальной нагрузкой $t(x_1)$.

Разрешающая система уравнений плоской теории упругости на областях $\Omega_i = \{x | x = \{x_1, x_2, x_3\} \in R^3, i = 1, 2, 3\}$ для слоя $-\infty \leq x_1 \leq \infty$, $0 \leq x_2 \leq H$ с гладкой границей контакта с основанием $-\infty \leq x_1 \leq \infty$, $-h \leq x_2 \leq 0$, $h/H \gg 1$ при $-\infty \leq x_3 \leq \infty$, имеет вид [7]:

$$(\lambda_k + \mu_k) \text{grad div } u^k + \mu_k \Delta u^k + \tilde{q} = 0, \quad (1)$$

где $u^k = \{u_1^k, u_2^k\}^T$ – вектор перемещений k -го слоя, $\lambda_k = E_k \frac{\nu_k}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)}$, $\mu_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}$ – коэффициенты Ляме, E_k, ν_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона ($k = \overline{1, 2}$) соответственно для слоя ($k=1$) и основания ($k=2$); \tilde{q} – нагрузка, включающая собственный вес.

На верхней границе Γ_b ($x_2 = H$) упругого слоя выполняются условия

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(1)}(u) &= q(x_1), \quad -\infty \leq x_1 \leq \infty, \\ \sigma_{12}^{(1)}(u) &= t(x_1), \quad -\infty \leq x_1 \leq \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}(u)$, $i, j = 1, 2$ – напряжения, выраженные через перемещения.

На границе раздела слоя и полупространства ($x_2 = 0$) в зоне контакта Γ имеют место граничные условия

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \quad u_2^{(k)} \leq 0, \quad \sigma_{22}^{(k)} \leq 0, \quad u_2^{(k)} \cdot \sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Предполагается, что существуют границы $\Gamma_C, \Gamma_{\Pi}, \Gamma_O$, соответствующие зоне сцепления, проскальзывания и отрыва соответственно, такие, что $\Gamma_C \cup \Gamma_{\Pi} \cup \Gamma_O = \Gamma$, $\Gamma_C \cap \Gamma_{\Pi} \cap \Gamma_O = \emptyset$.

В зоне сцепления $x_1 \in \Gamma_C$ выполняются условия:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \\ \left| \sigma_{12}^{(1)} \right| \leq K \left| \sigma_{22}^{(1)} \right|, \quad \left| \sigma_{12}^{(2)} \right| \leq K \left| \sigma_{22}^{(2)} \right|, \end{aligned} \quad (4)$$

где K – коэффициент трения.

В зоне проскальзывания для всех $x_1 \in \Gamma_{\Pi}$

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(x_1 + u_1^{(1)}) = u_2^{(2)}(x_1 + u_1^{(2)}), \\ \left| \sigma_{12}^{(k)} \right| - K \left| \sigma_{22}^{(k)} \right| \geq 0, \\ u_1^{(1)} \neq u_1^{(2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

В зоне отрыва для всех $x_1 \in \Gamma_O$

$$\sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(k)} = 0. \quad (6)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(k)}, u_i^{(k)}$, $i, j = 1, 2$ – компоненты тензора напряжений и перемещений в слое ($k = 1$) и основании ($k = 2$).

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для описания неизвестных участков границ введем характеристические функции для точек границ $\Gamma_C, \Gamma_{\Pi}, \Gamma_O$ в виде:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \left| \sigma_{12} \right| \geq K \left| \sigma_{22} \right|, \quad x \in \Gamma_{\Pi}, \\ 0 & \text{при } \left| \sigma_{12} \right| < K \left| \sigma_{22} \right|, \quad x \in \Gamma_C; \end{cases} \\ \gamma_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma_{22} < 0, \quad x \notin \Gamma_O, \\ 1 & \text{при } \sigma_{22} \geq 0, \quad x \in \Gamma_O. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом соотношения (7) вариационная постановка краевой задачи (1)-(6) будет иметь вид [8]

$$W = \arg \min_{W \in \tilde{W}} \mathcal{E}(W), \quad (8)$$

при предварительном выполнении условия (4), где $u = \{u^k\}^T$, $k = 1, 2$, $W = \{u, u^*\}^T$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(W) = & \sum_{k=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} C_k^{ijlm} \varepsilon_{ij}^k(u) \varepsilon_{lm}^k(u) d\Omega + \int_{\Gamma_a} (q(x_1)u_2^{(1)} + t(x_1)u_1^{(1)}) d\Gamma_a + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} \left\{ \gamma_1 K \sigma_{22}^k(u) u_1^k + \gamma_2 \left[\sigma_{22}^k(u) (u_2^k - u_{2k}^*) + \sigma_{12}^k(u) (u_1^k - u_{1k}^*) \right] \right\} d\Gamma \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

C_k^{ijlm} – коэффициенты жесткости, $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j, l, m = 1, 2$, u_{ik}^* – варьируемые значения перемещений на линии контакта, $\sigma_{ij}^{(k)}$, $u^{(k)}$ – значения напряжений и перемещений из области Ω на ее границе. Принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Для построения решения задачи (8) осуществляется переход к дискретной модели с использованием конечно-элементной аппроксимации [8]. Для этого на области Ω вводится сетка с узлами в точках с координатами X_s , $s = 1, N$, где $X_s = \{x_{1s}, x_{2s}\}$, тогда неизвестные функции $u(x)$, $\sigma_{ij}(x)$, $u^*(x)$ представляются в виде векторов, компонентами которых являются значения функций задачи в узлах сетки

$$\begin{aligned} u &= \{u_i\}^T, \quad \sigma_{ij} = \{\sigma_{ijs}\}^T, \quad u^* = \{u_i^*\}, \quad u_i = \{u_{ik}\}, \quad u_{ik} = \{u_{iks}\}, \\ u_i^* &= \{u_{ik}^*\}^T, \quad u_{ik}^* = \{u_{iks}^*\}, \quad \gamma = \{\gamma_k\}^T, \quad \gamma_k = \{\gamma_{ks}\}^T, \\ & i, j = 1, 2, \quad s = 1, N, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Узлы, лежащие на границе Γ , нумеруются как $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$, число M выбирается путем численного эксперимента. Из элементов вектора P могут быть сформированы вектора

$$P^C = \{p_1^C, p_2^C, \dots, p_{r_1}^C\}, \quad P^\Pi = \{p_1^\Pi, p_2^\Pi, \dots, p_{r_2}^\Pi\}, \quad P^O = \{p_1^O, p_2^O, \dots, p_{r_3}^O\}, \quad (11)$$

которые определяют узлы сетки, соответствующие зонам сцепления, проскальзывания и отрыва путем вычисления значений γ_k в соответствии с условиями (7).

После подстановки конечно-элементной аппроксимации в функционал (9), интегрирования и выполнения процедуры (8), получим разрешающую систему уравнений N -го порядка

$$Qu = R, \quad (12)$$

эквивалентную условию $\partial \tilde{\mathfrak{E}}^* / \partial u_{is} = 0$, $i = \overline{1, 2}$, $s = \overline{1, N}$, $\tilde{\mathfrak{E}}^*$ – значения функционала $\tilde{\mathfrak{E}}$ после подстановки конечно элементной аппроксимации и выполнения процедуры интегрирования, Q – матрица жесткости, зависящая от значений векторов γ , R – вектор, зависящий от u^* .

При построении матрицы жесткости учитывается, что

$$\sigma = Bu, \quad (13)$$

где $\sigma = \{\sigma_{ijs}, i, j = \overline{1, 2}, s = \overline{1, N}\}^T$, B – функциональная матрица коэффициентов, получаемая из физических и геометрических соотношений.

Для выполнения условия минимума $\tilde{\mathfrak{E}}$ по u_{is}^* , $s = \overline{1, N}$ используется метод градиентного спуска

$$u^{*(n)} = u^{*(n-1)} - \alpha^{(n-1)} \sigma^{(n-1)}. \quad (14)$$

Здесь

$$\sigma^{(n-1)} = \left\{ \sigma_s^{(n-1)} \right\}^T, \quad \sigma_s^{(n-1)} = \left\{ \sigma_{12s}^{(n-1)} \sigma_{22s}^{(n-1)} \right\}^T, \quad s = \overline{1, N},$$

где n – номер итерации.

Коэффициент $\alpha^{(n)}$ – определяется из условия

$$\alpha^{(n)} = \arg \min_{\alpha} \tilde{\mathfrak{G}}\left(u^{*(n-1)}\right) \quad (15)$$

методом половинного деления.

Значение функции γ_{ks} определяется в соответствии с условием (7).

Алгоритм.

0. Задать $l=1, n=1, \sigma_{22s} = q_s^*, \sigma_{12s}^{(0)} = t_s^{(0)}$ для $\forall x_s \in \Gamma_\epsilon, u_{is}^{*(1,1)} = 0, \gamma_k^{(1,1)} = 0, k = \overline{1, 2}, \epsilon$ – малое число, $\alpha^{(1,1)}, \Delta\alpha, t^*$.
1. На каждом шаге по нагрузке $t^{(n)} = t^{(n-1)} + \Delta t, t^{(n)} \leq t^*$
2. Построить сетку с узлами $X_s, s = \overline{1, N}$.
3. Сформировать вектор неизвестных u с учетом условий $u_{1s}^{(1)} = u_{1s}^{(2)}, u_{2s}^{(1)} = u_{2s}^{(2)}$, для узлов X_s , таких что $X_s \in \Gamma$.
4. Сформировать систему уравнений (12).
5. Определить вектор $u^{(n,1)}, \sigma^{(n,1)}$.
6. Определить вектор $\gamma_{ks}^{(n,1)}, X_s \in \Gamma, k = \overline{1, 2}$.
7. Если $\exists \gamma_{ks}^{(n,1)} \neq 0$, то дальше, иначе на пункт 1.
8. Определить $u_{is}^{*(n,1)}\left(\alpha^{(n,1)}, u^{(n,1)}\right)$ по формуле (14).
9. Определить номера узлов $P^{O(n,1)}, P^{\Pi(n,1)}, P^{C(n,1)}$ на основании значений вектора $\gamma_k^{(n,1)}$.
10. Создать узлы $P_i^{O(n,1)}, i = \overline{1, 2}$ с соответствующими перемещениями $u_2^{*(1)(n,1)} \neq u_2^{*(2)(n,1)}$, и узлы $P_i^{\Pi(n,1)}, i = \overline{1, 2}$ с соответствующими перемещениями $u_1^{*(1)(n,1)} \neq u_1^{*(2)(n,1)}$, сформировать вектор неизвестных u .
11. Определять $\alpha^{(n,1)}$ из условия (16), пока $\left\| u_{is}^{*(n,1)} - u_{is}^{*(n,l-1)} \right\| > \epsilon$, на пункт 4, иначе на пункт 1.

Результаты расчета. С помощью предложенного алгоритма был проведен анализ поведения слоя $H = 10 \text{ см}$, имеющего следующие характеристики: для первого варианта был выбран удельный вес $\gamma_1 = 2.72 \cdot 10^{-3} (\text{кг} / \text{см}^3)$, модуль Юнга $E_1 = 7.6 \cdot 10^2 \text{ кг} / \text{см}^2$ и коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0.28$ (для относительно мягкого покрытия), а для второго – $\gamma_2 = 2.76 \cdot 10^{-3} (\text{кг} / \text{см}^3)$, $E_1 = 7.6 \cdot 10^4 \text{ кг} / \text{см}^2$ и $\nu_1 = 0.41$ (для относительно твердого покрытия). Основание описывалось следующими характеристиками: $E_2 = 7.6 \cdot 10^4 \text{ кг} / \text{см}^2$, $\nu_2 = 0.41$ – для первого варианта и $E_2 = 3.8 \cdot 10^4 \text{ кг} / \text{см}^2$, $\nu_2 = 0.35$ – для второго соответственно. Был введен безразмерный параметр $\chi = E_1 / E_2$, при этом для относительно мягкого покрытия $\chi = 0.01$, а для относительно твердого покрытия $\chi = 2$.

Размеры моделируемого полубесконечного основания выбирались из условия затухания решения при полном сцеплении ($h = 50\text{ см}$, $L = 76\text{ см}$). Решения задач (8) осуществлялись с помощью пакета прикладных программ «Cosmos» с автоматическим предварительным «слиянием» и «разъединением» узлов, соответствующим зонам сцепления, проскальзывания и отрыва. Использовался плоский конечный элемент. На рис. 1 представлена модель рассматриваемой системы, содержащая 1217 элементов и 1309 узлов.

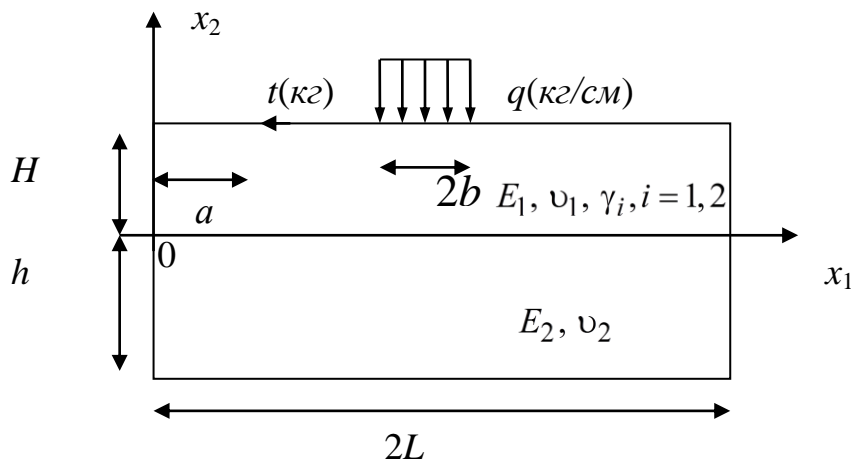


Рис. 1. Схема нагружения слоя, лежащего на упругом основании

Вначале исследовалось поведение слоя при наличии только касательной нагрузки $t(x_1)$ ($q = 0$). На рис. 2-3 приведены значения относительных смещений в слое $\Delta u_1 = (u_1^{(1)}(x_1) - u_1^{(2)}(x_1)) / H$, $\Delta u_2 = (u_2^{(1)}(x_1) - u_2^{(2)}(x_1)) / H$ в зависимости от относительной жесткости слоя и значения коэффициента трения K при $t(x_1) = t_0 \delta(x_1 - a)$, $t_0 = -1\text{ кг}$, где a – расстояние точки приложения силы от начала координат модельной конечно-элементной системы.

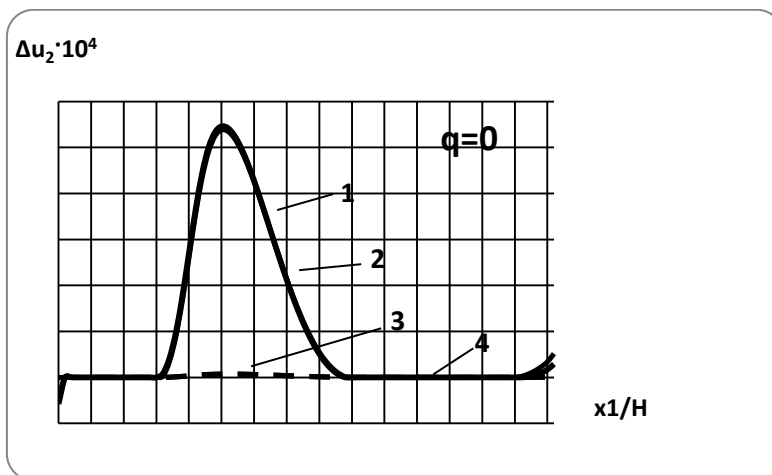


Рис. 2. Относительное перемещение точек слоя и основания на границе раздела:

1 – при $K = 0.3$, $\chi = 0.01$, γ_1 ; 2 – при $K = 0.7$, $\chi = 0.01$, γ_1 ;

3 – при $K = 0.3$, $\chi = 2$, γ_2 ; 4 – при $K = 0.7$, $\chi = 2$, γ_2

Из приведенных результатов следует, что при больших значениях относительной жесткости слоя раскрытие практически отсутствует, при малых – имеет тот же порядок, что и проскальзывание, но не зависит от коэффициента трения. Проскальзывание в обоих случаях имеет одинаковый порядок и зависит от коэффициента трения. Так, при изменении коэффициента трения от 0.7 до 0.3 проскальзывание изменяется в ~ 1.4 раза.

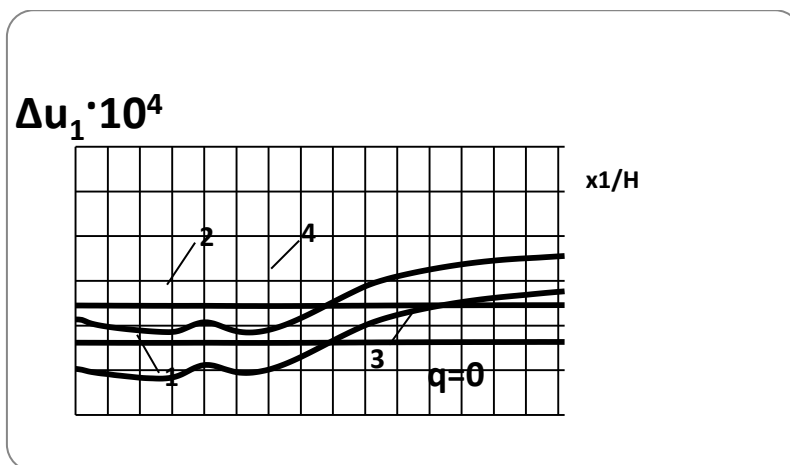


Рис. 3. Относительное проскальзывание точек слоя и основания на границе раздела:

- 1 – при $K = 0.3, \chi = 0.01, \gamma_1$; 2 – при $K = 0.7, \chi = 0.01, \gamma_1$;
- 3 – при $K = 0.3, \chi = 2, \gamma_2$; 4 – при $K = 0.7, \chi = 2, \gamma_2$

При комбинированном нагружении поперечной нагрузкой

$$q(x_1) = \begin{cases} q & \text{при } -b \leq x_1 \leq b, \\ 0 & \text{при } x_1 > b, x_1 < -b; \end{cases}$$

и

$$t(x_1) = t_0 \delta(x_1 - a), \quad b = 4 \text{ см}, \quad a = 40 \text{ см}$$

раскрытие при большой относительной жесткости отсутствует, при малой – зависит от коэффициента трения и имеет порядок проскальзывания (рис. 4-5). Проскальзывание уменьшается в обоих случаях по сравнению со случаем $q = 0$, но существенно зависит от относительной жесткости слоя и от коэффициента трения. Кроме того, раскрытие зоны контакта, в отличие от напряженного состояния, определяется наличием и величиной касательной нагрузки даже при наличии поперечного нагружения.

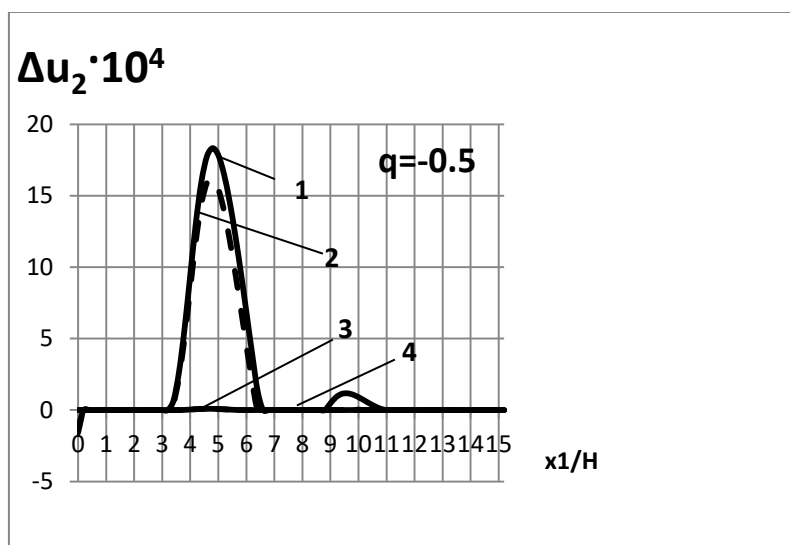


Рис. 4. Относительное перемещение точек слоя и основания на границе раздела:

- 1 – при $K = 0.3, \chi = 0.01, \gamma_1$; 2 – при $K = 0.7, \chi = 0.01, \gamma_1$;
- 3 – при $K = 0.3, \chi = 2, \gamma_2$; 4 – при $K = 0.7, \chi = 2, \gamma_2$

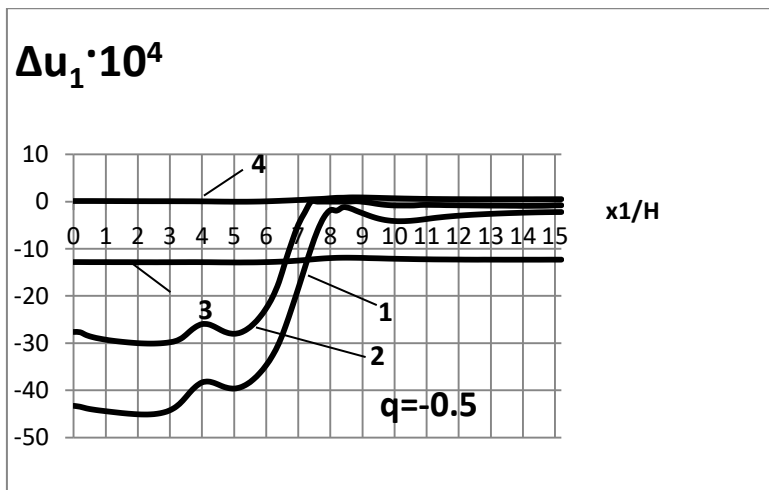


Рис. 5. Относительное проскальзывание точек слоя и основания на границе раздела:

1 – при $K = 0.3$, $\chi = 0.01$, γ_1 ; 2 – при $K = 0.7$, $\chi = 0.01$, γ_1 ;

3 – при $K = 0.3$, $\chi = 2$, γ_2 ; 4 – при $K = 0.7$, $\chi = 2$, γ_2

Картина напряженного состояния на линии контакта при комбинированном нагружении существенно отличается от случая $q = 0$ – даже в случае $t/q = 2$ она определяется поперечной нагрузкой (рис. 6, 7).

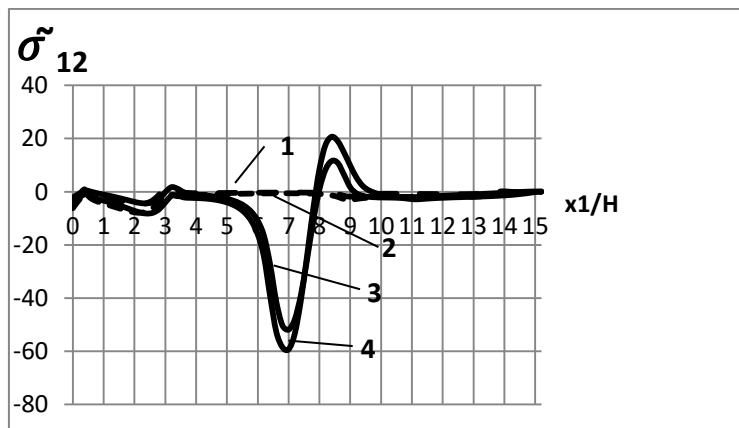


Рис. 6. Функция $\tilde{\sigma}_{12} = \sigma_{12}^{(2)} \cdot H^2 / t$ на верхней границе основания:

1 – при $K = 0.3$, $\chi = 0.01$, γ_1 , $q = 0$; 2 – при $K = 0.7$, $\chi = 0.01$, γ_1 , $q = 0$;

3 – при $K = 0.3$, $\chi = 0.01$, γ_1 , $q = -0.5$; 4 – при $K = 0.7$, $\chi = 0.01$, γ_1 , $q = -0.5$

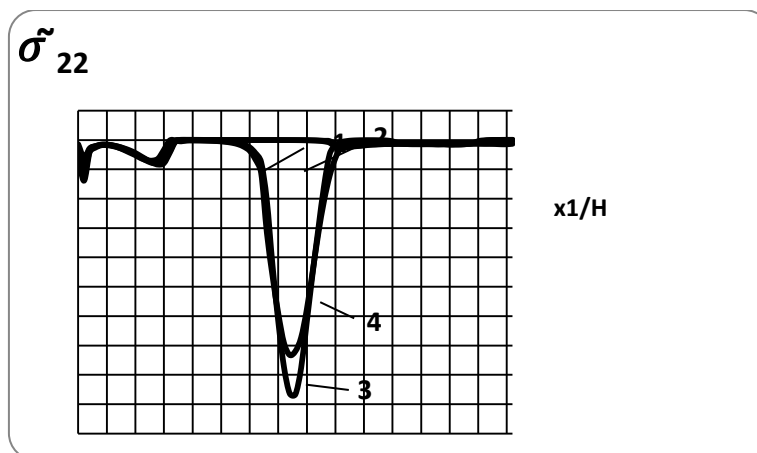


Рис. 7. Функция $\tilde{\sigma}_{22} = \sigma_{22}^{(2)} \cdot H^2 / t$ на верхней границе основания:

1 – при $K = 0.3$, $\chi = 0.01$, γ_1 , $q = 0$; 2 – при $K = 0.7$, $\chi = 0.01$, γ_1 , $q = 0$;

3 – при $K = 0.3$, $\chi = 0.01$, γ_1 , $q = -0.5$; 4 – при $K = 0.7$, $\chi = 0.01$, γ_1 , $q = -0.5$

ВЫВОДЫ

Проведенный численный анализ позволяет установить, что:

- 1) жесткость слоя существенно влияет как на наличие отрыва слоя, так и на величину проскальзывания как при наличии комбинированного нагружения, так и в случае только касательной нагрузки.
- 2) при комбинированном нагружении уровень напряженного состояния определяется нормальной нагрузкой при нагрузках, величина которых имеет один порядок, при этом зависимость от коэффициента трения сохраняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукашевич А. А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа / А. А. Лукашевич, Л. А. Розин // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 1. – С. 75-81.
2. Зернин М. В. Моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики «контактной псевдосреды» / М. В. Зернин, А. П. Бабин, А. В. Мишин, В. Ю. Бурак // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2007. – № 4(16). – С. 62-73.
3. Долгачев М. В. Применение метода Лемке для расчета пластин на одностороннем основании Винклера / М. В. Долгачев // Новые идеи нового века – 2011 : материалы одиннадцатой международной научной конференции ИАС ТОГУ. The New Ideas Of The New Century 2011 : The Eleven International Scientific Conference Proceeding of IACE PNU : в 2 т. – Хабаровск, 2011. – С. 25-32.
4. Смирнов М. С. Решение контактной задачи теории упругости с податливостью в односторонних связях методом итераций по зазорам / М. С. Смирнов // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань : УНИПРЕСС, 1998. – С. 138-139.
5. Розин Л. А. Вариационные постановки задачи теории упругости с идеальными односторонними связями. Задачи Синьорини / Л. А. Розин // Метод конечных элементов и строительная механика. Труды ЛПИ. – № 236. – 1979. – С. 3-15.
6. Ловцов А. Д. Применение алгоритма Лемке к задаче изгиба балки, взаимодействующей с упругим основанием посредством трения Кулона / А. Д. Ловцов // Вестник гражданских инженеров. – 2006. – № 5. – С. 19-26.
7. Александров В. М. Механика контактных взаимодействий / В. М. Александров, И. И. Ворович. – М. : Наука, 2001. – 670 с.
8. Bathe K. Numerical method in finite element analysis // K. Bathe, E. L. Wilson. – М. : Наука, 1985. – 648 с.
9. Jun L. Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffer integrated composite structure / L. Jun., X. Y. Lui, Y. Y. Nan, Y. Xuefeng // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2016. – V. 23(10). – P. 1188-1196.
10. Slobodyan B. S. Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip / B. S. Slobodyan, B. A. Lyashenko, N. I. Malanchuk, V. E. Marchuk, R. M. Martyniak // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 215, iss. 1. – P. 110-120.

REFERENCES

1. Lukashevich, A.A. and Rozin, L.A. (2013), “On the decision of contact problems of structural mechanics with unilateral constraints and friction by step-by-step analysis”, *Inzhenerno-stroitelnyi zhurnal*, no. 1, pp. 75-81.
2. Zernin, M.V., Babin, A.P., Mishin, A.V. and Burak, V.YU. (2007), “Simulation of the contact interaction with provisions of the Mechanics’ the pseudo-contact”, *Vestnik Brianskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, no. 4(16), pp. 62-73.
3. Dolgachev, M.V. (2011), “Application of the method for calculating lemken plates one-sided Winkler base”, *Novye idei novogo veka – 2011: materialy odinadtsatoy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsui IAS TOGU* [The New Ideas Of The New Century 2011: The Eleven International Scientific Conference Proceeding of IACE PNU], Khabarovsk, vol. 1-2, pp. 25-32.
4. Smirnov, M.S. (1998), “Solution elasticity contact problem with suppleness in one-way communication by method to iterate through the gaps”, *Trudy matematicheskogo tsentra im. N.I. Lobachevskogo*, UNIPRESS, Kazan, pp.138-139.

5. Rozin, L.A. (1979), "The variational formulation of the elasticity problem with perfect unilateral constraints. Tasks Signorini", *Metod konechnykh elementov i stroitel'naya mekhanika. Trudy LPI*, no. 236, pp. 3-15.
6. Lovtsov, A.D. (2006), "Application Lemke algorithm to the problem of bending of the beam interacting with the elastic base by Coulomb friction", *Vesnik grazhdanskikh inzhenerov*, no. 5, pp. 19-26.
7. Alekandrov, V.M. and Vorovich, I.I. (2001), "Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy" [Contact mechanics], Nauka, Moscow, Russia.
8. Bathe, K. and Wilson, E.L. (1985), "Numerical method in finite element analysis", Nauka, Moscow, Russia.
9. Jun, L., Lui, X.Y., Nan, Y.Y. and Xuefeng, Y. (2016), "Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffener integrated composite structure", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 23(10), pp. 1188-1196.
10. Slobodyan, B.S., Lyashenko, B.A., Malanchuk, N.I., Marchuk, V.E. and Martynyak, R.M. (2016), "Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 215, iss. 1, pp. 110-120.

УДК 519.876.5

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМУВАННЯ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Овський О. Г., здобувач, Леонтєва В. В., к. ф.-м. н., доцент,
Кондрат'єва Н. О., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

У статті розглянутий вигин пружної прямокутної тришарової пластини із твердим наповнювачем, яка перебуває у стані спокою на пружній основі. Для опису кінематики шарів прийняті гіпотези Кірхгофа. Реакція основи описана моделлю Вінклера. На контурі пластини передбачається наявність твердої діафрагми, яка перешкоджає відносному зсуву шарів. Для побудови системи рівнянь рівноваги використано варіаційний принцип Лагранжа разом зі спрощуючою символікою В.З. Власова.

Ключові слова: Вінклерова основа, спрощуюча символіка, принцип Лагранжа, гіпотези Кірхгофа, наповнювач.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Овский А. Г., соискатель, Леонтеева В. В., к. ф.-м. н., доцент,
Кондратьева Н. А., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

В статье рассмотрен изгиб упругой прямоугольной трехслойной пластины с жестким наполнителем, которая находится в состоянии покоя на упругом основании. Для описания кинематики слоев приняты гипотезы Кирхгофа. Реакция основы описана моделью Винклера. На контуре пластины предполагается наличие твердой диафрагмы, которая препятствует относительному сдвигу слоев. Для построения системы уравнений равновесия использован вариационный принцип Лагранжа вместе с упрощающей символикой В.З. Власова.

Ключевые слова: Винклерово основание, упрощающая символіка, принцип Лагранжа, гипотезы Кирхгофа, наполнитель.

MATHEMATICAL MODELING OF DEFORMATION OF THE THREE LAYER PLATE ON ELASTIC FOUNDATION

Ovsky A. G., applicant, Leontieva V. V., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Kondratieva N. A., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

This article devoted to the disclosure of the essence and presentation of the main stages of a new combined method, used for the solution of three-layered elastic theory tasks. The task is formulated as follows. Asymmetrical thickness three-ply elastic rectangular plate with solid filler is in stasis on an elastic foundation. At the heart of the problem are Kirchhoff hypotheses, used for the kinematic description of the layers, Winkler model for the description of the elastic foundation and the presence of a solid diaphragm on the plate contour that prevents the relative shift of the layers. Lagrange's variational principles with V. Z. Vlasov's simplifying symbols were used to build a system of equilibrium equations. Thus, according to the task analysis, there is a new combined method of its solution with V. Z. Vlasov's simplifying symbols and Lagrange's variational principle. On the basis of the developed method, there is a scheme of its using for solving tasks of elasticity theory that allows you to analyze the stress state at an external load force more accurately.

As a calculation tool to the specified method, developed by the authors tooling system that in turn performs complicated preparatory operations of making precise analytical solutions based on V. Z. Vlasov's method, conducts integration and subsequently, analytically solves a user-defined system of algebraic equations. With this tool system, it has become possible to resolve more complex problems in the three-dimensional formulation, solutions of which previously could not be obtained analytically. In addition, the software implementation of new algorithms created for construction of analytical solutions allows you to use computers in new ways of mathematical modeling, where full analytical outputs of various formulas are used.

There is also an example that illustrates an application of the proposed method using the developed tool system when the longitudinal load was chosen and the lateral load was in double trigonometric series. Considering different values of stiffness coefficient of the base within this example, determined changes of displacement and stress allowed to get the following results: extremes of deflection and stress, as well as a transition of the move occur at the center of the layer; during increasing of the base stiffness two times, and then the maximum values of displacements and stresses each time decreases by 50% 4 times that fully corresponds to the classical theory of plates; curves displacements for each layer are similar to the curves of the three-dimensional static problem of elasticity theory. The reliability solution is confirmed by the accuracy of V. Z. Vlasov's analytical method of initial functions and convergence of applicable series.

In conclusion the list of the tasks solved with the proposed method, can be used not only as in the example but extends to a sufficiently large area of mathematical modeling.

Key Words: Vinklerov's basis, simplifying symbols, the principle of Lagrange, Kirchhoff's hypothesis, filler.

ВСТУП

Математичне моделювання шаруватих конструкцій становить практичний інтерес, оскільки дозволяє перенести всю складність розрахунків на ЕОМ. У зв'язку з ростом обчислювальної потужності обчислювальних машин ускладнюються прийоми та алгоритми моделювання в кожному конкретному випадку. На сучасному етапі стало можливим поєднувати аналітичні й чисельні методи розв'язання задач теорії пружності завдяки розвиткові нових програмних продуктів – систем комп'ютерної математики [1]. Це дозволяє розробляти нові підходи до розрахунків складних технічних проблем. У запропонованій роботі описаний новий комбінований прийом розв'язання тришарової задачі теорії пружності із застосуванням спрощуючої символіки В.З. Власова [2] і варіаційного принципу Лагранжа [3]. У ролі розрахункового інструмента виступає розроблена авторами інструментальна система, яка відповідно виконує складні підготовчі операції виведення точного аналітичного розв'язку методом В.З. Власова [2], проводить інтегрування та, надалі, аналітично розв'язує задану користувачем систему алгебраїчних рівнянь.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Несиметрична по товщині пружна тришарова прямокутна пластина із твердим наповнювачем перебуває у стані спокою на пружній основі (рис. 1).

