

МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО ВИВЧЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

Ключник І. Г.

*кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики та цифрових технологій
Центральноукраїнський державний університет
імені Володимира Винниченка
вул. Шевченка, 1, Кропивницький, Україна
orcid.org/0000-0001-6874-7811
kl.innochka@gmail.com*

Ключові слова: методика математики, старша школа, профільні класи, первісна, методи інтегрування.

У статті розглянуто проблему ефективного формування навичок знаходження невизначеного інтеграла в учнів профільних класів та майбутніх учителів математики. Наголошено на важливості глибокого і цілісного розуміння теми «Невизначений інтеграл», яка є невід’ємним складником математичного аналізу та відіграє значну роль у розвитку аналітичного, логіко-структурного та критичного мислення. Значна частина учнів відчуває труднощі під час вивчення цієї теми, що зумовлено як її теоретичною складністю, так і слабким засвоєнням попередніх тем, зокрема теми похідної. Також впливає нестача ефективних методичних прийомів. У статті представлено систему вправ, яка охоплює основні методи інтегрування: підстановку, інтегрування за частинами, розклад дробів, застосування методу невизначених коефіцієнтів. Ретельно проаналізовано типові помилки, яких припускаються учні, зокрема механічне застосування підстановки без логічного обґрунтування, невміння повертатися до початкової змінної, хибний вибір методу інтегрування тощо. Акцентовано на необхідності поступового введення понять, послідовного ускладнення прикладів. Указано на доцільність формування в учнів уміння самостійно вибирати метод інтегрування залежно від типу підінтегральної функції. Для цього слід приділити час навчанню розпізнавання типових структур підінтегральної функції, до яких застосовується той чи інший метод. Також приділено увагу підготовці майбутніх учителів математики, яка має включати аналіз типових учнівських помилок, моделювання навчальних ситуацій та створення дидактичних матеріалів відповідно до різних рівнів навчальних досягнень учнів. Запропоновані методичні підходи можуть бути використані як у шкільному курсі (для класів із поглибленим вивченням математики), так і в педагогічних вищих навчальних закладах. Стаття становить інтерес як для здобувачів освіти, які прагнуть удосконалити свої знання в галузі інтегрування, так і для вчителів математики. Це дасть змогу вчителю глибше розкрити тему, а також розробити власні навчальні матеріали та дидактичні засоби.

METHODOLOGICAL APPROACHES TO STUDYING THE INDEFINITE INTEGRAL

Kliychnyk I. H.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Mathematics and Digital Technologies
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University
Shevchenka str., 1, Kropyvnytskyi, Ukraine
orcid.org/0000-0001-6874-7811
kl.innochka@gmail.com*

Key words: *mathematics
methodology, high school,
specialized classes,
antiderivative, integration
methods.*

The article addresses the issue of effectively developing skills in finding indefinite integrals among students of specialized secondary school classes and future mathematics teachers. It emphasizes the importance of a deep and comprehensive understanding of the topic «Indefinite Integral,» which is an integral part of mathematical analysis and plays a significant role in the development of analytical, logical-structural, and critical thinking. A considerable number of students experience difficulties in studying this topic due to its theoretical complexity and insufficient mastery of previous topics, particularly derivatives. The lack of effective methodological approaches is also a contributing factor. The article presents a system of exercises that covers the main methods of integration: substitution, integration by parts, decomposition of rational functions, and the method of undetermined coefficients. It also provides a detailed analysis of common mistakes made by students, such as the mechanical application of substitution without logical justification, failure to return to the original variable, and incorrect selection of the integration method. Attention is drawn to the need for gradual introduction of concepts and a step-by-step increase in the complexity of examples. The article highlights the importance of developing students' ability to independently choose an appropriate integration method based on the type of integrand. To achieve this, time should be devoted to teaching students how to recognize typical structures of integrands to which certain methods apply. The article also focuses on the training of future mathematics teachers, which should include analysis of common student mistakes, modeling of educational situations, and the creation of didactic materials tailored to different levels of student achievement. The proposed methodological approaches can be used both in school mathematics courses (for classes with an advanced focus on mathematics) and in pedagogical institutions of higher education. The article is of interest to both students seeking to deepen their understanding of integration and to mathematics teachers. It enables teachers to explore the topic in greater depth and develop their own teaching materials and didactic tools.