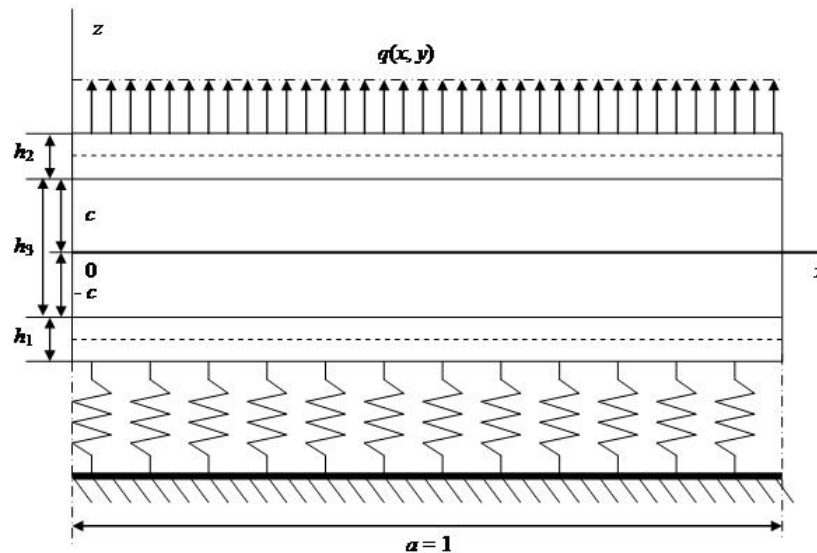


Рис. 1. Тришарова пластина

При цьому кінематика описується гіпотезами ламаної нормалі: у несучих шарах виконуються гіпотези Кірхгофа [4], у нестисливному за товщиною наповнювачі нормаль залишається прямолінійною, не змінює своєї довжини, але повертається на деякий додатковий кут, що становить із координатними осями величини $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$. Деформації вважаються малими. Реакція основи q_r відповідає моделі Вінклера [5, 6]:

$$q_r = -k w, \quad (1)$$

де k – коефіцієнт жорсткості основи; w – прогин пластини.

Знак « \leftarrow » вказує на те, що реакція спрямована в бік, протилежний прогину.

ВИКЛАД ОСНОВНИХ ЕТАПІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОСТАВЛЕНОЇ ЗАДАЧІ

Система координат зв'язується із серединною площиною заповнювача. На пластину діють зовнішні розподілені поверхневі навантаження $p(x, y)$, $t(x, y)$, $q(x, y)$ та реакція основи q_r (рис. 2).

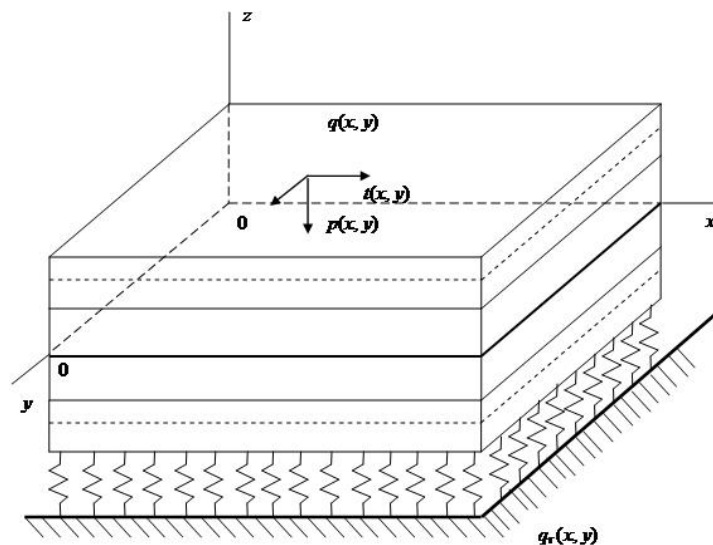


Рис. 2. Система координат задачі

З метою спрощення позначень для переміщень u , v і напружень, τ_{xy} , σ_y вводяться нові позначення:

$$\begin{aligned} Gu(x, y) &= U, & \tau_{xz}(x, y) &= X, \\ Gv(x, y) &= V, & \tau_{yz}(x, y) &= Y, \\ Gw(x, y) &= W, & \sigma_z(x, y) &= Z. \end{aligned} \tag{2}$$

Початкові функції відповідно будуть позначатися $U_0, V_0, W_0, X_0, Y_0, Z_0$ [9].

Для кожного із шарів у заданих позначеннях буде дописуватися індекс, який визначає номер шару. Товщина k -го шару позначається як h_k , при цьому $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$).

За допомогою введених геометричних гіпотез, поздовжні переміщення в шарах виражаються через п'ять функцій u, v, ψ_x, ψ_y, w з урахуванням модуля зсуву:

$$\begin{aligned} U_1 &= U + c \cdot \Psi_x - z \cdot \frac{\partial W}{\partial x}, & V_1 &= V + c \cdot \Psi_y - z \cdot \frac{\partial W}{\partial y} & (c \leq z \leq c + h_2), \\ U_2 &= U - c \cdot \Psi_x - z \cdot \frac{\partial W}{\partial x}, & V_2 &= V - c \cdot \Psi_y - z \cdot \frac{\partial W}{\partial y} & (-c - h_1 \leq z \leq -c), \\ U_3 &= U + z \cdot \Psi_x - z \cdot \frac{\partial W}{\partial x}, & V_3 &= V + z \cdot \Psi_y - z \cdot \frac{\partial W}{\partial y} & (-c \leq z \leq c), \end{aligned} \tag{3}$$

де z – відстань від розглянутого волокна до серединної площини наповнювача; $U \pm c \cdot \Psi_x, V \pm c \cdot \Psi_y$ – величини зсувів першого й другого несучих шарів за рахунок деформації наповнювача (знак «+» – перший шар, «-» – другий).

Внутрішні зусилля й моменти пластини мають вигляд:

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^k dz, & N_y &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_y^k dz, \\ Q_x &= \int_{h_3} \tau_{xz}^3 dz, & Q_y &= \int_{h_3} \tau_{yz}^3 dz, & Q_{xy} &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \tau_{xy}^k dz, \\ M_x &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^k z dz, & M_y &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_y^k z dz, & M_{xy} &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \tau_{xy}^k z dz, \end{aligned} \tag{4}$$

де σ_x^k, σ_y^k – компоненти тензора напружень у шарах пластини, причому інтеграли беруться по товщині k -го шару [7].

Рівняння рівноваги виводиться з варіаційного принципу Лагранжа [2] та записується у вигляді

$$\delta A + \delta W = 0, \tag{5}$$

де δA – варіація роботи зовнішніх поверхневих сил: $\delta A = \iint_S (t \delta u + p \delta v + (q + q_r) \delta w) dS$;

δW – варіація роботи внутрішніх напружень враховує роботу заповнювача в тангенціальному напрямку:

$$\delta W = \iint_S \left\{ \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_x^k \delta \varepsilon_{xx}^k + \sigma_y^k \delta \varepsilon_{yy}^k + 2\tau_{xy}^k \delta \varepsilon_{xy}^k) dz \right] + 2 \int_{h_3} (\tau_{xz}^3 \delta \varepsilon_{xz}^3 + \tau_{yz}^3 \delta \varepsilon_{yz}^3) dz \right\} dx dy;$$

$\delta u, \delta v, \delta w$ – варіації переміщень пластини загалом; $\delta \varepsilon$ – варіація деформації; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}$ – компоненти тензора деформацій.

Система рівнянь рівноваги прямокутної тришарової пластини на пружній основі в зусиллях матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} = -t, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} = -p, \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -(q + q_r). \end{cases} \quad (6)$$

Надалі в отримані рівняння рівноваги (6) підставляються внутрішні зусилля й моменти пластини (4). Зазначимо при цьому, що до виразів (4) входять значення переміщень і напружень для кожного шару, знайдені при початкових функціях у вигляді (2) згідно з [8].

Граничні умови задачі при $x = 0, a$ є такими:

$$u = v = \psi_x = \psi_y = w = 0. \quad (7)$$

Для задоволення умов (7) початкові функції з урахуванням модуля зсуву задаються у вигляді

$$\begin{aligned} U_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, & X_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, \\ V_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}, & Y_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}, \\ W_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, & Z_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, \\ \Psi_x^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P s_{nm} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, & \Psi_y^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P h_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}. \end{aligned} \quad (8)$$

Згідно з умовами задачі $D_{nm} = E_{nm} = F_{nm} = 0$.

Підстановка переміщень і кутів повороту (8) у вирази (3) утворює нові початкові функції для кожного шару.

Далі, за схемою роботи [10], знаходяться розв'язки для переміщень і напруг кожного шару. Ці розв'язки підставляються до виразів (4), що зображують внутрішні зусилля й моменти пластини, та інтегруються (процес інтегрування точних аналітичних розв'язків, які містять гіперболічні функції, є складною задачею, розв'язок якої покладено на ЕОМ) [12].

Поздовжнє й поперечне навантаження розкладаються у подвійні тригонометричні ряди.

Після підстановки до системи (6) виразів переміщень і напруг для всіх шарів проводиться процедура Гальоркіна [7].

Будується система алгебраїчних рівнянь, за якою знаходяться коефіцієнти A_{nm} , B_{nm} , C_{nm} , $P s_{nm}$, $P h_{nm}$.

Надалі, таким чином, підстановка знайдених початкових функцій у формули для переміщень і напружень кожного шару видає точний результат.

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для більш детального аналізу отриманих у результаті здійсненого в роботі дослідження розрахунків проведемо обчислювальний експеримент для випадку, коли обиралися поздовжні навантаження $t=0$, $p=0$, а поперечне навантаження було розкладено в подвійний тригонометричний ряд вигляду [11]

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm} \sin \frac{\pi nx}{a} \sin \frac{\pi my}{b},$$

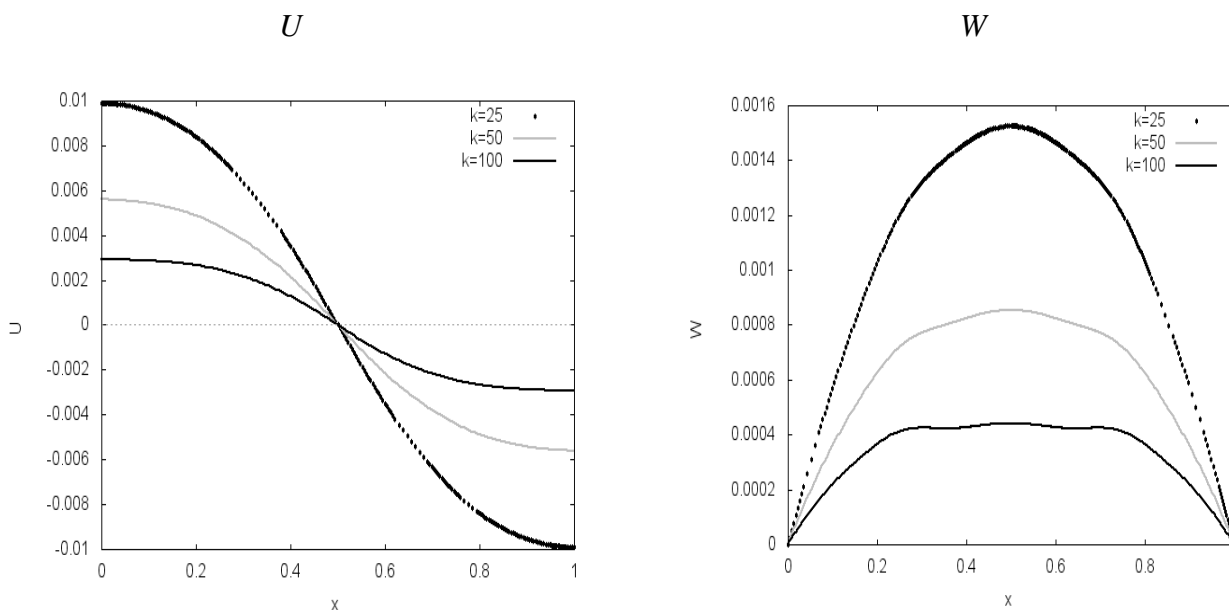
$$q_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{\pi nx}{a} \sin \frac{\pi my}{b} dx dy. \tag{9}$$

Для проведення дослідження та розв’язання поставленої задачі у розрахунках бралися двадцять членів рядів (9).

Числове дослідження збіжності рядів (9) показало, що для їх сумування у формулах методу початкових функцій В.З. Власова [2] достатньо утримувати 20 перших доданків. Додавання ще 70 доданків неістотно змінює результат, але впливає на швидкість аналітичного розв’язання на ЕОМ.

Розрахунки проводилися на розробленій інструментальній системі з обчислювальним ядром СКМ Махіта для відносних безрозмірних товщин шарів $h_1 = 0.02$, $h_2 = 0.04$, $c = 0.09$, при співвідношенні сторін пластини $a = 1$, $b = 1$, а також при інтенсивності поверхневого навантаження $q = 1$ МПа. Серединна поверхня третього шару є в даному прикладі нестисливим заповнювачем і не розглядається. Другий (нижній) шар лежить на Вінклеровій основі. Графіки для переміщень і напружень наведені нижче (рис. 3, 4).

Так, рис. 3 ілюструє зміну переміщень U , V та напружень σ_x , σ_z вздовж осі x ($y = 0,5$) серединної поверхні другого (нижнього) шару пластини. Криві відповідають різним величинам коефіцієнта жорсткості основи $k = 25, 50, 100$ МПа/м.



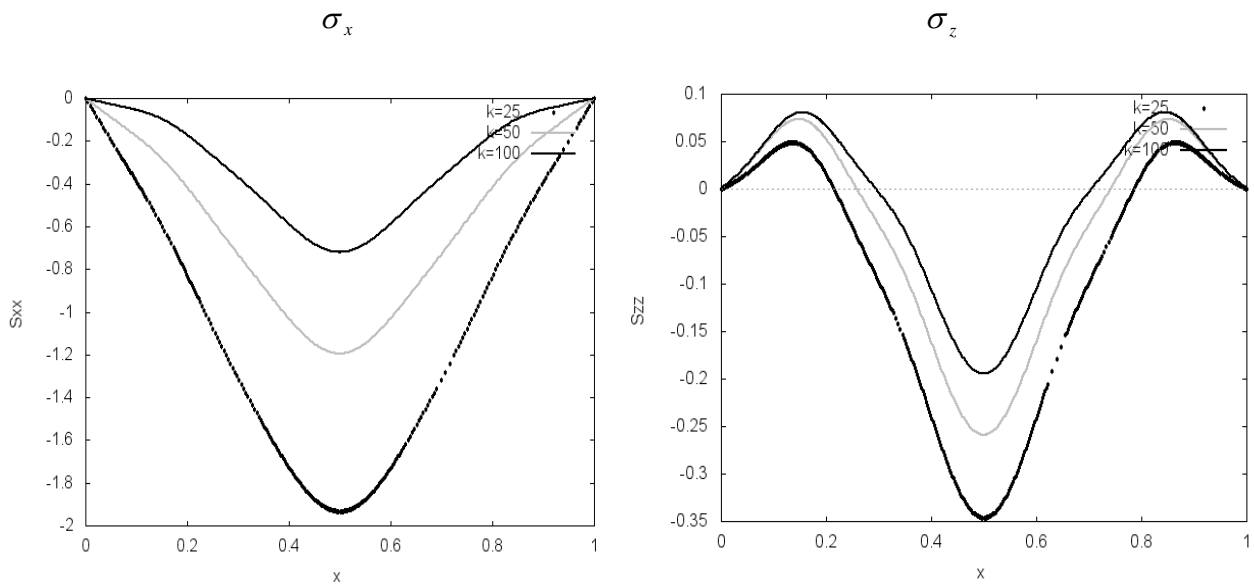
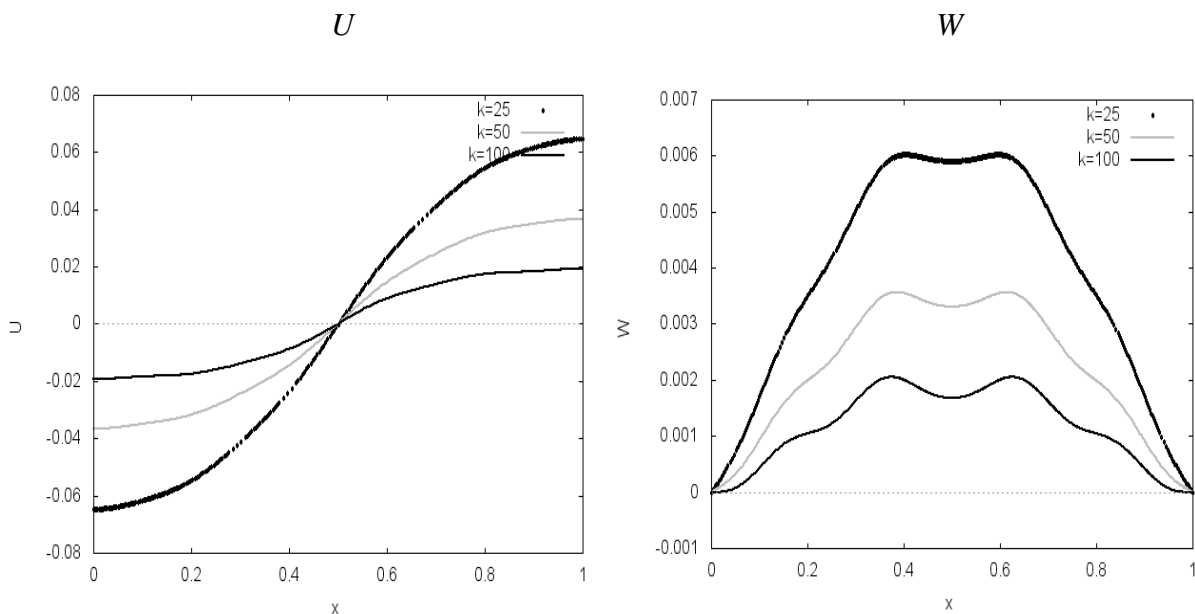


Рис. 3. Графіки зміни переміщень U , V та напружень σ_x , σ_z середньої поверхні другого шару пластини при $k = 25, 50, 100$ МПа/м

Аналізуючи наведені на рис. 3 графіки для переміщень і напружень, можна зробити відповідні висновки:

- екстремуми прогину W і напружень, а також перехід переміщення U спостерігається в центрі шару;
- при збільшенні жорсткості основи в два рази, а потім в 4 рази максимальні значення переміщень і напружень зменшуються приблизно кожен раз на 50%, що повністю відповідає класичній теорії пластин [7].

Аналогічно до рис. 3, на рис. 4 зображено зміну переміщень U , W та напружень σ_x , σ_z середньої поверхні першого (верхнього) шару пластини для $k = 25, 50, 100$ МПа/м.



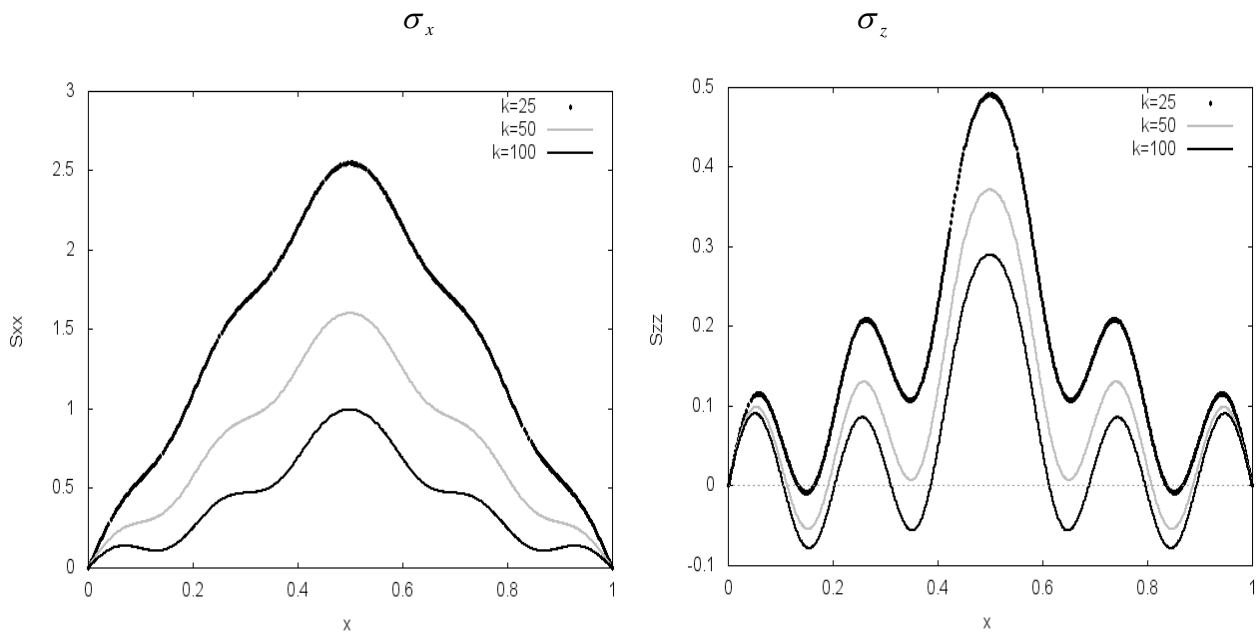


Рис 4. Графіки зміни переміщень U, V та напружень σ_x, σ_z серединної поверхні першого шару пластини при $k = 25, 50, 100$ МПа/м

На рис. 4 картина зміни переміщень і напружень є аналогічною до результатів, наведених на рис. 3: при зміні коефіцієнту жорсткості в два, а потім в чотири рази переміщення і напруження також зменшуються кожний раз на 50%.

Крім того, за рис. 3 та рис. 4 можна визначити, що криві переміщення U, W для кожного шару є схожими з видом кривих тривимірної статичної задачі теорії пружності [10]. Достовірність розв'язку підтверджується з одного боку точністю аналітичного методу початкових функцій В.З. Власова [2], застосовуваного для проведеного у роботі дослідження, а з іншого – збіжністю тригонометричних рядів (9).

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто вигин пружної прямокутної тришарової пластини із твердим наповнювачем, яка перебуває у стані спокою на пружній основі. В основі задачі при описі кінематики шарів лежать гіпотези Кірхгофа, при описі пружної основи – модель Вінклера, на контурі пластини врахована наявність твердої діафрагми, яка перешкоджає відносному зсуву шарів.

Для поставленої задачі на основі проведеного дослідження запропоновано новий комбінований прийом розв'язання тришарової задачі теорії пружності із застосуванням спрощуючої символіки В.З. Власова і варіаційного принципу Лагранжа. На основі розробленого прийому в роботі представлено схему його використання для розв'язання задач теорії пружності, яка дозволяє точніше проаналізувати напружений стан при зовнішньому силовому навантаженні.

Розрахунковим інструментом виступає розроблена авторами інструментальна система, яка відповідно виконує складні підготовчі операції виведення точного аналітичного розв'язку методом В.З. Власова, проводить інтегрування та, надалі, аналітично розв'язує задану користувачем систему алгебраїчних рівнянь. Завдяки такій інструментальній системі стало можливим розв'язання більш складних задач у тривимірній постановці, розв'язки яких раніше не могли бути отримані аналітичним шляхом. Крім того, програмні реалізації нових алгоритмів побудови аналітичних розв'язків дозволяють задіяти ЕОМ у нових напрямках математичного моделювання, де використовуються повні аналітичні виведення тих або інших формул.

Також в роботі наведено приклад застосування запропонованого прийому із використанням розробленої інструментальної системи для випадку, коли обиралися поздовжні навантаження $t = 0$, $p = 0$, а поперечне навантаження було розкладено в подвійний тригонометричний ряд. Для даного прикладу при різних величинах коефіцієнта жорсткості основи визначені зміни переміщень та напружень, аналіз яких дозволив отримати такі висновки: екстремуми прогину і напружень, а також перехід переміщення спостерігається в центрі шару; при збільшенні жорсткості основи в два рази, а потім в 4 рази максимальні значення переміщень і напружень зменшуються приблизно кожен раз на 50%, що повністю відповідає класичній теорії пластин; криві переміщення для кожного шару є схожими з видом кривих тривимірної статичної задачі теорії пружності. Достовірність розв'язку підтверджується точністю аналітичного методу початкових функцій В.З. Власова та збіжністю застосовуваних рядів.

Наостанок слід зазначити, що перелік задач, які розв'язуються за допомогою запропонованого у роботі прийому, не обмежується наведеним прикладом, а розповсюджується на досить велику область застосування математичного моделювання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аладьев В. З. Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования / В. З. Аладьев. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2006. – 792 с.
2. Власов В. З. Балки плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 491 с.
3. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
4. Феодосьев В. И. Соппротивление материалов : Учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.
5. Перельмутер А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – К. : Сталь, 2002. – 600 с.
6. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 679 с.
7. Горшков А. Г. Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Талаковский ; Учеб. для вузов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.
8. Толок В. А. Операторно-символьные ряды Власова В.З. в решении задач теории упругости в системе Maple / В. А. Толок, В. В. Шапар // Гідроакустичний журнал. – 2006. – № 3. – С. 66-74.
9. Галан Е. Е. Использование системы Maple при реализации метода начальных функций Власова / Е.Е. Галан, А.Г. Овский, В.А. Толок // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 1. – С. 16-26.
10. Овский А. Г. Моделирование схемы решения трехмерной задачи теории упругости в системе Maple / А. Г. Овский, В. О. Толок // Гідроакустичний журнал. – 2008. – № 3. – С. 88-97.
11. Овский А. Г. Преппроцессор решения статических двумерных и трехмерных задач теории упругости / А. Г. Овский, В. А. Толок // Информационные технологии моделирования и управления. – Воронеж : Воронежский государственный технический университет. Липецкий государственный университет. Бакинский государственный университет. – 2014. – №1 (85). – С. 47-58.
12. Овский А. Г. Моделирование плоских задач теории упругости толстых многослойных плит в системах компьютерной математики / А. Г. Овский // Вісник Запорізького національного університету : Фізико-математичні науки. – 2014. – №2. – С. 101-116.

REFERENCES

1. Aladev, V.Z. (2006), *Sistemyi kompyuternoy algeabrii: Maple: Iskustvo programmirovaniya* [Systems of computer algebra: Maple: programming Art], Laboratoriya bazovyih znaniy, Moscow, Russia.
2. Vlasov, V.Z. and Leontev, N.N. (1960), *Balki plityi i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams of a plate and a cover on the elastic foundation], Fizmatgiz, Moscow, Russia.

3. Polyanin, A.D. (2001), *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Manual on simple equations of mathematical physics], Fizmatlit, Moscow, Russia.
4. Feodosev, V.I. (1999), *Soprotivlenie materialov: Ucheb. dlya vuzov* [Strength of materials: Textbook for high schools], Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana, Moscow, Russia.
5. Perelmuter, A.V. and Slivker, V.I. (2002), *Raschetnyie modeli sooruzheniy i vozmozhnost ih analiza* [Computational models of structures and the possibility of their analysis], Stal, Kiev, Ukraine.
6. Gorbunov-Posadov, M.I., Malikova, T.A. and Solomin, V.I. (1984), *Raschet konstruktsey na uprugom osnovanii* [Calculation of structures on elastic foundation], Stroyizdat, Moscow, Russia.
7. Gorshkov, A.G., Starovoytov, E.I. and Talakovskiy, D.V. (2002), *Teoriya uprugosti i plastichnosti* [The theory of elasticity and plasticity], Fizmatlit, Moscow, Russia.
8. Tolok, V.A. and Shapar, V.V. (2006), “V.Z. Vlasov’s functional-symbolical rows in a solution of problems of the theory of elasticity in system Maple”, *Hidroakustychnyy zhurnal*, no. 3, pp. 66-74.
9. Galan, E.E., Ovskiy, A.G. and Tolok, V.A. (2008), “Using the Maple system in the implementation of the method of initial functions Vlasov”, *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky*, no. 1, pp. 16-26.
10. Ovskiy, A.G. and Tolok, V.O. (2008), “Simulation of three-dimensional schemes for solving the problem of elasticity theory in Maple System”, *Hidroakustychnyy zhurnal*, no. 3, pp. 88-97.
11. Ovskiy, A.G. and Tolok, V.O. (2014), “Preprocessor solutions static two-dimensional and three-dimensional problems of elasticity theory” *Informatsionnyie tehnologii modelirovaniya i upravleniya*, no. 1 (85), pp. 47-58.
12. Ovskiy, A.G. (2014), “Simulation of plane problems of the theory of elasticity thick laminated panels in computer mathematics systems”, *Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky*, no. 2, pp. 101-116.

УДК 539.312

НЕСТАЦІОНАРНА ДЕФОРМАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРІ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНИХ ПОВЕРХНЕВИХ НАВАНТАЖЕНЬ

¹Пожуєв В. І., ²Пожуєв А. В., ³Фасоляк А. В.

^{1,3}*Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, 69063, Україна*

²*Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69000, Україна*

²scorpio1@mail.ru, ³antonfasolyak@mail.ru

Розглядається тривимірний пружний півпростір з циліндричною порожниною, яка підкріплена оболонкою, причому вісь оболонки розташована перпендикулярно до площини, що обмежує півпростір. Розглянуто випадки, коли на поверхню оболонки діють вісесиметричні динамічні нормальні навантаження. Рух півпростору описувався динамічними рівняннями теорії пружності, а рух оболонки описувався рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко). Задача розв'язана методом інтегральних синус та косинус перетворень Фур'є (за осью змінною), та Лапласа (за змінною часу), обертання яких проводилось чисельно. Отримані результати проілюстровано графічно.

Ключові слова: циліндрична оболонка, пружний півпростір, динамічне навантаження, вісесиметрична задача.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗОК

¹Пожуев В. И., ²Пожуев А. В., ³Фасоляк А. В.

^{1,3}*Запорожский национальный технический университет,
ул. Жуковского, 64, Запорожье, 69063, Украина*

²*Запорожская государственная инженерная академия,
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69000, Украина*

²scorpio1@mail.ru, ³antonfasolyak@mail.ru

Рассматривается трехмерное упругое полупространство с цилиндрической полостью, которая подкреплена оболочкой, причем ось оболочки расположена перпендикулярно к ограничивающей полупространство плоскости. Рассмотрен случай, когда на поверхность оболочки действуют осесимметрические динамические нагрузки. Движение полупространства описывается динамическими уравнениями теории упругости, а движения оболочки описывается уравнениями, которые учитывают поперечный сдвиг и инерцию вращения (оболочка типа Тимошенко). Задача решена методом интегральных синус и косинус преобразований Фурье (по осевой переменной), и Лапласа (по переменной времени), обращение которых проводилось численно. Полученные результаты проиллюстрированы графически.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, упругое полупространство, динамическая нагрузка, осесимметричная задача.

NON-STATIONAR DEFORMATION OF CYLINDRICAL SHELL IN ELASTIC HALF-MEDIUM, SUBJECTED TO NORMAL SURFACE LOADS

¹Pozhuev V. I., ²Pozhuev A. V., ³Fasoliak A. V.

^{1,3}*Zaporizhzhya national technical university,
Zhykovsky str, 64, Zaporizhzhya, 69063, Ukraine*

²*Zaporizhzhya state engineering academy,
Sobornyy av., 226, Zaporizhzhya, 69000, Ukraine*

²scorpio1@mail.ru, ³antonfasolyak@mail.ru

Infinite cylindrical shell, embed in three-dimensional elastic half-space is considered. We assume that half-space and shell are rigidly bonded on the half-space surface with absolutely-rigidly half-space. Case, when impulsive axi-symmetrical normal load, which depends on time as unit Heaviside function is subjected to surface of the shell, is studied. For the results to be compared, corresponding static load is considered. Axi-symmetrical normal load, which depends on time as exponential function is considered too.

Half-space motion is described by elastic theory dynamic equations. Shell's motions are described by equations, which consider cross shift and rotary inertia (Timoshenko's shell).

Elastic theory dynamic equations are solved by method of two potential functions. Then integral transform technique is used. Fourier sine and cosine transform on axial variable, and Laplace transform on time are used.

Transform solutions for displacements and stresses are inversed numerically. Filon's method (to inverse sine and cosine Fourier transform) and the displaced Legendre's polynoms method (to inverse Laplace transform) are used.

Radial displacements and stresses for normal load, that depend on time as unit Heaviside function, are observed to aspire to static solution in large timescales. For the case, when normal load depends on time as exponential function, it is shown, that shell's radial displacements and stresses aspire to zero in large timescales.

Key words: cylindrical shell, elastic half-space, dynamic loads, axi-symmetrical problem.

ВСТУП

На сьогодні достатньо добре досліджені динамічні задачі для циліндричних оболонок у необмеженому пружному інерційному просторі. У роботах [1-4] розглянуті подібні задачі в нестационарній постановці з використанням різних методів моделювання реакції простору.

Стаття присвячена нестационарним динамічним задачам для пружних оболонок у пружному інерційному півпросторі, який обмежено площиною, причому вісь оболонки перпендикулярна цій площині. Припускається, що цей півпростір жорстко зчеплений з абсолютно твердим півпростором. Досліджується питання впливу глибини розташування навантаження на динамічний напружено-деформований стан системи оболонка-півпростір.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається вісесиметрична нестационарна деформація нескінченно довгої циліндричної оболонки, яка знаходиться у лінійно-пружному, однорідному та ізотропному півпросторі під дією нормальних до її поверхні навантажень. Оболонка розташована таким чином, що її вісь перпендикулярна до площини, що обмежує півпростір (рис. 1). Також припускається, що площина, яка обмежує півпростір, жорстко з'єднана з абсолютно жорстким півпростором. Нехай оболонка та півпростір віднесені до нерухомої циліндричної системи координат $\{r, \theta, x\}$, але для даної вісесиметричної задачі всі величини не залежать від змінної θ . Внутрішній радіус оболонки b , а зовнішній – a . Площина, що обмежує півпростір задається рівнянням $x=0$. В момент часу $t < 0$ оболонка та простір знаходяться в стані спокою та вільні від напружень. Потім в момент часу $t=0$ в області $|x-l| \leq d$, $r=b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 , яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда, або за показниковим законом. Для порівняння результатів при заданому навантаженні розглянута аналогічна статична задача. У всіх випадках вважаємо, що оболонка і півпростір жорстко зчеплені.

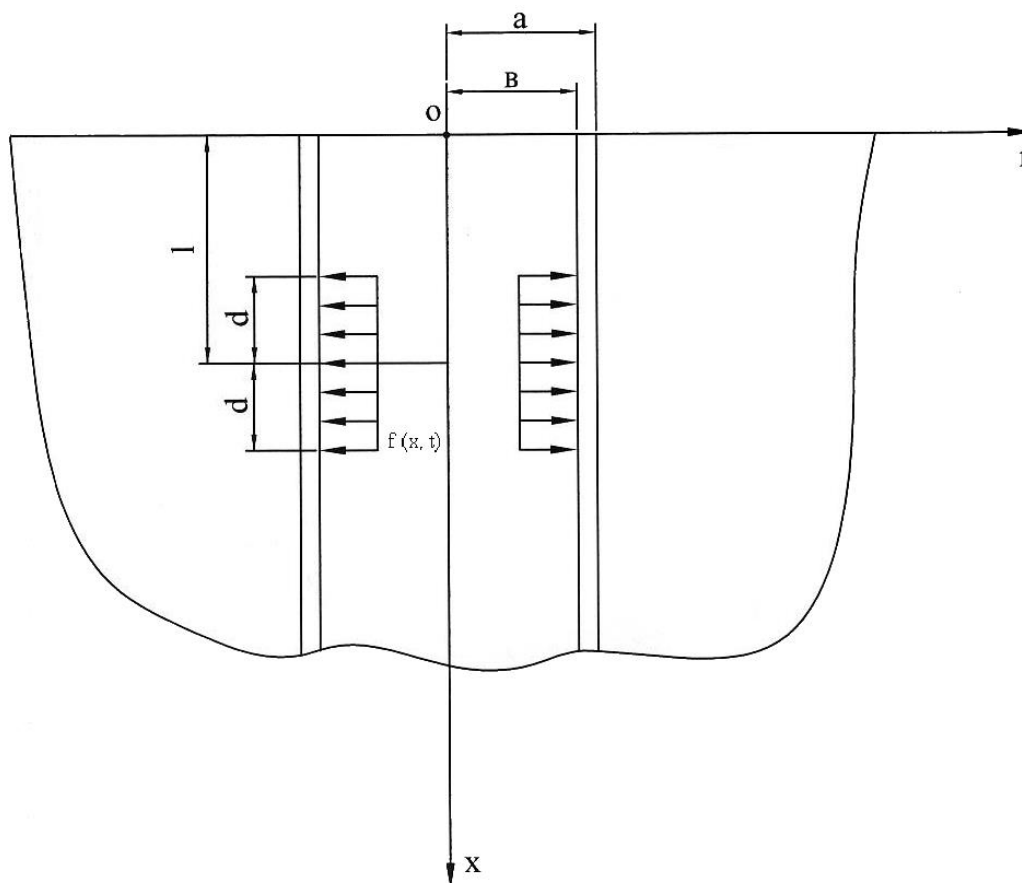


Рис. 1. Пружний півпростір з циліндричною порожниною, підкріпленою оболонкою у циліндричній системі координат

У цій роботі рух оболонки будемо описувати за допомогою рівнянь, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), а півпростір, що оточує оболонку, описується динамічними рівняннями теорії пружності.

У векторній формі динамічні рівняння теорії пружності мають вигляд [5, с.551]:

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \text{grad div} \left(\bar{u}^{(2)} \right) - \mu_2 \text{rot rot} \left(\bar{u}^{(2)} \right) = \rho_2 \frac{\partial^2 \bar{u}^{(2)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де $\bar{u}^{(2)} = (u_x, u_r)$ – вектор переміщень, λ_2, μ_2, ρ_2 – параметри Ламе та щільність півпростору.

При відсутності масових сил вводимо потенціальні функції Φ, Ψ за формулами [5, с.565]

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r}, \quad u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2)$$

Підставляючи залежності (2) в рівняння (1).

Маємо:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\Psi}{r^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \quad (3)$$

$$c_p^2 = \frac{2G_2(1-\nu_2)}{\rho_2(1-2\nu_2)}, \quad c_s^2 = \frac{G_2}{\rho_2}. \quad (4)$$

Рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), у вісесиметричному випадку мають вигляд [6, с.43]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} q_x, \\ \frac{\nu_1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} - k^2 \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right) + \frac{w}{a^2} = -\rho_1 \frac{1-\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-\nu_1}{2G_1 h} (-f + q_r), \\ \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x^2} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_x \right) = \rho_1 \frac{1+\nu_1}{2G_1} \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial t^2} - \frac{3(1-\nu_1)}{G_1 h^2} q_x, \end{cases} \quad (5)$$

де u, w – осьове та радіальне переміщення серединної поверхні оболонки; α_x – кут повороту нормалі до серединної поверхні оболонки в осьовому напрямку; $q_r = q_r(x, t), q_x = q_x(x, t)$ – нормальна та дотична реакції з боку півпростору на межі контакту з оболонкою; $f(x, t)$ – нормальне навантаження, яке діє на внутрішню поверхню оболонки; ρ_1, h – густина та товщина оболонки.

Для жорсткого контакту між оболонкою і півпростором граничні умови запишуться так:

$$\sigma_{rx}(a, x, t) = -q_x(x, t), \quad \sigma_{rr}(a, x, t) = -q_r(x, t), \quad u_r(a, x, t) = w(x, t), \quad u_x(a, x, t) = u(x, t). \quad (6)$$

Напруження, що необхідні для задоволення граничних умов (6), виражаються через переміщення за формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2G_2\nu_2}{1-2\nu_2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{rx} &= G_2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Враховуючи, що на поверхні пружний півпростір жорстко зчеплений з абсолютно жорстким півпростором, тоді на поверхні (тобто при $x=0$) переміщення обертаються в нуль.

Початкові умови у всіх випадках приймаються нульовими, тобто при $t = 0$ шукані величини та їх перші похідні за часом вважаємо рівними нулю.

Зауважимо, що для статичної задачі треба взяти рівними нулю похідні за часом, а всі величини не залежать від змінної t .

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ У ПРОСТОРІ ЗОБРАЖЕНЬ

Для розв'язання задачі будемо використовувати перетворення Лапласа за часовою змінною:

$$f_L(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \tag{8}$$

синус перетворення Фур'є за осьюою координатою:

$$f_S(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(sx) dx \tag{9}$$

та косинус перетворення Фур'є за осьюою координатою:

$$f_C(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(sx) dx \tag{10}$$

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \{\bar{\Phi}, \bar{\Psi}\} &= \frac{1}{a^2} \{\Phi, \Psi\}; \quad \{U_x, U_r, W, U\} = \frac{1}{a} \{u_x, u_r, w, u\}; \\ \{\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rx}, \bar{q}_r, \bar{q}_x, \bar{f}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{rr}, \sigma_{rx}, q_r, q_x, f\}; \\ \{x_*, r_*\} &= \frac{1}{a} \{x, r\}; \quad \tau = \frac{c_S}{a} t; \quad \kappa = \frac{h}{a}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad d_1 = 1 - \kappa. \end{aligned} \tag{11}$$

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ , та синус-перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (3). Будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{LS}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Phi}_{LS}}{\partial r_*} - (s^2 + \eta_P p^2) \bar{\Phi}_{LS} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{LS}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Psi}_{LS}}{\partial r_*} - \left(s^2 + \eta_S p^2 + \frac{1}{r_*^2} \right) \bar{\Psi}_{LS} &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

де $\eta_P = \frac{c_S^2}{c_P^2} = \frac{1 - 2\nu_2}{2(1 - \nu_2)}$; $\eta_S = \frac{c_S^2}{c_S^2} = 1$.

Тепер застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ , та косинус-перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (3). Будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{LC}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Phi}_{LC}}{\partial r_*} - (s^2 + \eta_P p^2) \bar{\Phi}_{LC} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_{LC}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \bar{\Psi}_{LC}}{\partial r_*} - \left(s^2 + \eta_S p^2 + \frac{1}{r_*^2} \right) \bar{\Psi}_{LC} &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Загальний розв'язок рівнянь (12) та (13) з урахуванням умов затухання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{LS}(r_*, s, p) &= C_{1S}(s, p)K_0(m_1 r_*); & \bar{\Psi}_{LS}(r_*, s, p) &= C_{2S}(s, p)K_1(m_2 r_*); \\ \bar{\Phi}_{LC}(r_*, s, p) &= C_{1C}(s, p)K_0(m_1 r_*); & \bar{\Psi}_{LC}(r_*, s, p) &= C_{2C}(s, p)K_1(m_2 r_*),\end{aligned}\quad (14)$$

де $m_1 = \sqrt{s^2 + \eta_P p^2}$, $m_2 = \sqrt{s^2 + p^2}$, а K_0, K_1 – модифіковані функції Бесселя.

Застосовуємо перетворення Лапласа за змінною τ , та синус-перетворення, а потім косинус-перетворення Фур'є за змінною x_* до рівнянь (2) та (7). Отримуємо вирази для переміщень та напружень у просторі зображень:

$$U_{xLS} = -s\bar{\Phi}_{LC} + \frac{d\bar{\Psi}_{LS}}{dr_*} + \frac{\bar{\Psi}_{LS}}{r_*}, \quad U_{rLS} = \frac{d\bar{\Phi}_{LS}}{dr_*} + s\bar{\Psi}_{LC}, \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}_{rrLS} = \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \left(-sU_{xLC} + \frac{U_{rLS}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{dU_{rLS}}{dr_*}, \quad (16)$$

$$\bar{\sigma}_{rxLS} = \frac{dU_{xLS}}{dr_*} - sU_{rLC},$$

$$U_{xLC} = s\bar{\Phi}_{LS} + \frac{d\bar{\Psi}_{LC}}{dr_*} + \frac{\bar{\Psi}_{LC}}{r_*}, \quad U_{rLC} = \frac{d\bar{\Phi}_{LC}}{dr_*} - s\bar{\Psi}_{LS}, \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}_{rrLC} = \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \left(sU_{xLS} + \frac{U_{rLC}}{r_*} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{dU_{rLC}}{dr_*}, \quad (18)$$

$$\bar{\sigma}_{rxLC} = \frac{dU_{xLC}}{dr_*} + sU_{rLS}.$$

Для рівнянь, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко), у просторі зображень за Фур'є-Лапласом із (5) приходимо до такої системи:

$$\left\{ \begin{aligned} -s^2 U_{LS} - \nu_1 s W_{LC} &= \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 U_{LS} - \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} \bar{q}_{xLS}; \\ -\nu_1 s U_{LC} + k^2 \frac{1-\nu_1}{2} (s^2 W_{LS} + s \bar{\alpha}_{xLC}) + W_{LS} &= -\frac{1-\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 W_{LS} - \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} (-\bar{f}_{LS} + \bar{q}_{rLS}); \\ -s^2 \bar{\alpha}_{xLS} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} (-s W_{LC} + \bar{\alpha}_{xLS}) &= \frac{1+\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 \bar{\alpha}_{xLS} - \frac{3(1-\nu_1)}{\gamma\kappa^2} \bar{q}_{xLS}; \\ -s^2 U_{LC} + \nu_1 s W_{LS} &= \frac{1-\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 U_{LC} - \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} \bar{q}_{xLC}; \\ \nu_1 s U_{LS} + k^2 \frac{1-\nu_1}{2} (s^2 W_{LC} - s \bar{\alpha}_{xLS}) + W_{LC} &= -\frac{1-\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 W_{LC} - \frac{1-\nu_1}{2\kappa\gamma} (-\bar{f}_{LC} + \bar{q}_{rLC}); \\ -s^2 \bar{\alpha}_{xLC} - 6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} (s W_{LS} + \bar{\alpha}_{xLC}) &= \frac{1+\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2 \bar{\alpha}_{xLC} - \frac{3(1-\nu_1)}{\gamma\kappa^2} \bar{q}_{xLC}. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

У просторі зображень за Фур'є-Лапласом граничні умови (6) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rxLS}(1, s, p) &= -\bar{q}_{xLS}(s, p), \bar{\sigma}_{rrLS}(1, s, p) = -\bar{q}_{rLS}(s, p), \\ U_{rLS}(1, s, p) &= W_{LS}(s, p), U_{xLS}(1, s, p) = U_{LS}(s, p), \\ \bar{\sigma}_{rxLC}(1, s, p) &= -\bar{q}_{xLC}(s, p), \bar{\sigma}_{rrLC}(1, s, p) = -\bar{q}_{rLC}(s, p), \\ U_{rLC}(1, s, p) &= W_{LC}(s, p), U_{xLC}(1, s, p) = U_{LC}(s, p). \end{aligned} \tag{20}$$

Враховуючи граничні умови (20) з третього та шостого рівняння системи (19) знаходимо функції $\bar{\alpha}_{xLS}(s, p)$, $\bar{\alpha}_{xLC}(s, p)$ відповідно:

$$\bar{\alpha}_{xLS}(s, p) = \frac{6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa} s W_{LC}(s, p) + \frac{3(1-\nu_1)-}{\gamma \kappa^2} q_{xLS}}{s^2 + 6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} + \frac{1+\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2}, \tag{21}$$

$$\bar{\alpha}_{xLC}(s, p) = \frac{-6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa} s W_{LS}(s, p) + \frac{3(1-\nu_1)-}{\gamma \kappa^2} q_{xLC}}{s^2 + 6k^2 \frac{1-\nu_1}{\kappa^2} + \frac{1+\nu_1}{2} \frac{\rho^*}{\gamma} p^2}. \tag{22}$$

Підставляючи (21) в друге рівняння системи (19), а вираз (22) в п'яте рівняння системи (19) і враховуючи перше та четверте рівняння системи (19), отримуємо систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_{1S}(s, p)$, $C_{2S}(s, p)$, $C_{1C}(s, p)$, $C_{2C}(s, p)$, яку розв'язуємо методом Гауса. Отримані розв'язки підставляємо у вирази (14), а їх, в свою чергу, у вирази (15)-(18) і отримуємо розв'язок динамічної задачі у просторі зображень за Фур'є-Лапласом.

Для відповідної статичної задачі розв'язок для півпростору будемо шукати у формі Папковича-Нейбера [5, с.185] через дві гармонічні функції $\varphi_1(r, x)$ і $\varphi_2(r, x)$:

$$\begin{aligned} u_r(r, x) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} x; \\ u_x(r, x) &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (3-4\nu_2)\varphi_2 + x \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}. \end{aligned} \tag{23}$$

Відповідні напруження виражаються через переміщення за формулами (7).

Функції $\varphi_1(r, x)$ і $\varphi_2(r, x)$ задовольняють рівнянням:

$$\nabla^2 \varphi_j = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} = 0, \quad j=1,2. \tag{24}$$

Перейшовши до безрозмірних величин за співвідношеннями (11) та аналогічно до раніше викладеного застосувавши спочатку синус-перетворення, а потім косинус-перетворення Фур'є по змінній x_* до рівнянь (24), маємо:

$$r_*^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}_{jS}}{d r_*^2} + r_* \frac{d \bar{\Phi}_{jS}}{d r_*} - r_*^2 s^2 \bar{\Phi}_{jS} = 0, \quad r_*^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}_{jC}}{d r_*^2} + r_* \frac{d \bar{\Phi}_{jC}}{d r_*} - r_*^2 s^2 \bar{\Phi}_{jC} = 0, \quad j=1,2. \tag{25}$$

Загальний розв'язок рівнянь (25) з урахуванням умов згасання на нескінченності має вигляд:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{1S}(r_*, s) &= C_{1S}(s)K_0(sr_*); & \bar{\Phi}_{2S}(r_*, s) &= C_{2S}(s)K_0(sr_*); \\ \bar{\Phi}_{1C}(r_*, s) &= C_{1C}(s)K_0(sr_*); & \bar{\Phi}_{2C}(r_*, s) &= C_{2C}(s)K_0(sr_*);\end{aligned}\quad (26)$$

Застосувавши спочатку синус-перетворення Фур'є, а потім косинус-перетворення Фур'є за змінною x_* до співвідношень (23), враховуючи (11), маємо:

$$\begin{aligned}U_{rS}(r_*, s) &= \frac{\partial \bar{\Phi}_{1S}}{\partial r_*} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{2C}}{\partial s \partial r_*}; & U_{xS}(r_*, s) &= s \bar{\Phi}_{1C} - 4(1-\nu_2) \bar{\Phi}_{2S} - s \frac{\partial \bar{\Phi}_{2S}}{\partial s}; \\ U_{rC}(r_*, s) &= \frac{\partial \bar{\Phi}_{1C}}{\partial r_*} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{2S}}{\partial s \partial r_*}; & U_{xC}(r_*, s) &= -s \bar{\Phi}_{1S} - 4(1-\nu_2) \bar{\Phi}_{2C} - s \frac{\partial \bar{\Phi}_{2C}}{\partial s};\end{aligned}\quad (27)$$

Синус-трансформанти відповідних напружень задаються формулами (16), а косинус-трансформанти – формулами (18).

Підставляючи співвідношення (26) в (27), а потім співвідношення (27) в граничні умови (20) та враховуючи систему (19) при $p=0$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $C_{1S}(s)$, $C_{2S}(s)$, $C_{1C}(s)$, $C_{2C}(s)$. Після знаходження розв'язку системи методом Гауса підставляємо цей розв'язок у вирази (26), а їх у вирази (27) та (16), (18) в результаті чого знаходимо розв'язок статичної задачі у просторі зображень за Фур'є.

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Розглянемо випадок, коли в початковий момент часу $t=0$ в області $|x-H| \leq d$, $r=b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 , яке постійно діє на даній ділянці.

Функція навантаження має вигляд:

$$f(x, t) = F_0 H(|x-l|-d) H(t), \quad (28)$$

де $H(x)$ – одинична функція Хевісайда, l – відстань від поверхні до центру навантаженої ділянки, d – половина довжини ділянки навантаження.

Синус та косинус трансформанти навантаження (28) мають вигляд:

$$f_{LS}(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \sin(l^*s)}{\sqrt{\pi sp}}, \quad f_{LC}(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \cos(l^*s)}{\sqrt{\pi sp}}, \quad (29)$$

де $d^* = \frac{d}{a}$, $l^* = \frac{l}{a}$.

Обернення синус-перетворення Фур'є має вигляд [7, с.28]:

$$f_1^S(x_*) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f_{1S}(s) \sin(sx_*) ds,$$

а обернення косинус-перетворення Фур'є має вигляд [7, с.28]:

$$f_1^C(x_*) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f_{1C}(s) \cos(sx_*) ds.$$

Тоді оригінал функції $f_1(x_*)$ матиме вигляд:

$$f_1(x_*) = f_1^C(x_*) + f_1^S(x_*) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f_{1C}(s) \cos(sx_*) ds + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f_{1S}(s) \sin(sx_*) ds =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty [f_{1C}(s) \cos(sx_*) + f_{1S}(s) \sin(sx_*)] ds. \quad (30)$$

Тоді з урахуванням (30), після обернення синус та косинус перетворень Фур'є, та оберненого перетворення Лапласа отримуємо вирази для нормальних переміщень та напружень у просторі оригіналів:

$$\frac{U_r(r_*, x_*, \tau) G_1}{F_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3} i} \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \int_0^\infty [U_{rLC}(r_*, s, p) \cos(sx_*) + U_{rLS}(r_*, s, p) \sin(sx_*)] e^{p\tau} ds dp, \quad (31)$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r_*, x_*, \tau)}{F_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3} i} \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \int_0^\infty [\bar{\sigma}_{rrLC}(r_*, s, p) \cos(sx_*) + \bar{\sigma}_{rrLS}(r_*, s, p) \sin(sx_*)] e^{p\tau} ds dp. \quad (32)$$

Відповідне навантаження для статичної задачі має вигляд:

$$f(x, t) = F_0 H(d - |x - l|), \quad (33)$$

синус та косинус трансформанта Фур'є якого дорівнює:

$$f_S(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \sin(H^*s)}{\sqrt{\pi}s}, \quad f_C(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \cos(H^*s)}{\sqrt{\pi}s}. \quad (34)$$

Після обернення синус та косинус перетворень Фур'є за формулою (30) отримуємо вирази для нормальних переміщень та напружень у просторі оригіналів для статичної задачі:

$$\frac{U_r(r_*, x_*) G_1}{F_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [U_{rC}(r_*, s) \cos(sx_*) + U_{rS}(r_*, s) \sin(sx_*)] ds, \quad (35)$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r_*, x_*)}{F_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\bar{\sigma}_{rrC}(r_*, s) \cos(sx_*) + \bar{\sigma}_{rrS}(r_*, s) \sin(sx_*)] ds. \quad (36)$$

Розглянемо випадок, коли в початковий момент часу $t=0$ в області $|x-l| \leq d, r=b$ прикладається імпульсивне нормальне навантаження F_0 , яке залежить від часу за показниковим законом.

Функція навантаження має вигляд:

$$f(x, t) = F_0 H(|x-l| - d) e^{-t}. \quad (37)$$

Синус та косинус трансформанти навантаження (36) мають вигляд:

$$f_{LS}(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \sin(l^*s)}{\sqrt{\pi}s(p+1)}, \quad f_{LC}(s, p) = \frac{2\sqrt{2}F_0 \sin(d^*s) \cos(l^*s)}{\sqrt{\pi}s(p+1)}. \quad (38)$$

Після обернення синус та косинус перетворень Фур'є за формулою (30), та обернення перетворення Лапласа отримуємо вирази для нормальних переміщень та напружень у просторі оригіналів:

$$\frac{U_r(r_*, x_*, \tau) G_1}{F_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3} i} \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \int_0^\infty [U_{rLC}(r_*, s, p) \cos(sx_*) + U_{rLS}(r_*, s, p) \sin(sx_*)] e^{p\tau} ds dp, \quad (39)$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r_*, x_*, \tau)}{F_0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3} i} \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \int_0^\infty [\bar{\sigma}_{rrLC}(r_*, s, p) \cos(sx_*) + \bar{\sigma}_{rrLS}(r_*, s, p) \sin(sx_*)] e^{p\tau} ds dp. \quad (40)$$

Обчислення невластних інтегралів у виразах (31), (32), (35), (36), (39), (40) здійснювалось наближено з використанням метода Файлона [8, с.76], обернення перетворення Лапласа здійснювалось чисельно за допомогою зміщених поліномів Лежандра [9, с.42].

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\gamma = 30$, $\rho^* = 4$, $\kappa = 0,02$, $d^* = \frac{1}{2}$. Величини r_* , x_* , τ , l^* – змінювались.

Рис. 2 та рис. 3 ілюструють зміну відповідно нормальних переміщень та напружень за осьовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження (28) при $l^* = 5$.

На рис. 4 та рис. 5 зображено зміну відповідно нормальних переміщень та напружень за осьовою координатою для навантаження (28) при $\tau = 1$, $l^* = 5$ при різних значеннях радіальної координати, тобто у пружному півпросторі при віддаленні від границі контакту з оболонкою.

Рис. 6 та рис. 7 ілюструють зміну відповідно нормальних переміщень та напружень за осьовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження (28) при $l^* = 3$.

Рис. 8 та рис. 9 ілюструють зміну відповідно нормальних переміщень та напружень за осьовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження (37) при $l^* = 5$.

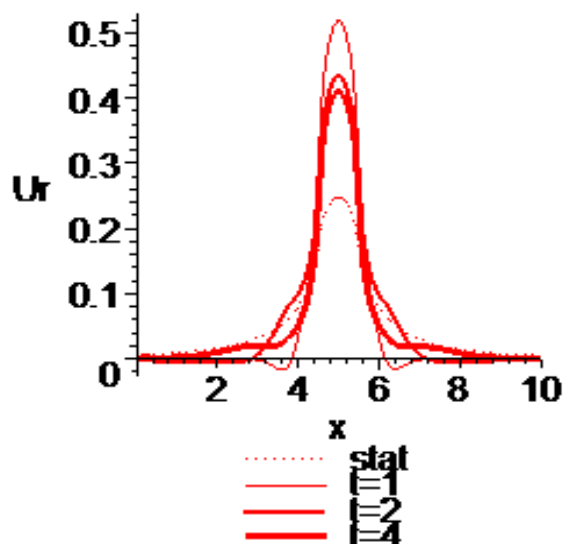


Рис. 2. Зміна нормальних переміщень за осьовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

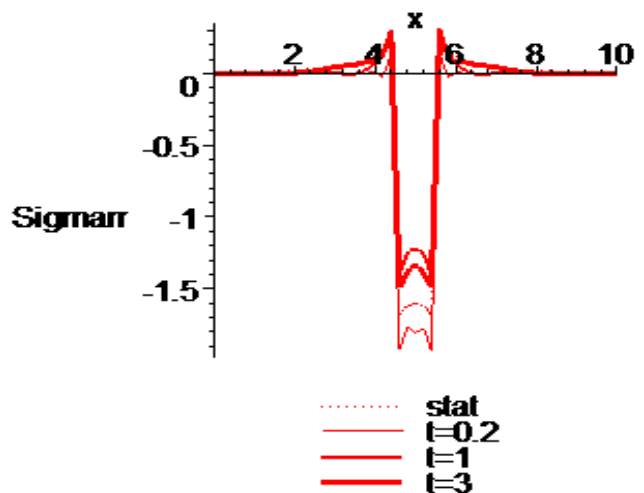


Рис. 3. Зміна нормальних напружень за осьовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

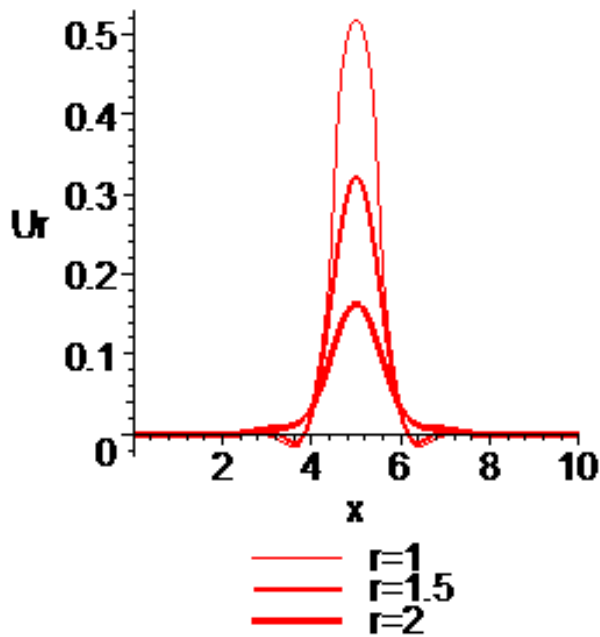


Рис. 4. Зміна нормальних переміщень за осовою координатою при різних значень радіальної координати, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

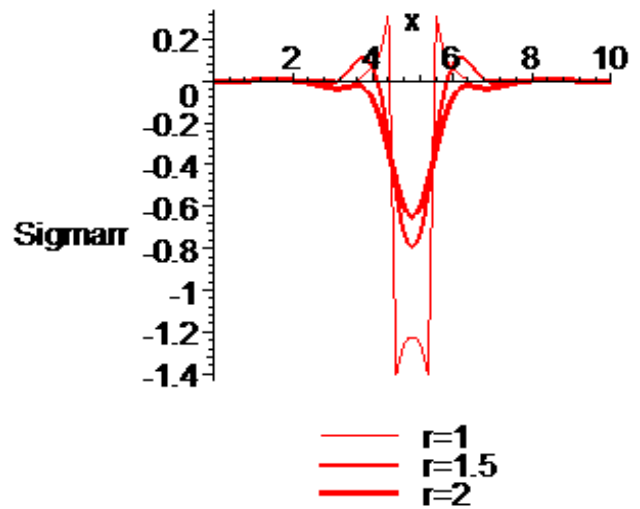


Рис. 5. Зміна нормальних напружень за осовою координатою при різних значень радіальної координати, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

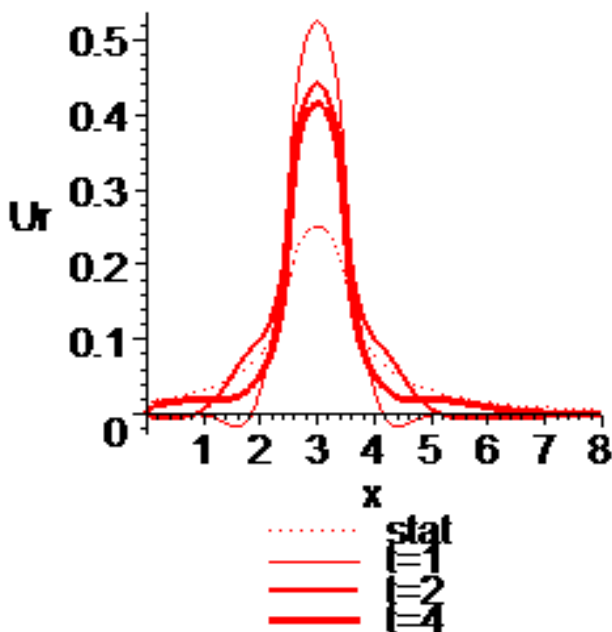


Рис. 6. Зміна нормальних переміщень за осовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

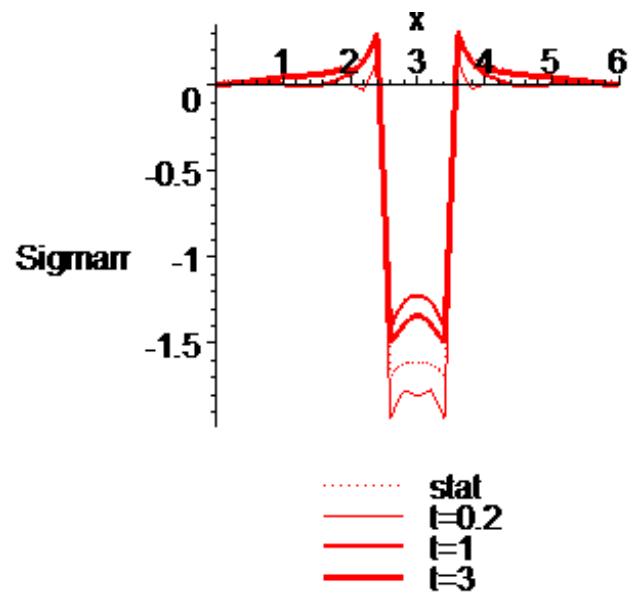


Рис. 7. Зміна нормальних напружень за осовою координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда

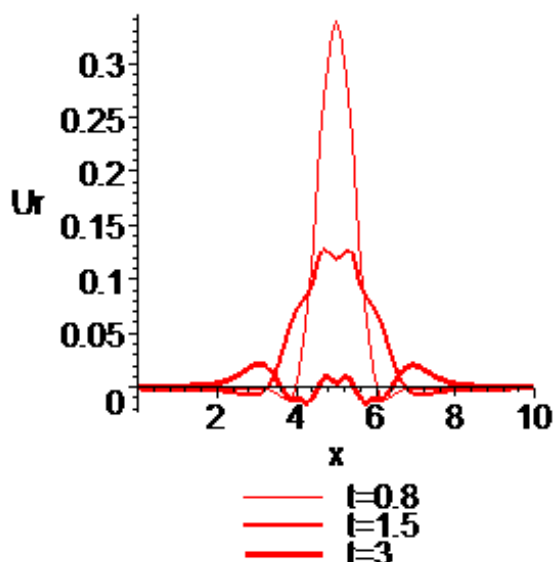


Рис. 8. Зміна нормальних переміщень за осью координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу за показниковим законом

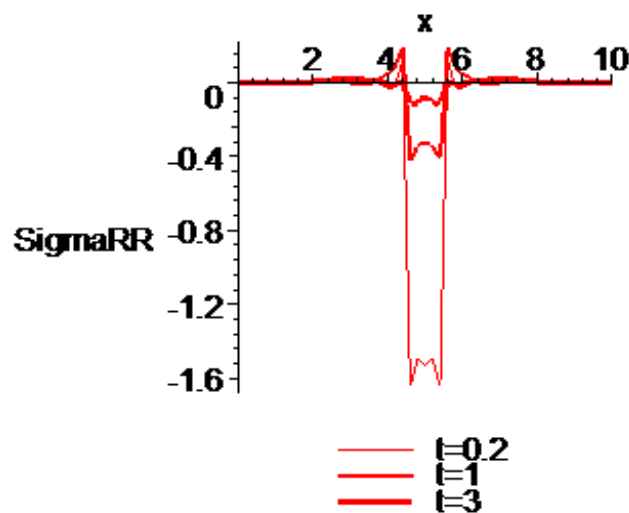


Рис. 9. Зміна нормальних напружень за осью координатою на межі контакту оболонки і пружного півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу за показниковим законом

ВИСНОВКИ

Отримано розв'язок вісесиметричної задачі для циліндричної оболонки, розташованої у пружному півпросторі, на яку діють навантаження, яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда та за експоненціальним законом.

Для навантаження, що залежить від часу за експоненціальним законом, досліджено залежність нормальних переміщень та напружень від глибини прикладення навантаження, та їх розподілення за осової координатою в різні моменти часу.

Для навантаження, що залежить від часу як одинична функція Хевісайда було досліджено розподілення нормальних переміщень та напружень за осовою та радіальною координатою в різні моменти часу та встановлено їх збіжність до статичного розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пожуев В. И. Нестационарная реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на действие неосесимметрической подвижной загрузки / В. И. Пожуев, Жибитай Мохаммед // Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 6. – С. 33-37.
2. Пожуев В. И. Нестационарные колебания трубопровода конечной длины, односторонне взаимодействующего с инерционной средой / В. И. Пожуев, Жибитай Мохаммед // Изв. ВУЗов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 48-50.
3. Пожуев А. В. Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2015. – № 2. – С. 108-114.
4. Пожуев А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 200-213.
5. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
6. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1972. – 432 с.
7. Снеддон И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. – М. : Иностранная литература, 1955. – 668 с.
8. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. – М. : Наука, 1966. – 370 с.
9. Крылов В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. – М. : Наука, 1974. – 223 с.

REFERENCES

1. Pozhuev, V.I. and Zhybitay Mokhammed (1991), "Non-stationary response of cylindrical shells in elastic medium on action of non axi-symmetrical moving load", *Izvestiya VUZov, Stroitelstvo i arkhitektura*, no. 6, pp. 33-37.
2. Pozhuev, V.I. and Zhybitay Mokhammed (1992), "Non-stationary fluctuations of finite length pipeline, unilaterally interacts with inertional medium", *Izvestiya VUZov, Stroitelstvo*, no. 4, pp. 48-50.
3. Pozhuev, A.V. and Fasoliak, A.V. (2015), "Non-stationary non axi-symmetrical deformation cylindrical shell in elastic space subjected to moving surface loads", *Novi materialy i tehnologiyi v metalurgiyi ta mashynobuduvanni*, no. 2, pp. 108-115.
4. Pozhuev, A.V. and Fasoliak, A.V. (2016), "Non-stationar deformation of cylindrical shell in elastic medium, subjected to extended surface loads", *Visnyk of Zaporizkogo natsionalnogo universitetu: Zbirnyk naukovykh statey, Fizyko-matematychni nauky*, no. 1, pp. 200-213.
5. Novatskiy, V. (1975), *Teoriya uprugosti* [Elastic theory], Mir, Moscow, Russia.
6. Volmir, A.S. (1972), *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek* [Non-linear dynamic of planes and shells], Nauka, Moscow, Russia.
7. Sneddon, I. (1955), *Preobrazovanie Furye* [Fourier transform], Inostrannaya literature, Moscow, Russia.
8. Krylov, V.I. and Shulina, L.T. (1966), *Spravochnaya kniga po chislennomu integrirovaniyu* [Handbook of numerical integrations], Nauka, Moscow, Russia.
9. Krylov, V.I. and Skoblya, N.S. (1974), *Metody priblizhonnogo preobrazovaniya Furye i obrascheniya preobrazovaniya Laplasa* [Methods of approximately Fourier transform and inverse of Laplace transform], Nauka, Moscow, Russia.

UDK 539.3

JUSTIFICATION OF THE GENERALIZED FOURIER METHOD FOR THE MIXED PROBLEM OF ELASTICITY THEORY IN THE HALF-SPACE WITH THE CYLINDRICAL CAVITY

Protsenko V. S., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Ukraynets N. A.