Постановка проблеми. Одним із ключових складників підготовки учнів у профільних класах є формування глибокого розуміння основ математики. Тема «Невизначений інтеграл» відіграє важливу роль у розвитку аналітичного мислення. Проте практика показує, що значна частина учнів та студентів відчуває труднощі під час засвоєння

методів інтегрування. Причинами цього є як складність самої теми, так і недостатній рівень опанування поняття – похідної. Також спостерігається недостатнє використання методичних прийомів, які допомагають студентам сформувати цілісне бачення процесу інтегрування як оберненого до диференціювання.

У зв'язку із цим актуальним постає питання пошуку ефективних методичних підходів до викладання теми «Невизначений інтеграл», які забезпечать послідовне і доступне засвоєння теоретичних положень, формування практичних навичок та здатності студентів самостійно вибрати відповідний метод інтегрування залежно від типу функції [1; 2].

Аналіз раніше виконаних досліджень. Проблема формування навичок інтегрування в учнів неодноразово ставала об'єктом досліджень, у яких підкреслюється важливість формування логіко-структурного мислення у процесі вивчення інтегралу та роль інтегрування у створенні цілісного уявлення про математичний аналіз. У методичних розробках Н.А. Тарасенкової, Т.В. Бевз зазначено, що вивчення інтегралу повинно ґрунтуватися на застосуванні принципу поступового впровадження понять і використання задач прикладного характеру [3].

Незважаючи на наявність значного теоретичного і практичного напрацювання, у сучасній шкільній практиці все ще існує потреба у розробленні ефективних методичних стратегій і, як наслідок, потреба в методичних стратегіях для студентів.

Метою статті є формування навичок інтегрування функцій як для майбутніх учителів математики, так і для учнів профільних класів.

Методи дослідження. Система вправ, яка включає приклади, що сприяють опануванню теми «Невизначений інтеграл».

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо інтегрування з уведенням нової змінної. Цей метод є універсальним способом обчислення невизначених інтегралів, який дає змогу звести складний інтеграл до простішого. Навчання має починатися з таких прикладів, де доцільність заміни очевидна. Важливо показати, що підстановка змінної – це не просто механічна дія, а логічно обґрунтований крок. Слід також наголошувати на потребі заміни як змінної, так і диференціалу. До типових труднощів, які виникають в учнів, можна віднести такі: забувають про заміну диференціалу; не повертаються до початкової змінної; застосовують заміну механічно, без обґрунтування.

Поклавши $x = \varphi(t)$, де t – нова змінна і $\varphi(t)$ – неперервно диференційовна функція, будемо мати

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (1)$$

Функцію $\varphi(t)$ треба підібрати так, щоб права частина формули (1) мала більш зручний для інтегрування вигляд.

Приклад 1. Знайти

$$\int x\sqrt{x-1}dx.$$

Розв'язування. Покладемо $t = \sqrt{x-1}$, звідси $x = t^2 + 1$ і $dx = 2tdt$. Таким чином, проінтегрувавши інтеграл за змінною t , а потім в одержаній первісній повернувшись до змінної x , маємо

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1}dx &= \int (t^2+1)2tdt = 2 \int (t^2+1)t dt = \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} + C. \end{aligned}$$

У наступному інтегралі використаємо формулу інтегрування за частинами

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x), \quad (2)$$

де $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні функції.

Приклад 2. Знайти інтеграл

$$\int x \ln x dx.$$

Розв'язування. Позначимо $u(x)$ і $v(x)$ так, щоб одержаний інтеграл був простішим.

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Метод інтегрування за частинами є одним із ключових під час вивчення невизначених інтегралів. Найчастішими помилками є неправильний вибір методу інтегрування або неправильний вибір u та dv . Тому важливо зробити акцент, що за частинами інтегруються інтеграли виглядів:

$$1) \int (P_n(x) \cos \alpha x + Q_m(x) \sin \beta x) dx, \int P_n(x) e^{\alpha x} dx,$$

у яких $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени, α, β – числа і позначають через $u(x)$ – многочлени;

2) які містять логарифмічну функцію або обернені тригонометричні функції.