*National Aerospace University named after N.Ye. Zhukovskiy «Kharkiv Aviation Institute»,
Chkalova str., 17, Kharkiv, 61070, Ukraine*

nattalja2004@mail.ru

The mixed problem of the elasticity theory for the homogeneous isotropic half-space with the infinite circular cylindrical cavity, parallel to the boundary of the half-space, is considered. These investigations are of practical interest in connection with problems of geomechanics and geotechnical engineering. The aim of the work is to substantiate and to apply the research method of the stress-strain state of elastic half-space with a circular cylindrical cavity in the case when the stresses are set on a half-space boundary and the displacements are set on a cavity surface.

A boundary value problem for the Lamé equation with the appropriate boundary conditions in the given domain is solved by the generalized Fourier method. The general solution of the boundary value problem is presented as a superposition of the external basis solutions of the Lamé equation for the cylinder and the internal basis solutions for the half-space. The addition theorems of the basis solutions of the Lamé equations for the cylinder and the half-space allow to satisfy the boundary conditions and to reduce the problem to the infinite system of linear algebraic equations which is solved by the reduction method. It is proved that the operator of the system is quite continuous in space l_2 . The results of numerical calculations have been presented.

Key words: generalized Fourier method; elastic half-space; cylindrical cavity; basis solutions of the Lamé equation; addition theorems; reduction method.

ОБОСНОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Проценко В. С., д. ф.-м. н., профессор, Украинец Н. А., ст. преподаватель

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
ул. Чкалова, 17, г. Харьков, 61070, Украина*

nattalja2004@mail.ru

Рассматривается смешанная задача теории упругости для однородного изотропного полупространства с бесконечной круговой цилиндрической полостью, параллельной его границе. Эта задача представляет практический интерес в связи с проблемами геомеханики и геотехнической инженерии. Цель работы – обоснование и применение метода исследования напряженно-деформированного состояния упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью в случае, когда на границе полупространства заданы напряжения, а на поверхности полости – перемещения. Решение однородного уравнения Ламе с соответствующими граничными условиями в этой области найдено обобщенным методом Фурье. Общее решение задачи представляется в виде суперпозиции базисных решений для цилиндра и полупространства. С помощью теорем сложения этих решений удовлетворяются граничные условия и задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказана теорема о том, что оператор системы является вполне непрерывным в пространстве l_2 . Это позволяет решать систему методом редукции. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: обобщенный метод Фурье; упругое полупространство; цилиндрическая полость; базисные решения уравнения Ламе; теоремы сложения; метод редукции.

ОБҐРУНТУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ФУР'Є ДЛЯ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В НАПІВПРОСТОРІ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

Проценко В. С., д. ф.-м. н., професор, Українець Н. А., ст. викладач

*Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»,
вул. Чкалова, 17, м. Харків, 61070, Україна*

nattalja2004@mail.ru

У статті розглядається мішана задача теорії пружності для однорідного ізотропного напівпростору з нескінченною круговою циліндричною порожниною, паралельною до його поверхні. Ця задача становить практичний інтерес у зв'язку з проблемами геомеханіки і геотехнічної інженерії. Метою дослідження є обґрунтування і застосування методу дослідження напружено-деформованого стану пружного напівпростору з круговою циліндричною порожниною у разі, коли на поверхні напівпростору задані напруження, а на поверхні порожнини – переміщення. Розв'язок однорідного рівняння Ламе з відповідними граничними умовами в цій області знайдено за допомогою узагальненого методу Фур'є. Загальний розв'язок задачі представляється у вигляді суперпозиції базисних розв'язків для циліндра і напівпростору. За допомогою теорем додавання цих розв'язків задовольняються граничні умови і задача зводиться до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Доведено теорему про те, що оператор системи є цілком неперервним у просторі l_2 . Це дозволяє розв'язати систему методом редукції. Представлені результати чисельних розрахунків.

Ключові слова: узагальнений метод Фур'є; пружний напівпростір; циліндрична порожнина; базисні розв'язки рівняння Ламе; теореми додавання; метод редукції.

INTRODUCTION

Questions of calculation of strength and reliability arise in the design of underground tunnels, mines and mining [1, p.24]. As a model of such objects we can use an infinite hollow cylinder in an elastic half-space. We can consider this domain as a multiply connected elastic body and solve the main problems of the elastic theory for this body, in particular, determine the stress and the strain near a cylindrical surface.

The stress-strain state of an elastic half-space having a cavity of finite size has been studied intensively by many authors. For an infinite half-space with the cylindrical cavity the main problems of the potential theory and the elastic theory have been considered in the papers [2, p.52;

3, p.102; 4, p.17; 5, p.189; 6, p.192]. The generalized Fourier method [7, p.83] was used for the solution of these problems. However justification of this method to the solution of the mixed problem of the elastic theory was not given.

The aim of this work is justification and applying of the generalized Fourier method for investigation of the stress-strain state of an elastic half-space with a circular cylindrical cavity in a case when the stresses are set on a half-space boundary and the displacements are set on a cavity surface. This problem is of special interest for practice.

FORMULATION OF THE PROBLEM

Denote by Ω a half-space with an infinite circular cylindrical cavity. Suppose the cylinder is parallel to the boundary of the half-space. The domain Ω is filled with a homogeneous isotropic elastic medium. We introduce a rectangular Cartesian coordinate system $\{x, y, z\}$ and a cylindrical coordinate system $\{\rho, \varphi, z\}$. The z -axis coincides with the cylinder axis. The y -axis is directed vertically upward. Let S_1 ($y = h$) be the boundary of the half-space, and S_2 ($\rho = a$) the surface of the cylinder. Here, a is radius of the cylinder, and h is the distance between the cylinder axis and the boundary of the half-space, with $a < h$. The domain Ω is defined by the system of inequalities $\{y < h, \rho > a\}$.

Consider the boundary value problem for the Lamé equation

$$\Omega: \Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0, \tag{1}$$

$$F\vec{u}|_{S_1} = F\vec{u}_{01}(x, z), \tag{2}$$

$$\vec{u}|_{S_2} = \vec{u}_{02}(\varphi, z), \tag{3}$$

where σ is the Poisson's ratio. We use the generalized Fourier method for the solution of the problem (1)-(3).

GENERALIZED FOURIER METHOD

According to the generalized Fourier method, the system of basis solutions of the Lamé equation is introduced for each boundary surface of the domain Ω . These solutions are written in the coordinate system associated with the corresponding surface.

We seek the general solution of the boundary value problem as superposition of the basis solutions with unknown integral densities and unknown series coefficients. These integral densities and series coefficients are determined by the boundary conditions.

The basis solutions of the Lamé equation for the half-space and the cylinder are constructed in the papers [2, p.53; 3, p.103]. These solutions are written in the Cartesian and the cylindrical coordinate systems respectively. By $\vec{u}_k^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ denote the internal (external) basis solutions for the half-space. They are the vector functions regular in $\{y < h\}$ ($\{y > h\}$). By $\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ ($\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$) denote the internal (external) basis solutions for the cylinder. They are the vector functions regular in $\{\rho < a\}$ ($\{\rho > a\}$). These basis solutions have the form

$$\vec{u}_i^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) = N_i^{(1)} u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu),$$

$$\vec{u}_2^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) = \frac{4(\sigma-1)}{\lambda} u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla (y u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu)),$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(2)} r_m(\rho, \varphi, z; \lambda),$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(2)} s_m(\rho, \varphi, z; \lambda).$$

Here

$$N_1^{(j)} = \frac{1}{\lambda} \nabla, \quad N_3^{(j)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(j)}),$$

$$N_2^{(2)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + (4\sigma - 4) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right],$$

$$i = 1, 3, \quad j = 1, 2, \quad k = 1..3, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

In these expressions the vectors $\vec{e}_j^{(k)}$ are the orts of the Cartesian ($k=1$) and cylindrical ($k=2$) coordinate system, and the functions $u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu)$, $r_m(\rho, \varphi, z; \lambda)$, $s_m(\rho, \varphi, z; \lambda)$ represent the Cartesian and cylindrical basis solutions of the Laplace equation [8, p.58, p.73]

$$u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) = e^{i\mu x + i\lambda z \pm \gamma y},$$

$$r_m(\rho, \varphi, z; \lambda) = e^{im\varphi + i\lambda z} I_m(\lambda\rho),$$

$$s_m(\rho, \varphi, z; \lambda) = (\text{sign}\lambda)^m e^{im\varphi + i\lambda z} K_m(|\lambda|\rho),$$

where $I_m(\lambda\rho)$, $K_m(|\lambda|\rho)$ are the modified Bessel functions of the first and second kind of order m respectively, $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\lambda, \mu \in (-\infty, \infty)$.

The general solution of the boundary value problem (1)-(3) can be represented as a superposition of the external basis solutions of the Lamé equation for the cylinder $\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ and the internal basis solutions for the half-space $\vec{u}_p^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int B_{km}(\lambda) \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda + \sum_{p=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int H_p(\lambda, \mu) \vec{u}_p^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) d\mu d\lambda. \quad (4)$$

In our case $B_{km}(\lambda)$ and $H_p(\lambda, \mu)$ are unknown integral densities.

Consider the boundary conditions (2) and (3). We write the second term of the expression (4) in the cylindrical coordinate system. Then, to satisfy the boundary condition (3) we apply the re-expansion formulas of the internal basis solutions for the half-space $\vec{u}_p^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ on the internal cylindrical basis solutions $\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ [2, p.53]. We obtain a system of linear algebraic equations with respect to the integral densities $B_{km}(\lambda)$ ($k=1..3, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Let $D_1^m(|\lambda|a, \sigma)$ be the determinant of this system. This determinant is not equal to zero and bounded below [4, p.20]

$$D_1^m(|\lambda|a, \sigma) \geq 4(1-2\sigma) \prod_{\alpha=-1}^1 K_{m+\alpha}(|\lambda|a). \quad (5)$$

To satisfy the boundary condition (2), we write the first term of the expression (4) using the re-expansion formulas of the external cylindrical basis solutions $\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ on the external basis solutions for the half-space $\vec{u}_i^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ [2, p.54]. We obtain a system of linear algebraic

equations defining the functions $H_p(\lambda, \mu)$ ($p=1..3$). Let $D_2(\lambda, \mu)$ be the determinant of this system. This determinant is given by $D_2(\lambda, \mu) = -4G^3\gamma^4 e^{3\gamma h} / \lambda^2$, where G is the shear modulus. This determinant is not equal to zero. Solving this system, we express the integral densities $H_p(\lambda, \mu)$ in terms $B_{km}(\lambda)$. As a result the first system of linear algebraic equations reduces to the infinite system of linear algebraic equations defining $B_{km}(\lambda)$

$$B_{km}(\lambda) = \sum_{j=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{kj}^{mn}(\lambda) B_{jn}(\lambda) + Q_k^m(\lambda),$$

$$k = 1..3, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{6}$$

This system can be rewritten as $(I + G)\vec{b} = \vec{q}$, where G is an operator of the system, I the unit operator, \vec{b} the column vector of the unknowns $B_{jn}(\lambda)$, and \vec{q} the column vector of right part $Q_k^m(\lambda)$.

Theorem *The operator G of the system (6) is quite continuous in l_2 if boundary surfaces S_1 and S_2 are not intersect ($a < h$).*

Proof. Consider a double series

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_{kj}^{mn}(\lambda)|, \tag{7}$$

where $k, j = 1..3$. Let's prove the convergence of this series. The functions $G_{kj}^{mn}(\lambda)$ include the integrals reducible to the Laplace integral. The Laplace integral may be given by $2K_{m+n+\alpha}(2\lambda h)$, where $\alpha \in N$. The series (7) contains expressions

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{f_1^{mp}(|\lambda|a) f_2^{mr}(|\lambda|a) f_3^{ms}(\lambda a)}{(m^2 + 1) I_m(\lambda a) D_1^m(|\lambda|a, \sigma)} \right| \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2 + 1) |I_n(\lambda a) K_{m+n+\alpha}(2\lambda h)|. \tag{8}$$

Here $f_1^{mp}(|\lambda|a)$ is one of the functions $K_{m+p}(|\lambda|a)$ ($p \neq 0$), $\left(\rho \frac{\partial K_{m+p}(|\lambda|\rho)}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=a}$,

$f_2^{mr}(|\lambda|a) = K_{m+r}(|\lambda|a)$, $f_3^{ms}(\lambda a)$ is one of the functions $I_{m+s}(\lambda a)$, $\left(\rho \frac{\partial I_{m+s}(\lambda\rho)}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=a}$, with $p = 0, \pm 1, r = \pm 1, s = 0, \pm 1$.

Assume that $\lambda > 0$. We write the addition theorem for the modified Bessel functions

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{m+n}(\lambda y) I_n(\lambda x) \cos n\varphi = K_m(\lambda z) \cos m\phi, \tag{9}$$

where $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}$, $\sin \phi = \frac{x}{z} \sin \varphi$. Differentiating this equality on a variable φ twice, we will put $\varphi = 0, \phi = 0, x = a, y = 2h$, then

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 K_{m+n}(2\lambda h) I_n(\lambda a) = \frac{\lambda ah}{\xi} [K_{m+1}(\lambda \xi) + K_{m-1}(\lambda \xi)], \tag{10}$$

where $\xi = 2h - a$. On applying the equalities (9), (10), we summarize the series (8) over an index n and obtain

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{f_1^{mp}(\lambda a) f_2^{mr}(\lambda a) f_3^{ms}(\lambda a)}{(m^2 + 1) I_m(\lambda a) D_1^m(|\lambda| a, \sigma)} \times \left(K_{m+\alpha}(\lambda \xi) + \frac{\lambda a h}{\xi} (K_{m+\alpha+1}(\lambda \xi) + K_{m+\alpha-1}(\lambda \xi)) \right). \quad (11)$$

By $L(\lambda, a, h)$ denote the expression (11). Taking into account the estimate (5), we get

$$L(\lambda, a, h) < \frac{1}{4(1-2\sigma)} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{f_1^{mp}(\lambda a) f_2^{mr}(\lambda a) f_3^{ms}(\lambda a)}{K_m(\lambda a) K_{m-1}(\lambda a) K_{m+1}(\lambda a)} \times \left(\frac{K_{m+\alpha}(\lambda(\xi))}{(m^2 + 1) I_m(\lambda a)} + \frac{\lambda a h}{\xi} \frac{K_{m+\alpha+1}(\lambda \xi) + K_{m+\alpha-1}(\lambda \xi)}{(m^2 + 1) I_m(\lambda a)} \right). \quad (12)$$

By $L_{prs}^\alpha(\lambda, a, h)$ denote a series contained in right part of this inequality. For example,

$$L_{-110}^0(\lambda, a, h) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + 1) K_m(\lambda a)} \left((K_m(\lambda \xi) + \frac{\lambda a h}{\xi} (K_{m-1}(\lambda \xi) + K_{m+1}(\lambda \xi))) \right).$$

Using the addition theorem (9) and the inequality [9, p.426]

$$\frac{1}{K_m(\nu)} \leq 4\sqrt{\pi} e(1+\nu) m^2 I_m(\nu),$$

with $\nu > 0$, $|m| \geq 1$, it can be shown that $L_{-110}^0(\lambda, a, h)$ is bounded above by a continuous positive function of λ $L_{-110}^0(\lambda, a, h) \leq g(\lambda)$. The function $g(\lambda)$ has a finite limit at the point $\lambda = 0$, and $g(\lambda) \rightarrow 0$ as $\lambda \rightarrow \infty$. The function $L_{-110}^0(\lambda, a, h)$ is positive and bounded for all $\lambda \in [0, \infty)$

$$L_{-110}^0(\lambda, a, h) \leq \max_{\lambda \in [0, \infty)} L_{-110}^0(\lambda, a, h) = \tilde{L}_{-110}^0,$$

where $\tilde{L}_{-110}^0 = const$.

Similarly, it can be proved that the function $L_{prs}^\alpha(\lambda, a, h)$ is positive and bounded above for all values p, r, s and α . It follows that series (7) converges for positive values of the λ under the condition $a < h$. Under the same condition the series made from the squares of the modules $|G_{kj}^{mn}(\lambda)|^2$ also converges.

The case of the negative values λ is reduced to previous by means of replacement $\lambda = -\kappa$, with $\kappa > 0$.

Hence the series $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_{kj}^{mn}(\lambda)|^2$ converges for all $\lambda \in (-\infty, \infty)$ under the condition $a < h$, and the operator G of the system (6) is quite continuous in l_2 . The **Theorem** is proved.

In the same way, it can be proved that under the condition $a < h$ the series made from the modules of the right parts $|Q_k^m(\lambda)|$ of the system (6) converges for all $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Thus, the right parts $Q_k^m(\lambda)$ of the system (6) belong to the space l_2 .

From Gilbert's alternative and belonging the right parts of (6) to the space l_2 , it follows that the system of equations (6) is solvable and has a unique solution in the space l_2 . An approximate solution of the problem can be obtained by the reduction method.

RESULTS

According to a reduction method, the infinite system of the linear algebraic equations for the unknown integral densities $B_{km}(\lambda)$ was replaced by the finite system of the linear algebraic equations. To estimate the rate of convergence for the method we calculate an approximation of the function \bar{u} on the cylinder surface and of the function $F\bar{u}$ on the boundary of the half-space. We consider that the solution is found if an error of approximation of the boundary conditions does not exceed 10^{-6} .

We compute the solution of the problem (1)-(3) for the functions $F\bar{u}_{01}(x, z)/(2G) = (0, -\cos(\lambda z)/(1+(x/l)^2), 0)$ and $\bar{u}_{02}(\varphi, z) = \vec{0}$ and for various values of a geometrical parameter $\varepsilon = a/h$. Calculations show that the stresses in the body concentrate near the cavity surface. The stress distribution on the cylinder is presented in Fig. 1, 2.

Fig. 1 shows the normal stresses σ_ρ , σ_φ and the tangential stress $\tau_{\rho\varphi}$ on the cylinder surface in a plane $z=0$ for $\varepsilon=0.3$, $\sigma=0.25$, $\lambda=1$ and $l=1$. The dimensionless stresses are presented. They are non-dimensionalized by division by Young's modulus. The σ_ρ component reaches the greatest values. At $\varphi \in [0, \pi]$ σ_ρ is compressive stress and at $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ is tensile stress.

Fig. 2 gives the σ_ρ on the cylinder surface for various values of the parameter ε . The stress in the body significantly depends on the geometrical parameter ε . They sharply increase as $\varepsilon \rightarrow 1$. The largest compressive stresses act in the domain between the boundary of the half-space and the cavity. The largest tensile stresses arise in symmetrically located areas under the cylinder at $\varphi \approx 7\pi/6$ and $\varphi \approx 11\pi/6$. The occurrence of the tensile stresses can lead to destruction of the elastic body.

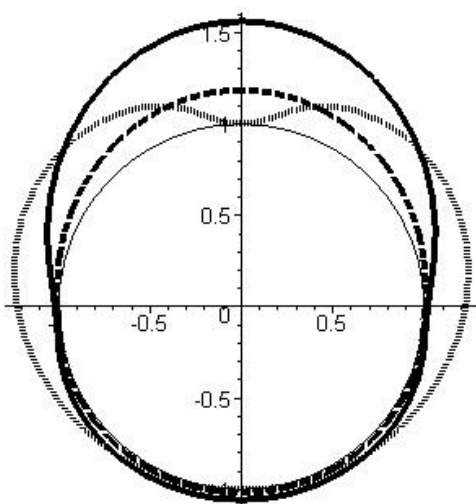


Fig. 1. The stress distribution on the cylinder surface: σ_ρ (solid line), σ_φ (dashed line) and $\tau_{\rho\varphi}$ (dotted line)

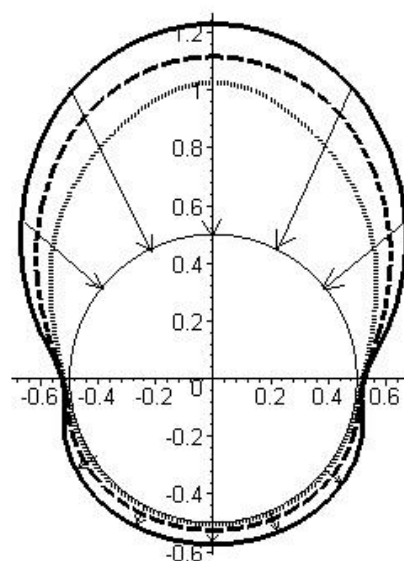


Fig. 2. The normal stress σ_ρ on the cylinder surface for $\varepsilon = 0.3$ (dotted line), $\varepsilon = 0.5$ (dashed line) and $\varepsilon = 0.9$ (solid line)

In conclusion we note that the known numerical methods of solution of the space problems for the multiply connected elastic body, for example, a finite element method, are not applicable for the infinite domains and are ineffective in case of close located boundary surfaces. The generalized Fourier method, used in the present paper, allows to obtain the solution in case of close located boundary surfaces by rather small increase in an order of the system of the linear algebraic equations.

CONCLUSIONS

The mixed problem of the elastic theory for a half-space with a circular cylindrical cavity is considered. The generalized Fourier method is used for the solution of the problem. Application of addition theorems of the basis solutions of the Lamé equation for the half-space and for the cylinder allows to satisfy the boundary conditions and to reduce the problem to the infinite system of the linear algebraic equations. The theorem that the operator of the system is quite continuous in space l_2 was proved. The system was solved by a reduction method. Results of calculations have been discussed.

REFERENCES

1. Hai-Sui Yu. Cavity Expansion Methods in Geomechanics / Yu. Hai-Sui. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000. – 385 p.
2. Проценко В. С. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью / В. С. Проценко, Н. А. Попова // Доповіді НАН України. – 2004. – № 12. – С. 52–58.
3. Попова Н. А. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью / Н. А. Попова // Вісник Харківського національного університету. Серія Математика, прикладна математика і механіка. – 2004. – № 645. – С. 102–107.
4. Проценко В. С. Смешанная задача для упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью / В. С. Проценко, Н. А. Українець // Теоретическая и прикладная механика. – Донецк, 2006. – № 42. – С. 17–22.
5. Проценко В. С. Применение обобщенного метода Фурье для решения задач теории потенциала и теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / В. С. Проценко, Н. А. Українець // Современные проблемы математики, механики и информатики: сборник статей / [под ред. Н. Н. Кизиловой, Г. Н. Жолткевича]. – Харьков : Апостроф, 2011. – 452 с. – С. 189–200.
6. Проценко В. С. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / В. С. Проценко, Н. А. Українець // Вісник Запорізького нац. ун-ту: Збірн. наук. ст. Фіз.-мат. науки. – Запоріжжя : Запорізький нац. ун-т, 2015. – № 2. – С. 192–201.
7. Проценко В. С. Решение пространственных задач теории упругости с помощью формул переразложения / В. С. Проценко, А. Г. Николаев // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22, № 7. – С. 83–89.
8. Ерофеенко В. Т. Теоремы сложения: Справочник / В. Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 255 с.
9. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. – М. : Мир, 1980. – 608 с.

REFERENCES

1. Hai-Sui, Yu. (2000), *Metody rasshireniya polosty v geomehanike* [Cavity Expansion Methods in Geomechanics], Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.
2. Protsenko, V.S. and Popova, N.A. (2004), “The second boundary-value problem of elasticity theory for the semispace with the circular cylindrical cavity”, *Dopovidi NAN Ukrainy*, no. 12, pp. 52-58.

3. Popova, N.A. (2004), "Analysis of the stress-strained state of an elastic semispace with the circular cylindrical cavity", *Visnyk kharkivskogo natsionalnogo universytetu, seriia Matematika, prykladna matematika i mekhanika*, no. 645, pp. 102-107.
4. Protsenko, V.S. and Ukrainets, N.A. (2006), "The mixed problem for an elastic semispace with a circular cylindrical cavity", *Teoreticheskaia i prikladnaia mekhanika, Sbornik nauchnykh trudov*, no. 42, pp. 17-22.
5. Protsenko, V.S. and Ukrainets, N.A. (2011), "Application of the generalized Fourier method to solving the problems of potential theory and elasticity theory in the semispace with the cylindrical cavity", *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki i informatiki, Sbornik statey*, Edited by Kizilova, N.N. and Zholtkevich, G.N., Apostrof, Kharkiv, pp. 189-200.
6. Protsenko, V.S. and Ukrainets, N.A. (2015), "Application of the generalized Fourier method to solve the first basic problem of elasticity theory for the semispace with the cylindrical cavity", *Visnyk zaporizkogo natsionalnogo universytetu, Fyzyko-matematychni nauky*, no. 2, pp. 192-201.
7. Protsenko, V.S. and Nikolaev, A.G. (1986) "Solving spatial problems of elasticity theory by means of formulas reexpansion", *International Applied Mechanics*, vol. 22, no. 7, pp. 83-89.
8. Yerofeenko, V.T. (1989), *Teoremy slozheniia. Spravochnik* [Addition theorems. Handbook], Nauka i tekhnika, Minsk, Belorussia.
9. Lyuk, Yu. (1980), *Spetsialnye matematicheskie funktsii i ikh approksimatsii* [Special mathematical functions and their approximations], Nauka, Moskow, Russia.

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛАСТОМЕРНОГО ВИБРОИЗОЛЯТОРА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Решевская Е. С., Науменко Д. А.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, Украина*

naymwm@gmail.com

Рассматривается задача определения деформированного состояния эластомерного элемента сложной геометрической формы при различных механических характеристиках резины. Эластомерный материал имеет ряд уникальных свойств – высокую механическую прочность, эластичность и слабую сжимаемость. В связи с этим для адекватного описания поведения конструкций из эластомеров в условиях эксплуатации нужны специальные приемы и методы решения поставленных задач. Приведен обзор различных подходов к решению проблемы нахождения напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов методом конечных элементов. Все рассмотренные методы основаны либо на системе упрощающих гипотез, либо имеют вид, не удобный для использования в расчетах, либо позволяют производить расчеты лишь для частных случаев конкретных постановок задач.

Для расчетов была применена схема конечного элемента, которая заключается в тройной аппроксимации полей перемещений, деформаций и функции изменения объема. Причем порядок разложения деформации и функции изменения объема должен находиться в строгом соответствии с порядком разложения перемещений. Данная схема получила название моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемого материала.

При выборе рациональных параметров резиновых деталей машин большое значение имеет правильная оценка технических свойств резин, применяемых в современном машиностроении. Проведен расчет деформированного состояния эластомерного виброизолятора при различных механических характеристиках. Приведенные результаты численных расчетов могут быть применены при выборе марки резины для практического применения.

Ключевые слова: эластомеры, виброизоляторы, моментная схема конечного элемента, деформированное состояние.

ОСОБЛИВОСТІ ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЕЛАСТОМЕРНОГО ВІБРОІЗОЛЯТОРУ ПРИ РІЗНИХ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Решевська К. С., Науменко Д. А.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, Україна*

naymwm@gmail.com

Розглядається задача визначення деформованого стану еластомерного елемента складної геометричної форми при різних механічних характеристиках гуми. Еластомерний матеріал має ряд унікальних властивостей – високу механічну міцність, еластичність і слабку стисливість. У зв'язку з цим для адекватного опису поведінки конструкцій з еластомерів в умовах експлуатації потрібні спеціальні прийоми і методи розв'язання поставлених задач. Наведений огляд різних підходів до вирішення проблеми знаходження напружено-деформованого стану еластомерних елементів методом скінченних елементів. Усі розглянуті методи ґрунтуються або на системі спрощуючих гіпотез, або мають вигляд, не зручний для використання в розрахунках, або дозволяють робити розрахунки лише для окремих випадків конкретних постановок задач.

Для розрахунків була застосована схема скінченного елемента, яка полягає в потрібній апроксимації полів переміщень, деформацій і функції зміни об'єму. Причому порядок розкладання деформації і функції зміни об'єму повинен перебувати в суворій відповідності з порядком розкладання переміщень. Ця схема отримала назву моментної схеми скінченного елемента для слабкостисливого матеріалу.

При виборі раціональних параметрів гумових деталей машин велике значення має правильна оцінка технічних властивостей гум, вживаних в сучасному машинобудуванні. Проведений розрахунок деформованого стану еластомерного віброізолятора при різних механічних характеристиках. Наведені результати чисельних розрахунків можуть бути застосовані при виборі марки гуми для практичного застосування.

Ключові слова: еластомери, віброізолятори, моментна схема скінченного елемента, деформований стан.

FEATURES OF THE DEFORMED STATE OF ELASTOMERIC VIBROINSULATOR AT DIFFERENT MECHANICAL CHARACTERISTICS

Reshevskaya E. S., Naumenko D. A.

*Zaporizhzhya national university,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine*

naymwm@gmail.com

The task of determination of the deformed state of elastomeric element of difficult geometrical form at different mechanical descriptions of rubber is examined is considered. Elastomeric material has a number of unique properties - high mechanical wearability, elasticity and weak compressibility. In this regard, for adequate description of behavior of constructions from elastomers in the conditions of exploitation the special receptions and methods of decision of the objectives are needed. In the article the review of the different approaches to the decision of problem of finding of the stress-deformed state of elastomeric elements by the finite-element method is provided. All considered methods are based either on the system of simplifying hypotheses, either look like not user-friendly in calculations or allow to produce calculations only for the special cases of the concrete raising of tasks. For calculations the chart of eventual element, that consists in triple approximation of the movement fields, deformations and change of volume function, was applied. Thus an order of decomposition of deformation and the change volume function must be according to the order of movement expansion. This scheme got the name of moment scheme of finite element for weak compressibility material.

At the choice of rational parameters of rubber details of machines the correct estimation of technical properties of the rubbers applied in a modern engineer has a large value. The calculation of the deformed state of elastomeric vibroinsulator is conducted at different mechanical descriptions. The given results of numeral calculations can be applied at the choice of rubber brand for practical application.

Key words: elastomers, vibration isolators, moment scheme of finite elements, deformed state.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе эксплуатации машины, приборы и аппаратура подвергаются ударным, вибрационным и сейсмическим нагрузкам, которые вызывают необратимые ухудшения их эксплуатационно-технических характеристик и могут привести к выходу их из строя. С целью снижения вибрационных и сейсмических нагрузок применяют различные виброизолирующие конструкции (упругие, упруго-демпферные и демпферные опоры, резиновые прокладки и амортизаторы, виброизолирующие покрытия и т.д.). Виброизолирующие конструкции на основе эластомерных материалов по многим параметрам превосходят традиционные системы того же назначения и позволяют находить принципиально новые конструктивные решения ответственных узлов современных технических систем.

Возрастающее использование эластомерных материалов во многих областях современной техники приводит к необходимости описания с высокой точностью характеристик напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов конструкций. Повсеместное использование эластомеров в нефтегазовой промышленности, машиностроении, гражданском строительстве, кораблестроении, авиационной и аэрокосмической технике ставит широкий круг исследовательских задач.

Эластомерный материал имеет ряд уникальных свойств – высокую механическую прочность, эластичность и слабую сжимаемость. В связи с этим для адекватного описания поведения конструкций из эластомеров в условиях эксплуатации нужны специальные приемы и методы решения поставленных задач. Разработано несколько подходов к решению данной проблемы. Так, в работах С. Шарда, Н. Чогеля [1], Р. Пэнна [2], С.И. Дымникова [3], К.Ф. Черных, И.М. Шубиной [44] предлагается введение различных выражений упругой энергии деформации, которые имеют различные формы добавки члена, учитывающие слабую сжимаемость эластомера. Данные добавки определяются из условий: сжимаемости Мурнагана, сжимаемости при малых деформациях, сжимаемости Тэта и др. В работе Л.Р. Германа вводится смешанный вариационный принцип, в котором используется варьирование компоненты перемещений и среднего напряжения. Данный подход получил свое развитие в работах Т. Пиана, П. Тонга [5], С. Ли, Д. Малкуса [6], Дж. Одена [7]. В работах О.С. Зенкевича [8], И. Фрида [99], Дж. Одена [10] и др. для учета слабой сжимаемости эластомера был предложен способ сокращенного интегрирования, заключающийся в том, что поля перемещений и величины, ответственные за слабую сжимаемость, аппроксимируются разными функциями.

Среди недавних разработок, посвященных расчету напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов, можно выделить работу С.А. Кабриц, В.М. Малькова, С.Е. Мансуровой [11]. Предлагаемый ими метод предназначен для решения двумерных нелинейных краевых задач слоя, а не трехмерных краевых задач теории упругости. Уравнения слоя не содержат особенностей, связанных с малой сжимаемостью материала и малой толщиной слоя.

В работах С.П. Копысова, А.К. Новикова [12] для решения подобных задач предлагается смешанный разрывный метод Галеркина, принадлежащий к классу конечно-элементных методов, в которых используется кусочно-полиномиальные пространства для поиска численного решения.

Таким образом, все рассмотренные методы, позволяющие решать проблему, возникающую в математическом аппарате МКЭ при расчете напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов, основаны либо на системе упрощающих гипотез, либо имеют вид, не удобный для использования в расчетах, либо позволяют производить расчеты лишь для частных случаев конкретных постановок задач. В связи с этим возникает необходимость в применении гибридных схем МКЭ в форме метода перемещений на базе вариационного принципа Лагранжа. Такая схема была разработана В.В. Киричевским [13], им был

предложен подход к выводу соотношений матрицы жесткости конечного элемента, заключающийся в тройной аппроксимации полей перемещений, деформаций и функции изменения объема. Причем порядок разложения деформации и функции изменения объема должен находиться в строгом соответствии с порядком разложения перемещений. Данная схема получила название моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемого материала.

МОМЕНТНАЯ СХЕМА КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Моментная схема конечного элемента основана на введении тройной аппроксимации: полей перемещений, деформаций и функции изменения объема. Причем порядок разложения деформаций и функции изменения объема выбирается с таким расчетом, чтобы исключить все компоненты деформаций, реагирующие на жесткие смещения и эффект «ложного сдвига», и все компоненты функции изменения объема, реагирующие на слабую сжимаемость эластомера.

Вывод матрицы жесткости трехмерного конечного элемента основывается на вариации упругой энергии деформации:

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (1)$$

σ^{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, V – заданный объем.

Учитывая закон Гука в форме:

$$\sigma^{ij} = 2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda \theta g^{ij}, \quad (2)$$

где μ, λ – коэффициенты Ляме, g^{ik}, g^{jl}, g^{ij} – компоненты тензора упругих постоянных, $\theta = \varepsilon_{ii}$ – функция объемного сжатия, имеем

$$\delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda \theta g^{ij}) \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (3)$$

или

$$\delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta \theta) dV. \quad (4)$$

Для построения матрицы жесткости конечного элемента внутри конечного элемента проводится тройная аппроксимация: полей перемещений $u_{k'}$, компонент тензора деформаций ε_{ij} и функции изменения объема θ .

Аппроксимация перемещений имеет вид:

$$u_{k'} = \sum_{pqr} \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (5)$$

где $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коэффициенты разложения; $\psi^{(pqr)}$ – набор степенных координатных функций вида:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x^1)^p (x^2)^q (x^3)^r}{p!q!r!}, \quad (6)$$

где $p=0,1,2,3$, $q=0,1,2,3$, $r=0,1,2,3$ – степени аппроксимирующего полинома по соответствующим направлениям.

Компоненты тензора деформаций аппроксимируются путем разложения компонент ε_{ij} в ряд Маклорена в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg}^{(ij)} e_{ij}^{(stg)} \psi^{(stg)}, \quad (7)$$

где $\{\psi_{ij}\}$ – степенные координатные функции, а коэффициенты e_{ij} записываются следующим образом в матричной форме:

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{s'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (8)$$

Аппроксимация функции изменения объема записывается следующим образом:

$$\theta = \sum_{a=0}^0 \sum_{b=0}^0 \sum_{c=0}^2 \xi^{(\alpha\beta\gamma)} \psi^{(\alpha\beta\gamma)}, \quad (9)$$

где $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$ – коэффициенты разложения, которые находятся из соотношения:

$$\xi^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x_1)^\alpha (\partial x_2)^\beta (\partial x_3)^\gamma} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0}. \quad (10)$$

В матричной форме выражения (9) и (10) имеют вид:

$$\{\theta\} = \{\xi\}^T \{\psi_\theta\}, \quad (11)$$

$$\{\xi\} = [F_\theta^{s'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (12)$$

В результате выражение для вариации упругой энергии деформации имеет вид:

$$\delta W = \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_{ij}^{s'}]^{-T} [H^{ijkl}] [F_{kl}^t] \{\omega_t\} + \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_\theta^{s'}]^{-T} [H^{(\theta)}] [F_\theta^t] \{\omega_t\}, \quad (13)$$

$$[H^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi_{ij}\} \{\psi_{kl}\}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3,$$

$$[H^\theta] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda \{\psi_\theta\} \{\psi_\theta\}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Представляя в матричном виде коэффициенты разложения перемещений и перемещениями:

$$\{\omega_{k'}\} = [A] \{u_{k'}\}, \quad (14)$$

либо связь между функциями формы и степенными функциями в виде:

$$\{N\} = [A]^T \{\psi\}, \quad (15)$$

где $[A]$ – матрица преобразования, подлежащая определению для конкретного вида аппроксимирующих функций.

Подставляя (14) в (13), имеем:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{ij}^{s'}]^{-T} [H^{ijkl}] [F_{kl}^t] [A] \{u_{t'}\} + \\ &+ \delta \{u_{s'}\}^T [A]^T [F_\theta^{s'}]^{-T} [H^\theta] [F_\theta^t] [A] \{u_{t'}\} = \\ &= \delta \{u_{s'}\} [G^{s't'}] \{u_{t'}\} + \delta \{u_{s'}\} [G_\theta^{s't'}] \{u_{t'}\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $[G^{s't'}]$ и $[G_{\theta}^{s't'}]$ – матрицы, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} [G^{s't'}] &= [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A]; \\ [G_{\theta}^{s't'}] &= [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A]. \end{aligned} \quad (17)$$

Матрица жесткости КЭ окончательно вычисляется по формуле

$$[K^{s't'}] = [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] + [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A]. \quad (18)$$

Таким образом, для конкретных видов КЭ и аппроксимирующих полиномов для получения матрицы жесткости необходимо построение специальных матриц $[F_{ij}^s]$, $[F_{\theta}^s]$, $[A]$.

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ЭЛАСТОМЕРОВ РАЗЛИЧНЫХ МАРОК

При выборе рациональных параметров резиновых деталей машин большое значение имеет правильная оценка технических свойств резин, применяемых в современном машиностроении. Из приведенных данных и опыта применения резины в горных машинах [15, 16] следует, что наиболее приемлемыми являются резины на основе натурального каучука (НК) и синтетических СКИ-3, СКИ-3+СКД каучуков. Они достаточно прочны, эластичны, имеют высокое сопротивление истиранию, морозостойкости, хорошо крепятся к металлам и поэтому широко применяются для изготовления резинометаллических деталей.

Проведен расчет деформированного состояния элементов из резин различных марок (таблица 1). В качестве эластомерного элемента взят виброизолятор ВР-201 (рис.1).

Таблица 1 – Осадка виброизолятора для различных марок резины

Шифр резины	Тип каучука	G_0 , МПа	Нагрузка, МПа	Осадка, мм
2959	НК	1,76	3	0,995
1378	СКИ+СКД	1,30		1,347
1224	НК	1,30		1,347
4з	СКИ-3	1,60		1,095
11-67Л	СКИ	1,50		1,168
11-59Л	СКИ-3	1,50		1,168
28Э	СКИ-3	1,70		1,03
310	СКИ-3	1,40		1,251
169	СКИ-3	1,50		1,168
51-1562	СКИ-3	0,78		2,245
51-1711	СКИ-3	1,30		1,347
51-1714	СКИ-3	2,00		0,875

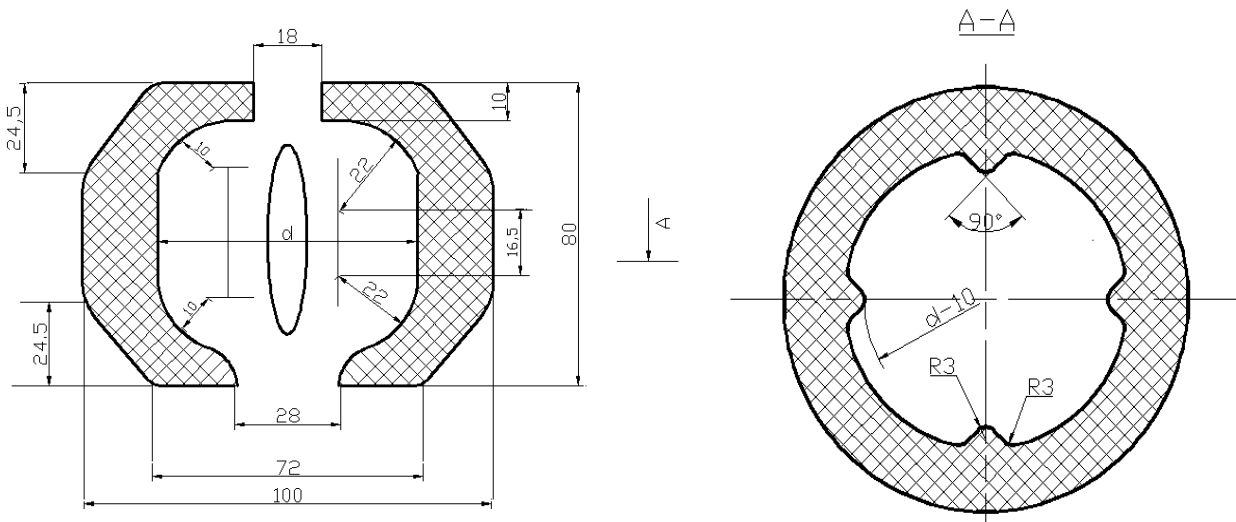


Рис. 1. Расчетная схема виброизолятора ВР-201

ВЫВОДЫ

Таким образом, в статье проведено исследование деформированного состояния элемента из эластомеров с различными механическими характеристиками. Применение моментной схемы конечного элемента позволило обойти сложности, возникающие при учете специфических свойств эластомерных деталей. Выявленные зависимости модуля сдвига от осадка могут быть применены при выборе марки резины эластомерного виброизолятора при проектировании инженерных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shard S. C. A Strai Energy Density Function for Compressible Rubber like Materials / S. C. Shard, N. W. Tschoegl // Trans. Soc. Rheology. – 1976. – V. 20, N 3. – P. 361-373.
2. Penn R. W. Volume Changes Accompanying Extension of Rubber / R. W. Penn // Trans. Soc. Rheol. – 1970. – Vol. 14, N 4. – P. 507-517.
3. Дымников С. И. Упругие потенциалы для слабосжимаемых эластомерных материалов / С. И. Дымников, И. Р. Мейерс, А. Г. Эрдманис // Вопр. динамики и прочности. – 1983. – Вып. 40. – С. 98-108.
4. Черных К. Ф. Об учете сжимаемости резины / К. Ф. Черных, И. М. Шубина // Механика эластомеров : науч. тр. Кубан. гос. ун-та. – 1978. – Вып. 3. – С. 56-63.
5. Tong P. On the convergence of the finite element method for problems with singularity / P. Tong, T. H. N. Pian // Intern. J. Solids. and Struct. – 1973. – Vol. 9, N 3. – P. 313-321.
6. Malkus D. S. Finite elements with penalties in nonlinear elasticity / D. S. Malkus // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1980. – Vol. 16. – P. 121-126.
7. Oden I. T. Finite element methods for constrained problems in elasticity / I. T. Oden, N. Kikuchi // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1983. – Vol. 18, N 5. – P. 701-725.
8. Zienkiewicz O. C. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells / O. C. Zienkiewicz, J. Too, R. L. Taylor // Intern. J. Numerical Methods Eng. – 1971. – Vol. 3, N 3. – P. 275-290.
9. Fried I. Numerical integration in the finite element method / I. Fried // Comput. Struct. – 1974. – Vol. 4. – P. 921-933.
10. Oden I. T. On some generalization of the incremental stiffness relations for finite deformations of compressible and incompressible finite elements / I. T. Oden, J. E. Key // Nucl. Engng. Design. – 1971. – Vol. 15. – P. 121-134.
11. Кабриц С. А. Нелинейные уравнения плоского слоя для трех моделей эластомерного материала / С. А. Кабриц, В. М. Мальков, С. Е. Мансурова // Изв. РАН. Мех. тверд. тела – 2001. – № 1. – С. 38-47.

12. Копысов С. П. Параллельный разрывный метод Галеркина для некоторых задач теории упругости / С. П. Копысов, А. К. Новиков // Численные методы в математике и механике. – 2007. – № 3. – С. 44-47.
13. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. – К. : Наук. думка, 2002. – 655 с.
14. Дырда В. И. Резиновые детали в машиностроении / В. И. Дырда, Е. Ф. Чижик. – Дніпропетровськ : Поліграфіст, 2000. – 581 с.
15. Потураев В. Н. Резина в горном деле / В. Н. Потураев, В. И. Дырда, В. П. Надутый. – М. : Недра, 1974. – 152 с.
16. Потураев В. Н. Резиновые и резинометаллические детали машин / В. Н. Потураев. – М. : Машиностроение, 1966. – 300 с.

REFERENCE

1. Shard, S.C. (1976), “A Strain Energy Density Function for Compressible Rubber like Materials”, *Trans. Soc. Rheology*, vol. 20, no. 3, pp. 361-373.
2. Penn, R.W. (1970), “Volume Changes Accompanying Extension of Rubber”, *Trans. Soc. Rheol.*, vol. 14, no. 4, pp. 507-517.
3. Dymnikov, S.I., Meyers, I.R. and Erdmanis, A.G. (1983), “Elastic potentials for weakly compressible elastomeric materials”, *Vopr. dinamiki i prochnosti*, issue 40, pp. 98-108.
4. Chernykh, K.F. and Shubina, I.M. (1978), “About the accounting of compressibility of elastomers”, *Mekhanika elastomerov*, issue 3, pp. 56-63.
5. Tong, P. and Pian, T.H.H. (1973), “On the convergence of the finite element method for problems with singularity”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 9, no. 3, pp. 313-321.
6. Malkus, D.S. (1980), “Finite elements with penalties in nonlinear elasticity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 16, pp. 121-126.
7. Oden, I.T. and Kikuchi, N. (1983), “Finite element methods for constrained problems in elasticity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, no. 5, pp. 701-725.
8. Zienkiewicz, O.C., Too, J. and Taylor, R.L. (1971), “Reduced integration technique in general analysis of plates and shells”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, no. 3, pp. 275-290.
9. Fried, I. (1974), “Numerical integration in the finite element method”, *Computer Structure*, vol. 4, pp. 921-933.
10. Oden, I.T. and Key, J.E. (1971), “On some generalization of the incremental stiffness relations for finite deformations of compressible and incompressible finite elements”, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 15, pp. 121-134.
11. Kabrits, S.A., Mal'kov, V.M. and Mansurova, S.E. (2001), “The nonlinear equations of a flat layer for three models of an elastomeric layer”, *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, no.1, pp. 38-47.
12. Kopysov, S.P. and Novikov, A.K. (2007), “Parallel razryvny method of Galerkin for some tasks of the theory of elasticity”, *Chislennyye metody v matematike i mekhanike*, no.3, pp. 44-47.
13. Kirichevskiy, V.V. (2002), *Metod konechnykh elementov v mekhanike elastomerov* [Method of final elements in mechanics of elastomers], Nauk. Dumka, Kii, Ukraine.
14. Dyrda, V.I. and Chizhik, E.F. (2000), *Rezinovye detali* [Rubber details], Poligrafist, Dnipropetrovs'k, Ukraine.
15. Poturaev, V.N., Dyrda, V.I. and Naduty, V.P. (1974), *Rezina v gornom dele* [Rubber in mining], Nedra, Moscow, Russia.
16. Poturaev, V.N. (1966), *Rezinovye i rezinometallicheskie detali mashin* [Rubber and rubber-metal details of engine], Mashinostroenie, Moscow, Russia.

УДК 531:383-62:50

ФОРМУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ДИСКРЕТНОЇ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕКТОРА КЕРУВАННЯ

Святовец І. Ф.

*Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69006, Україна*

sv.irina0702@gmail.com

Вивчаються умови побудови дискретної майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку. Наведено приклад формування такої системи та побудови для неї оптимального регулятора.

Ключові слова: дискретна майже консервативна система, зворотній зв'язок, вектор керувань, оптимальний регулятор.

ФОРМИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРА УПРАВЛЕНИЯ

Святовец И. Ф.

*Запорожская государственная инженерная академия,
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69006, Украина*

sv.irina0702@gmail.com

Изучаются условия построения дискретной почти консервативной системы с помощью обратной связи. Приведен пример конструирования такой системы и построения для нее оптимального регулятора.

Ключевые слова: дискретная почти консервативная система, обратная связь, вектор управления, оптимальный регулятор.

THE CONDITIONS OF CONSTRUCTING OF THE ALMOST CONSERVATIVE SYSTEM USING CONTROLLING VECTOR

Svyatovets I. F.

*Zaporizhzhya State Engineering Academy,
Sobornyy ave., 226, Zaporizhzhya, 69006, Ukraine*

sv.irina0702@gmail.com

This article describes a fully controlled linear discrete system with a small parameter. The coefficient matrix of the variable is of the form $\tilde{F}_0 + \varepsilon \tilde{F}_1$ where ε is the small parameter. The system is not almost conservative, i.e., matrix \tilde{F}_0 is not an orthogonal matrix. To obtain an almost conservative system is constructed linear static state feedback, which is the sum of two terms. After substituting the control vector in the original system, a closed system is obtained.

It uses the approach that, first we construct the necessary matrix coefficients, and then calculate the feedback vector.

The theorem formulated shows that the coefficient matrix of open and closed systems are linked by the least squares method.

It was obtained the conditions on the elements of the matrix \tilde{F}_0 , to produce the desired orthogonal matrix, if the matrix at control is known.

An example of the transition to almost conservative system by using of feedback is shown with constructing the optimal controller of the obtained system. It uses the approach, which proposes an asymptotic expansion on the small parameter of the solution of matrix Riccati equation. To find an approximate solution we use an infinite system of matrix equations that are solved using mathematical computer algebra system Maple V. It is shown that a given system by constructing optimal controller up to the first order is stabilized.

Key words: discrete almost conservative system, feedback vector controls, optimum regulator.

ВСТУП

У [1-3] вивчався деякий клас лінійних диференціальних систем парного порядку з малим параметром, який можна звести до неперервних майже консервативних систем [4] за допомогою зворотного зв'язку. Аналогічні результати можна отримати і для деякого класу лінійних дискретних динамічних систем з малим параметром. Такий підхід дозволяє застосувати до дискретних майже консервативних систем розроблені раніше спрощені методи дослідження стійкості [5], побудови оптимального регулятора [6] та стабілізації системи [7].

У [1] започатковано дослідження деякого класу лінійних диференціальних систем парного порядку з малим параметром, які можна звести до майже консервативних систем [2] за допомогою зворотного зв'язку. Такий підхід дозволяє застосувати до майже консервативних систем напрацьовані раніше методи визначення стійкості [2, 3], побудови оптимального регулятора [4, 5] та стабілізації системи [6].

1. ОДИН ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ЛІНІЙНОЇ ДИСКРЕТНОЇ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо повністю керовану лінійну дискретну систему з малим параметром

$$x(k+1) = F(\varepsilon)x(k) + Gu(k) = (\tilde{F}_0 + \varepsilon\tilde{F}_1)x(k) + Gu(k), \quad x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

причому виконується умова

$$\tilde{F}_0\tilde{F}_0^T \neq I_n, \quad (2)$$

де $x(k) = [x_1(k), \dots, x_n(k)]^T \in \mathfrak{R}_n$ – вектор стану, $\tilde{F}_0, \tilde{F}_1 \in \mathfrak{R}_{n \times n}$, $u(k) = [u_1(k), \dots, u_m(k)]^T \in \mathfrak{R}_m$ – вектор керувань, $G \in \mathfrak{R}_{n \times m}$, $\text{rang}G = m$, ε – малий параметр. Тут I_n – одинична матриця розмірності n .

З умови (2) випливає, що система (1) не є майже консервативною [5], а для отримання такої побудуємо лінійний статичний зворотний зв'язок за станом

$$u(k) = -(H_0 + \varepsilon H_1)x(k). \quad (3)$$

Після підстановки (3) в (1), отримаємо замкнену систему:

$$x(k+1) = (F_0 + \varepsilon F_1)x(k), \quad (4)$$

де, якщо існує відповідна матриця H_0 , то

$$F_0 = \tilde{F}_0 - GH_0, \quad F_0 F_0^T = F_0^T F_0 = I_n, \quad F_1 = \tilde{F}_1 - GH_1. \quad (5)$$

З умов (5) випливає, що замкнена система (4) є майже консервативною.

Тепер будемо рухатись у зворотному напрямку: спочатку побудуємо необхідну матрицю коефіцієнтів, а потім обчислимо вектор зворотного зв'язку. Якщо вважати, що ортогональна матриця F_0 рівняння (4) задана, то з першого рівняння (5) легко знаходимо матрицю H_0 , оскільки матриця G повного рангу.

Отже, маємо

$$H_0 = (G^T G)^{-1} G^T (\tilde{F}_0 - F_0). \quad (6)$$

Далі підставимо вираз для H_0 з (6) в перше рівняння (5) і отримаємо таку рівність

$$(I - G(G^T G)^{-1} G^T) \tilde{F}_0 = (I - G(G^T G)^{-1} G^T) F_0. \quad (7)$$

Очевидно, що не для всіх ортогональних матриць F_0 (7) є тотожністю.

Таким же способом можна отримати матрицю H_1 , коли задати матрицю F_1

$$H_1 = (G^T G)^{-1} G^T (\tilde{F}_1 - F_1). \quad (8)$$

Далі підставимо (8) в друге рівняння (5) і отримаємо рівність аналогічну (7), якщо матриця F_1 допустима

$$(I - G(G^T G)^{-1} G^T) \tilde{F}_1 = (I - G(G^T G)^{-1} G^T) F_1. \quad (9)$$

І в цьому випадку не всі матриці F_1 будуть допустимими, тобто тільки деякий клас матриць задовольняє (9).

Матриця $S = G(G^T G)^{-1} G^T$ є матрицею проектування, вона симетрична та ідемпотентна, тобто її власні значення одиничні та нульові [8] і $\text{rang}H = \text{rang}G$ [9]. Отже, отримана матриця проектування має m одиничних власних значень. Ліва і права частини (7) виконують проектування векторів-стовпців відповідно матриць \tilde{F}_0, F_0 на ортогональне доповнення простору стовпців матриці G . Формула (7) буде тотожністю тоді, коли хоча б для однієї ортогональної матриці F_0 проєкції всіх відповідних векторів-стовпців збігаються.

Матрицею проектування буде також матриця $I - S$ [8]. Можна показати, що матриці коефіцієнтів розімкненої та замкненої динамічних систем пов'язані між собою за допомогою метода найменших квадратів. Наведемо відповідну теорему з [3] у наших позначеннях.

Теорема 1.1. [3] Нехай $\tilde{y}_i^0, y_i^0 \in \mathfrak{R}_m$ розв'язки відповідних лінійних алгебраїчних рівнянь

$$G\tilde{y}_i = \tilde{f}_i, \quad Gy_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

$$\tilde{F}_0 = [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n], \quad F_0 = [f_1, f_2, \dots, f_n], \quad \tilde{f}_i, f_i \in \mathfrak{R}_n,$$

знайдені за методом найменших квадратів. Тоді для всіх матриць коефіцієнтів F_0 , які можна отримати за допомогою зворотного зв'язку(3), вектори-нев'язки для розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь (10) збігаються

$$G\tilde{y}_i^0 - \tilde{f}_i = Gy_i^0 - f_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Теорема 1.1 виконується також для матриць \tilde{F}_1, F_1 .

Оскільки за допомогою зворотного зв'язку отримуємо матрицю, для якої завжди виконується (11), то на неї можна накладати додаткові умови, тобто вибирати її з певного класу матриць (наприклад, ортогональних). При повній керованості лінійної дискретної системи завжди можна побудувати оптимальний регулятор зворотного зв'язку, який стабілізує систему, тобто матриця коефіцієнтів замкненої системи вибирається з класу асимптотично стійких матриць.

Умова однакових проєкцій відповідних стовпців матриць \tilde{F}_0, F_0 (рівняння (7)) при загальному вигляді матриці G , як і для неперервних систем [3], не дає ефективного способу отримання ортогональної матриці. Тому розглянемо випадок, коли в матриці повного рангу G стовпці є одиничними векторами, тобто $G = [e_{i_1} \ e_{i_2} \ \dots \ e_{i_m}]$, де $e_j \in \mathfrak{R}_n$ – вектор з одиницею на j -му місці і нулями на інших місцях. Із структури матриці G випливає рівність

$$G^T G = I_m. \text{ Запишемо матрицю } G \text{ також у вигляді } G = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^T \\ \dots \\ \tilde{e}_n^T \end{bmatrix}, \quad G^T = [\tilde{e}_1 \quad \dots \quad \tilde{e}_n], \quad \tilde{e}_i \in \mathfrak{R}_m,$$

причому тільки вектори $\tilde{e}_j, j=1, \dots, m$ є одиничні розмірності m , а інші – нульові. Тоді

$$\text{елементи матриці } U = GG^T = \{u_{ij}\}_1^n \text{ дорівнюють } u_{ij} = \tilde{e}_i^T \tilde{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \in \{i_1, \dots, i_m\}, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Визначимо для яких матриць \tilde{F}_0 рівняння (7) матиме розв'язком ортогональну матрицю F_0 . Оскільки матриця S має ненульовими тільки елементи $(i_1, i_1), (i_2, i_2), \dots, (i_m, i_m)$, то в матриці $I - S$ будуть ненульовими тільки елементи $(j, j), j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$. Тоді матриці $(I - S)\tilde{F}_0, (I - S)F_0$ матимуть нульовими рядки i_1, i_2, \dots, i_m , причому це будуть відповідно

матриці \tilde{F}_0, F_0 з обнуленими цими рядками. Виходячи із загальної структури ортогональної матриці [11], для виконання (7) необхідно і достатньо, щоб для рядків

$$l, j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \text{ матриці } \tilde{F}_0 = \{\tilde{f}_{ij}\}_1^n \text{ виконувалась умова: } \tilde{F}_{0,i^*} \tilde{F}_{0,j^*}^T = \delta_{ij}, \text{ де}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } l = j, \\ 0, & \text{якщо } l \neq j. \end{cases} \quad \text{Тоді зв'язані елементи матриці } F_0 = \{f_{ij}\}_1^n \text{ такі: } f_{lj} = \tilde{f}_{lj},$$

$l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}, j = 1, \dots, n$. Інші елементи залишаються вільними параметрами, які можуть набувати тільки таких значень, що забезпечують ортогональність матриці F_0 .

Отже, виконується твердження.

Теорема 1.2 Нехай матриця при керуванні системи (1) має вигляд $G = [e_{i_1} \quad e_{i_2} \quad \dots \quad e_{i_m}]$, $\text{rang} G = m, e_{i_j} \in \mathfrak{R}_n, j = 1, \dots, m$.

Тоді за допомогою зворотного зв'язку (3) можна отримати деяку ортогональну матрицю $F_0 = \tilde{F}_0 - GH_0, F_0 F_0^T = F_0^T F_0 = I$ в тому і тільки в тому випадку, коли рядки $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ матриці \tilde{F}_0 ортогональні. Відповідні рядки матриці F_0 мають збігатися з ними, а рядки i_1, i_2, \dots, i_m – довільні, але такі, що забезпечують ортогональність шуканої матриці.

Розглядаючи рівняння (9), структуру матриці F_1 (також H_1) вибираємо, виходячи з практичної доцільності, наприклад, для стабілізації замкненої системи. З іншого боку матрицю H_1 можна отримати не з рівняння (8), а при побудові оптимального регулятора зворотного зв'язку для майже консервативної системи [6] чи з системи нерівностей для її стабілізації [7].

2. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ НАВЕДЕНОГО ВИЩЕ ПІДХОДУ

Наведемо приклад переходу до майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку та побудуємо оптимальний регулятор для отриманої системи.

Приклад 2.1 Розглянемо систему (1) з матрицями коефіцієнтів

$$F(\varepsilon) = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 + \varepsilon & m_4 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 2\varepsilon \\ 0 & 3\varepsilon & 12/13 & 5/13 \\ l_1 + 4\varepsilon & l_2 & l_3 & l_4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тут $m_i, l_i, i = 1, \dots, 4$ – деякі параметри, ε – малий параметр.

Необхідно побудувати майже консервативну систему за допомогою зворотного зв'язку (3) (матриця H_0) та знайти для неї оптимальний регулятор (матриця H_1) з квадратичним критерієм якості

$$\hat{J} = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)], \tag{12}$$

де $Q = I_4, R = 2I_2$.

Неважко впевнитись в тому, що задана система повністю керована. Матрицю $F(\varepsilon)$ запишемо у вигляді суми двох матриць $F(\varepsilon) = \tilde{F}_0 + \varepsilon F_1$, де

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/13 & 5/13 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут ми зобразили матрицю збурення через F_1 замість \tilde{F}_1 , виходячи з подальших спрощень.

Оскільки рядки $\tilde{F}_{0,2*}, \tilde{F}_{0,3*}^T$ матриці \tilde{F}_0 ортогональні та нормовані, а також у матриці $(I - S)\tilde{F}_0$ перший і четвертий рядки нульові, то за допомогою зворотного зв'язку (3) можна отримати ортогональну матрицю. Для цього розв'язуємо систему рівнянь $\tilde{F}_{0,i*} \tilde{F}_{0,j*}^T = \delta_{ij}, i \leq j, i, j \in \{1, \dots, 4\}$ з вилученням тотожностей $\tilde{F}_{0,2*} \tilde{F}_{0,2*}^T = 1, \tilde{F}_{0,2*} \tilde{F}_{0,3*}^T = 0, \tilde{F}_{0,3*} \tilde{F}_{0,3*}^T = 1$, при невідомих $\tilde{F}_{0,1*}, \tilde{F}_{0,4*}$ і вибираємо один з її розв'язків $\tilde{F}_{0,1*} = [4/5, 3/5, 0, 0], \tilde{F}_{0,4*} = [0, 0, -5/13, 12/13]$. Побудована ортогональна матриця канонічної форми та матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку (формула (6)) мають вигляд:

$$F_0 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/13 & 5/13 \\ 0 & 0 & -5/13 & 12/13 \end{bmatrix}, \quad H_0 = \begin{bmatrix} m_1 - 4/5 & m_2 - 3/5 & m_3 & m_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 + 5/13 & l_4 - 12/13 \end{bmatrix}.$$

Відзначимо, що знайдений регулятор зворотного зв'язку виконує певні робасні функції – компенсує параметри $m_i, l_i, i = 1, \dots, 4$.

Матриця F_0 зображена в канонічній формі, тому для побудови оптимального регулятора застосуємо алгоритм [6]. Регулятор буде оптимальним, якщо вибрати [12]

$$H_1 = (\varepsilon G^T P G + R)^{-1} G^T P F, \quad (13)$$

де $F = F_0 + \varepsilon F_1$, а $P \in \mathfrak{R}_{n \times n}$ – симетрична додатно визначена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккати

$$P = F^T P F - \varepsilon F^T P G (\varepsilon G^T P G + R)^{-1} G^T P F + \varepsilon Q. \quad (14)$$

Тут Q та R – матриці з (12).

Виходячи з (14), будемо шукати матрицю-розв'язок P та матрицю Q у вигляді розкладу за малим параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots, \quad Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots \quad (15)$$

З (14) отримаємо нескінченну систему матричних рівнянь типу Ріккати [6]

$$P_0 - F_0^T P_0 F_0 = 0, \quad (16)$$

$$P_i - F_0^T P_i F_0 = F_1^T P_{i-1} F_0 + F_0^T P_{i-1} F_1 - \sum_{(k,j,q,l,t) \in J(i)} F_k^T P_j G M_q G^T P_l F_t + Q_{i-1}, \quad i=1,2,\dots, \quad (17)$$

де

$$M_0 = R^{-1}, \quad M_i = -R^{-1} \sum_{k=1}^i G^T P_{k-1} G M_{i-k}, \quad i=1,2,\dots$$

Тут $J(i) = \left\{ (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) \mid i_1, i_5 \in \{0,1\}; i_2, i_3, i_4 \in \{0, \dots, i-1\}; \sum_{j=1}^5 i_j = i-1 \right\}$ – множини індексів,

$i=1,2,\dots$. Покладаємо $Q_0 = I_4$, $Q_i = 0$, $i=1,2,\dots$

Матриця F_0 має різні власні значення, тому матриця P_0 , як переставна з нею (16), має таку структуру $P_0 = \text{diag} \{c_{10}, c_{10}, c_{20}, c_{20}\}$, де

$$c_{10} = \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + (b_{11} + b_{22})(v_{11} + v_{22})}}{b_{11} + b_{22}} = 2, \quad (18)$$

$$c_{20} = \frac{a_{33} + a_{44} + \sqrt{(a_{33} + a_{44})^2 + (b_{33} + b_{44})(v_{33} + v_{44})}}{b_{33} + b_{44}} = 2,$$

$$A = \{a_{ij}\}_1^4 = F_0 F_1^T, \quad B = \{b_{ij}\}_1^4 = G R^{-1} G^T, \quad V_0 = \{v_{ij}\}_1^4 = F_0 Q_0 F_0^T.$$

Далі обчислюємо елементи матриці $P_1 = \{p_{ij}\}_1^4$ з першого рівняння системи (17) за формулами

$$p_{22} = p_{11} + d_{11} - \frac{f_{11}}{f_{12}} d_{22} = p_{11} - 1, \quad p_{12} = -\frac{1}{2} \left(\frac{f_{11}}{f_{12}} d_{11} + d_{22} \right) = \frac{2}{3},$$

$$p_{44} = p_{33} + d_{33} - \frac{f_{33}}{f_{34}} d_{44} = p_{33} + 1, \quad p_{34} = -\frac{1}{2} \left(\frac{f_{33}}{f_{34}} d_{33} + d_{44} \right) = -\frac{6}{5},$$

$$p_{13} = -\frac{d_{13}}{2} - \frac{f_{12} d_{23} - f_{34} d_{14}}{2(f_{11} - f_{33})} = \frac{2043}{520}, \quad p_{14} = -\frac{d_{14}}{2} - \frac{f_{12} d_{24} + f_{34} d_{13}}{2(f_{11} - f_{33})} = \frac{1557}{520},$$

$$p_{23} = -\frac{d_{23}}{2} + \frac{f_{12}d_{13} + f_{34}d_{24}}{2(f_{11} - f_{33})} = -\frac{7651}{520}, \quad p_{24} = -\frac{d_{24}}{2} + \frac{f_{12}d_{14} - f_{34}d_{23}}{2(f_{11} - f_{33})} = -\frac{1699}{520},$$

де $F_0 = \{f_{ij}\}_1^4$, $D_1 = \{d_{ij}\}_1^4 = AP_0 + P_0A^T - P_0BP_0 + V_0$.

Зобразимо матрицю-розв'язок $P = P_0 + \varepsilon P_1$ матричного рівняння Ріккати (14) для $\varepsilon = 0,01$

$$P = \begin{bmatrix} 1.931826923 & 0.0066666667 & 0.0392884615 & 0.0299423077 \\ 0.0066666667 & 1.921826923 & -0.1471346154 & -0.0326730769 \\ 0.0392884615 & -0.1471346154 & 1.88125 & -0.012 \\ 0.0299423077 & -0.0326730769 & -0.012 & 1.89125 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1 = 1.738399549$, $\lambda_2 = 1.888223322$, $\lambda_3 = 1.942988817$, $\lambda_4 = 2.056542158$ та матрицю зворотного зв'язку H_1 (13)

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.7639417761 & 0.5772291817 & 0.0218775563 & 0.0211087093 \\ 0.0589321977 & -0.0043121793 & -0.3656363992 & 0.8620948477 \end{bmatrix}.$$

Тоді матриця коефіцієнтів замкненої системи $F_z = F(\varepsilon) - G(H_0 + \varepsilon H_1)$ при $\varepsilon = 0,01$ набуде вигляду

$$F_z = \begin{bmatrix} 0.7923605822 & 0.5942277082 & 0.0097812244 & -0.0002110871 \\ -3/5 & 4/5 & 12/13 & 5/13 \\ 0 & 0.03 & 12/13 & 5/13 \\ 0.0394106780 & 0.0000431218 & -0.3809590206 & 0.9144559746 \end{bmatrix},$$

власні значення якої дорівнюють $\lambda_{1,2} = 0.7957519546 \pm 0.5972509677i$, $\lambda_{3,4} = 0.9191947853 \pm 0.3826620915i$ і за модулем менші одиниці.

Отже, задана система четвертого порядку за допомогою побудованого з точністю до першого наближення оптимального регулятора стабілізована.

ЛІТЕРАТУРА

1. Святовец І. Ф. Формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування / І. Ф. Святовец, О. П. Коломійчук, В. В. Новицький // Аналітична механіка та її застосування : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – 9, № 1. – С. 301-307.
2. Новицький В. В. Моделювання майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / В. В. Новицький, О. П. Коломійчук, І. Ф. Святовец // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 2. – С. 76-82.
3. Новицький В. В. Умови формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування / В. В. Новицький, М. О. Зінчук, І. Ф. Святовец // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 174-183.
4. Новицький В. В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем / В. В. Новицький // Препринт. – К. : Ін-т математики НАН України, 2004. – 34 с.
5. Зінчук М. О. Дослідження рівняння Ляпунова для дискретних майже консервативних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Аналітичні дослідження моделей механічних систем. Препринт. – К. : Ін-т математики НАН України, 2005. – С. 1-26.

6. Зінчук М. О. Оптимальне керування дискретними майже консервативними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Аналітична механіка та її застосування : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – 5, №2. – С. 124-140.
7. Зінчук М. О. Стійкість та стабілізація лінійних параметричних динамічних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – 4, №2. – С. 58-71.
8. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения / Г. Стренг. – М. : Мир, 1980. – 456 с.
9. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 656 с.
10. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition / S. Barnett, R. G. Cameron. – Oxford : Clarendon press, 1985. – 404 p.
11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
12. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц. – М. : Наука, 1985. – 296 с.