Розглянемо також приклади інтегрування найпростіших дробів, до яких відносять такі:

$$\frac{A}{(x-a)^\beta}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha},$$

де $A, M, N, \alpha, \beta, p, q$ – дійсні числа, для яких $q - \frac{p^2}{4} > 0$; α – натуральне число. Зупинимося на інтегруванні другого дробу. Для цього в чисельнику дробу додамо і віднімемо $\frac{Mp}{2}$, одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n} &= \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \\ &+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \\ &= \frac{M}{2} \int (x^2+px+q)^{-n} d(x^2+px+q) + \\ &+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{M(x^2 + px + q)^{-n+1}}{2(1-n)} + (N - \frac{Mp}{2}) \cdot \int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{\left((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})\right)^n}. \quad (3)$$

Під час інтегрування другого інтегралу розглянемо окремі випадки $n = 1$ і $n \neq 1$. При $n = 1$ маємо

$$\int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{(x + \frac{p}{2})^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

Для інтегрування другого інтеграла (3) при $n > 1$ вкажемо спосіб інтегрування інтеграла:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}. \quad (4)$$

Для цього зробимо перетворення і скористаємося інтегруванням за частинами:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^n} &= \left| \begin{array}{l} u = t \\ dv = \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^n} \\ du = dt \\ v = -\frac{1}{2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \left(-\frac{t}{2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \right) = \frac{(2n-3)I_{n-1}}{2(n-1)a^2} + \frac{t}{2(n-1)a^2(t^2 + a^2)^{n-1}}. \quad (5) \end{aligned}$$

Рекурентні співвідношення (5) використовують під час знаходження інтеграла (4).

Приклад 3. Знайти інтеграли:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}; \quad \text{б) } \int \frac{(x-1)dx}{x^2 - x - 1}; \\ \text{в) } \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}. \end{aligned}$$

Розв'язування. а) Інтеграл не містить у чисельнику змінної x , тому для інтегрування достатньо виділити повний квадрат:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4}x + \frac{25}{16}) + (\frac{7}{2} - \frac{25}{16})} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x - \frac{5}{4})}{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}} + C = \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4x - 5}{\sqrt{31}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \frac{(x-1)dx}{x^2 - x - 1} &= \int \frac{(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}}{x^2 - x - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2 - x - 1} - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 1| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 1| \cdot \\ &\cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}} \right| \right| + C. \end{aligned}$$

в) Виділивши у квадратному тричлені повний квадрат і скориставшись формулою (5), маємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} &= \int \frac{dx}{((x+1)^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} + \frac{x}{2(x^2 + 2x + 2)} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x}{2(x^2 + 2x + 2)}. \end{aligned}$$

У процесі підготовки вивчення учнями профільних класів та студентів до викладання методу невизначених коефіцієнтів, слід звернути увагу на системність подачі матеріалу. Варто розпочинати з повторення розкладу раціонального дробу на прості множники та способів розв'язування систем рівнянь; навчити розпізнавати структури дробів, до яких застосовується цей метод, та способам знаходження невідомих коефіцієнтів: підстановкою зручних значень змінної; порівнянням коефіцієнтів при відповідних степенях змінної.

Інтегрування раціональної функції після виділення цілої частини зводиться до інтегрування правильного дробу

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (6)$$

де $P(x)$, $Q(x)$ многочлени, у яких степінь многочлена $P(x)$ менша степеня знаменника $Q(x)$. Якщо

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_s)^{\alpha_s}, \quad (7)$$

тоді правильний дріб (6) можна розкласти на найпростіші дроби:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \\ &+ \frac{L_1}{x - a_s} + \frac{L_2}{(x - a_s)^2} + \dots + \frac{L_s}{(x - a_s)^{\alpha_s}} \quad (8) \end{aligned}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів із рівності (8) одержують рівність двох многочленів, а потім зрівнюють коефіцієнти при однакових степенях x (перший спосіб). Можна також скористатися рівністю многочленів за деяких значень x (другий спосіб).

Приклад 4. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{(x^2 - x + 2)dx}{x^4 - 5x^2 + 4}; \quad б) \int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Розв'язування.

а) Розкладемо на лінійні множники многочлен $x^4 - 5x^2 + 4 = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$. Представимо дріб у вигляді

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}. \quad (9)$$

Звідси

$$\begin{aligned} A(x+1)(x+2)(x-2) + B(x-1)(x+2)(x-2) + \\ + C(x-1)(x+1)(x-2) + \\ + D(x+1)(x-1)(x+2) = x^2 - x + 2, \end{aligned} \quad (10)$$

У разі коли всі корені знаменника різні, краще скористатися другим способом знаходження коефіцієнтів. Покладемо в (10) поступово $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$. Тоді одержимо:

$$B = \frac{2}{3}, \quad A = -\frac{1}{3}, \quad D = \frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}. \quad (11)$$

Підставивши (11) у (9), одержимо

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

Інтегруючи, одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2 - x + 2)dx}{x^4 - 5x^2 + 4} &= \frac{2}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{2}{3} \ln|x+2| + \\ &+ \frac{1}{3} \ln|x-2| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2} \right| + C. \end{aligned}$$

б) Представимо дріб у вигляді

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}. \quad (12)$$

Звідси

$$A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) = x. \quad (13)$$

Поклавши у (13) $x = -1$, $x = 1$, і, знайдемо

$$C = \frac{1}{2}, \quad A = \frac{1}{4}.$$

Для знаходження B зрівняємо у (13) коефіцієнти при x^2 , маємо

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}.$$

Рівність (12) прийме вигляд

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

Інтегруючи, одержимо

$$\int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Якщо многочлен $Q(x)$ має комплексні корені $a \pm ib$ кратності k то у розвиненні (8) додатково містяться найпростіші дробу вигляду

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{M_k x + N_k}{(x^2 + px + q)^k},$$

де $x^2 + px + q = (x - (a + bi))(x - (a - bi))$.

Приклад 5. Знайти інтеграл

$$\int \frac{(3x^2 + 5x + 12)dx}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)}.$$

Розв'язування. Представимо дріб у вигляді

$$\frac{3x^2 + 5x + 12}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}. \quad (14)$$

Звідси

$$(Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 + 3) = 3x^2 + 5x + 12. \quad (15)$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях у лівій і правій частинах рівності (15), знайдемо коефіцієнти

$$A = -\frac{5}{2}, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad C = \frac{5}{2}, \quad D = \frac{9}{2}.$$

Одержимо

$$\frac{3x^2 + 5x + 12}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} = -\frac{(5x + 3)}{2(x^2 + 3)} + \frac{(5x + 9)}{2(x^2 + 1)}.$$

Інтегруючи, одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x^2 + 5x + 12)dx}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} &= -\frac{5}{4} \int \frac{2x dx}{x^2 + 3} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 3} + \\ &+ \frac{5}{4} \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} + \frac{9}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= -\frac{5}{4} \ln(x^2 + 3) - \frac{\sqrt{3}}{2} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{9}{2} \arctg x + C. \end{aligned}$$

Висновки з дослідження і перспективи подальших розробок. Вивчення теми «Невизначений інтеграл» у профільних класах вимагає від учителя не лише ґрунтовної математичної підготовки, а й володіння методичними підходами, що сприяють формуванню в учнів глибокого розуміння сутності інтегрування. Представлені приклади виходять за межі типової шкільної програми. Це дає змогу активізувати пізнавальну діяльність учнів, формувати навички узагальнення, аналізу та вибору оптимального способу розв'язування задач. Підготовка майбутнього вчителя математики має включати глибоке методичне опрацювання теми інтегралу, аналіз типових помилок учнів, моделювання навчальних ситуацій та розроблення дидактичних матеріалів, адаптованих до різних рівнів навчальних досягнень. Запропоновані у статті приклади можуть бути корисними студентам для глибшого засвоєння основних методів інтегрування та стати основою для розроблення навчально-методичних матеріалів із математики у профільних класах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз : підручник. Київ : Вища школа, 2004. 535 с.
2. Самойленко А.М., Кожухівський В.Я. Курс математичного аналізу. Частина 1. Київ : Либідь, 2011. 478 с.
3. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Математика. 11 клас : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. Київ : Орion, 2019. 320 с.

REFERENCES

1. Shkil M.I. (2004). Matematichnyi analiz: Pidruchnyk [Mathematical Analysis: Textbook]. Kyiv: Vyshcha shkola.
2. Samoylenko A.M., Kozhukhivskiy, V.Ya. (2011). Kurs matematychnoho analyzu. Chastyna 1 [Course of Mathematical Analysis. Part 1]. Kyiv: Lybid.
3. Burda M.I., Tarasenkova N.A. (2019). Matematyka. 11 klas: Pidruchnyk dlia zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Profiliovaniy riven [Mathematics. Grade 11: Textbook for General Secondary Education Institutions. Advanced Level]. Kyiv: Orion.