REFERENCES

1. Svyatovets, I.F., Kolomiychuk, O.P. and Novitskiy, V.V. (2012), “Formation almost conservative system using vector control”, *Analitychna mekhanika ta yiyi zastosuvannia: Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 9, no. 1, pp. 301-307.
2. Novitskiy, V.V., Kolomiychuk, O.P. and Svyatovets, I.F. (2013), “Modeling almost conservative system using feedback”, *Visnyk Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Fyzyko-matematichni nauky*, no. 2, pp. 76-82.
3. Novitskiy, V.V., Zinchuk, M.O. and Svyatovets, I.F. (2016), “Conditions formation almost conservative system using vector control”, *Visnyk Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Fyzyko-matematichni nauky*, no. 1, pp. 174-183.
4. Novitskiy, V.V. (2004), “Lyapunov equation for almost conservative systems”, *Preprint, In-t matematyky NAN Ukrainy*, 34 p., Kiev, Ukraine.
5. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2005), “Research Lyapunov equations for discrete almost conservative systems”, *Analitychni doslidzhennya modeley mekhanichnykh system*, Preprint, In-t matematyky NAN Ukrainy, pp. 1-26, Kiev, Ukraine.
6. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2008), “Optimal control of discrete almost conservative systems”, *Analitychna mekhanika ta yiyi zastosuvannia: Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 5, no. 2, pp. 124-140.
7. Zinchuk, M.O. and Novitskiy, V.V. (2007), “Stability and stabilization of parametric linear dynamical systems”, *Problemy dynamiky ta stiykosti bagatovymirnykh system: Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy*, vol. 4, no. 2, pp. 58-71.
8. Streng, G. (1980), *Lineynaya algebra i eey primeneniya* [Linear algebra and its application], Mir, Moskow, Russia.
9. Khorn, R. and Dzhonson, Ch. (1989), *Matrichnyy analiz* [Matrix Analysis], Mir, Moskow, Russia.
10. Barnett, S. and Cameron, R.G. (1985), “Introduction to Mathematical Control Theory, Second Edition”, Clarendon press, Oxford.
11. Gantmakher, F.R. (1967), *Teoriya matrits* [Matrix theory], Nauka, Moskow, Russia.
12. Streits, V. (1985), *Metod prostranstva sostoyaniy v teorii diskretnykh lineynykh system upravleniya* [Method of state space in the theory of discrete linear control systems], Nauka, Moskow, Russia.

УДК 004.942: 519.6

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ: НЕСТРУКТУРИРОВАННЫЕ СЕТКИ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент, Лисняк А. А., к. ф.-м. н., доцент, Борисовская Ю. А., аспирант,
Козлова О. С., аспирант, Снежкова Л. С., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина*

s.choporoff@znu.edu.ua

В статье проведен обзор актуальных подходов и методов автоматической генерации неструктурированных дискретных моделей геометрических объектов. В частности, выполнен анализ методов генерации дискретных моделей с использованием треугольных или тетраэдрических, а также четырехугольных или шестигранных конечных элементов.

Ключевые слова: дискретная модель, сетка, конечный элемент, треугольный элемент, четырехугольный элемент, тетраэдрический элемент, шестигранный элемент.

МЕТОДИ ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ: НЕСТРУКТУРОВАНІ СІТКИ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент, Лисняк А. О., к. ф.-м. н., доцент, Борисовська Ю. О., аспірант,
Козлова О. С., аспірант, Снежкова Л. С., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*

s.choporoff@znu.edu.ua

У статті проведено огляд актуальних підходів і методів автоматичної генерації неструктурованих дискретних моделей геометричних об'єктів. Зокрема, виконано аналіз методів генерації дискретних моделей з використанням трикутних або тетраедричних елементів, а також чотирикутних або шестигранных скінченних елементів.

Ключові слова: дискретна модель, сітка, скінченний елемент, трикутний елемент, чотирикутний елемент, тетраедричний елемент, шестигранный элемент.

DISCRETE MODELS GENERATION METHODS: UNSTRUCTURED GRIDS

Choporov S. V., PhD in Engineering, Lisnyak A. O., PhD in Physical and Mathematical Sciences,
Borysovska Y. O., postgraduate, Kozlova O. S., postgraduate, Sniezhkova L. S., postgraduate

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine, 69600*

s.choporoff@znu.edu.au

Numerical simulations are now widely employed in various engineering fields. A lot of numerical simulations uses models based on partial differential equations (PDE). In the most frequently used numerical methods (e.g. the finite element method), a continuous problem is replaced by a discrete model. The discrete model approximates solution of the initial partial differential equations. Thus the first step of a discrete simulation involves mesh generation techniques.

A mesh (aka grid) is a set of points distributed over a calculation field. A mesh is a replacement of a continuous region by a finite union of simple element such as triangles, quadrilaterals, tetrahedra, hexahedra, etc. The mesh can be structured or unstructured. In the first case points neighborhood is similar to the neighborhood of elements in a matrix. In the second case points arbitrary connected into edges. In structured meshes edges are related to coordinate directions of a curvilinear coordinate system. In contrast, unstructured meshes are usually formed with no relation to coordinate directions. Structured grids usually consist of quadrilaterals or hexahedra. Unstructured meshes also widely use triangles and tetrahedrons.

Unstructured grids are usually formed using director indirect approaches. The direct approaches generate unstructured meshes directly insert nodes into an arbitrary shaped physical domain. In contrast, the indirect approaches convert elements of the initial mesh into new elements of some shape (e.g. triangles into quadrilaterals).

This article is a review of automatic unstructured meshing approaches. Particularly, the review includes following approaches: Delaunay mesh generation, an advanced front mesh generation, a background mesh generation, the Spatial Twist Continuum etc.

Key words: discrete model, mesh, grid, triangle, quadrilateral, tetrahedron, hexahedron.

ВВЕДЕНИЕ

Быстрое развитие компьютерных систем и средств автоматизации проектных работ позволило значительно повысить скорость численного решения проблем, связанных с проектированием. Несмотря на развитие бессеточных методов [1], в автоматизированном проектировании для численного анализа все еще наиболее применим метод конечных элементов (МКЭ) [2-4]. Благодаря гибкости и эффективности его используют для решения различных классов исследовательских задач (включая статику и динамику). Ключевым для МКЭ является требование построения дискретной декомпозиции геометрического объекта на множество элементов некоторой формы (дискретные модели).

Под дискретной моделью геометрического объекта (сеткой, эти термины используют синонимично) понимают пару множеств $M = (V, E)$, где V и E – множества вершин и связей между ними (дискретных элементов). По сути, дискретная модель геометрического объекта – это замена исходной непрерывной области конечным объединением простейших фигур: треугольников, четырехугольников, тетраэдров, шестигранников и т. п. В проектировании это определение можно дополнить вычислительным процессом, определенном на этой модели, по результатам работы которого вносятся оптимизации в M .

По размерности пространства дискретные модели делят на одномерные, двумерные и трехмерные. Также дискретные модели бывают структурированными и неструктурированными. В структурированных дискретных моделях ребра соответствуют координатным направлениям некоторой (в общем случае криволинейной) системы координат. Напротив, в неструктурированных дискретных моделях выбор ребер не имеет привязки координатным направлениям. В структурированных дискретных моделях наибольшее распространение получили четырехугольники и шестигранники, а в неструктурированных часто используют треугольники и тетраэдры (которые часто совместно называют «симплексами»).

В целом, наиболее популярными плоскими дискретными элементами являются треугольники и четырехугольники. Также в некоторых случаях (например, в задачах оптимизации топологии объектов, исследования глобальных изменений климата и т. п.) используют плоские шестиугольники [5-6]. Аналогично, в трехмерном пространстве наиболее популярными являются тетраэдры и шестигранники (как естественные аналоги, соответственно, треугольника и четырехугольника). Также используют пирамиды и треугольные призмы при генерации дискретных моделей движением, а в задачах, например, исследования сферических объектов рассматривают дискретные модели на базе икосаэдров [7-8].

Таким образом, целью данной работы является исследование актуального состояния проблемы автоматической генерации неструктурированных дискретных моделей. Анализ подходов и методов автоматической генерации структурированных дискретных моделей можно найти в работе [9].

НЕСТРУКТУРИРОВАННЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ

Методы построения неструктурированных дискретных моделей можно разделить на две подгруппы: 1) методы построения дискретных моделей на базе треугольников и тетраэдров (симплексы); 2) методы построения дискретных моделей на базе четырехугольников и шестигранников (топологические кубики). Симплексы получили широкое распространение ввиду их топологической гибкости (для них определены простые, хорошо формализованные процедуры вставки или удаления узла, что позволяет сравнительно просто сгущать или огрублять модели).

Однако, использование четырехугольников и шестигранников позволяет более точно моделировать проектируемый объект при использовании меньшего количества узлов. Функции формы линейного треугольного и тетраэдрического конечного элемента имеют вид:

$$N_{\delta}^i(x, y) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y, \quad i = \overline{0,2}, \quad (1)$$

$$N_{\Delta}^i(x, y, z) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}z, \quad i = \overline{0,3}, \quad (2)$$

где $N_{\delta}^i(x, y)$ – функция формы i -го узла треугольного конечного элемента; $N_{\Delta}^i(x, y, z)$ – функция формы i -го узла тетраэдрического конечного элемента; $\alpha_{i,j}$ – действительные коэффициенты, которые выбираются таким образом, чтобы функция формы i -го узла была равна единице в этом узле и нулю в остальных.

При этом функции формы линейных четырехугольных и шестигранных конечных элементов имеют вид

$$N_{\psi}^i(x, y) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}xy, \quad i \in \overline{0,3}, \quad (3)$$

$$N_{\Psi}(x, y, z) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}z + \alpha_{i,4}xy + \alpha_{i,5}xz + \alpha_{i,6}yz + \alpha_{i,7}xyz, \quad i \in \overline{0,7}, \quad (4)$$

где $N_{\psi}^i(x, y)$ – функция формы i -го узла четырехугольного конечного элемента; $N_{\Psi}(x, y, z)$ – функция формы i -го узла шестигранного конечного элемента; $\alpha_{i,j}$ – определены аналогично (1)-(2).

Наличие нелинейных членов в соотношениях (3) и (4) приводит к тому, что градиенты четырехугольного и шестигранного конечных элементов (в отличие от треугольного и тетраэдрического) не постоянны и изменяются вдоль одной из координатных плоскостей (координатных прямых на плоскости). Таким образом, применение четырехугольных и шестигранных конечных элементов является более предпочтительным в вычислительном плане (соответствующие вычислительные эксперименты можно найти в работе [10]).

При этом генерация дискретных моделей на базе четырехугольных или шестигранных элементов более сложная, чем на базе треугольников или тетраэдров. Это можно проиллюстрировать на следующем примере. Пусть дана структурированная сетка, в которую необходимо добавить узел, используя только локальные перестроения. Хотя это и возможно в плоском случае (рис. 1), но в трехмерном пространстве не представляется возможным [11]. Таким образом, техника, которая активно используется для симплексов в методах на базе критерия Делоне [12], – последовательная вставка новых узлов, практически не применима для четырехугольников и шестигранников.

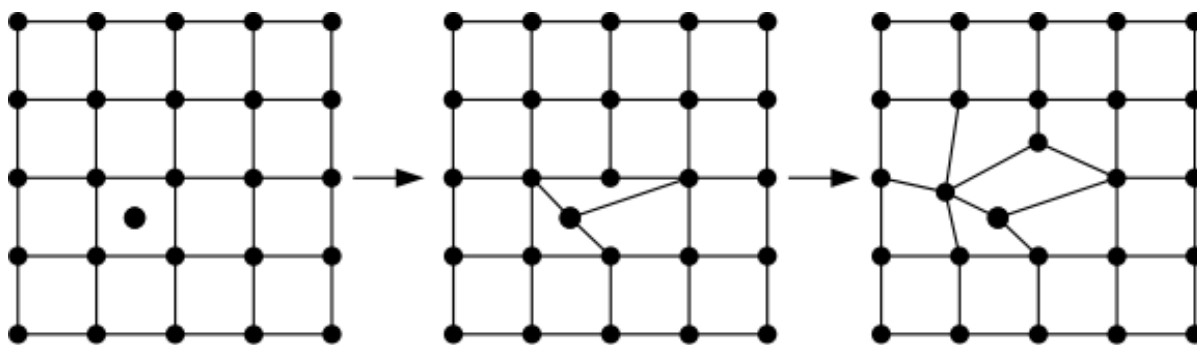


Рис. 1. Добавление узла к сетке четырехугольных элементов

МЕТОДЫ НА ГЕНЕРАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ТЕТРАЭДРОВ

Одной из наиболее распространенных на практике является проблема построения триангуляции исходной области, пригодной для использования в методах конечных или граничных элементов. Проблема состоит в нахождении множества треугольников,

покрывающих исходную область, форма и размеры которых удовлетворяют следующим требованиям: не должно быть треугольников с очень маленькими и очень большими углами, треугольники не должны быть меньше, чем это необходимо и не должны больше заданного размера. Методы на основе критерия Делоне [12] математически гарантируют, что такие требования могут быть удовлетворены. Такие же требования, как правило, предъявляются и к дискретным моделям на базе тетраэдров, для которых математическим обоснованием служит обобщение критерия Делоне на случай n -мерного пространства [13].

Сегодня достаточно хорошо развиты методы построения триангуляции Делоне [12] для исходного множества точек на плоскости, детальный анализ которых можно найти в работах А. В. Скворцова [14-16], а также Р. Су и Р. Л. С. Драйсдейла [17]. Представлены от простейших инкрементальных алгоритмов, которые добавляют новые узлы в модель один за другим, до наиболее быстрых, основанных на принципе «разделяй и властвуй» [17]. Они сравнительно просто обобщаются на трехмерный случай [18-19] (достаточно лишь изменить процедуру проверки условия Делоне). Эти методы получили свое применение в задачах компьютерной графики и геоинформационных системах. Однако, в задачах проектирования требуется аппроксимация границ объекта ребрами и гранями элементов, что не учитывается в этих методах.

Также разработаны способы и методы построения триангуляции Делоне для областей, представленных многоугольниками или планарными графами. В этой группе методов наибольшее распространение получили модификации методов Рапперта (J. Ruppert) [20] и L. Chew [21], которые, по сути, являются способами повышения качества сетки, сгенерированной для исходной области на базе критерия Делоне. Их обобщением для трехмерного пространства являются методы построения покрытия тетраэдрами области, ограниченной плоскими гранями [22-23]. В основе таких методов, как правило, итерационная вставка нового узла для локального улучшения геометрических характеристик дискретной модели. Новый узел может добавляться в дискретную модель для устранения элемента с несоответствующим качеством в центр описанной окружности (рис. 2) для треугольника [24] (описанной сферы для тетраэдра), или в его центр масс [25]. Также в некоторых работах [26-27] используют разбиение Воронова в качестве промежуточного. Такие техники вставки нового узла не гарантируют, что все ребра и грани будут аппроксимированы, соответственно, ребрами или гранями элементов. Для решения этой проблемы используют техники вставки новых узлов в середины недостающих ребер или граней [20], которые иногда комбинируют с процедурой зеркального отображения (flip) [28]. Однако, в задачах проектирования как плоских, так и трехмерных технических объектов сложной формы получение представления границ объектов в виде планарных графов или плоских граней является весьма сложной и нетривиальной проблемой, что затрудняет практическое использование таких методов.

Методы подвижного фронта основаны на идее послойного заполнения исходной области элементами. Исходной информацией для них является дискретная модель границы области, которая образует начальный фронт. Движением фронта формируют слои элементов до тех пор, пока исходная область не будет заполнена полностью (рис. 3). Фронтальные методы предложены для генерации моделей как плоских (на базе треугольников) [29-31], так и трехмерных (на базе тетраэдров) [32-33] объектов. В некоторых работах комбинируют использование метода на основе критерия Делоне с подвижным фронтом [34-35]. Фронтальные методы весьма универсальны, однако, необходимо отметить их высокую ресурсоемкость и относительно низкую скорость работы. Их узким местом является проблема самопересечения фронтов. Также получение качественного начального фронта (особенно в трехмерном случае) является самостоятельной сложной задачей.

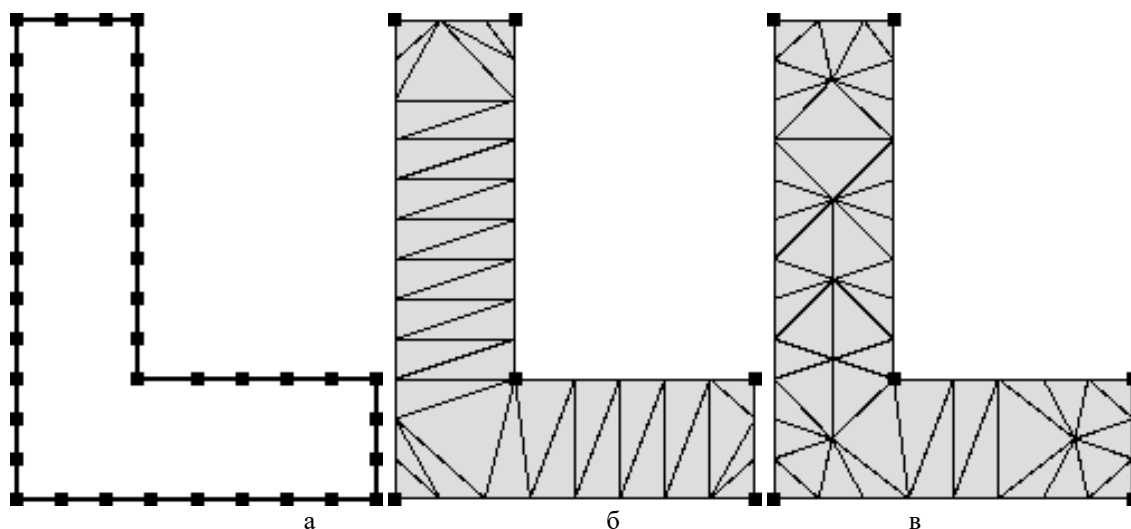


Рис. 2. Триангуляция Делоне L-области: а – исходный планарный граф; б – триангуляция Делоне; (в) – оптимизация минимального угла и площади элемента методом вставки в центр описанной окружности

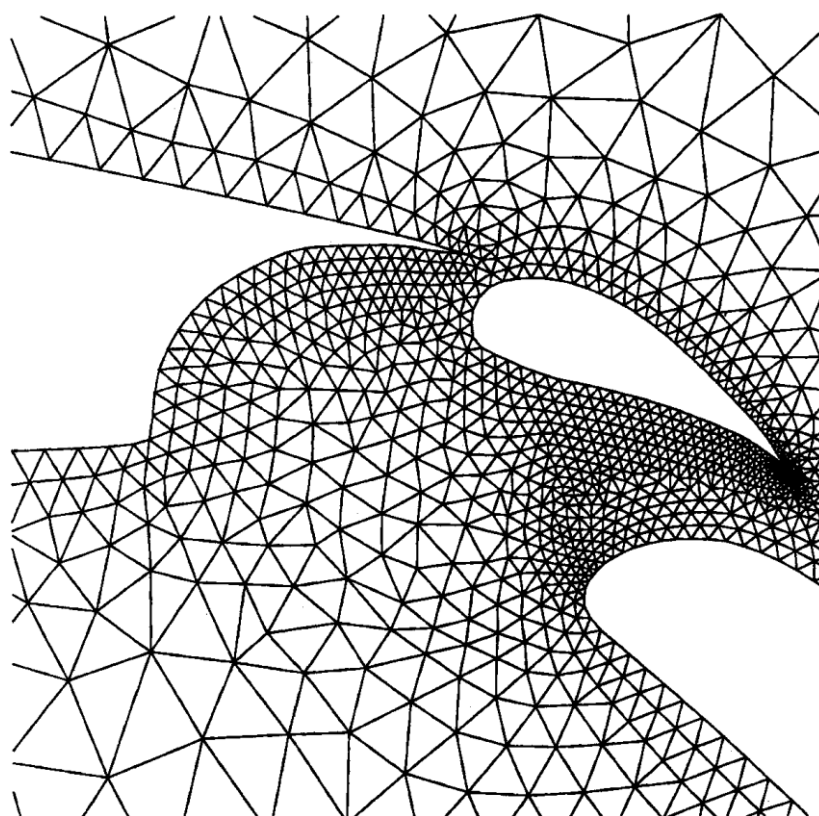


Рис. 3. Пример части фронтальной триангуляции области [30]

Другая группа методов генерации дискретных моделей базируется на использовании фоновой сетки с адаптацией приграничных узлов к границам области. Фоновая сетка может быть относительно просто получена (например, структурированная сетка), при этом накладывається единственное требование: размер ячеек на границе должен быть меньше минимальной геометрической особенности области. На этапе адаптации здесь распространено использование граничной коррекции узлов (пример применения этого подхода представлен на рис. 4). Впервые идея использования фоновой сетки на базе квадратных элементов для равномерной триангуляции двумерной области, ограниченной планарным графом, была представлена в работе [36] (в работе доказано, что минимальный угол в треугольниках будет не менее 13° , если в исходном графе нет углов острее 13°). Для

построения неравномерных дискретных моделей используются адаптивные фоновые сетки на базе метода Quadtree [234, 284-285, 286]. В [37] показано, что при использовании адаптивной фоновой сетки углы в элементах (исключая острые углы ребра на границе) будут больше $18,4^\circ$. Этот результат был улучшен в работе [38], где в предположении, что в границе области, представленной планарным графом, отсутствуют острые углы, показано, что в итоговой триангуляции все углы будут находиться в пределах от 30° до 90° . Данный подход относительно просто обобщается на случай трехмерного пространства [39-40]. Стоит отметить, что указанные выше работы используют в качестве входных данных дискретную модель границы объекта, задача получения которой является весьма сложной, также существует возможность получения «плохих» или вырожденных элементов около границы области.

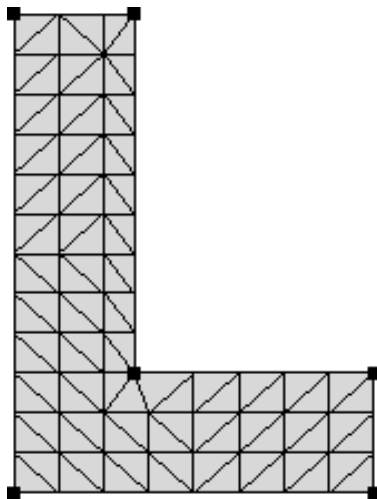


Рис. 4. Триангуляция L-области методом фоновой сетки с использованием техники граничной коррекции

МЕТОДЫ НА ГЕНЕРАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛНИТЕЛЕМ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ И ШЕСТИГРАННИКОВ

На сегодня разработаны как прямые, так и непрямые фронтальные методы генерации неструктурированных сеток четырехугольных и шестигранных элементов.

Прямые фронтальные методы генерации неструктурированных сеток четырехугольных элементов [41-43] строят сетку высокого качества, адаптированную к границам и с малым количеством нерегулярных элементов. Их основная идея заключается в использовании начальной дискретизации границы и последующем послойном заполнении исходной области конечными элементами (например, рис. 5). Прямые фронтальные методы также обобщены на случай трехмерного пространства для получения неструктурированных сеток шестигранных элементов. В таком случае область исчерпывают пласт за пластом, формируя, таким образом, и дискретизацию фронта в виде четырехугольных граней, и дискретизацию внутренней части области [44-45]. Основными недостатками прямых фронтальных методов, приводящими к сложности их практической реализации и большим вычислительным затратам, являются: 1) трудоемкость поиска вырожденных элементов при пересечении двух фронтов; 2) сложность предотвращения возникновения пустот (участков области, незаполненных элементами) [11]. Также получение качественной начальной дискретизации границ объекта является весьма сложной (особенно в трехмерном случае) самостоятельной задачей.

Непрямые фронтальные методы используют предварительно построенную сетку треугольников или тетраэдров. Их основная идея – это послойная трансформация треугольников в четырехугольники [46-47] или тетраэдров в шестигранники [48-49]. В отличие от прямых фронтальных для них отсутствует проблема пересекающихся фронтов, они защищены от появления пустот внутри контура, но, зачастую, они строят сетку топологически менее качественную, чем лучшие прямые фронтальные методы. Среди

непрямых фронтальных методов можно выделить метод Q-Morph, предложенный Стивеном Оуэном [46] и его модификацию, разработанную А. В. Сковпенем [47], которая строит сетку, близкую к оптимальной, и использует трансформацию треугольников, что делает его надежным и быстрым. В результате обобщения метода Q-Morph на трехмерный случай предложен метод H-Morph [48-49]. Однако, недостатком данного подхода является необходимость наличия качественной предварительной дискретизации на базе треугольников или тетраэдров, получение которой является отдельной трудоемкой задачей.

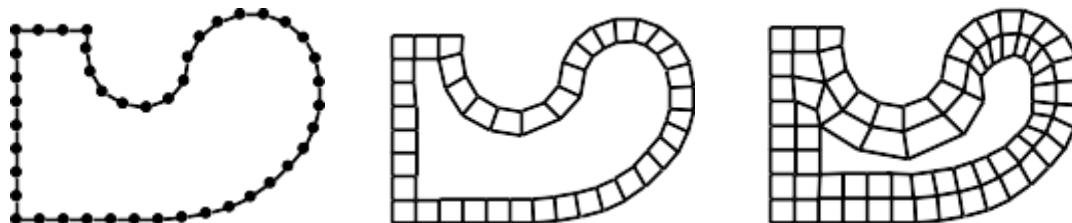


Рис. 5. Этапы работы фронтального метода

Техника пространственного изгиба континуума (the Spatial Twist Continuum), представленная в работах [50-52], позволяет автоматически или полуавтоматически генерировать сетки как четырехугольных, так и шестигранных элементов. В основу техники генерации сеток положено STC-представление сетки, которое является двойственным для сетки четырехугольников (рис. 6) или шестигранников (рис. 7) [51-52], что делает его пригодным для анализа качества сеток. STC-представление, по сути, является аналогом диаграмм Воронова. Оно строится для дискретной модели границы объекта и затем конвертируется в дискретную модель на базе четырехугольников или шестигранников. Основным недостатком алгоритмов, использующих STC-представление, является вычислительная сложность: в худшем случае они становятся алгоритмически полными. В работах [53-54] предлагается метод малых боковых смещений (Whisker Weaving), который строит STC-представление с использованием подвижного фронта. Недостатки такого подхода аналогичны недостаткам прямых фронтальных методов. В целом, необходимо отметить, что результатом построения двойственного представления в трехмерном случае не всегда является валидная сетка шестигранных элементов. Также достаточно трудно реализовать устойчивую версию алгоритма для метода на основе STC-представления.

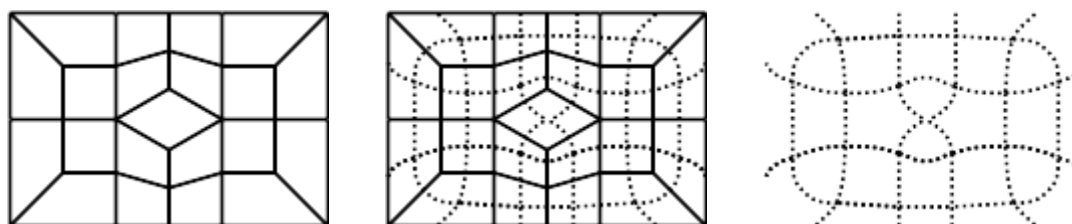


Рис. 6. Сетка четырехугольных элементов и ее STC-представление

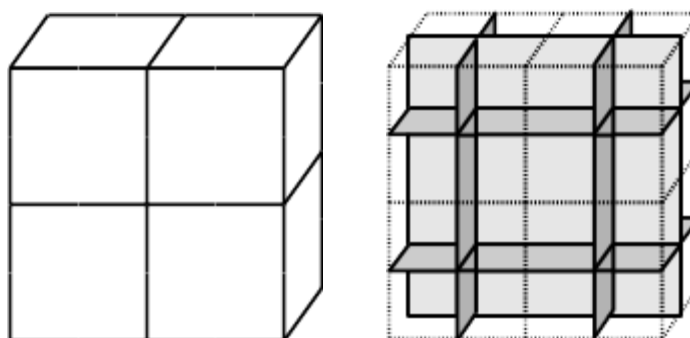


Рис. 7. STC-представление сетки шестигранных элементов

Методы суперпозиции основаны на использовании некоторой базовой стратегии при построении дискретных моделей на базе четырехугольников или шестигранников.

Алгоритмы данного класса, как правило, в качестве исходных данных используют фоновую сетку, которая более или менее просто может быть построена и покрывает область вокруг геометрического объекта. Затем исходное разбиение адаптируют к его границам (например, рис. 8). Необходимо отметить, что ключевым шагом данной группы методов является сложность генерации сетки высокого качества около границы объекта (граница должна быть аппроксимирована ребрами элементов, которые должны быть невырожденными), а их практическая реализация достаточно проблематичная. Существует два основных подхода к адаптации исходной сетки к границе объекта: сеточный [55-57] и проекционный [58-59]. Первый подход основан на идее поиска точек, расположенных на границе области, соответствующих граничным точкам начальной сетки, и последующем формировании слоя приграничных элементов с помощью техники изоморфизма [55]. Второй подход основан на перемещении близлежащих узлов исходной сетки на границу объекта. Также методы на основе суперпозиции могут быть использованы для адаптации неравномерной начальной сетки. Для этого, как и в методах фоновой сетки для симплексов, используют октодеревья. Общей особенностью методов на основе суперпозиции является генерация элементов приблизительно одинакового размера. При этом в результате удовлетворения требования, касающегося соотношения размеров ячейки фоновой сетки и наименьшей геометрической особенности, результирующая дискретная модель может быть избыточно густой.

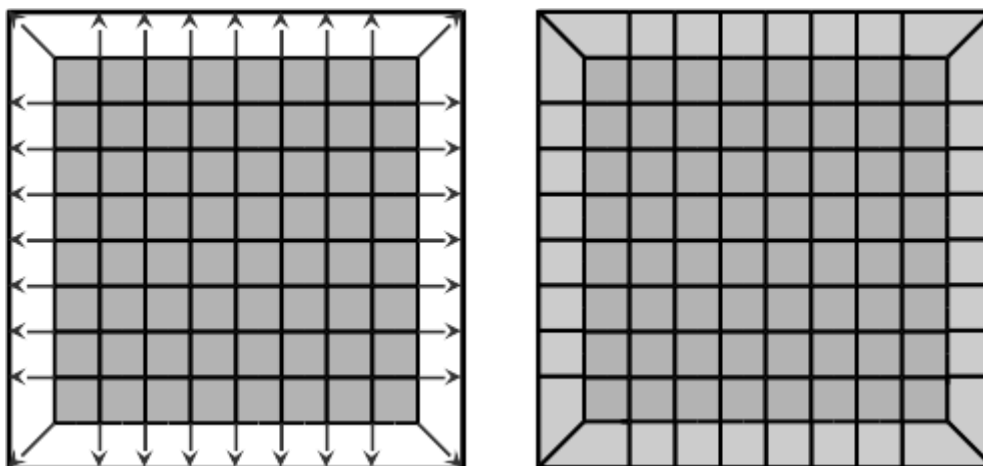


Рис. 8. Дискретизация квадратной области с использованием фоновой сетки

ВЫВОДЫ

Таким образом, проблема генерации дискретных моделей сложных геометрических объектов является актуальной и сложной. Наиболее активно разрабатываются методы генерации дискретных моделей с использованием треугольников (тетраэдров) и четырехугольников (шестигранников). Первые – двумерные и трехмерные методы триангуляции – наиболее развиты по причине топологической гибкости используемых элементов (треугольников или тетраэдров). Вторые – способы генерации дискретных моделей с использованием четырехугольников или шестигранников (топологических кубиков), как правило, более сложные и требуют значительно больших вычислительных ресурсов для обеспечения необходимого качества. В обеих группах представлены методы на базе фронтальных подходов (прямых и непрямых) и фоновых сеток. Однако, весьма популярная при триангуляции техника последовательной вставки узлов для улучшения качества модели практически не применима для четырехугольников и шестигранников. Перспективные исследования в данной области направлены на теоретическое обеспечение генерации дискретной модели с необходимым качеством, генерацию адаптивных сеток, а также разрабатываются методики, основанные на задействовании технологий параллельных вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Liu G. R. Mesh free methods: Moving Beyond the Finite Element Method / G. R. Liu. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. : CRC Press, 2003. – 693 P.
2. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Seventh Edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu. – London : Butterworth-Heinemann, 2013. – 756 P.
3. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Seventh Edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, D. D. Fox. – London : Butterworth-Heinemann, 2013. – 672 P.
4. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method for Fluid Dynamics, Seventh Edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Nithiarasu. – London : Butterworth-Heinemann, 2013. – 584 P.
5. Langelaar M. The use of convex uniform honeycomb tessellations in structural topology optimization / M. Langelaar // The 7th world congress on structural and multidisciplinary optimization : World Congress, Seoul, South Korea, 21-25 May 2007 : proceedings. – Seoul, 2007.
6. Saxena A. Combined Gradient-Stochastic Optimization with Negative Circular Masks for Large Deformation Topologies // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2013. – Volume 93, Issue 6. – P. 635-663. – DOI : 10.1002/nme.4401.
7. Heikes R. Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part I: Basic design and results of tests / R. Heikes, D. Randall // Monthly Weather Review. – 1995. – Volume 123. – P. 1862-1880.
8. Heikes R. Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part II: A detailed description of the grid and an analysis of numerical accuracy / R. Heikes, D. Randall // Monthly Weather Review. – 1995. – Volume 123. – P. 1881-1887.
9. Чопоров С. В. Методы построения дискретных моделей: структурированные и блочно-структурированные сетки / С. В. Чопоров, С. И. Гоменюк, Х. Х. Алатамнех, К. С. Оспищев // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 272-284.
10. Чопоров С. В. Сравнительный анализ треугольных и четырехугольных конечных элементов / С. В. Чопоров, С. И. Гоменюк, А. А. Лисняк // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2013. – № 2(47). – С. 382-386.
11. Thompson J. F. Handbook of grid generation / J. F. Thompson, Bh. Sony, N. Weatherill. – New York : CRC Press, 1999. – 1136 p.
12. Делоне Б. Н. О пустой сфере / Б. Н. Делоне // Известия АН СССР. ОМОН. – 1934. – № 4. – С. 793-800.
13. Watson D. F. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes / D. F. Watson // The Computer Journal. – 1981. – Volume 24, Issue 2. – P. 167-172.
14. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и её применение / А. В. Скворцов. – Томск : Издательство Томского университета, 2002. – 128 с.
15. Скворцов А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – № 3. – С. 14-39.
16. Скворцов А. В. Алгоритмы построения и анализа триангуляции / А. В. Скворцов, Н. С. Мирза. – Томск : Издательство Томского университета, 2006. – 168 с.
17. Su P. A comparison of sequential Delaunay triangulation algorithms / P. Su, R. L. S. Drysdale // Computational Geometry. – 1997. – Volume 7, Issues 5-6. – P. 361-385.
18. Joe B. Construction of k-Dimensional Delaunay Triangulations using Local Transformations / B. Joe // SIAM Journal on Scientific Computing. – 1993. – Volume 14, Issue 6. – P. 1415-1436.
19. Joe B. Construction of Three-Dimensional Improved-Quality Triangulations Using Local Transformations / B. Joe // SIAM Journal on Scientific Computing. – 1995. – Volume 16, Issue 6. – P. 1192-1307.
20. Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation / J. Ruppert // Journal of Algorithms. – 1995. – Volume 18, Issue 3. – P. 548-585.
21. Chew L. P. Constrained Delaunay Triangulations / L. P. Chew // Algorithmica. – 1989. – Volume 4, Issue 1. – P. 97-108.

22. Cohel-Steiner D. Conforming Delaunay Triangulations in 3D / D. Cohen-Steiner, É. C. de Verdière, M. Yvinec // *Computational Geometry: Theory and Applications*. – 2004. – Volume 28. – P. 217-233.
23. Jamin C. CGALmesh: a Generic Framework for Delaunay Mesh Generation / C. Jamin, P. Alliez, M. Yvinec, J.-D. Boissonnat // *ACM Transactions on Mathematical Software*. – 2014. – Volume 1, No 1. – P. 1-26.
24. Frey W. H. Selective Refinement: A New Strategy for Automatic Node Placement in Graded Triangular Meshes / W. H. Frey // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1987. – Volume 24, Issue 11. – P. 2183-2200. – DOI : 10.1002/nme.1620241111.
25. Nigel P. W. Delaunay Triangulation in Computational Fluid Dynamics / P. W. Nigel // *Computers and Mathematics with Applications*. – 1992. – Volume 24, No 5/6. – P. 129-150.
26. Du Q. Tetrahedral mesh generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations / Q. Du, D. Wang // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2003. – Volume 56, Issue 9. – P. 1355-1373. – DOI : 10.1002/nme.616.
27. Du Q. Recent progress in robust and quality Delaunay mesh generation / Q. Du, D. Wang // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2006. – Volume 195, Issues 1-2. – P. 8-23.
28. George P. L. Automatic Mesh Generator with Specified Boundary / P. L. George, F. Hecht, E. Saltel // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1991. – Volume 92, Issue 3. – P. 269-288.
29. Mavriplis D. J. An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness / D. J. Mavriplis // *Journal of Computational Physics*. – 1995. – Volume 117, Issue 1. – P. 90-101.
30. Müller J.-D. A Frontal Approach for Internal Node Generation in Delaunay Triangulations / J.-D. Müller, P. L. Poe, H. Deconinck // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 1993. – Volume 17. – P. 241-255.
31. Silva C. T. Greedy Cuts: An Advancing Front Terrain Triangulation Algorithm / C. T. Silva, J. S. B. Mitchell // *The 6th ACM International Symposium on Advances in Geographic Information Systems : International Conference, Washington, USA, 2-7 November 1998 : proceedings*. – Washington : ACM, 1998. – P. 137-144. – DOI : 10.1145/288692.288717
32. Frey P. Delaunay tetrahedralization using an advancing-front approach / P. Frey, H. Borouchaki, P.-L. Geouge // *The 5th International Meshing Roundtable : International Conference, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, October 10-11, 1996 : proceedings*. – Sandia : Sandia National Laboratories, 1996. – P. 31-48.
33. Frey P. 3D Delaunay mesh generation coupled with an advancing-front approach / P. Frey, H. Borouchaki, P.-L. Geouge // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – 1998. – Volume 157, Issue 1. – P. 115-131.
34. El-Hamalawi A. A 2D combined advancing front-Delaunay mesh generation scheme / A. El-Hamalawi // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2004. – Volume 40, No 9-10. – P. 967-989.
35. Kucwaj J. An Algorithm of Combining of Advancing Front and Delaunay Triangulation to 3-D Domain Tessellation / J. Kucwaj, B. Borowik // *Annales UMCS Informatica AI IX*. – 2009. – No 1. – P. 15-26.
36. Baker B. S. Nonobtuse Triangulation of Polygons / B. S. Baker, E. Grosse, C. S. Rafferty // *Discrete and Computational Geometry*. – 1988. – Volume 3, Issue 2. – P. 147-168.
37. Bern M. Provably good mesh generation / M. Bern, D. Eppstein, J. Gilbert // *Journal of Computer and System Sciences*. – 1994. – Volume 48, Issue 3. – P. 384-409.
38. Neugebauer F. Improved Mesh Generation: Not Simple but Good / F. Neugebauer, R. Diekmann // *The 5th International Meshing Roundtable : International Conference, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, October 10-11, 1996 : proceedings*. – Sandia : Sandia National Laboratories, 1996. – P. 257-272.
39. Mitchell S. A. Quality Mesh Generation in Three Dimensions / S. A. Mitchell, S. A. Vavasis // *The Eighth Annual Symposium on Computational Geometry : International Conference, Berlin, Germany, June 10-12, 1992 : proceedings*. – New York : Cornell University, 1992. – P. 92-104.
40. Mitchell S. A. Quality Mesh Generation in Higher Dimensions / S. A. Mitchell, S. A. Vavasis // *SIAM Journal on Computing*. – 2000. – Volume 29, Issue 4. – P. 1334-1370.

41. Blacker T. D. Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation / T. D. Blacker, M. B. Stephenson // International Journal For Numerical Methods in Engineering. – 1991. – Volume 32, Issue 4. – P. 811-847. – DOI : 10.1002/nme.1620320410.
42. Park C. A new automated scheme of quadrilateral mesh generation for randomly distributed line constraints / C. Park, J.-S. Noh, I.-S. Jang, J. M. Kang // Computer-Aided Design. – 2007. – Volume 39. – P. 258-267.
43. Zhao Y. A modified paving algorithm for quadrilateral mesh generation / Y. Zhao, B. Yu // Kung Cheng Je Wu Li Hsueh Pao/Journal of Engineering Thermophysics. – 2013. – Volume 34, Issue 4. – P. 728-732.
44. Blacker T. D. Seams and Wedges in Plastering: A 3D Hexahedral Mesh Generation Algorithm / T. D. Blacker, R. J. Meyers // Engineering with Computers. – 1993. – Volume 9, Issue 2. – P. 83-93.
45. Staten M. L. Unconstrained plastering – Hexahedral mesh generation via advancing-front geometry decomposition / M. L. Staten, S. J. Owen, T. D. Blacker, M. Supazzini, K. Shimada // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2010. – Volume 81, Issue 2. – P. 135-171. – DOI : 10.1002/nme.2679.
46. Owen S. J. Q-Morph: An Indirect Approach to Advancing Front Quad Meshing / S. J. Owen, M. L. Staten, S. A. Canann, S. Saigal // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1999. – Volume 44, Issue 9. – P. 1317-1340. – DOI : 10.1002/(SICI)1097-0207(19990330)44:9<1317::AID-NME532>3.0.CO;2-N.
47. Сквепень А. В. Усовершенствованный алгоритм построения нерегулярных четырехугольных сеток / А. В. Сквепень // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 8. – С. 1506-1528.
48. Owen S. J. H-Morph: An Indirect Approach to Advancing Front Hex Meshing / S. J. Owen, S. Saigal // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – Volume 49, Issue 1-2. – P. 289-312. – DOI : 10.1002/1097-0207(20000910/20)49:1/2<289::AID-NME934>3.0.CO;2-L.
49. Owen S. J. Hex-domain mesh generation using 3D constrained triangulation / S. J. Owen // Computer Aided Design. – 2001. – Volume 33, Issue 3. – P. 211-220.
50. Blacker T. D. Forming and Resolving Wedges in the Spatial Twist Continuum / T. D. Blacker, S. A. Mitchell, T. J. Tautges, P. Murdoch, S. Benzley // Engineering with Computers. – 1997. – Volume 13, Issue 1. – P. 35-47.
51. Murdoch P. The Spatial Twist Continuum / P. Murdoch, S. E. Benzley // The 4th International Meshing Roundtable : International Conference, Albuquerque, New Mexico, U.S.A., October 16-17, 1995 : proceedings. – Sandia : Sandia National Laboratories, 1995. – P. 243-251.
52. Murdoch P. The spatial twist continuum: A connectivity based method for representing all-hexahedral finite element meshes / P. Murdoch, S. E. Benzley, T. D. Blacker, S. A. Mitchell // Finite Elements in Analysis and Design. – 1997. – Volume 28, Issue 2. – P. 137-149.
53. Tautges T. J. Progress Report on the Whisker Weaving All-hexahedral Meshing Algorithm / T. J. Tautges, S. A. Mitchell // Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations : The 5th International Conference, Mississippi State University, April 1-5, 1996 : proceedings. – Mississippi : Mississippi State University, 1996. – P. 659-670.
54. Tautges T. J. The Whisker Weaving Algorithm: a connectivity based method for constructing all-hexahedral finite element meshes / T. J. Tautges, T. D. Blacker, S. A. Mitchell // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1996. – Volume 39, Issue 19. – P. 3327-3350. – DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19961015)39:19<3327::AID-NME2>3.0.CO;2-H.
55. Schneiders R. A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders // Engineering with Computers. – 1996. – Volume 12, Issue 3. – P. 168-177.
56. Schneiders R. Octree-based Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders, R. Schindler, F. Weiler // The 5th International Meshing Roundtable : International Conference, Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A., October 10-11, 1996 : proceedings. – Sandia : Sandia National Laboratories, 1996. – P. 205-216.
57. Schneiders R. Octree-Based Hexahedral Mesh Generation / R. Schneiders // International Journal of Computational Geometry & Applications. – 2000. – Volume 10, Issue 4. – P. 383-398.

58. Ives D. Geometric grid generation: surface modeling, grid generation, and related issues in computational fluid dynamic (CFD) solutions / D. Ives // Proceedings of NASA Conference, OH, NASA CP-3291. – Cleveland, 1995. – P. 535-546.
59. Taghavi R. Automatic, parallel and fault tolerant mesh generation from CAD / R. Taghavi // Engineering with Computers. – 1996. – Volume 12, Issue 3. – P. 178-185.

REFERENCES

1. Liu, G.R. (2003), *Mesh free methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.
2. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu, J.Z. (2013), *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Seventh Edition*, Butterworth-Heinemann, London.
3. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Fox, D.D. (2013), *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Seventh Edition*, Butterworth-Heinemann, London.
4. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Nithiarasu, P. (2013), *The Finite Element Method for Fluid Dynamics, Seventh Edition*, Butterworth-Heinemann London.
5. Langelaar, M. (2007), “The use of convex uniform honeycomb tessellations in structural topology optimization”, “*Proceedings of the 7th world congress on structural and multidisciplinary optimization*”, World Congress, Seoul, South Korea, 21-25 May 2007.
6. Saxena, A. (2013), “Combined Gradient-Stochastic Optimization with Negative Circular Masks for Large Deformation Topologies”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 93, issue 6, pp. 635-663.
7. Heikes, R. and Randall, D. (1995), “Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part I: Basic design and results of tests”, *Monthly Weather Review*, vol. 123, pp. 1862-1880.
8. Heikes, R. and Randall, D. (1995), “Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part II: A detailed description of the grid and an analysis of numerical accuracy”, *Monthly Weather Review*, vol. 123, pp. 1881-1887.
9. Choporov, S.V., Gomenyuk, S.I., Alatanekh, Kh.Kh. and Ospishchev, K.S. (2016), “Metody postroeniya diskretnykh modeley: strukturirovannye i blochno-strukturirovannye setki” [Methods of construction of discrete models: structured and block-structured grids], *Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo universitetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fizyko-matematichni nauky*, no. 1, pp. 272-284.
10. Choporov, S.V., Gomenyuk, S.I. and Lisnyak, A.A. (2013), “Sravnitel'nyy analiz treugol'nykh i chetyrehugol'nykh konechnykh elementov” [Comparative analysis of triangular finite elements and triangular], *Vestnik Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta*, vol. 47, no. 2, pp. 382-386.
11. Thompson, J.F., Sony, Bh. and Weatherill, N. (1999), *Handbook of grid generation*, CRC Press, New York.
12. Delone, B.N. (1934), “O pustoy sfere” [On an empty field], *Izvestiya AN SSSR OMEN*, vol. 4, pp. 793-800.
13. Watson, D.F. (1981), “Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes”, *The Computer Journal*, vol. 24, issue 2, pp. 167-172.
14. Skvortsov, A.V. (2002), *Triangulyatsiya Delone i eye primeneniye* [Delaunay's triangulation and its application], Izdatel'stvo Tomskogo universiteta, Tomsk.
15. Skvortsov, A.V. (2002), “Obzor algoritmov postroeniya triangulyatsii Delone” [Overview of algorithms for constructing a Delaunay triangulation], *Vychislitel'nye metody i programirovaniye*, vol. 3, pp. 14-39.
16. Skvortsov, A.V. and Mirza, N.S. (2006), *Algoritmy postroeniya i analiza triangulyacii* [Algorithms for constructing and analyzing triangulation], Izdatel'stvo Tomskogo universiteta, Tomsk.
17. Su, P. and Drysdale, R.L.S. (1997), “A comparison of sequential Delaunay triangulation algorithms”, *Computational Geometry*, vol. 7, issue 5-6, pp. 361-385.
18. Joe, B. (1993), “Construction of k-Dimensional Delaunay Triangulations using Local Transformations”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 14, issue 6, pp. 1415-1436.

19. Joe, B. (1995), "Construction of Three-Dimensional Improved-Quality Triangulations Using Local Transformations", *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 16, issue 6, pp 1192-1307.
20. Ruppert, J.A (1995), "Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation", *Journal of Algorithms*, vol. 18, issue 3, pp. 548-585.
21. Chew, L.P. (1989), "Constrained Delaunay Triangulations", *Algorithmica*, vol. 4, issue 1, pp. 97-108.
22. Cohel-Steiner, D., de Verdière, É.C. and Yvinec, M. (2004), "Conforming Delaunay Triangulations in 3D", *Computational Geometry: Theory and Applications*, vol. 28, pp. 217-233.
23. Jamin, C., Alliez, P., Yvinec, M. and Boissonnat, J.-D. (2014), "CGALmesh: a Generic Framework for Delaunay Mesh Generation", *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 1, no 1, pp. 1-26.
24. Frey, W.H. (1987), "Selective Refinement: A New Strategy for Automatic Node Placement in Graded Triangular Meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, issue 11, pp. 2183-2200.
25. Nigel, P.W. (1992), "Delaunay Triangulation in Computational Fluid Dynamics", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 24, no 5/6, pp. 129-150.
26. Du, Q. and Wang, D. (2003), "Tetrahedral mesh generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, issue 9, pp. 1355-1373.
27. Du, Q. and Wang, D. (2006), "Recent progress in robust and quality Delaunay mesh generation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 195, issues 1-2, pp. 8-23.
28. George, P.L., Hecht, F. and Saltel, E. (1991), "Automatic Mesh Generator with Specified Boundary", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, issue 3, pp. 269-288.
29. Mavriplis, D.J. (1995), "An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness", *Journal of Computational Physics*, vol. 117, issue 1, pp. 90-101.
30. Müller, J.-D., Poe, P.L. and Deconinck, H. (1993), "A Frontal Approach for Internal Node Generation in Delaunay Triangulations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 17, pp. 241-255.
31. Silva, C.T. and Mitchell, J.S.B. (1998), "Greedy Cuts: An Advancing Front Terrain Triangulation Algorithm", *Proceedings of the 6th ACM International Symposium on Advances in Geographic Information Systems: International Conference*, Washington, USA, 2-7 November 1998, ACM, Washington, pp. 137-144.
32. Frey, P., Borouchaki, H. and Geouge, P.-L. (1996), "Delaunay tetrahedralization using an advancing-front approach", *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable: International Conference*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, October 10-11, 1996, Sandia National Laboratories, Sandia, pp. 31-48.
33. Frey, P., Borouchaki, H. and Geouge, P.-L. (1998), "3D Delaunay mesh generation coupled with an advancing-front approach", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 157, issue 1, pp. 115-131.
34. El-Hamalawi, A. (2004), "A 2D combined advancing front-Delaunay mesh generation scheme", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, no 9-10, pp. 967-989.
35. Kucwaj, J. and Borowik, B. (2009), "An Algorithm of Combining of Advancing Front and Delaunay Triangulation to 3-D Domain Tesselation", *Annales UMCS Informatica AI IX*, no 1, pp. 15-26.
36. Baker, B.S., Grosse, E. and Rafferty, C.S. (1988), "Nonobtuse Triangulation of Polygons", *Discrete and Computational Geometry*, vol. 3, issue 2, pp. 147-168.
37. Bern, M., Eppstein, D. and Gilbert, J. (1994), "Provably good mesh generation", *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 48, issue 3, pp. 384-409.
38. Neugebauer, F. and Diekmann, R. (1996), "Improved Mesh Generation: Not Simple but Good", *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable: International Conference*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, October 10-11, 1996, Sandia National Laboratories, Sandia, pp. 257-272.
39. Mitchell, S.A. and Vavasis, S.A. (1992), "Quality Mesh Generation in Three Dimensions", *Proceedings of the Eighth Annual Symposium on Computational Geometry: International Conference*, Berlin, Germany, June 10-12, 1992, Cornell University, New York, pp. 92-104.
40. Mitchell, S.A. and Vavasis, S.A. (2000), "Quality Mesh Generation in Higher Dimensions", *SIAM Journal on Computing*, vol. 29, issue 4, pp. 1334-1370.

41. Blacker, T.D. and Stephenson, M.B. (1991), "Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation", *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, issue 4, pp. 811-847.
42. Park, C., Noh, J.-S., Jang, I.-S. and Kang, J.M. (2007), "A new automated scheme of quadrilateral mesh generation for randomly distributed line constraints", *Computer-Aided Design*, vol. 39, pp. 258-267.
43. Zhao, Y. and Yu, B. (2013), "A modified paving algorithm for quadrilateral mesh generation", *Kung Cheng Je Wu Li Hsueh Pao/Journal of Engineering Thermophysics*, vol. 34, issue 4, pp. 728-732.
44. Blacker, T.D. and Meyers, R.J. (1993), "Seams and Wedges in Plastering: A 3D Hexahedral Mesh Generation Algorithm", *Engineering with Computers*, vol. 9, issue 2, pp. 83-93.
45. Staten, M.L., Owen, S.J., Blacker, T.D., Supazzini, M. and Shimada, K. (2010), "Unconstrained plastering – Hexahedral mesh generation via advancing-front geometry decomposition", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, issue 2, pp. 135-171.
46. Owen, S.J., Staten, M.L., Canann, S.A. and Saigal, S. (1999), "Q-Morph: An Indirect Approach to Advancing Front Quad Meshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, issue 9, pp. 1317-1340.
47. Skovpen', A. V. (2005), "Usovershenstvovannyi algoritm postroeniya neregulyarnykh chetyrekhugol'nykh setok" [An improved algorithm for constructing irregular quadrilateral meshes], *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, vol. 45, no. 8, pp. 1506-1528.
48. Owen, S. J., Saigal, S. (2000), "H-Morph: An Indirect Approach to Advancing Front Hex Meshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 49, issue 1-2, pp. 289-312.
49. Owen, S. J. (2001), "Hex-domain mesh generation using 3D constrained triangulation", *Computer Aided Design*, vol. 33, issue 3, pp. 211-220.
50. Blacker, T. D., Mitchell, S. A., Tautges, T. J., Murdoch, P., Benzley, S. (1997), "Forming and Resolving Wedges in the Spatial Twist Continuum", *Engineering with Computers* vol. 13, issue 1, pp. 35-47.
51. Murdoch, P., Benzley, S. E. (1995), "The Spatial Twist Continuum", *Proceedings of the 4th International Meshing Roundtable : International Conference*, Albuquerque, New Mexico, U.S.A., October 16-17, 1995, Sandia National Laboratories, Sandia, pp. 243-251.
52. Murdoch, P., Benzley, S. E., Blacker, T. D., Mitchell, S. A. (1997), "The spatial twist continuum: A connectivity based method for representing all-hexahedral finite element meshes", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 28, issue 2, pp. 137-149.
53. Tautges, T. J., Mitchell, S. A. (1996), "Progress Report on the Whisker Weaving All-hexahedral Meshing Algorithm", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations : The 5th International Conference*, Mississippi State University, April 1-5, 1996, Mississippi State University, Mississippi, pp. 659-670.
54. Tautges, T. J., Blacker, T. D., Mitchell, S. A. (1996), "The Whisker Weaving Algorithm: a connectivity based method for constructing all-hexahedral finite element meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, issue 19, pp. 3327-3350.
55. Schneiders, R. (1996), "A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes", *Engineering with Computers*, vol. 12, issue 3 pp. 168-177.
56. Schneiders, R., Schindler, R., Weiler, F. (1996), "Octree-based Generation of Hexahedral Element Meshes", *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable : International Conference*, Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A., October 10-11, 1996, Sandia National Laboratories, Sandia, pp. 205-216.
57. Schneiders, R. (2000), "Octree-Based Hexahedral Mesh Generation", *International Journal of Computational Geometry & Applications*, vol. 10, issue 4, pp. 383-398.
58. Ives, D. (1995), "Geometric grid generation: surface modeling, grid generation, and related issues in computational fluid dynamic (CFD) solutions", *Proceedings of NASA Conference NASA CP-3291*, Cleveland, pp. 535-546.
59. Taghavi, R. (1996), "Automatic, parallel and fault tolerant mesh generation from CAD", *Engineering with Computers*, vol. 12, issue 3, pp. 178-185.

УДК 517.9

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ В $L^p(R^l, d^l x)$ ПРОСТОРАХ, ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Яременко М. І.

*Національний технічний університет України «КПІ»,
просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056, Україна*

math.kiev@gmail.com

Розглядаються умови існування розв'язку задачі Коші для рівнянь гіперболічного типу в просторі Лебега. При доведенні теореми існування використовується схема Гальоркіна, будується послідовність наближення Гальоркіна та показується, що ця послідовність збігається до розв'язку рівняння.

Ключові слова: квазілінійні диференціальні рівняння, метод Гальоркіна, метод форм, апріорні оцінки.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В $L^p(R^l, d^l x)$ ПРОСТРАНСТВАХ, ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Яременко Н. И.

*Национальный технический университет Украины «КПИ»,
просп. Победы, 37, г. Киев, 03056, Украина*

math.kiev@gmail.com

Рассматриваются условия существования решения задачи Коши для уравнений гиперболического типа пространстве Лебега. При доказательстве теоремы существования используется схема Галеркина, строится последовательность приближения Галеркина и показывается, что эта последовательность сходится к решению уравнения.

Ключевые слова: квазилинейные дифференциальные уравнения, метод Галеркина, метод форм, априорные оценки.

THE EXISTENCE OF SOLUTION OF HYPERBOLIC EQUATION IN $L^p(R^l, d^l x)$ SPACE, THE COUCHY PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

Yremenko M. I.

*National Technical University of Ukraine "KPI",
Victory av., 37, Kiev, 03056, Ukraine*

math.kiev@gmail.com

Dedicated to the research of the conditions of existence of the solution of the Cauchy problem for hyperbolic equations in Lebesgue space. We conducted the research under the scheme: by the equation we built a special form and studied its properties, has its boundedness established this form creates an operator and we study the properties of the operator using the form that it generates. Then we have a theorem on the existence of the solution of the equation by which the form is built. To proof the theorem Galerkin scheme is being used, we built Galerkin sequence of approximation and showed that this sequence converges to the solution of the hyperbolic equation.

Key words: quasi-linear differential equations, Galerkin method, the method forms a priori estimations.

ВСТУП

Розглянемо рівняння вигляду:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} - \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) + b(x, u, \nabla u) = f(x, t),$$

де з фізичної точки зору функція $f(x, t)$ характеризує зовнішній вплив на систему, що досліджується. Нелінійна функція $b(x, u, \nabla u)$ враховує механізм взаємодії хвилі з середовищем, під час розповсюдження хвилі у випадку, коли швидкість розповсюдження хвилі є функцією частоти.

Робота присвячена дослідженню слабкої розв'язуваності квазілінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу з гладкими та вимірними коефіцієнтами. Дослідження базується на методах теорії напівгруп із застосуванням методу диференційних форм. Вивчення задачі проводиться за такою схемою: спочатку від гіперболічного рівняння, за допомогою певної заміни, здійснюється перехід до системи параболічних рівнянь спеціального вигляду і далі досліджується розв'язуваність цієї системи, при цьому виникає потреба в дослідженні рівнянь еліптичного типу. Рівняння еліптичного типу розглядаються за допомогою аналогу метода монотонних слабо компактних операторів. У роботі отримано аналог теореми типу Мінгі-Браудера. При цьому розглядається новий тип операторів $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$.

Розглянемо рівняння вигляду:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} \in Au(t),$$

за умов, що $t \in [0, T]$, $u(0) = u_0 \in D(A)$, $\frac{du(0)}{dt} = v_0 \in D(A)$, де функції u_0 , v_0 – задані функції дійсного аргументу. Нелінійний оператор A породжений диференціальним виразом у частинних похідних, який має вигляд:

$$\sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) - b(x, u, \nabla u).$$

Вивчення задачі будемо проводити за схемою: спочатку від гіперболічного рівняння перейдемо до системи параболічних рівнянь за допомогою заміни: $v = \frac{du}{dt}$. Тоді задача набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u_0 \in D(A), \quad v(0) = v_0 \in D(A).$$

Отже, хвильове рівняння звелось до еволюційної системи рівнянь у певному функціональному просторі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ В ПРОСТОРАХ $L^p(R^l, d^l x)$, $p \geq 2$, $l \geq 3$

Досліджується задача про існування розв'язку для гіперболічного нелінійного диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних з вимірними коефіцієнтами в просторах $L^p(R^l, d^l x)$, $p \geq 2$, $l \geq 3$.

Розглядається хвильове рівняння вигляду:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} \in Au(t),$$

за умов, що $t \in [0, T]$, $u(0) = u_0 \in D(A)$, $\frac{du(0)}{dt} = v_0 \in D(A)$, де функції u_0, v_0 – дійсні задані функції. Де нелінійний диференціальний оператор A породжений виразом, який має вигляд:

$$\sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) - b(x, u, \nabla u),$$

за умов його строгої еліптичності в евклідовому l -вимірному просторі, та

$$|b(x, u, \nabla u)| \leq \mu_1(x) |\nabla u| + \mu_2(x) |u| + \mu_3(x),$$

$$|b(x, u, \nabla u) - b(x, v, \nabla v)| \leq \mu_4(x) |u - v| + \mu_5(x) |\nabla(u - v)|.$$

В цій умові функції $\mu_1^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_2 \in PK_\beta(A)$, функція $\mu_3 \in L^p(R^l)$, $\mu_4^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_5 \in PK_\beta(A)$. Де $a(\cdot): R^l \mapsto R^l \otimes R^l$, $a(\cdot) \in [L_{loc}^1(R^l)]^{l \times l}$ симетрична еліптична матрична функція, що задовольняє умови: існують $\zeta, \xi \in R: 0 < \zeta \leq \xi < \infty$ виконується нерівність $\zeta I \leq a(x) \leq \xi I$, для всіх $x \in R^l$.

Вивчення цієї задачі здійснюватимемо за схемою: спочатку від гіперболічного рівняння перейдемо до системи параболічних рівнянь за допомогою наступної заміни: $v = \frac{du}{dt}$. Тоді задача набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u_0 \in D(A), \quad v(0) = v_0 \in D(A).$$

Отже, хвильове рівняння звелось до еволюційної системи рівнянь у функціональному просторі $L^p(R^l, d^l x)$, $p \geq 2$, $l \geq 3$. Розглянемо множину, що задається так:

$L = L^p(R^l, d^l x) \times L^p(R^l, d^l x)$, $p \geq 2$, $l \geq 3$, з нормою: $\|\tilde{u}\| = \left\langle u, |u|^{p-2} \right\rangle^{p-1} + \left\langle v, |v|^{p-2} \right\rangle^{p-1}$, де $\tilde{u} = (u, v) \in L = L^p(R^l, d^l x) \times L^p(R^l, d^l x)$, $p \geq 2$, $l \geq 3$. Так побудований простір буде банаховим.

ВИПАДОК ЗАДАЧІ ІЗ ГЛАДКИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ПРОСТОРАХ

$$L^p(R^l, d^l x), \quad p \geq 2, \quad l \geq 3$$

Отже, розглянемо випадок, коли коефіцієнти є нескінченно гладкими функціями своїх аргументів. За цих умов доведемо наступну теорему.

Теорема 1. Для довільних елементів $\{\gamma, \eta\} \subset W_1^p(R^l, d^l x)$ існує таке дійсне число $\tilde{\mu} > 0$, що для всіх $0 < \mu < \tilde{\mu}$ система рівнянь:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$$

має єдиний розв'язок $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Доведення. Для доведення існування розв'язку перепишемо систему у вигляді: $u = \gamma + \mu v$, $v - \mu Au = \eta$, і підставимо $u = \gamma + \mu v$ в $v - \mu Au = \eta$, тоді маємо: $v - \mu A(\gamma + \mu v) = \eta$.

Або в розгорнутому вигляді:

$$v - \mu \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma + \mu v) \right) + \mu b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)) = \eta.$$

Розпишемо лінійний доданок:

$$\sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma - \mu v) \right) = \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \right) + \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \mu v \right),$$

тоді останнє рівняння набуде вигляду:

$$v - \mu^2 \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) + \mu b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)) = \eta + \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \right).$$

Далі зауважимо, що доданок елементу γ у нелінійній складовій рівняння $b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v))$ не впливає на характер умов, тобто умови на не лінійність матимуть той самий вигляд (з іншими функціями $\mu_i(x)$, а отже з іншою форм – граню), а саме:

$$|b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v))| \leq \mu(\mu_1(x)|\nabla u| + \mu_2(x)|u| + \mu_3(x)),$$

$$|b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)) - b(x, (\gamma + \mu w), \nabla(\gamma + \mu w))| \leq \mu(\mu_4(x)|v - w| + \mu_5(x)|\nabla(v - w)|).$$

Поділимо його на μ^2 , при цьому $\frac{1}{\mu^2}$ позначимо через λ , оскільки $\mu^2 > 0$, а праву частину через ψ , при цьому зміняться лише позначення, а рівняння залишиться тим самим, у спрощеному записі зміняться лише числові сталі форм – грані, що не суттєво, оскільки $\mu^2 \rightarrow 0$ залежить лише від початкових даних. Отже, маємо рівняння:

$$\lambda v - \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) + \frac{1}{\mu} b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)) = \psi.$$

Це квазілінійне еліптичне диференціальне рівняння в частинних похідних з гладкими повільно зростаючими коефіцієнтами. Дослідимо його за допомогою аналога методу монотонних слабо компактних операторів із застосуванням форм.

Схема метода. За рівнянням складається спеціальна форма та досліджуються її властивості, доводиться її обмеженість, після цього встановлюється, що ця форма породжує оператор, який діє за правилом $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ і досліджуються властивості цього оператора за допомогою форми, що його породжує, встановлюється обмеженість, коерцитивність, акретивність та хемінеперервність цього оператора. Далі доводиться теорема про існування розв'язку рівняння, за яким складена форма, що породжує оператор, який має властивості обмеженості, коерцитивності, акретивності та хемінеперервності. При доведенні теореми існування використовується схема Гальоркіна, аналог леми про гострий кут, за допомогою якого будується послідовність наближення Гальоркіна та показується, що ця послідовність збігається до розв'язку рівняння.

За рівнянням складемо форму $h_\lambda^p(v, w)$:

$$h_\lambda^p(v, w) \equiv \lambda \langle v, w \rangle + \langle dw \circ a \circ dv \rangle + \left\langle \frac{1}{\mu} b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)), w \right\rangle,$$

де $v \in W^p(R^l, d^l x)$, $w \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x)$. Справедлива лема.

Лема 1. Форма $h_\lambda^p(v, w)$ є обмеженою.

Як наслідок лемми 1 маємо, що форма $h_\lambda^p(v, w)$ породжує оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, який також є обмеженим, а отже $h_\lambda^p(v, w) = \langle A_\lambda^p(v), w \rangle$ де $v \in W_1^p(R^l, d^l x)$, $w \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x)$.

Лема 2. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ визначає коерцитивне відображення.

Доведення. Оцінимо форму $h_\lambda^p(v, w) = \langle A_\lambda^p(v), w \rangle$, де елементи $v \in W_1^p(R^l, d^l x)$, $w \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x)$:

$$\begin{aligned} h_\lambda^p(v, v|v|^{p-2}) &= \langle A_\lambda^p(v), v|v|^{p-2} \rangle = \\ &= \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) + \frac{1}{\mu} b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)), v|v|^{p-2} \right\rangle \geq \\ &\geq \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) - |\mu_1(x)| |\nabla v| + \mu_2(x) |v| + \mu_3(x), v|v|^{p-2} \right\rangle \geq \\ &\geq \lambda \|v\|_p^p + \frac{4(p-1)}{p^2} \left\langle d \left(v_n |v_n|^{\frac{p-1}{2}} \right) \circ a \circ d \left(v_n |v_n|^{\frac{p-1}{2}} \right) \right\rangle - \left\langle |\mu_1(x)| |\nabla v| + \mu_2(x) |v| + \mu_3(x), v|v|^{p-2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Позначимо $W = v|v|^{\frac{p-2}{2}}$ і оцінимо останній доданок:

$$\begin{aligned} &\left\langle |\mu_1(x)| |\nabla v| + \mu_2(x) |v| + \mu_3(x), v|v|^{p-2} \right\rangle \leq \\ &\leq \frac{2}{p} \|\nabla W\|_2 \|\mu_1 W\|_2 + \|\mu_2 W\|_2 \|W\|_2 + \|\mu_3\|_p \|v|v|^{p-2}\|_q \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \left(\varepsilon^2 \|\nabla W\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} (\beta \|\nabla W\|_2^2 + c(\beta) \|W\|_2^2) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 \|W\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} (\beta \|\nabla W\|_2^2 + c(\beta) \|W\|_2^2) \right) + \frac{1}{p\sigma^p} \|\mu_3\|_p^p + \frac{\sigma^q}{q} \|v|v|^{p-2}\|_q^q \leq \\ &\leq \left(\sqrt{\beta} \left(\frac{2}{p} + \frac{1}{2} \right) \right) \|\nabla W\|_2^2 + \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} + \frac{c(\beta)}{p\sqrt{\beta}} + \frac{c(\beta)}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\sigma^q}{q} \right) \|W\|_2^2 + \frac{1}{p\sigma^p} \|\mu_3\|_p^p. \end{aligned}$$

Далі групуємо відповідні доданки, отримуємо твердження лемми.

Лема 3. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ визначає акретивне відображення в $L^p(R^l, d^l x)$.

Доведення. Дійсно, згідно з означенням акретивності, враховуючи умови, маємо:

$$\begin{aligned}
& \left\langle A_\lambda^p(u) - A_\lambda^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2} \right\rangle = \\
& = \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) + \frac{1}{\mu} b(x, \gamma + \mu v, \nabla(\gamma + \mu v)), (v-w)|v-w|^{p-2} \right\rangle - \\
& - \left\langle \lambda w - \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} w \right) + \frac{1}{\mu} b(x, \gamma + \mu w, \nabla(\gamma + \mu w)), (v-w)|v-w|^{p-2} \right\rangle = \\
& = \lambda \|u-v\|_p^p + \frac{4(p-1)}{p^2} \left\langle d \left(u_n |u_n|^{\frac{p-1}{2}} \right) \circ a \circ d \left(u_n |u_n|^{\frac{p-1}{2}} \right) \right\rangle + \\
& + \left\langle \frac{1}{\mu} b(x, \gamma + \mu v, \nabla(\gamma + \mu v)) - \frac{1}{\mu} b(x, \gamma + \mu w, \nabla(\gamma + \mu w)), (v-w)|v-w|^{p-2} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Оцінимо останній доданок, використовуючи початкові умови, обмеженість коефіцієнтів і оцінку Гельдера, покладаючи $W = (v-w)|v-w|^{\frac{p-2}{2}}$, маємо:

$$\begin{aligned}
& \left| \left\langle \frac{1}{\mu} b(x, \gamma + \mu v, \nabla(\gamma + \mu v)) - \frac{1}{\mu} b(x, \gamma + \mu w, \nabla(\gamma + \mu w)), (v-w)|v-w|^{p-2} \right\rangle \right| \leq \\
& \leq \left\langle \mu_4(x)|u-v| + \mu_5(x)|\nabla(u-v)|, (v-w)|v-w|^{p-2} \right\rangle \leq \\
& \leq \left\langle \mu_4(x)(v-w), (v-w)|v-w|^{p-2} \right\rangle + \left\langle \mu_5(x)|\nabla(u-v)|, (u-v)|u-v|^{p-2} \right\rangle \leq \\
& \leq \frac{2}{p} \|\nabla W\|_2 \|\mu_5 W\|_2 + \|\mu_4 W\|_2 \|W\|_2 \leq \\
& \leq \frac{2}{p} \|\nabla W\| \left(\beta \|\nabla W\|_2^2 + c(\beta) \|W\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|W\|_2 \left(\beta \|\nabla W\|_2^2 + c(\beta) \|W\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& \leq \frac{1}{p} \left(\varepsilon_1^2 \|\nabla W\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} (\beta \|\nabla W\|_2^2 + c(\beta) \|W\|_2^2) \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(\sigma^2 \|W\|_2^2 + \frac{1}{\sigma^2} (\beta \|\nabla W\|_2^2 + c(\beta) \|W\|_2^2) \right) \leq \\
& \leq \left(\frac{2}{p} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\beta} \|\nabla W\|_2^2 + \left(\frac{1}{p} \frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} + \frac{1}{2} \frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}} \right) \|W\|_2^2.
\end{aligned}$$

Використовуючи ці оцінки, доводимо лему.

Лема 4. Нелінійний оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ визначає хемінеперервне відображення.

У випадку просторів $L^p(R^l, d^l x)$, $p \geq 2$, $l \geq 3$ потрібно застосовувати аналог леми 5, а саме:

Лема 5 (про гострий кут). Нехай на сфері $S_R = \left(\bar{C} : |\bar{C}| = R \right)$, де $R > 0$ – деяке відповідним чином вибране число, задано неперервне відображення $\vec{V} : R^n \rightarrow R^n$, для якого виконується

аналог умови про гострий кут, тобто $\left\langle \vec{B}(\vec{C}), \vec{C} \right\rangle \geq 0$. Тоді існує принаймні одна така точка \vec{C} : $|\vec{C}| \leq R$, що $\vec{B}(\vec{C}) = 0$. Ця лема доводиться від супротивного.

Для того, щоб показати, що еліптичне рівняння має розв'язок, використаємо модифікацію методу Гальоркіна. Нехай $\{w_i\}$ і $\{w_i^*\}$ – гладкі базиси просторів $W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$, $W_{1,0}^q(R^l, d^l x)$, відповідно, і нехай $[w_1, \dots, w_k]$ – лінійна оболонка базисних елементів, така, що виконується властивість: $\langle v_k, v_k^* \rangle = \|v_k\|_p^p$. Покладемо за визначенням $v_k = \sum_{i=1}^k c_i w_i$, $v_k^* = \sum_{i=1}^k c_i^* w_i^*$. Для знаходження послідовності Гальоркіна складемо систему рівнянь: $\langle A_\lambda^p(v_k) - \psi, w_i^* \rangle = 0$, $i = 1, \dots, k$. Ця система визначає неперервне відображення $\vec{B}: R^k \rightarrow R^k$, а отже має місце аналог леми про гострий кут. Скористаємося аналогом методу Гальоркіна. Покажемо, що система ця має розв'язок у лінійній оболонці перших k елементів базису $\{w_i\}$. Дійсно, відображення $\vec{B}(\vec{C}): \mathbf{0} \subset B_i(\vec{C}) = \langle A_\lambda^p(v_k) - \psi, w_i^* \rangle$, $i = 1, \dots, k$, внаслідок коерцитивності оператора $A_\lambda^p: W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, задовольняє умови аналога леми про гострий кут:

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{B}(\vec{C}), \vec{C} \right\rangle &= \left\langle A_\lambda^p \left(\sum_{i=1}^k c_i w_i \right) - \psi, \sum_{i=1}^k c_i^* w_i^* \right\rangle = \left\langle A_\lambda^p(v_k) - \psi, v_k |v_k|^{p-2} \right\rangle \geq \\ &\geq \left(\frac{h_\lambda^p(v_k, v_k |v_k|^{p-2})}{\|v_k |v_k|^{p-2}\|_{W_1^q}} - \|\psi\|_{W_{-1}^p} \right) \|v_k |v_k|^{p-2}\|_{W_1^q} \geq 0. \end{aligned}$$

Оскільки $A_\lambda^p: W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ – неперервне відображення на скінчених підпросторах простору $W_{1,0}^p$, то внаслідок аналога леми про гострий кут для достатньо великих значень $R > 0$ існує такий елемент \vec{C} , $|\vec{C}| = R$, що $\vec{B}(\vec{C}) = 0$.

Отже, вище вказано спосіб побудови послідовності $\{v_k(x)\}$, елементи якої є розв'язками рівняння. Далі покажемо, що послідовність $\{v_k(x)\}$ збігається до розв'язку цього рівняння. Використавши коерцитивність оператора $A_\lambda^p: W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, одержимо нерівність $\|A_\lambda^p(v_k)\|_{W_{-1}^p} \leq \|\psi\|_{W_{-1}^p}$.

Якщо доведемо нерівність $\|v_k\|_{W_1^p} < C$, де стала C залежить лише від функцій μ (структури рівняння), то тоді внаслідок слабкої компактності простору $W_1^p(R^l, d^l x)$ отримаємо, що існує така підпослідовність $\{v_{k'}(x)\}$, що має місце властивість: $v_{k'} \xrightarrow{W_1^p} v_0$ слабо і $A_\lambda^p(v_{k'}) \xrightarrow{W_{-1}^p} y$ слабо.

Покажемо, що $y = A_\lambda^p(v_0) = \psi$. Звідси випливатиме, що відображення $A_\lambda^p: W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ є сюр'єктивним відображенням, тобто відображенням «на».

Складемо інтегральні тотожності: $\langle A_\lambda^p(v_{k'}), w_i^* \rangle = \langle \psi, v_i^* \rangle$, $i = 1, \dots, k'$, і перейдемо до границі при $k' \rightarrow +\infty$. Тоді одержимо: $\lim_{k' \rightarrow \infty} A_\lambda^p(v_{k'}) = y = \psi$, де границя береться за нормою простору $W_{-1}^p(R^l, d^l x)$. Оскільки оператор $A_\lambda^p: W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ є акретивним в $L^p(R^l, d^l x)$, то має місце нерівність: $\langle A_\lambda^p(v_{k'}) - A_\lambda^p(w), (v_{k'} - w) | v_{k'} - w |^{p-2} \rangle \geq 0$. Переходячи в останній нерівності до границі при $k' \rightarrow \infty$, одержимо нерівність: $\langle y - A_\lambda^p(w), (v_0 - w) | v_0 - w |^{p-2} \rangle \geq 0$. Поклавши $w = v_0 - tz$, $t > 0$, $z \in W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$, і скоротивши обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1} , отримаємо: $\langle y - A_\lambda^p(v_0 - tz), z | z |^{p-2} \rangle \geq 0$.

З хемінеперервності оператора $A_\lambda^p: W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, враховуючи довільність елемента $z \in W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$, одержимо $y = A_\lambda^p(v_0) = \psi$, тобто для заданих початкових даних побудовано послідовність $\{v_{k'}\}$ і доведено її збіжність до елемента $v_0 \in W_1^p(R^l, d^l x)$, що реалізує розв'язок рівняння за даних умов.

Єдиність цього розв'язку впливає з властивості акретивності оператора $A_\lambda^p(\cdot)$. Отже, функції $u = \gamma + \mu v$ і $v = \eta + \mu Au$ є шуканими і такими, що задовольняють систему
$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Має місце оцінка для $\{u, v\} \subset W_1^p(R^l, d^l x) \cap C^\infty(R^l)$, які задовольняють наступну нерівність:

$$\langle u - \lambda_0 Au, u | u |^{p-2} \rangle + \lambda_0 \|v\|_p^p \leq (1 + o(\mu)) \left(\langle \gamma - \lambda_0 A\gamma, \gamma | \gamma |^{p-2} \rangle + \lambda_0 \|\eta\|_p^p \right),$$

причому додатня стала λ_0 не залежать від числа μ і елементів $\{\gamma, \eta\}$.

Доведемо оцінку. Оскільки:

$$Au = \frac{1}{\mu}(v - \eta), \quad \text{то} \quad Av = A \frac{(u - \gamma)}{\mu},$$

а отже для $\{u, v\} \subset W_1^p(R^l, d^l x) \cap C^\infty(R^l)$:

$$\begin{aligned} \langle \gamma - \lambda_0 A\gamma, \gamma | \gamma |^{p-2} \rangle + \lambda_0 \|\eta\|_p^p &= \left\langle \gamma - \lambda_0 \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \right) + \lambda_0 b(x, \gamma, \nabla \gamma), \gamma | \gamma |^{p-2} \right\rangle = \\ &= \left[\left\langle u - \lambda_0 \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (u) \right) + \lambda_0 b(x, (u), \nabla(u)), u | u |^{p-2} \right\rangle + \lambda_0 \|v\|_p^p \right] + \\ &+ \left[\left\langle u - \mu v - \lambda_0 \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (u - \mu v) \right) + \lambda_0 b(x, (u - \mu v), \nabla(u - \mu v)), (u - \mu v) | u - \mu v |^{p-2} \right\rangle - \right. \\ &\quad \left. - \left\langle u - \lambda_0 \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (u) \right) + \lambda_0 b(x, (u), \nabla(u)), u | u |^{p-2} \right\rangle \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\lambda_0 \left(\left\langle v - \mu Au, (v - \mu Au) |v - \mu Au|^{p-2} \right\rangle - \left\langle v, v |v|^{p-2} \right\rangle \right). \\
 \left\langle \gamma - \lambda_0 A\gamma, \gamma |\gamma|^{p-2} \right\rangle + \lambda_0 \|\eta\|_p^p & = \left\langle \gamma - \lambda_0 \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma \right) + \lambda_0 b(x, \gamma, \nabla \gamma), \gamma |\gamma|^{p-2} \right\rangle = \\
 & = \left(\left\langle u - \lambda_0 Au, u |u|^{p-2} \right\rangle + \lambda_0 \|v\|_p^p \right) + \\
 & + \left(\left\langle u - \mu v - \lambda_0 A(u - \mu v), (u - \mu v) |u - \mu v|^{p-2} \right\rangle - \left\langle u - \lambda_0 Au, u |u|^{p-2} \right\rangle \right) + \\
 & + \lambda_0 \left(\left\langle v - \mu Au, (v - \mu Au) |v - \mu Au|^{p-2} \right\rangle - \left\langle v, v |v|^{p-2} \right\rangle \right) = \\
 & = \left(\left\langle u - \lambda_0 Au, u |u|^{p-2} \right\rangle + \lambda_0 \|v\|_p^p \right) + \left\langle u, (u - \mu v) |u - \mu v|^{p-2} - u |u|^{p-2} \right\rangle - \\
 & + \left\langle v, \lambda_0 (v - \mu Au) |v - \mu Au|^{p-2} - \lambda_0 v |v|^{p-2} - \mu (u - \mu v) |u - \mu v|^{p-2} \right\rangle + \\
 & + \lambda_0 \left(\left\langle Au, u |u|^{p-2} - \mu (v - \mu Au) |v - \mu Au|^{p-2} \right\rangle - \left\langle A(u - \mu v), (u - \mu v) |u - \mu v|^{p-2} \right\rangle \right).
 \end{aligned}$$

Звідси випливає наведена вище нерівність.

Зауваження. Для $\{u, v\} \subset W_1^p(R^l, d^l x) \cap C^\infty(R^l)$ можна використати наступні міркування:

$$\begin{aligned}
 & \left| \left\langle v - \mu Au, (v - \mu Au) |v - \mu Au|^{p-2} \right\rangle - \left\langle v, v |v|^{p-2} \right\rangle \right| \leq \\
 & \leq \int_{R^l} \left| |v - \mu Au|^p - |v|^p \right| dx^l = \int_{R^l} |v|^p \left| \mathbf{1} - \mu \frac{Au}{|v|^p} \right| - |\mathbf{1}| dx^l \leq \mu p \|Au\|_{L^1} + o(\mu^2).
 \end{aligned}$$

Теорема 2. Гіперболічне рівняння $\frac{d^2 u(t)}{dt^2} \in Au(t)$, за початкових умов $t \in [0, T]$, $u(0) = u_0 \in D(A)$, $\frac{du(0)}{dt} = v_0 \in D(A)$, має розв'язок.

Доведення. Для доведення цього розглянемо прямий добуток просторів $W_1^p \times L^p$, елементами якого є вектори

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad u \in W_1^p(R^l, d^l x), \quad v \in L^p(R^l, d^l x).$$

У цьому просторі можна ввести функцію, що буде нормою за наступним правилом:

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| = \left(\left\langle u - \lambda_0 Au, u |u|^{p-2} \right\rangle + \lambda_0 \left\langle v, v |v|^{p-2} \right\rangle \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Областю визначення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ є множина елементів $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $u \in W_1^p(R^l, d^l x)$, $v \in L^p(R^l, d^l x)$, таких що u, v задаються формулами $u = \gamma + \mu v$ і $v = \eta + \mu Au$ та є такими, що задовольняють систему:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Тоді, коли додатне число μ достатньо мале, область значень оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ містить усі елементи $\begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$, $\gamma, \eta \in \widehat{W}_1^p(R^l, d^l x)$, отже, для мінімального замкнутого розширення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ у просторі $W_1^p(R^l, d^l x) \times L^p(R^l, d^l x)$, оператор $\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ має розв'язний, якій всюди визначений на добутку просторів $W_1^p(R^l, d^l x) \times L^p(R^l, d^l x)$. **А отже**, впливає, що відповідне розширення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ є локальним генератором деякої напівгрупи T_t в $W_1^p(R^l, d^l x) \times L^p(R^l, d^l x)$ і $W_1^p(R^l, d^l x) \subset L^p(R^l, d^l x)$. Звідси слідує твердження теореми 2.

ВИПАДОК ВИМІРНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ У ПРОСТОРАХ $L^p(R^l, d^l x)$, $p \geq 2$, $l \geq 3$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти у хвильовому рівнянні вигляду: $\frac{d^2 u(t)}{dt^2} \in Au(t)$ є вимірними, загалом не гладкими функціями.

У цьому випадку дослідження проводиться наступним чином:

1. Від гіперболічного рівняння перейдемо до системи параболічних рівнянь за допомогою підстановки: $v = \frac{du}{dt}$.

Тоді задача набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u_0 \in D(\mathbf{A}), \quad v(0) = v_0 \in D(\mathbf{A}).$$

Отже, як і у випадку дослідження рівняння з гладкими коефіцієнтами, хвильове рівняння звелось до еволюційної системи рівнянь.

Досліджуємо розв'язуваність наступної системи і доводимо, що для довільних елементів $\{\gamma, \eta\} \subset W_1^p$ існує таке дійсне число $\tilde{\mu} > 0$, що для всіх малих $0 < \mu < \tilde{\mu}$ система нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$$

має єдиний розв'язок $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Доведення. Для доведення існування розв'язку перепишемо цю систему в такому вигляді: $u = \gamma + \mu v$, $v - \mu \mathbf{A} u = \eta$ і підставимо $u = \gamma + \mu v$ в $v - \mu \mathbf{A} u = \eta$, тоді маємо: $v - \mu \mathbf{A} (\gamma + \mu v) = \eta$. Або в розгорнутому вигляді:

$$v - \mu \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma + \mu v) \right) + \mu b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)) = \eta.$$

Розпишемо лінійний доданок:

$$\sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma - \mu v) \right) = \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \right) + \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \mu v \right),$$

тоді останнє рівняння набуде вигляду:

$$v - \mu^2 \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) + \mu b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)) = \eta + \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \right).$$

Далі зауважимо, що доданок елемента γ в нелінійній складовій рівняння $b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v))$ не впливає на характер умов, тобто умови на не лінійність матимуть той самий вигляд (з іншими функціями $\mu_i(x)$, а отже з іншою форм-гранню), а саме:

$$\left| b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)) \right| \leq \mu (\mu_1(x) |\nabla u| + \mu_2(x) |u| + \mu_3(x)),$$

$$\left| b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)) - b(x, (\gamma + \mu w), \nabla(\gamma + \mu w)) \right| \leq \mu (\mu_4(x) |v - w| + \mu_5(x) |\nabla(v - w)|).$$

Поділимо його на μ^2 , при цьому $\frac{1}{\mu^2}$ позначимо через λ , оскільки $\mu^2 > 0$, а праву частину через ψ , при цьому зміняться лише позначення, а рівняння залишиться тим самим, у спрощеному записі зміняться лише числові сталі форм-грані, що не суттєво, оскільки $\mu^2 \rightarrow 0$ залежить лише від початкових даних. Отже, маємо рівняння:

$$\lambda v - \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) + \frac{1}{\mu} b(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)) = \psi.$$

Це квазілінійне еліптичне диференціальне рівняння в частинних похідних з повільно зростаючими вимірними коефіцієнтами. Досліджуємо його за допомогою методу акретивних слабо компактних операторів із застосуванням $L^p(R^l, d^l x)$ – форм.

2. Еліптичне рівняння з вимірними повільно зростаючими коефіцієнтами наближається (апроксимується) рівняннями з обмеженими (зрізаними) вимірними коефіцієнтами таким чином.

Означення. Нехай $f(x)$ – вимірна за Лебегом функція на R^l . Тоді, визначимо зрізку f_n функції f за правилом:

$$f_n = \begin{cases} n, & f > n, \\ f, & |f| \leq n, \\ -n, & f < -n. \end{cases}$$

3. Наступним кроком є згладжування уже обмежених коефіцієнтів еліптичного рівняння.

Означення. Нехай $f(x)$ – вимірна за Лебегом функція на R^l . Тоді, функція $f^m(x)$ є «гладкою» апроксимацію функції $f(x)$, за аргументом x :

$$f^m(x) = \int_{R^l} \rho_m(x-t) f(t) dt = \rho_m * f,$$

де $\rho_n(t)$ – гладка невід’ємна апроксимація 1 в R^l .

Тобто, отримано множину еліптичних рівнянь, що залежать від двох натуральних параметрів, які виникають під час «зрізання» та «згладжування». Зауважимо, що послідовність проведення операцій «зрізання» та «згладжування» важлива, тобто спочатку отримуємо коефіцієнти у вигляді обмежених функцій, а вже потім їх наближаємо гладкими функціями.

4. Далі досліджуємо множину рівнянь з гладкими коефіцієнтами за допомогою методів, що були розроблені вище. Доведення проводяться дослівно аналогічно, з урахуванням того моменту, що замість одного рівняння розглядається сукупність при двох фіксованих натуральних параметрах, так, наприклад, форма буде визначатися відповідно:

$$h_\lambda^{p,mn}(v, w) \equiv \lambda \langle v, w \rangle + \langle dw \circ a^{m,n} \circ dv \rangle + \left\langle \frac{1}{\mu} b^{m,n}(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma + \mu v)), w \right\rangle,$$

де $w \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x)$. При цьому оцінки при доведенні лем не зміняться, оскільки там використовувались лише норми функцій коефіцієнтів та властивість форм – обмеженості. Отже, отримана множина розв’язків $v^{m,n}$, що залежить від двох натуральних параметрів згладжування m і зрізання n , далі потрібно зняти обмеження на згладжування та зрізання, тобто перейти до границі за цими натуральними параметрами. Важливим моментом доведення є те, що спочатку знімаються обмеження на згладжування, перехід до границі за параметром m , а потім, обмеженість коефіцієнтів, перехід до границі за параметром n .

5. Переходимо до границі за параметром m .

6. Переходимо до границі за параметром n . А отже, існують функції u і $v \in$ шуканими і такими, що задовольняють систему:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Якщо елементи $\{u, v\} \subset W_1^p(R^l, d^l x) \cap C^\infty(R^l)$, тоді є вірною оцінка:

$$\langle u - \lambda_0 \mathbf{A} u, u |u|^{p-2} \rangle + \lambda_0 \|v\|_p^p \leq (1 + o(\mu)) \left(\langle \gamma - \lambda_0 \mathbf{A} \gamma, \gamma |\gamma|^{p-2} \rangle + \lambda_0 \|\eta\|_p^p \right),$$

причому додатня стала λ_0 не залежать від числа μ і елементів $\{\gamma, \eta\}$.

7. Область визначення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ є множина таких елементів $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $u \in W_1^p(R^l, d^l x)$, $v \in L^p(R^l, d^l x)$, що елементи $u, v \in$ розв’язками системи:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Тоді, коли додатне число μ достатньо мале, область значень оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ містить всі елементи $\begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$, $\gamma, \eta \in \hat{W}_1^p(R^l, d^l x) \subset L^p(R^l, d^l x)$, отже, для мінімального замкнутого розширення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ у просторі $W_1^p(R^l, d^l x) \times L^p(R^l, d^l x)$, оператор

$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ має розв'язок, який всюди визначений на добутку просторів $W_1^p(R^l, d^l x) \times L^p(R^l, d^l x)$.

А отже, впливає, що відповідне розширення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ є локальним генератором деякої нелінійної напівгрупи T_t в $W_1^p(R^l, d^l x) \times L^p(R^l, d^l x)$ і $W_1^p(R^l, d^l x) \subset L^p(R^l, d^l x)$.

ВИСНОВКИ

Одержано результати щодо існування розв'язку рівняння вигляду: $\frac{d^2 u(t)}{dt^2} \in Au(t)$, при умовах, що $t \in [0, T]$, $u(\mathbf{0}) = u_0 \in D(A)$, $\frac{du(\mathbf{0})}{dt} = v_0 \in D(A)$, де функції u_0, v_0 – задані функції дійсного аргументу. Нелінійний оператор A породжений диференціальним виразом з частинними похідними, з коефіцієнтами: $\mu_1^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_2 \in PK_\beta(A)$, функція $\mu_3 \in L^p(R^l)$, $\mu_4^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_5 \in PK_\beta(A)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Benamini I. Heat kernel lower bounds on Riemannian manifolds using the old ideas of Nash / I. Benamini, I. Chavel, E. A. Feldman // Proc. London Math. Soc. – 1996. – V. 72. – P. 215-240.
2. Berlyand A. G. On the L_p -theory of Schrodinger semigroups / A. G. Berlyand, Yu. A. Semenov // Siberian Math. J. – 1990. – V. 31. – P. 16-26.
3. David E. E. Hardy operators, functional spaces and embeddings / E. E. David, W. D. Evans. – Berlin : Springer, 2004. – 326 p.
4. Dorroh J. R. A nonlinear Hille-Yosida-Phillips theorem / J. R. Dorroh // J. Func. Anal. – 1969. – V. 3. – P. 345-353.
5. Komura Y. Differentiability of nonlinear semigroups / Y. Komura // J. Math. Soc. Japan. – 1969. – V. 21. – P. 375-402.
6. Papageorgiou N. S. Existence of solutions for the second order evolution inclusion / N. S. Papageorgiou // journal of applied mathematics and stochastic analysis. – 1994. – Vol. 7, N 4. – P. 525-535.
7. Papageorgiou N. S. Second order nonlinear evolution inclusions: structure of the solution set / N. S. Papageorgiou // Acta math. sinica, English series. – 2006. – Vol. 22, N 1. – P. 195-206.
8. Papageorgiou N. S. On multivalued evolutions equations and differential inclusions in Banach spaces / N. S. Papageorgiou // Comment. math. univ. San. Pauli. – 1987. – Vol. 36. – P. 21-39.
9. Papageorgiou N. S. Volterra integral inclusions in Banach spaces / N. S. Papageorgiou // J. Integra equation and application. – 1988. – N 1. – P. 65-81.
10. Panagiotopoulos P. D. On a type of hyperbolic variational - hemivariational inequalities / P. D. Panagiotopoulos, G. Pop // J. Applied Anal. – 1999. – Vol. 5, N 1. – P. 95-112.
11. Yaremenko M. I. Second order quasi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi-groups of contraction in L^p / M. I. Yaremenko // Матеріали конференції «Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. 15-17 травня 2008 року, Київ». – Київ, 2008. – С. 473.
12. Yaremenko M. I. Second order quasi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi- groups of contraction in L^p / M. I. Yaremenko // Матеріали конференції

«International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008). May 12-17, 2008». – 2008. – C. 43.

13. Yanchuk S. Partial synchronization and clustering in a system of diffusively coupled chaotic oscillators / S. Yanchuk, Yu. Maistrenko, E. Mosekilde // *Math. Comp. Simul.* – 2001. – V. 54. – C. 491-508.

REFERENCE

1. Benjamini, I., Chavel, I. and Feldman, E.A. (1996), “Heat kernel lower bounds on Riemannian manifolds using the old ideas of Nash”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 72, pp. 215-240.
2. Berlyand, A.G. and Semenov, Yu.A. (1990), “On the L_p -theory of Schrodinger semigroups”, *Siberian Math. J.*, vol. 31, pp. 16-26.
3. David, E.E. and Evans, W.D. (2004), “Hardy operators, functional spaces and embeddings”, Springer, Berlin.
4. Dorroh, J.R. (1969), “A nonlinear Hille-Yosida-Phillips theorem”, *J. Func. Anal.*, vol. 3, pp. 345-353.
5. Komura, Y. (1969), “Differentiability of nonlinear semigroups”, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 21, pp. 375-402.
6. Papageorgiou, N.S. (1994), “Existence of solutions for the second order evolution inclusion”, *Journal of applied mathematics and stochastic analysis*, vol. 7, no. 4, pp. 525-535.
7. Papageorgiou, N.S. (2006), “Second order nonlinear evolution inclusions: structure of the solution set”, *Acta math. sinica, English series*, vol. 22, no. 1, pp. 195-206.
8. Papageorgiou, N.S. (1987), “On multivalued evolutions equations and differential inclusions in Banach spaces”, *Comment. math. univ. San. Pauli*, vol. 36, pp. 21-39.
9. Papageorgiou, N.S. (1988), “Volterra integral inclusions in Banach spaces”, *J. Integra equation and application*, no. 1, pp. 65-81.
10. Panagiotopoulos, P.D. and Pop, G. (1999), “On a type of hyperbolic variational - hemivariational inequalities”, *J. Applied Anal.*, vol. 5, no. 1, pp. 95-112.
11. Yaremenko, M.I. (2008), “Second order quasi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi-groups of contraction in L^p ”, *Materialy konferentsiyi “Dvanadtsyata mizhnarodna naukova konferentsiya imeni akademika M. Kravchuka”* [Conference materials “Twelfth International Conference Academician M. Kravchuk”], Kyiv, May 15-17, 2008, p. 473.
12. Yaremenko, M.I. (2008), “Second order quasi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi-groups of contraction in L^p ”, *Materialy konferentsiyi “International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008)”* [Conference materials “International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008)”], May 12-17, 2008, p. 43.
13. Yanchuk, S., Maistrenko, Yu. and Mosekilde, E. (2001), “Partial synchronization and clustering in a system of diffusively coupled chaotic oscillators”, *Math. Comp. Simul.*, vol. 54, pp. 491-508.

УДК

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

Іванов І. І., д. ф.-м. н., професор

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

ivan@mail.ru

До друку будуть прийматися лише наукові статті, де присутні такі необхідні елементи

(п. 3 Постанови президії ВАК України № 7 – 05 / 1 від 15 січня 2003 р.):

- **Постановка проблеми** у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.
- **Аналіз останніх досліджень і публікацій**, в яких започатковано порушення даної проблеми і на які спирається автор.
- **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми**, яким присвячується стаття.
- **Формулювання цілей статті** (постановка завдання).
- **Виклад основного матеріалу дослідження** з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.
- **Висновки з даного дослідження і перспективи** подальших розвідок у даному напрямку.

1. МАКЕТ СТОРІНКИ

Для оригінал-макета використовується формат А4 з такими полями:

з усіх боків – 2 см.

Шрифт набору – Times New Roman.

У разі необхідності для шрифтових виділень у таблицях і рисунках дозволяється застосовувати шрифт Courier New (наприклад, для ілюстрації текстів програм для ЕОМ). Для стилістичного виділення фрагментів тексту слід вживати начертання *курсив*, **напівжирний**, *напівжирний курсив* зі збереженням гарнітури, розміру шрифту та інтервалу абзацу.

Гарнітури, розміри шрифтів та начертання:

- а) для УДК: Times New Roman, – 14 пт, усі літери прописні;
- б) для заголовку статті: Times New Roman, – 14 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- в) для підзаголовків: Times New Roman, – 12 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- г) для прізвищ, ініціалів авторів, адреси електронної пошти: Times New Roman – 12 пт, усі строчні;
- д) для назв і адрес організацій: Times New Roman – 12 пт, курсив, усі строчні;
- е) для анотацій, виносков, посилань, підписів до рисунків та надписів над таблицями: Times New Roman – 10 пт;
- ж) для ключових слів: Times New Roman – 10 пт, курсив;
- з) для основного тексту: Times New Roman – 12 пт, як у реченні.

Інтервал між абзацами – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

2. ТИПОГРАФСЬКІ ПОГОДЖЕННЯ ТА СТИЛІ

УДК вказується в першому рядку сторінки і вирівнюється за лівим краєм. Заголовок статті набирається в наступному за УДК рядку і вирівнюється по центру. У третьому рядку з вирівнюванням по центру зазначаються прізвища, ініціали авторів. У наступному рядку розміщується інформація про назву та адресу організації, де працює (навчається) автор, яка також вирівнюється по центру. Четвертий рядок містить адресу електронної пошти авторів, розміщену по центру. Далі розташовується анотація (3-5 речень) і ключові слова мовою оригіналу та анотація українською або російською мовами (залежно від мови оригіналу). З наступного абзацу послідовно набираються і вирівнюються по центру заголовки статті англійською мовою, транслітеровані прізвища, ініціали авторів, назви і адреси організацій, які повинні бути подані англійською мовою, із зазначенням міста і країни, без назви вулиці, яка подається транслітерацією. З наступного рядка розміщується розширена (обсягом не менше 3,5 тис. знаків) анотація із ключовими словами англійською мовою. Після анотацій з абзацу викладається основний текст статті.

Заголовки наукових статей повинні бути інформативними та містити тільки загальноприйняті скорочення. У перекладі заголовків статей англійською мовою не повинно бути жодних транслітерацій, окрім неперекладних назв власних імен, приладів та інших об'єктів, що мають власні назви; також не використовується неперекладний сленг. Це стосується також анотацій і ключових слів.

Початок абзацу основного тексту виділяється збільшеним інтервалом між абзацами і не виділяється відступом або порожнім рядком.

Ілюстрації мають бути оригінальними рисунками або фотографіями. Фотографії скануються у 256 градаціях сірого. Ілюстрації розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні бути підписані та послідовно пронумеровані арабськими цифрами: Рис. 1, Рис. 2. Номер рисунка та підпис розміщуються безпосередньо під рисунком. Кожен рисунок та підписи до нього включаються до тексту публікації. Створення графічних об'єктів може здійснюватися будь-яким графічним редактором у форматі ВМР файлів. Виконання рисунків засобами Microsoft Word здійснюється через використання команд панелі «Рисование». Підписи здійснюються командою «Надпись». Усі графічні компоненти рисунка і підписи об'єднуються командою «Группировать» (меню «Действия» на панелі «Рисование») і подаються у вигляді одного графічного об'єкта, прив'язаного до тексту з об'єктом «В тексте». Ілюстрації готують та масштабують так, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір літер основного тексту статті більше, ніж на 50%.

Ілюстрації, так само як і підписи до них, вирівнюються на середину рядка (за виключенням невеликих рисунків – не більш 7 см, які можуть розташовуватися по декілька в ряд).

Таблиці розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні містити назву та бути послідовно пронумерованими арабськими цифрами: Таблица 1, Таблица 2. Номер та назва таблиці розміщують над таблицями.

Посилання на літературні джерела послідовно нумеруються арабськими цифрами в порядку появи в тексті статті і зазначаються у квадратних дужках, де вказуються порядковий номер джерела та через кому конкретна сторінка [8, с.16]. Перелік літературних джерел мовою оригіналу подається в порядку їх нумерації після основного тексту статті з підзаголовком «ЛІТЕРАТУРА», який вирівнюється по центру. Список літератури оформлюється відповідно до ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання».

З наступного абзацу подається перелік літературних джерел латиницею з підзаголовком «REFERENCES», який вирівнюється по центру.

3. СТИЛІСТИЧНІ ПОГОДЖЕННЯ

- Не допускається закінчення сторінки одним або декількома пустими рядками, за винятком випадків, спричинених необхідністю дотримання попереднього пункту (висячі підзаголовки і початок абзацу) та кінця статті.
- Не допускається починати сторінку незакінченим рядком (переноси в останньому рядковій заборонені).
- Не дозволяється підкреслювання в заголовках, підписах і надписах.
- Слід дотримуватися правила про мінімальні зміни в шрифтовому та стильовому оформленні сторінки для того, щоб максимально уникнути різноманітності макета і зберегти єдиний стиль збірника.
- Не допускається часте використання виносок (виноска повинна розглядатися як виняток і вживатися тільки у випадку дійсної необхідності).
- Ілюстрації мають бути підготовані та масштабовані таким чином, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір букв основного тексту статті більш ніж на 50%.
- Сторінки тексту статті слід пронумерувати.
- Диск треба підписати, вказавши прізвище, ініціали автора, імена файлів.
- На диску повинно бути **два файли**:
 - ✓ **перший** – із текстом статті та анотацій з ключовими словами,
 - ✓ **другий** – із відомостями про авторів (прізвище, ім'я, по батькові; посада; вчений ступінь; учене звання; місце роботи або навчання; адреса електронної пошти; домашня адреса; номери контактних телефонів).

4. ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ СТАТТІ АВТОРУ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО РЕДАКЦІЇ ЗБІРНИКА:

1. Роздрукований текст статті з анотаціями та ключовими словами.
2. Відомості про авторів.
3. Витяг з протоколу засідання кафедри або факультету.
4. Зовнішню рецензію.
5. Диск із текстом статті, анотацій, ключовими словами та відомостями про авторів.

Адреса редакції: Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

Довідки за телефонами:

(061) 289-12-52 – відповідальний за випуск (технічний редактор)

(061) 289-12-26 – редакційно-видавничий відділ (IV корпус, кімн. 323)

Адреса електронної пошти:

kpmf.mf@znu.edu.ua

ДЛЯ НОТАТОК

Збірник наукових праць

Вісник Запорізького національного університету
Фізико-математичні науки
№ 2, 2016

Технічний редактор – *Н.В. Ярош*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані
в редакційно-видавничому відділі
Запорізького національного університету
тел. (061) 228-75-47

Підписано до друку 20.12.2016. Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».

Умовн.-друк. арк. 36,9

Замовлення № 353. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет
69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 5229 від 11.10.2016